Blatt 1

Aufgabe 1: Lorentzgruppe

(a) Wir versehen die zweidimensionale Ebene mit einem linearen Koordinatensystem (t, x) (»Laborsystem«) und suchen das Koordinatensystem (t_v, x_v), das für einen Beobachter, der sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt, ruht. Dazu nehmen wir einen linearen Zusammenhang an: Es gelte $(t_v, x_v)^\top = \Lambda_v(t, x)^\top$ mit einer Matrix Λ_v. Überlegen Sie sich physikalisch sinnvolle Forderungen an die Λ_v einschließlich des Relativitätsprinzips $\Lambda_v^{-1} = \Lambda_{-v}$ und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit $(x = ct \Rightarrow x' = ct')$ und finden sie die eindeutige damit vereinbare Form der Λ_v. Was erhält man für $c \to \infty$?

(b) Welche Länge hat ein im Laborsystem ruhender Stab der Länge L für einen Beobachter, der sich mit Geschwindigkeit v bewegt?

(c) Wie viel Zeit vergeht für den bewegten Beobachter zwischen den Punkten mit Koordinaten $(0, 0)$ und $(T, 0)$ im Laborsystem?

(d) Die Parametrisierung der *Lorentz-Boosts* Λ_v durch die Geschwindigkeit v ist sehr umständlich. Finden Sie mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen eine neue Parametrisierung durch die *Rapidität* θ, sodass $\theta \mapsto \Lambda_\theta$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +) \to GL_2(\mathbb{R})$ wird.

(e) Zeigen Sie, dass die Bilinearform $g = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$ invariant unter Lorentz-Boosts ist.

(f) Die spezielle Relativitätstheorie wird bestimmt durch die Lorentzgruppe $O(1, 3)$ der 4×4-Matrizen, die die Bilinearform $g = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ invariant lassen. Geben Sie Erzeuger dieser Gruppe an.

Aufgabe 2: Krümmungen

(a) Ist die von zwei Vektoren u, v aufgespannte Ebene E im Tangentialraum T_xM eines Punktes x einer Lorentz-Mannigfaltigkeit M nichtdegeneriert, d. h. $g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2 \neq 0$, so ist die Schnittkrümmung definiert als

$$\mathrm{Sec}(x, E) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2} \ .$$

Dabei benutzen wir für den Krümmungstensor die Konvention

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \ .$$

Vergewissern Sie sich, dass die Definition nicht von der Wahl der Vektoren abhängt, die den Unterraum aufspannen, und dass sich R wieder vollständig aus Sec zurückgewinnen lässt.

(b) Berechnen oder finden Sie eine Darstellung des Krümmungstensors in lokalen Koordinaten durch Christoffelsymbole (ohne ihre Ableitungen) und zweite Ableitungen der Metrik. Hieran kann man die algebraischen Symmetrien des Krümmungstensors direkt ablesen.

(c) Die Ricci-Krümmung ist gegeben als $\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}\, R(X, \cdot)Y = R^j_{ijk} X^i Y^k$. Machen Sie sich klar, dass Ric ein symmetrischer Tensor ist.

(d) Drücken Sie die Ricci-Krümmung $\mathrm{Ric}(u,u)$ für einen nicht lichtartigen Vektor u als Mittelwert von Schnittkrümmungen aus. Unterscheiden Sie dabei, ob u raum- oder zeitartig ist und beachten Sie bei Rechnungen mit einer Orthonormalbasis $(e_i)_i$, dass in den Spuren ein Faktor $g(e_i, e_i)$ auftauchen kann.

(e) Benutzen Sie (b) und die Taylorentwicklung, um zu zeigen, dass in Normalkoordinaten (x^i) um p

$$g_{ij}(x) = \eta_{ij} - \frac{1}{3} R_{kilj}(0) x^k x^l + \mathcal{O}(|x|^3) \ ,$$

wobei η die Minkowski-Metrik ist und $R_{kilj} = g(R(\partial_k, \partial_i)\partial_l, \partial_j)$.

(f) Folgern Sie daraus eine anschauliche Interpretation der Skalarkrümmung einer *Riemannschen* Mannigfaltigkeit der Dimension n über das Volumenwachstum von Kugeln:

$$\mathrm{Vol}_g(B_r(p)) = \left(1 - \frac{n}{6}\,\mathrm{Scal}(p) \cdot r^2 + \mathcal{O}(r^3)\right) \mathrm{Vol}_{\mathrm{eukl}}(B_r(0)) \ .$$

Aufgabe 3: Lichtkegel und konforme Invarianz

Zeigen Sie die folgende Aussage der linearen Algebra, aus der sich folgern lässt, dass die Kausalitätsstruktur der Raumzeit schon die konforme Klasse der Metrik bestimmt:
Sind g und h zwei nichtdefinite nichtentartete symmetrische Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V, für die

$$g(v,v) = 0 \Leftrightarrow h(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$$

gilt, so ist $g = \lambda \cdot h$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4: Existenz von Lorentzmetriken

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für eine unberandete Mannigfaltigkeit M:

(i) Auf M existiert ein nirgends verschwindendes Tangentialvektorfeld.

(ii) Auf M existiert eine zeitorientierbare Lorentzmetrik.

(iii) Auf M existiert eine Lorentzmetrik.

(iv) Entweder ist M nicht kompakt oder M ist kompakt und die Eulercharakteristik $\chi(M)$ verschwindet.

Hinweis: (i)$\Leftrightarrow$(ii) lässt sich einfach konstruieren, für (iii)$\Rightarrow$(iv) betrachtet man die zeitorientierbare Überlagerung und benutzt dann den Schritt (ii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iv). (i)$\Leftrightarrow$(iv) kann man sich aus Büchern zur Differentialtopologie zusammensuchen, z. B. *Hirsch*: Differential Topology, Abschnitt 5.2, oder mit Hilfe von Morsetheorie überlegen.