Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WiSe 19/20
Übungsblatt 5

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 12.11.19, 8:15 Uhr.

1. Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *nilpotent*, falls eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A^m = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass nilpotente Matrizen 0 als einzigen Eigenwert besitzen. (4 Punkte)

2. Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, falls eine invertierbare Matrix $S \in GL_n(K)$ existiert mit $SAS^{-1} = B$. Seien nun A und B ähnliche Matrizen. Zeigen Sie:
   (a) Ähnliche Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte.
   (b) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn dies für B gilt.

   (4 Punkte)

3. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein K-linearer Endomorphismus $f : V \to V$ *Projektion*, falls $f \circ f = f$ gilt.
   Zeigen Sie, dass für eine Projektion f der Kern $\ker(f)$ und das Bild $\mathrm{im}(f)$ Eigenräume von f sind. Was sind die zugehörigen Eigenwerte? Ist $v \in V$ ein beliebiger Vektor, schreiben Sie $v = (v - f(v)) + f(v)$ und folgern Sie, dass $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = V$ gilt. Insbesondere ist damit jede Projektion diagonalisierbar.

   (4 Punkte)

4. (a) Sei K ein Körper und $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie:
   Sind $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ und $q \in L[X]$ Polynome mit $f = gq$, dann gilt $q \in K[X]$.
   (b) Dividieren Sie die folgenden Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$ jeweils mit Rest durch $g \in \mathbb{Q}[X]$:
      (i) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$,
      (ii) $f = X^n + X^{n-1} + ... + 1$, $g = X + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?