Prof. Dr. Urs Hartl

Maike Frantzen

WiSe 19/20

Übungsblatt 7

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 26.11.19, 8:15 Uhr.

1. Entscheiden Sie ob

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 11 \\ -4 & -9 & 22 \\ -2 & -5 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

diagonalisierbar ist und geben Sie gegebenenfalls eine Basiswechselmatrix an. (4 Punkte)

2. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie: Ist $\chi_A(X) = X^n + s_1X^{n-1} + ... + s_{n-1}X + s_n$ das charakteristische Polynom von A, so hat das charakteristische Polynom von A^{-1} die Gestalt

$$\chi_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \det(A)^{-1}(1 + s_1X + ... + s_nX^n).$$

(4 Punkte)

3. Sei $n > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $b - a$ ein Eigenwert von A ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $b + (n-1) \cdot a$ ein Eigenwert von A ist.
   (c) Bestimmen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten aus (a) und (b).
   (d) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, bestimmen Sie die zugehörige Basiswechselmatrix.

(4 Punkte)

4. Sei $\mathbb{K}$ wie in der Vorlesung $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform beziehungsweise Hermite'sche Form, welche positiv semi-definit ist. Beweisen Sie

$$\Phi \text{ ist positive definit } \Leftrightarrow \Phi \text{ ist nicht ausgeartet}$$

(4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?