Allgemeine Relativitätstheorie
WWU Münster, Sommersemester 2016
Prof. Dr. Joachim Lohkamp / Matthias Kemper
Besprechung am **25.05.2016**

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Blatt 2

Aufgabe 1: Viermannigfaltigkeiten

Zeigen Sie:

(a) Die Euler-Charakteristik einer einfach zusammenhängenden kompakten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ist mindestens 2.
Tipp: Poincaré-Dualität.

(b) Es gibt keine einfach zusammenhängende kompakte vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit.

Aufgabe 2: Feldgleichungen und Einsteinmannigfaltigkeiten

(M, g) sei eine zusammenhängende vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit. Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$G + \Lambda g := \mathrm{Ric} + (\Lambda - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal})g = \kappa T$$

mit Konstanten Λ und $\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div}(G + \Lambda g) = 0$. (Erinnerung: für einen symmetrischen (0,2)-Tensor X ist die Divergenz als $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}_{12} \nabla X$ definiert)

(b) Im Vakuumfall $T = 0$ sind die Feldgleichungen äquivalent zu $\mathrm{Ric} = \Lambda g$. Allgemein bezeichnet man eine Mannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft als *Einsteinmannigfaltigkeit*.

(c) $\operatorname{div}(fg) = \mathrm{d}f$ für $f \in C^\infty(M)$.

(d) Wenn $\mathrm{Ric} = fg$ für ein $f \in C^\infty(M)$, dann ist M bereits eine Einsteinmannigfaltigkeit.

(e) Wenn für jedes $p \in M$ die Schnittkrümmung Sec auf den nichtdegenerierten Ebenen in T_pM konstant ist, dann ist Sec schon auf ganz M konstant.

Aufgabe 3: Gödel-Universum

Lesen Sie Abschnitt 5.7 (S. 168-170) in *The Large Scale Structure of Space-Time* von Hawking und Ellis. Welche Symmetrien besitzt das Gödel-Universum? Warum ist es kein physikalisch sinnvolles Modell?

Aufgabe 4: Rakete

Eine kleine Rakete mit einer sehr präzisen Uhr an Bord wird am 25.05.2016 um 20:50 Uhr auf dem Prinzipalmarkt gestartet und soll sich wieder dort befinden, wenn die Türmerin der Lambertikirche um 21:00 Uhr in ihr Horn bläst. Wie sollte sie fliegen, damit für die Borduhr möglichst viel Zeit vergeht?