Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 6

Besprechung am **27.11.2018**

Aufgabe 1: Hyperboloid im Minkowskiraum

Mit $\mathbb{R}^{2,1}$ bezeichnen wir den Minkowskiraum mit Metrik $g = -\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2$. Zeigen Sie, dass eine Komponente des zweischaligen Hyperboloids

$$\{x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid g(x,x) = -1, x_0 > 0\}$$

mit induzierter *Riemannscher* Metrik isometrisch zur hyperbolischen Ebene ist.
Allgemeiner erhält man den *n-dimensionalen hyperbolischen Raum* als Hyperboloid im $\mathbb{R}^{n,1}$.

Aufgabe 2: Kovariante Ableitung von Tensorfeldern

Eine kovariante Ableitung ∇ auf TM lässt sich auf beliebige Tensoren fortsetzen, indem man $\nabla_X(Y \otimes Z) = \nabla_X Y \otimes Z + Y \otimes \nabla_X Z$ und $(\nabla_X \alpha)(Y) = X.\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y)$ für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ fordert.

(a) Wenn man dieses ∇ auf den Tensor $\nabla Z \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ anwendet, erhält man die *zweite kovariante Ableitung* $\nabla^2 Z := \nabla\nabla Z \in \Gamma(TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla^2_{X,Y} Z := (\nabla^2 Z)(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z\ .$$

(b) Zeigen Sie für den Krümmungstensor R einer *beliebigen* kovarianten Ableitung ∇ mit Torsion $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ die Formel

$$R(X,Y)Z = \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z + \nabla_{T(X,Y)} Z\ .$$

Aufgabe 3: Feldgleichungen und Einsteinmannigfaltigkeiten

(M, g) sei eine zusammenhängende vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit. Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$G + \Lambda g := \mathrm{Ric} + (\Lambda - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal})g = \kappa T$$

mit Konstanten Λ und $\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{div}(G + \Lambda g) = 0$. (Erinnerung: für einen symmetrischen (0,2)-Tensor X ist die Divergenz $\mathrm{div}\, X(V)$ als Spur der Bilinearform $(\nabla.X)(\cdot, V)$ definiert. Benutzen Sie die zweite Bianchi-Identität $(\nabla_W R)(X,Y) + (\nabla_Y R)(W,X) + (\nabla_X R)(Y,W) = 0$.)

(b) Im Vakuumfall $T = 0$ sind die Feldgleichungen äquivalent zu $\mathrm{Ric} = \Lambda g$. Allgemein bezeichnet man eine Mannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft als *Einsteinmannigfaltigkeit.*

(c) $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{d}f$ für $f \in C^\infty(M)$.

(d) Wenn $\mathrm{Ric} = fg$ für ein $f \in C^\infty(M)$, dann ist M bereits eine Einsteinmannigfaltigkeit.

(e) Wenn für jedes $p \in M$ die Schnittkrümmung Sec auf den nichtdegenerierten Ebenen in T_pM konstant ist, dann ist Sec schon auf ganz M konstant.