Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper

WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 2

Besprechung am **30.10.2018**

Aufgabe 1: Lichtkegel und konforme Invarianz

Zeigen Sie die folgende Aussage der linearen Algebra, aus der sich folgern lässt, dass die Kausalitätsstruktur der Raumzeit schon die konforme Klasse der Metrik bestimmt:
Sind g und h zwei nichtdefinite, nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, für die

$$g(v,v) = 0 \Leftrightarrow h(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$$

gilt, so ist $g = \lambda \cdot h$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2: Lie-Ableitung

Die Lie-Klammer von zwei Vektorfeldern $X, Y \in \Gamma(TM)$ ist definiert über die Wirkung als Derivation auf $f \in C^\infty(M)$:

$$[X,Y].f := X.Y.f - Y.X.f \ .$$

Zeigen Sie, dass $[X,Y]$ tatsächlich eine Derivation (also ein Vektorfeld) ist, d. h. die Leibniz-Regel erfüllt, und beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $[\cdot,\cdot]$ ist $\mathbb{R}$-linear in beiden Komponenten,

(b) $[X,Y] = -[Y,X]$,

(c) es gilt die Jacobi-Identität $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$,

(d) $[X,fY] = (X.f)Y + f[X,Y]$ für $f \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 3: Levi-Civita-Zusammenhang

Beweisen Sie, dass es auf jeder Pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) (d. h. g ist nicht ausgeartet) genau einen torsionsfreien ($\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$) und metrischen ($\nabla_X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$) Zusammenhang gibt. Addieren und subtrahieren Sie dazu Permutationen der zweiten Formel, um einen Ausdruck für $g(\nabla_X Y, Z)$ zu erhalten, und zeigen Sie, dass der dadurch definierte Zusammenhang die gewünschten Eigenschaften besitzt.
Wenn Sie wollen, können Sie diese Aufgabe auch in Koordinaten unter Verwendung der Christoffelsymbole Γ^k_{ij} lösen.

Aufgabe 4: Paralleltransport

Der *Paralleltransport* bezüglich eines Zusammenhangs ∇ entlang einer glatten Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ ist die Abbildung $\Gamma_\gamma^\nabla : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$, die einem Vektor $v_0 \in T_{\gamma(a)}M$ den Vektor $v(b)$ zuordnet, wobei v die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma(t)} v(t) = 0 \quad \forall\, t \in [a, b] \\ v(a) = v_0 \end{cases}$$

ist.

(a) Warum ist $\nabla_{\dot\gamma(t)} v(t)$ wohldefiniert?

(b) Wie kann man aus dem Paralleltransport den Zusammenhang wiedergewinnen?

(c) Welche Bedingungen muss ein für alle Kurven axiomatisch gegebener Paralleltransport erfüllen, damit er einen eindeutigen Zusammenhang induziert?

(d) Was muss dieser Paralleltransport erfüllen, damit der induzierte Zusammenhang metrisch bzw. torsionsfrei wird?