Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WiSe 19/20
Übungsblatt 8

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 3.12.19, 8:15 Uhr.

1. Sei $V := \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $x = (x_1, x_2)^T$ und $y = (y_1, y_2)^T$ zwei beliebige Elemente aus V. In welchen der folgenden Fälle ist die gegebene Abbildung $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear? In welchen Fällen ist Φ gegebenenfalls ausgeartet, symmetrisch oder positiv definit?
   (i) $\Phi(x, y) := x_1x_2 + y_1y_2$
   (ii) $\Phi(x, y) := x_1y_2 + x_2y_1$
   (iii) $\Phi(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ (4 Punkte)

2. Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zeigen Sie die folgende Version der Dreiecksungleichung:
$$|u| - |v| \leq |u - v| \quad \text{und} \quad |v| - |u| \leq |u - v| \qquad \forall u, v \in V.$$
   Zeigen Sie darüber hinaus, dass $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2) \quad \forall u, v \in V$ gilt. Diese Gleichung heißt *Parallelogrammidentität.* (4 Punkte)

3. Sei $U = \langle (1, 0, 0, 0, 0)^T, (1, 0, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 0, 2)^T, (2, 1, 0, 2, 3)^T \rangle$ ein Untervektorraum des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^5$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie mit dem Orthonormierungsverfahren von E. Schmidt eine Orthonormalbasis von U.
   (4 Punkte)

4. **Austauschprozesse und stochastische Matrizen**
   Ein Fahrradverleih in Münster hat die Filialen A, B oder C, in denen die Fahrräder beliebig ausgeliehen und abgegeben werden können. Seien a_k, b_k und c_k die Anzahlen der Fahrräder am Morgen vor Ladenöffnung in den Filialen A, B bzw. C. Das Wechselverhalten der Fahrräder von einem Tag zum nächsten wird durch folgende *Übergangsmatrix* F beschrieben:
$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad F = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,7 \end{pmatrix} \tag{1}$$
   Da die Gesamtanzahl der Fahrräder konstant bleibt und sie lediglich die Filialen wechseln spricht man von einem *Austauschprozess.* Weitere Erklärungen finden Sie auf der Rückseite.
   (a) Am Morgen des 26. Novembers waren in der Filiale A 24 Fahrräder, in B 31 Fahrräder und in C 36 Fahrräder. Bestimmen Sie wie viele Fahrräder am 25., 27. und 28. November in den Filialen waren.
   (b) Gibt es eine *stabile Verteilung* der Fahrräder, bei der trotz ihres Wechselverhaltens die Anzahl der Fahrrähder von Tag zu Tag konstant bleibt? Bestimmen Sie diese, wenn es sie gibt.

Bitte wenden

(c) Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *stochastische Matrix*, falls $0 \leq a_{ij} \leq 1$ für alle i, j und die Summe $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ der Einträge in jeder Spalte gleich 1 ist. Ein Beispiel ist die Matrix A aus (1). Zeigen Sie, dass jede stochastische Matrix den Eigenwert 1 besitzt und erklären Sie, was dies mit Teil (b) zu tun hat.

(4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

Austauschprozesse und stochastische Matrizen

Ein Prozess, der ein Wechselverhalten (von Fahrrädern, etc.) beschreibt heißt ein *Austauschprozess*, wenn die Gesamtanzahl konstant bleibt, aber sich die Verteilung (der Fahrräder, etc.) auf verschiedene Möglichkeiten (wie die Filialen in Aufgabe 4) ändern kann. Austauschprozesse können mittels einer Übergangsmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben sein, bei der für alle Einträge a_{ij} gilt $0 \leq a_{ij} \leq 1$. D.h. ist $x^{\text{alt}} = (x_1^{\text{alt}}, \dots, x_n^{\text{alt}})^T$ die Verteilung vor dem Wechsel und $x^{\text{neu}} = (x_1^{\text{neu}}, \dots, x_n^{\text{neu}})^T$ die Verteilung nach dem Wechsel, so gilt

$$x^{\text{neu}} \;=\; A \cdot x^{\text{alt}} .$$

In diesem Fall ist A eine stochastische Matrix. Die Eigenschaft, dass die Summe der Einträge in jeder Spalte gleich 1 ist, d.h. also dass $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für alle j ist, entspricht dabei genau der Eigenschaft, dass die Gesamtanzahl (der Fahrräder, etc.) konstant ist.

Beweis. Sei $G^{\text{alt}} := \sum_{i=1}^n x_i^{\text{alt}} = (1, \dots, 1) \cdot x^{\text{alt}}$ die Gesamtanzahl vor dem Wechsel und $G^{\text{neu}} := \sum_{i=1}^n x_i^{\text{neu}} = (1, \dots, 1) \cdot x^{\text{neu}}$ die Gesamtanzahl nach dem Wechsel. Gilt nun

$$x^{\text{neu}} \;=\; A \cdot x^{\text{alt}} ,$$

so gilt $G^{\text{neu}} = (1, \dots, 1) \cdot x^{\text{neu}} \;=\; (1, \dots, 1) \cdot A \cdot x^{\text{alt}}$. Die Eigenschaft $G^{\text{neu}} = G^{\text{alt}}$ ist äquivalent zu der Gleichung

$$(1, \dots, 1) \cdot A \cdot x^{\text{alt}} \;=\; (1, \dots, 1) \cdot x^{\text{alt}} .$$

Diese Gleichung gilt für alle $x^{\text{alt}} \in \mathbb{R}^n$ (d.h. also unabhängig von der Verteilung vor dem Wechsel) genau dann, wenn $(1, \dots, 1) \cdot A = (1, \dots, 1)$ ist. Wegen $(1, \dots, 1) \cdot A = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}\right)$, ist letztere Gleichung äquivalent dazu, dass A eine stochastische Matrix ist. $\square$

Eine Verteilung x^{alt} heißt eine *stabile Verteilung*, falls $x^{\text{neu}} = A \cdot x^{\text{alt}} = x^{\text{alt}}$ ist, d.h. also falls x^{alt} ein Eigenvektor von A ist.

(Hinweis zu Aufgabe 4(c): Was hat die Gleichung $(1, \dots, 1) \cdot A = (1, \dots, 1)$ mit $\det(A - \mathrm{Id}_n)$ zu tun?)