Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 10

Abgabe am **10.01.2018**

Aufgabe 1: Bekannte Theoreme I

Die folgenden Sätze haben Sie für beliebige Dimension in der Vorlesung kennengelernt. Beweisen Sie sie in Dimension 2 mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet.

(a) **Bonnet-Myers**: Eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Riccikrümmung hat endliche Fundamentalgrupppe.

(b) **Synge**: Eine gerade-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung ist einfach zusammenhängend, falls sie orientierbar ist, und hat Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, falls nicht.

(c) **Cartan-Hadamard**: Eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung wird durch $\mathbb{R}^n$ überlagert.

Aufgabe 2: Bekannte Theoreme II

Die folgenden Aussagen sind in Dimension ≥ 3 Varianten von berühmten Sätze mit nicht ganz einfachem Beweis. Beweisen oder widerlegen Sie sie in Dimension 2 mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet.

(a) **Sphärensatz**: Eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $1/4 < K \leq 1$ ist diffeomorph zur Sphäre S^n.

(b) **Negative Riccikrümmung**: Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es eine vollständige Metrik mit negativer Riccikrümmung.

(c) **Gromov-Lawson**: Auf kompakten Mannigfaltigkeiten $M\#T^n$ mit Torus T^n als Summand gibt es keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung.

(d) **Positive Energie**: Wenn es auf $M = K\#\mathbb{R}^n$ mit kompaktem K eine Metrik gibt, die außerhalb einer kompakten Menge der euklidschen entspricht und überall Skalarkrümmung ≥ 0 hat, dann ist M bereits isometrisch zum eudlidschen Raum.