Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS17/18

Differentialgeometrie I

Blatt 1

Besprechung am **17.10.2017**

Aufgabe 1: Untermannigfaltigkeiten

Eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, sodass es zu jedem Punkt von M eine Umgebung U und eine differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^k$ gibt mit $f^{-1}(0) = M \cap U$ und $\operatorname{rang} \mathrm{d}f|_M = k$ (d.h. 0 ist ein *regulärer Wert*). Zeigen Sie, dass dies auch eine Mannigfaltigkeit im abstrakten Sinne definiert.

Aufgabe 2: Tangentialraum

Es gibt folgende Möglichkeiten, den Tangentialraum in einem Punkt p einer Mannigfaltigkeit M^n zu definieren:

(i) Ein geometrisch definierter Tangentialvektor ist eine Äquivalenzklasse von differenzierbaren Kurven durch p, wobei zwei Kurven äquivalent heißen sollen, wenn sie bezüglich einer (und dann jeder) Karte dieselbe Ableitung in p besitzen.

(ii) Ein algebraische definierter Tangentialvektor X ist eine Derivation auf dem Raum der Keime von Funktionen bei p, d. h. eine lineare Abbildung, die $X.fg = (X.f)g + f(X.g)$ an der Stelle p erfüllt.

(iii) Ein physikalisch definierter Tangentialvektor ordnet jeder Karte (U, φ) um p einen Vektor $v^\varphi \in \mathbb{R}^n$ zu, der sich beim Wechsel zu einer anderen Karte (V, ψ) wie

$$v^\psi = \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} v^\varphi$$

verhält.

Zeigen Sie die Äquivalenz dieser Definitionen, indem sie geeignete Abbildungen angeben. Wie lässt sich eine Vektorraumstruktur auf dem Tangentialraum definieren?

Aufgabe 3: Differential

Definieren Sie das Differential einer differenzierbaren Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten mit einer Tangentialraumdefinition Ihrer Wahl und beweisen Sie die Kettenregel.

Aufgabe 4: Tangentialbündel

Rufen Sie sich die Definition eines Vektorbündels in Erinnerung (z. B. aus Wikipedia). Wie kann man das Tangentialbündel (die Vereinigung aller Tangentialräume) mit der Struktur eines Vektorbündels versehen?