Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WiSe 19/20
Übungsblatt 4

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 5.11.19, 8:15 Uhr.

1. Sei n ungerade und sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$ gilt. Geben Sie ein Gegenbeispiel für gerades n an. (4 Punkte)

2. Berechnen Sie unter Benutzung der Formel von Leibniz die Determinante folgender Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe einer weiteren Methode der Determinantenberechnung.

(4 Punkte)

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei $\tau_i \in S_n$ die Transposition mit

$$\tau_i(i) = i+1, \qquad \tau_i(i+1) = i \qquad \text{und} \qquad \tau_i(k) = k \text{ für alle } k \notin \{i, i+1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $|i-j| \geq 2$ gilt $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$.

(b) Für alle $i = 1, \ldots, n-2$ gilt $\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i = \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}$.

(c) Jede Transposition und daher auch jede Permutation in S_n ist Produkt der τ_i.

(4 Punkte)

4. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f_A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Bestimmen Sie den Eigenraum $\mathrm{ER}(f_A, \lambda_i)$ zu dem Eigenwert λ_i für $i = 1, 2$. Geben Sie zusätzlich eine Basis des durch die Eigenräume erzeugten $\mathbb{R}$-Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ an. (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?