Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WiSe 19/20
Übungsblatt 13

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 21.01.20, 8:15 Uhr.

1. (a) Sei $h = \{a + t \cdot w :\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t\} = \{\tilde{a} + \tilde{t} \cdot \widetilde{w} :\ \tilde{t} \in \mathbb{R},\ 0 \leq \tilde{t}\}$ eine Halbgerade in $\mathbb{R}^2$, die durch zwei Parametrisierungen gegeben ist. Zeigen Sie, dass $a = \tilde{a}$ ist. Dies bedeutet, dass der Anfangspunkt a von h unabhängig von der Parametrisierung ist.

   (b) Sei $s = \{a+t\cdot w :\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1\} = \{\tilde{a}+\tilde{t}\cdot\widetilde{w} :\ \tilde{t} \in \mathbb{R},\ 0 \leq \tilde{t} \leq 1\}$ eine Strecke in $\mathbb{R}^2$, die durch zwei Parametrisierungen gegeben ist. Zeigen Sie, dass $\{a, a+w\} = \{\tilde{a}, \tilde{a}+\widetilde{w}\}$ und $w = \pm\widetilde{w}$ ist. Dies bedeutet, dass die Endpunkte a und $a + w$ von s unabhängig von der Parametrisierung sind.

   (4 Punkte)

2. *Parallelenaxiom.* Zeigen Sie dass zu einer gegebenen Geraden $g \subset \mathbb{R}^2$ und einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$, der nicht auf g liegt, $P \notin g$, gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade $\tilde{g} \subset \mathbb{R}^2$ durch P (d.h. $P \in \tilde{g}$) parallel zu g. (4 Punkte)

3. Ein *Kreis* in $\mathbb{R}^2$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ der Form $k = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \|x - a\| = r\}$ für ein $a \in \mathbb{R}^2$, welches *Mittelpunkt* von k heißt und ein $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, welches *Radius* von k heißt. Zeigen Sie:

   (a) Zwei verschiedene Kreise im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich in höchstens zwei Punkten.

   (b) Eine Halbgerade mit Anfangspunkt a und ein Kreis mit Mittelpunkt a schneiden sich in genau einem Punkt.

   (c) Eine Gerade und ein Kreis schneiden sich in höchstens zwei Punkten. Falls die Gerade den Mittelpunkt des Kreises enthält, schneiden sie sich in genau zwei Punkten.

   (4 Punkte)

4. *Stufenwinkel.* Es seien $g_1 \subset \mathbb{R}^2$ und $g_2 \subset \mathbb{R}^2$ zwei parallele Geraden. Ferner sei $\tilde{g} \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, die die Geraden g_1 und g_2 in je genau einem Punkt schneidet. Ist $\angle hh'$ einer der Schnittwinkel der Geraden g_1 und $\tilde{g}$, so wird man einen geeigneten Schnittwinkel von g_2 und $\tilde{g}$ als Stufenwinkel von $\angle hh'$ bezeichnen. Zeigen Sie, dass Stufenwinkel an parallelen Geraden stets kongruent sind, indem Sie eine geeignete Kongruenzabbildung angeben.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?