Blatt 6

Aufgabe 1: Hodge-Stern, Laplace-Operator, Bochner-Methode

Auf einer orientierten Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) vom Index s (Anzahl der negativen Eigenwerte von g) mit Volumenform vol ist der *Hodge-Stern* $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ definiert durch

$$\omega \wedge \star\eta = \langle \omega, \eta \rangle \,\mathrm{vol} \tag{1}$$

für $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das durch g auf k-Formen induzierte punktweise Skalarprodukt bezeichnet. Außerdem definieren wir die *Koableitung* $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ als

$$\delta = (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d} \star \ .$$

Alle Tensoren in dieser Aufgabe sollen kompakten Träger in $M \setminus \partial M$ haben (oder hinreichend schnell abfallen).

(a) Zeigen Sie:

  (i) $\star$ ist durch (1) eindeutig definiert.

  (ii) $\star\star = (-1)^{(n-k)k+s}$, insbesondere ist $\star$ invertierbar.

  (iii) Für hinreichend stark abfallende k-Formen ist δ ajdungiert zu d bzgl. des L^2-Skalarprodukts $\langle\!\langle \omega, \eta \rangle\!\rangle = \int_M \omega \wedge \star\eta$, d. h. $\langle\!\langle \mathrm{d}\omega, \eta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \omega, \delta\eta \rangle\!\rangle$.

(b) Der *Laplace-de-Rham-Operator* auf k-Formen ist definiert als $-\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$. Beweisen Sie:

  (i) Es gilt die Cartansche Formel $\mathcal{L}_X\omega = (\mathrm{d}\iota_X + \iota_X\mathrm{d})\omega$ auf Differentialformen, wobei $\iota_X\omega = \omega(X, \cdot)$.

  (ii) Die Divergenz $\operatorname{div} X = \operatorname{tr} \nabla X$ eines Vektorfeldes erfüllt $\mathcal{L}_X \mathrm{vol} = (\operatorname{div} X) \,\mathrm{vol}$.

  (iii) $\operatorname{div} X = -\delta X^\flat$ und insbesondere ist $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ der herkömmliche Laplace-Operator auf Funktionen.

  (iv) Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind alle Eigenwerte der komplex-linearen Fortsetzung von $-\Delta$ auf komplexwertige k-Formen reell und nichtnegativ.

(c) Beweisen Sie die *Bochner-Weitzenböck-Formel* für 1-Formen

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + \mathrm{Ric}(\omega^\sharp, \cdot) \ .$$

Dabei ist ∇^* das Adjungierte zum Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf (0,2)-Tensoren bezüglich der von g induzierten L^2-Skalarprodukte. Sie können z. B. in einem orthonormalen Rahmen oder lokalen Koordinaten rechnen.

(d) Folgern Sie daraus: Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit positiver Ricci-Krümmung existieren keine harmonischen ($\Delta\omega = 0$) 1-Formen. Hodge-Theorie besagt, dass dies äquivalent zum Verschwinden der ersten de-Rham-Kohomologie $H^1(M)$ ist.