Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 3

Besprechung am **6.11.2018**

Aufgabe 1: Krümmungstensor

Der Riemannsche Krümmungstensor einer (Semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist definiert als

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \text{für } X, Y, Z \in \Gamma(TM)\ .$$

Zeigen Sie:

(a) R ist wirklich ein (1,3)-Tensor, d. h. C^∞-linear in allen drei Komponenten,

(b) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ und

(c) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$.

Aufgabe 2: Schnitt- und Riccikrümmung

(a) Ist die von zwei Vektoren u, v aufgespannte Ebene E im Tangentialraum T_xM eines Punktes x einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) nichtdegeneriert, d. h. $g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2 \neq 0$, so ist die Schnittkrümmung definiert als

$$\operatorname{Sec}(x, E) = \frac{g(R(u,v)v, u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}\ .$$

Vergewissern Sie sich, dass die Definition nicht von der Wahl der Vektoren abhängt, die den Unterraum aufspannen, und dass sich R wieder vollständig aus Sec zurückgewinnen lässt.

(b) Die Ricci-Krümmung ist gegeben als $\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{tr} R(\cdot, X)Y = R^i{}_{kij} X^j Y^k$, wobei man den Krümmungstensor in lokalen Koordinaten üblicherweise als $R^k{}_{\ell ij} Z^\ell X^i Y^j = (R(X,Y)Z)^k$ schreibt. Zeigen Sie, dass Ric ein symmetrischer Tensor ist.

(c) Drücken Sie die Ricci-Krümmung $\operatorname{Ric}(u,u)$ eines Vektors u in einer *Riemannschen* Mannigfaltigkeit als Mittelwert von Schnittkrümmungen aus.