Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 7

Besprechung am **11.12.2018**

— Die Übung am 4.12. muss leider ausfallen! —

Aufgabe 1: Feldgleichungen und Einsteinmannigfaltigkeiten

(M, g) sei eine zusammenhängende vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit. Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$G + \Lambda g := \mathrm{Ric} + (\Lambda - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal})g = \kappa T$$

mit Konstanten Λ und $\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{div}(G + \Lambda g) = 0$. (Erinnerung: für einen symmetrischen (0,2)-Tensor X ist die Divergenz $\mathrm{div}\, X(V)$ als Spur der Bilinearform $(\nabla . X)(\cdot, V)$ definiert. Benutzen Sie die zweite Bianchi-Identität $(\nabla_W R)(X, Y) + (\nabla_Y R)(W, X) + (\nabla_X R)(Y, W) = 0$.)

(b) Im Vakuumfall $T = 0$ sind die Feldgleichungen äquivalent zu $\mathrm{Ric} = \Lambda g$. Allgemein bezeichnet man eine Mannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft als *Einsteinmannigfaltigkeit.*

(c) $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{d}f$ für $f \in C^\infty(M)$.

(d) Wenn $\mathrm{Ric} = fg$ für ein $f \in C^\infty(M)$, dann ist M bereits eine Einsteinmannigfaltigkeit.

(e) Wenn für jedes $p \in M$ die Schnittkrümmung Sec auf den nichtdegenerierten Ebenen in T_pM konstant ist, dann ist Sec schon auf ganz M konstant.

Aufgabe 2: Bertotti-Robinson-Metrik

Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times S^2$ ist die Metrik

$$g_{\mathrm{BR}} = -\lambda^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda^2 + \rho^2 g_{S^2}$$

gegeben, wobei g_{S^2} die runde Metrik und $\rho > 0$ eine Konstante ist. Physikalisch beschreibt sie ein Universum mit einem uniformen magnetischen Feld.

(a) Zeigen Sie, dass durch $u = t - \rho/\lambda$ und $v = t + \rho/\lambda$ Nullkoordinaten definiert werden.

(b) Ersetzen Sie t durch eine der Nullkoordinaten, um zu sehen, dass es sich bei $\lambda = 0$ nur um eine Koordinatensingularität handelt

(c) Benutzen sie die neuen Koordinaten $U = \arctan u$ und $V = \arctan v$, um das Penrosediagramm der maximalen Erweiterung des Bertotti-Robinson-Universums zu erhalten.