Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 4

Besprechung am **13.11.2018**

Aufgabe 1: Hyperbolische Ebene

Die *Poincaré-Halbebene* ist der Raum $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit Metrik

$$g = \frac{1}{y^2} g_{\text{eukl}} \ .$$

(a) Finden Sie hinreichend viele Isometrien, um jeden Punkt auf einen beliebigen anderen abbilden zu können (also eine transitiv wirkende Untergruppe der Isometriegruppe).

(b) Finden Sie eine Isometrie, die genau die Punkte im Abstand 1 vom Ursprung fixiert.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Isometrien alle Geodäten.

Aufgabe 2: Sturmscher Vergleichssatz

Beweisen Sie den *Sturmschen Vergleichssatz*:
Seien $x_1, x_2 : [0, T] \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$x_i''(t) + p_i(t)x_i(t) = 0$$

mit Anfangsbedingungen $x_i(0) = 0$ und $x_1'(0) = x_2'(0) > 0$ für stetige Funktionen $p_1, p_2 : [0, T] \to \mathbb{R}$. Wenn $p_1(t) \leq p_2(t)$ auf $[0, T]$ und $x_2(t) > 0$ auf $(0, T]$, dann gilt $x_1(t) \geq x_2(t)$ auf $[0, T]$.

Aufgabe 3: Überlagerung mit endlichem Durchmesser

(a) Zeigen Sie: Eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ist genau dann kompakt, wenn sie endlichen Durchmesser hat.

(b) Rufen Sie sich die zentralen Resultate der Überlagerungstheorie in Erinnerung und begründen Sie folgende Aussage:

Ist die universelle Überlagerung $\widetilde{M}$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M kompakt, so ist die Fundamentalgruppe von M endlich.