Allgemeine Relativitätstheorie
WWU Münster, Sommersemester 2016
Prof. Dr. Joachim Lohkamp / Matthias Kemper
Besprechung am **01.06.2016 / 08.06.2016**

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Blatt 3

Aufgabe 1: Bertotti-Robinson-Metrik

Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times S^2$ ist die Metrik

$$g_{\mathrm{BR}} = \lambda^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{R^2}{\lambda^2} \mathrm{d}\lambda^2 - R^2 g_{S^2}$$

gegeben, wobei g_{S^2} die runde Metrik und $R > 0$ eine Konstante ist. Physikalisch beschreibt sie ein Universum mit einem uniformen magnetischen Feld.

(a) Zeigen Sie, dass durch $u_1 = t + R/\lambda$ und $u_2 = t - R/\lambda$ Nullkoordinaten definiert werden.

(b) Ersetzen Sie t durch eine der Nullkoordinaten, um zu sehen, dass es sich bei $\lambda = 0$ nur um eine Koordinatensingularität handelt

(c) Benutzen sie die neuen Koordinaten $v_1 = \tan^{-1} u_1$ und $v_2 = -\cot^{-1} u_2$, um das Penrosediagramm der maximalen Erweiterung des Bertotti-Robinson-Universums zu erhalten.

Aufgabe 2: Killing-Vektorfelder I

Ein Vektorfeld X auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt *Killing-Vektorfeld*, wenn

$$\mathcal{L}_X g = 0 \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Bedingung äquivalent ist zu

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \quad \text{für alle Vektorfelder } Y,\, Z$$

bzw. $X_{i;j} + X_{j;i} = 0$ in Koordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass der Fluss von X, sofern existent, eine Isometrie ist, und umgekehrt jede Einparametergruppe von Isometrien von einem Killing-Vektorfeld erzeugt wird.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass die Killing-Vektorfelder mit dem Kommutator von Vektorfeldern eine Lie-Algebra bilden. Für vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist dies tatsächlich die Lie-Algebra der Isometriegruppe.

(d) Eine Raumzeit M heißt *statisch*, wenn es auf ihr eine glatte skalarwertige Funktion f gibt, sodass $\operatorname{grad} f$ ein zeitartiges Killing-Vektorfeld ist. Zeigen Sie, dass sich M dann als semi-Riemannsches Produkt schreiben lässt.

(e) Geben Sie Killing-Vektorfelder für den Minkowski-Raum an.

Aufgabe 3: Killing-Vektorfelder II

(a) X sei ein Killing-Vektorfeld, Y und Z beliebige Vektorfelder. Benutzen Sie die algebraische Bianchi-Identität, um zu zeigen, dass

$$\nabla^2_{Y,Z} X = R(Y, X) Z \ ,$$

wobei die zweite kovariante Ableitung durch $\nabla^2_{Y,Z} = \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_{\nabla_Y Z}$ gegeben ist.

(b) Folgern Sie daraus, dass ein Killing-Vektorfeld für jede Geodäte ein Jacobi-Vektorfeld ist. (Das sollte aus den Eigenschaften von Isometrien ohnehin klar sein.)