Prof. Dr. Urs Hartl
Maike Frantzen

WiSe 19/20
Übungsblatt 11

Übungen zur Vorlesung Geometrische Lineare Algebra

Abgabetermin: Dienstag, 7.1.20, 8:15 Uhr.

1. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix in unterer Dreiecksform, das heißt es gilt $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Zeigen Sie, dass A dann eine Diagonalmatrix ist. Gilt diese Aussage auch für unitäre Matrizen aus $\mathrm{U}_n(\mathbb{R})$? (4 Punkte)

2. Seien $A, B, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen, sodass A, B hermitesch und U unitär ist. Zeigen Sie:
   (a) AB hermitesch $\Leftrightarrow AB = BA$
   (b) Die Summe von A und B ist hermitesch.
   (c) UAU^{-1} ist hermitesch. (4 Punkte)

3. Sei die Kurve C bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch
   (a) $C = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4xy + y^2 = 3\}$
   (b) $C = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x + -2\sqrt{5}y = 5\}$

   Beschreiben Sie C. Bestimmen Sie dazu die Hauptachsen der Kurve. Zeichnen Sie anschließend die Kurve C bezüglich ihrer Hauptachsen in ein Standardkoordinatensystem. (4 Punkte)

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, sowie $v \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$.
   Betrachten Sie die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax + v^T x + d = 0\}$ und die Menge
   $$M_Q := \{y \in \mathbb{R}^n : 2y - x \in Q \ \forall x \in Q\}$$
   Zeigen Sie:
   (a) M_Q ist die Menge der Mittelpunkte der Quadrik Q, dh. die Menge aller $y \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathbb{R}^n$ gilt $y + z \in Q \Leftrightarrow y - z \in Q$.
   (b) Erfüllt $y \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $2Ay + v = 0$, so ist $y \in M_Q$. (4 Punkte)

   Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung: Ist $y \in M_Q$, so erfüllt y die Gleichung $2Ay+v = 0$.

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?