Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WiSe 19/20
Übungsblatt 9

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 10.12.19, 8:15 Uhr.

1. Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ seien für $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ und $w = (w_1, w_2, w_3)^T \in V$ die Sesquilinearformen $\Phi, \Psi : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(v,w) = v^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot w, \quad \Psi(v,w) = w_1(3v_1 + 3v_3 - v_2) + w_2(v_2 - v_1) + 4w_3v_3$$

Sind Φ und Ψ Skalarprodukte? (4 Punkte)

2. Sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass aus A positiv definit schon $a_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ folgt. Gilt auch die Umkehrung der Aussage? Begründen Sie ihre Antwort. (4 Punkte)

3. Betrachten Sie die folgenden geometrischen Objekte im $\mathbb{R}^3$ und beschreiben Sie deren Lagebeziehungen zueinander.

$$E_1 = \{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} | r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$E_2 = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 5\}$$

$$g = \{x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort und fertigen Sie eine Skizze an. (4 Punkte)

4. **Nikolausaufgabe**
Seien $P = (P_1, P_2)^T, Q = (Q_1, Q_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Der orientierte Flächeninhalt eines Dreieckes mit den Eckpunkten $0, P$ und Q ist gegeben durch die Formel

$$F_{0,P,Q} = \frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie eine Formel für Dreiecke mit beliebigen Eckpunkten $P, Q, T \in \mathbb{R}^2$. (Tipp: Es gilt $F_{T,P,Q} = F_{T-T,P-T,Q-T}$)
   (b) Betrachten Sie die Punkte $P_1 = (-3,0)^T, P_2 = (-3,-3)^T, P_3 = (0,-4)^T, P_4 = (4,0)^T, P_5 = (3,3)^T$ und $P_6 = (-1,2)^T$ im $\mathbb{R}^2$.

Bitte wenden

Bestimmen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks mit den Eckpunkten P_1, P_3, P_5 und des Dreiecks mit den Eckpunkten P_2, P_4, P_6. Zeichnen Sie beide Dreiecke. Welche Figur ergibt sich?

(*) Stellen sie die Formel für den Flächeninhalt eines Viereckes (vgl. Einleitung Kapitel 1 Determinanten) mit Hilfe der Formel für den orientierten Flächeninhalt eines Dreieckes dar. Leiten Sie hieraus eine Formel für ein beliebiges n-Eck her. Was können sie über den Flächeninhaltes des Objektes definiert durch alle Punkte aus Teil (b) sagen?

(4+2* Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?