Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper
WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 5

Besprechung am **20.11.2018**

Aufgabe 1: Fundamentalgruppe

Erinnern Sie sich an die Fundamentalgruppe (z. B. mit Hatcher: *Algebraic Topology*, Abschnitt 1.1). Welche der folgenden Aussagen sind für einen topologischen Raum X wahr?

- ☐ $\pi_1(X)$ ist unabhängig vom Basispunkt definiert.
- ☐ Gibt es eine Kurve, die x_0 und x_1 verbindet, so sind $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph.
- ☐ In Mannigfaltigkeiten genügt es, differenzierbare Kurven zu betrachten.
- ☐ In Mannigfaltigkeiten genügt es, stückweise differenzierbare Kurven zu betrachten.
- ☐ $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
- ☐ $\pi_1(S^n) \cong \mathbb{Z}^n$
- ☐ $\pi_1((S^1)^n) \cong \mathbb{Z}^n$

Aufgabe 2: Überlagerungen

Eine *Überlagerung* differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $\widetilde{M}$, M ist eine surjektive Abbildung $p : \widetilde{M} \to M$, die ein lokaler Diffeomorphismus ist, d. h. $\mathrm{d}p$ ist in jedem Punkt invertierbar. Zeigen Sie folgende Hochhebeeigenschaften:

(a) Ist X zusammenhängend, $f : X \to M$ eine stetige Abbildung und $\tilde{f} : X \to \widetilde{M}$ ein Lift von f (d. h. $p \circ \tilde{f} = f$), so ist $\tilde{f}$ durch den Wert $\tilde{f}(x)$ an einer Stelle $x \in X$ schon eindeutig bestimmt.

(b) Zu einer Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ gibt es genau einen Lift $\tilde{\gamma}$ mit vorgegebenem Startpunkt $\tilde{\gamma}(a) = y \in p^{-1}(\gamma(a))$.

Aufgabe 3: Universelle Überlagerung und Decktransformationen

Eine *Gruppenwirkung* einer Gruppe G auf einen Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus von G in die Homöomorphismengruppe von X.

(a) Eine Überlagerung $\widetilde{M} \to M$ heißt *universell*, falls $\widetilde{M}$ einfach zusammenhängend ist. Konstruieren Sie eine universelle Überlagerung einer Mannigfaltigkeit M (*Tipp*: Homotopieklassen von Wegen) und zeigen Sie, dass diese bis auf Diffeomorphismen eindeutig bestimmt ist.

(b) Sei $p : \widetilde{M} \to M$ eine Überlagerung. Ein Repräsentant $\gamma : [0,1] \to M$ von $[\gamma] \in \pi_1(M,x)$ hat zu gegebenem Startpunkt in der Faser $M_x = p^{-1}(x)$ einen eindeutigen Lift mit Endpunkt in M_x, induziert also eine Abbildung $M_x \to M_x$.

Zeigen Sie, dass man so eine Gruppenwirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(M,x)$ auf die Faser M_x erhält.

(c) Zeigen Sie, dass im Fall der universellen Überlagerung diese Gruppenwirkung *frei* ist. (Eine Gruppenwirkung von G auf X heißt frei, wenn jedes Element von X nur vom neutralen Element der Gruppe festgehalten wird.)