Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 4

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 29.4.2019, 10:15 Uhr

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i = 1, \dots, n-1$ sei $\tau_i \in S_n$ die Transposition, welche i und $i+1$ vertauscht, d.h.

$$\tau_i(i) = i+1, \qquad \tau_i(i+1) = i \qquad \text{und} \qquad \tau_i(k) = k \text{ für alle } k \notin \{i, i+1\}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $|i-j| \geq 2$ gilt $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$.

(b) Für alle $i = 1, \dots, n-2$ gilt $\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i = \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}$.

(c) Jede Transposition und daher auch jede Permutation in S_n ist Produkt der τ_i.

(4 Punkte)

2. **Zur theoretischen Bedeutung der Leibniz-Formel**
Gegeben sei eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, die jeder reellen Zahl t eine $n \times n$-Matrix $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j}$ zuordnet. Die Funktionen $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto a_{ij}(t)$ seien alle differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det A(t)$ ist ebenfalls differenzierbar und für ihre Ableitung gilt $\big(\det A(t)\big)' = \det\big(s_1'(t), s_2(t), ..., s_n(t)\big) + ... + \det\big(s_1(t), ..., s_{n-1}(t), s_n'(t)\big)$. Hierbei bezeichnen $s_j(t)$ die Spalten von A und wir schreiben $s_j'(t) = \big(a_{1j}'(t), ..., a_{nj}'(t)\big)^T$.

(b) Ist $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist auch die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ t \mapsto A(t)^{-1}$ differenzierbar.

(4 Punkte)

3. **Zur praktischen Bedeutung der Leibniz-Formel**
Bestimmen Sie die Anzahl der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division in K) die benötigt werden zur Berechnung der Determinante einer Matrix in $K^{n\times n}$ mittels

(a) der Leibniz-Formel,

(b) elementarer Spalten- (oder Zeilen-)Umformungen.

Was ergibt sich für $n = 10$? (4 Punkte)

Bemerkung. Mithilfe der *Stirling-Formel* lässt sich $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \to \infty$ abschätzen.

(bitte wenden)

4. **Vandermondesche Matrix und Determinante**
Es sei K ein Körper, n eine positive ganze Zahl und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein n-Tupel von Elementen von K. Die Matrix $A_\xi = (a_{ij})_{i,j} \in K^{n\times n}$ sei definiert durch $a_{ij} := \xi_j^{i-1}$, d.h.

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch Induktion nach n, dass $\det(A_\xi) = \prod_{1\le i<j\le n}(\xi_j - \xi_i)$ gilt. Insbesondere ist A_ξ genau dann invertierbar, wenn die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_n$ paarweise verschieden sind.

(4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

Karl Weierstraß (1815–1897)
Weierstraß wurde im westfälischen Ostenfelde geboren. Auf Wunsch seines Vaters studierte er ab 1834 Jura und Wirtschaftswissenschaften in Bonn. Er beschloss jedoch, Mathematiker zu werden und verließ Bonn ohne Abschluss 1838. Drei Jahre später bestand er in Münster die Lehrerprüfung. Sein mathematisches Genie wurde erst 1854 wahrgenommen. Sogleich erhielt er die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg, sowie Rufe an zahlreiche Universitäten. 1956 ging er nach Berlin. Sein Hauptwerk galt der logisch korrekten Fundierung der Analysis und der Entwicklung der Funktionentheorie auf Basis der Potenzreihenentwicklungen. Darüberhinaus leistete er wichtige Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen, zur Differentialgeometrie und zur Variationsrechnung.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
Leibniz wurde in Leipzig geboren und studierte dort und in Jena Philosophie, Jura und Mathematik. Ab 1667 war er Hofrat des Kurfürsten von Mainz. Er reiste nach Paris und London, wo er in die königliche Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. In 1676 wurde er Hofrat und Bibliothekar des Herzogs von Hannover. Auf sein Betreiben hin wurde 1700 die Berliner Akademie der Wissenschaften gegründet, deren Präsident er wurde. Leibniz war Universalgelehrter und arbeitete als Diplomat, Rechtsgelehrter, Mathematiker, Physiker und Historiker. Seine Algorithmen und Notationen für die Differentialrechnung sind noch heute in Gebrauch.