Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 8

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 27.5.2019, 10:15 Uhr

1. (a) Es sei $0 \neq P \in \mathbb{R}[X]$. Beweisen Sie, dass es reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^\times$, komplexe Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$, sowie natürliche Zahlen $n_j, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt mit

$$\begin{aligned} P(X) &= c \cdot \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_k)^{m_k} (X - \overline{\lambda_k})^{m_k} \\ &= c \cdot \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^{s} (X^2 - 2\mathcal{R}e(\lambda_k)X + |\lambda_k|^2)^{m_k}. \end{aligned}$$

   (b) Es sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ und $A = (a_{ij}) = {}_{\mathscr{B}}[f]_{\mathscr{B}}$ die darstellende Matrix bezüglich einer Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{C}^n$. Wir nehmen an, dass alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$ liegen. Beweisen Sie:
   Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f ist, so ist auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von f. (4 Punkte)

2. Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\chi_A \in K[X]$ das charakteristische Polynom, sowie $mipo_A \in K[X]$ das Minimalpolynom von A. Zeigen Sie: Für $\lambda \in K$ gilt $mipo_A(\lambda) = 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0$.
   Hinweis: Betrachten Sie für einen Eigenvektor v von A den Vektor $mipo_A(\lambda) \cdot v$.
   (4 Punkte)

3. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie: Ist $\chi_A(X) = X^n + s_1 X^{n-1} + ... + s_{n-1}X + s_n$ das charakteristische Polynom von A, so hat das charakteristische Polynom von A^{-1} die Gestalt

$$\chi_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \det(A)^{-1}(1 + s_1 X + ... + s_n X^n).$$

   (4 Punkte)

4. Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum.

   a) Sei $f : V \to V$ ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass ein Polynom $q \in K[X]$ existiert mit $f^{-1} = q(f)$.
   b) Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die charakteristischen Polynome von AB und BA übereinstimmen, dass also $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ gilt. Folgern Sie: Ist AB nilpotent, dann ist auch BA nilpotent.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?