Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 6

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 13.5.2019, 10:15 Uhr

1. Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei Matrizen, so dass eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $SAS^{-1} = B$. Zeigen Sie:

   (a) A und B besitzen dieselben Eigenwerte.

   (b) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn dies für B gilt.

   (4 Punkte)

2. Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum, so heißt ein K-linearer Endomorphismus f von V eine *Projektion*, falls $f \circ f = f$ gilt. Zeigen Sie, dass für eine Projektion f der Kern $\ker(f)$ und das Bild $\mathrm{im}(f)$ Eigenräume von f sind. Was sind die zugehörigen Eigenwerte? Ist $v \in V$ ein beliebiger Vektor, schreiben Sie $v = (v - f(v)) + f(v)$ und folgern Sie, dass $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = V$ gilt. Insbesondere ist damit jede Projektion diagonalisierbar.

   (4 Punkte)

3. Für ein Element $\alpha \in K$ betrachten wir den *Einsetzhomomorphismus*, d.h. den Ringhomomorphismus $\Phi_\alpha : K[X] \to K, f \mapsto f(\alpha)$. Zeigen Sie, dass für den Kern von Φ_α gilt:

   $$\ker \Phi_\alpha \;=\; (X-\alpha)\cdot K[X] \;:=\; \big\{\, (X-\alpha)\cdot g : g \in K[X] \,\big\}$$

   Hinweis: Sie können auf den Fall $\alpha = 0$ reduzieren, indem Sie zusätzlich den Ringhomomorphismus $K[X] \to K[Y]$ betrachten, der X auf $Y + \alpha$ abbildet.

   (4 Punkte)

4. Sei K ein Körper. $K[X]$ bezeichne den Polynomring über K in der Variablen X, $Abb(K, K)$ sei die Menge der Abbildungen $K \to K$. Sei

   $$\varphi : K[X] \to Abb(K, K)$$

   die Abbildung, die jedem Polynom $f \in K[X]$ die zugehörige Polynomfunktion $f \in Abb(K, K)$ zuordnet. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn K unendlich viele Elemente hat.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?