Prof. Dr. Joachim Lohkamp
Matthias Kemper WWU Münster
WS18/19

Allgemeine Relativitätstheorie

Blatt 1

Zur Bearbeitung in der ersten Übung

Aufgabe 1: Zusammenhang

(a) Was ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit?

(b) Durch welche Eigenschaften ist der Levi-Civita-Zusammenhang eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2: Geodäten und Hyperbolische Ebene

(a) Was ist eine Geodäte in der Riemannschen Geometrie?

(b) Zeigen Sie, dass eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, die Fixpunktmenge einer Isometrie ist, die Geodätengleichung erfüllt.

(c) Bestimmen Sie sämtliche Geodäten der hyperbolischen Ebene in einem Modell ihrer Wahl.

Aufgabe 3: Jacobifelder

Wie lautet die Jacobifeldgleichung und wie lässt sie sich motivieren? Geben Sie alle Jacobifelder von Geodäten im flachen $\mathbb{R}^n$ an.

Aufgabe 4: Krümmungen

(a) Ist die von zwei Vektoren u, v aufgespannte Ebene E im Tangentialraum T_xM eines Punktes x einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) nichtdegeneriert, d. h. $g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2 \neq 0$, so ist die Schnittkrümmung definiert als

$$\mathrm{Sec}(x, E) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2} \ .$$

Dabei benutzen wir für den Krümmungstensor die Konvention

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \ .$$

Vergewissern Sie sich, dass die Definition nicht von der Wahl der Vektoren abhängt, die den Unterraum aufspannen, und dass sich R wieder vollständig aus Sec zurückgewinnen lässt.

(b) Finden Sie eine Darstellung des Krümmungstensors in lokalen Koordinaten durch Christoffelsymbole (ohne ihre Ableitungen) und zweite Ableitungen der Metrik. Hieran kann man die algebraischen Symmetrien des Krümmungstensors direkt ablesen.

Zur Erinnerung: Die Christoffelsymbole eines Zusammenhangs ∇ sind in lokalen Koordinaten als $\Gamma_{ij}^k = (\nabla_{\partial_i}\partial_j)^k$ definiert. Für den Levi-Civita-Zusammenhang gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{i\ell} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{j\ell} - \frac{\partial}{\partial x^\ell} g_{ij} \right)$$

Hier ist $g^{k\ell}$ das Inverse des metrischen Tensors, d. h. $g^{k\ell} g_{\ell j} = \delta_j^k$. Die Torsionsfreiheit von ∇ zeigt sich als $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

(c) Die Ricci-Krümmung ist gegeben als $\mathrm{Ric}(X,Y) = \operatorname{tr} R(\cdot, X)Y = R^i{}_{kij} X^j Y^k$, wobei man den Krümmungstensor in lokalen Koordinaten üblicherweise als $R^k{}_{\ell ij} Z^\ell X^i Y^j = (R(X,Y)Z)^k$ schreibt. Zeigen Sie, dass Ric ein symmetrischer Tensor ist.

Aufgabe 5: Musikalische Isomorphismen

Mit Hilfe einer Riemannschen Metrik kann man Tangentialbündel und Kotangentialbündel (und damit Vektorfelder und 1-Formen) kanonisch miteinander identifizieren (»Herauf- und Herunterziehen von Indizes«).

(a) Wie geht das?

(b) Damit das funktioniert, muss die symmetrische Bilinearform auf jedem Tangentialraum nicht notwendigerweise positiv definit sein. Was ist die allgemeinste hinreichende Bedingung?

Aufgabe 6: Lichtkegel und konforme Invarianz

Zeigen Sie die folgende Aussage der linearen Algebra, aus der sich folgern lässt, dass die Kausalitätsstruktur der Raumzeit schon die konforme Klasse der Metrik bestimmt:
Sind g und h zwei nichtdefinite, nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, für die

$$g(v,v) = 0 \Leftrightarrow h(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$$

gilt, so ist $g = \lambda \cdot h$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.