Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 12

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 1.7.2019, 10:15 Uhr

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr für die Zulassung gewertet.

1. Sei Φ ein Skalarprodukt auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass es für jedes weitere Skalarprodukt Ψ auf V einen Automorphismus $f : V \to V$ gibt mit $\Psi(v,w) = \Phi(f(v), f(w))$ für alle $v, w \in V$.

   (4 Punkte)

2. Sei $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und sei $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ der Dualraum von V. Zeigen Sie

   (a) Für jedes $w \in V$ ist die Abbildung $\varphi_w : v \mapsto \Phi(v, w) \in \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Homomorphismus $V \to \mathbb{R}$, d.h. φ_w ist ein Element von V^*.

   (b) Ist Φ nicht-ausgeartet und $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, so ist die Abbildung $V \to V^*, w \mapsto \varphi_w$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

   (4 Punkte)

3. Sei V ein euklidischer oder unitärer, endlich dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

   a) Ist f normal, so gilt $\mathrm{im}(f^*) = \mathrm{im}(f)$.

   b) Ist g ein weiterer Endomorphismus von V und sind f, g normal, so ist $f \circ g = 0$ äquivalent zu $g \circ f = 0$.

   (4 Punkte)

4. Sei (V, Φ) ein endlich dimensionaler, euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei ferner $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass genau dann $f = f^*$ gilt, wenn $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ orthogonal zueinander sind.
   Hinweis für „$\Longleftarrow$“ : Blatt 6, Aufgabe 2. (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?