Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 5

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 6.5.2019, 10:15 Uhr

1. **Zur praktischen Bedeutung der Cramerschen Regel**
   Bestimmen Sie die Anzahl der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division in K) die benötigt werden zur Berechnung der Inversen einer Matrix in $\mathrm{GL}_n(K)$ mittels

   (a) der Komplementärmatrix $A^\sharp$ und der Formel $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^\sharp$,

   (b) elementarer Spalten- (oder Zeilen-)Umformungen.

   Was ergibt sich für $n = 10$? (4 Punkte)

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   mit Hilfe der Cramerschen Regel. Lösen Sie das Gleichungssystem zum Vergleich des Rechenaufwandes auch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

   (4 Punkte)

3. Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang r. Zeigen Sie, dass sich aus A durch Streichen gewisser Spalten und Zeilen eine quadratische *Untermatrix* $A' \in K^{r\times r}$ von A mit $\det(A') \neq 0$ konstruieren lässt. Andererseits ist $\det(A'') = 0$ für jede quadratische Untermatrix $A'' \in K^{s\times s}$ von A mit $s > r$. (4 Punkte)

4. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V.

   a) Seien $v, w \in V$ Eigenvektoren von f. In welchen Fällen ist auch $v - w$ ein Eigenvektor von f ?

   b) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ das Element $P(\lambda) := \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \in K$ ein Eigenwert des Endomorphismus $P(f) := \sum_{i=0}^n a_i \cdot f^i \in \mathrm{End}_K(V)$ ist.

   c) Zeigen Sie: Ist jedes Element $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor, so gibt ein $\lambda \in K$ mit mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, d.h. $f(v) = \lambda \cdot v$ für alle $v \in V$.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?