Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

**SoSe 19**
**Übungsblatt 11**

# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 24.6.2019, 10:15 Uhr

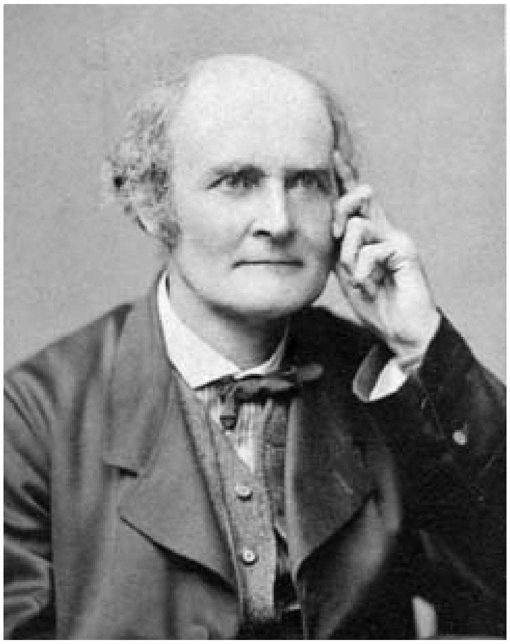
1. Betrachten Sie die nilpotente Matrix $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ gegeben durch
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$, sodass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Blockdiagonalmatrix aus Jordanmatrizen ist. (4 Punkte)

2. Es seien $v \in \mathbb{R}^3$ und $w \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren. Betrachten Sie für einen festen Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ die Ebene
$$E := \{P + sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$
Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $u \in \mathbb{R}^3 \setminus E$ genau ein Punkt $u' \in E$ existiert, sodass $u - u'$ orthogonal zu $v$ und $w$ ist. Man nennt die Gerade durch $u$ und $u'$ *das Lot von $u$ auf $E$*. Ist $W := \mathbb{R} \cdot v + \mathbb{R} \cdot w$ und $\mathrm{pr}_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf $W$, so gilt $u' = P + \mathrm{pr}_W(u - P)$.
(4 Punkte)

3. Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V := \mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{C})$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[0; 2\pi]$. Die Abbildung $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ sei definiert durch
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$
Zeigen Sie, dass $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ eine Hermitesche Form ist. Verwenden Sie ohne Nachweis der positiven Definitheit, dass es sich sogar um ein Skalarprodukt handelt, und zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{e^{ikx} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ von $V$ bezüglich $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ein Orthonormalsystem bildet.
(4 Punkte)

4. Sei $V := \mathbb{R}^{n\times n}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie:
   a) Durch $\Phi(AB) = \mathrm{Spur}(AB)$ wird eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V$ definiert.
   b) Sei $U_+ = \{U \in V : U^T = U\}$ der Untervektorraum aller *symmetrischen* und $U_- = \{U \in V : U^T = -U\}$ der Untervektorraum aller *schiefsymmetrischen* Matrizen. Dann gilt
$$V = U_+ \oplus U_-, \qquad U_+^\perp = U_-, \qquad U_-^\perp = U_+.$$
   c) Es ist $\Phi$ positiv definit auf $U_+$ und negativ definit auf $U_-$, d.h. es gilt $\Phi(A, A) > 0$ für alle $A \in U_+ \setminus \{0\}$ und $\Phi(A, A) < 0$ für alle $A \in U_- \setminus \{0\}$.
(4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?



**Arthur CAYLEY (1821–1895)**
Cayley wurde in Richmond, England geboren. Er studierte am Trinity College in Cambridge Mathematik und unterrichtete dort ab 1842 für vier Jahre. Gleichzeitig studierte er Jura und war ab 1849 Rechtsanwalt. Im Jahre 1863 hatte er 300 mathematische Arbeiten publiziert und wurde Professor für Mathematik in Cambridge. Obwohl dies eine deutliche Einkommenseinbuße darstellte, erfüllte sich damit sein Lebenstraum. Cayley entwickelte die Theorie der Matrizen und gab als erster die Definition einer abstrakten Gruppe. Er publizierte fast 1000 Arbeiten zur Mathematik, theoretischen Dynamik und mathematischen Astronomie.

**Sir William R. HAMILTON (1805–1865)**
Hamilton wurde im irischen Dublin geboren. Er studierte am Trinity College in Dublin und wurde dort 1827, noch vor Erlangung seines Bachelor-Abschlusses, bereits Professor und königlicher Astronom Irlands. Er formulierte das Hamiltonsche Prinzip in der klassischen Mechanik, welches zur Herleitung von Bewegungsgleichungen dient. Ebenso bedeutend sind seine Arbeiten zur Optik. Hamilton wurde 1832 Mitglied der Royal Irish Academy, war von 1837 bis 1845 ihr Präsident und wurde 1835 geadelt. Er erfand die Quaternionen, eine vierdimensionale Divisionsalgebra über dem Körper der reellen Zahlen. Mit der vergeblichen Suche nach weiteren reellen Divisionsalgebren verbrachte er die letzten dreißig Jahre seines Lebens.

**EUKLID (ca. 325 – 265 v. Chr.)**
Über Euklid ist sehr wenig bekannt, nicht einmal, ob es sich bei ihm tatsächlich um eine historische Person handelt. Eine Ansicht, die dies bejaht, sieht in ihm den Gründer einer Schule für Mathematik in Alexandria im heutigen Ägypten und den Verfasser der *Elemente*. In diesem dreizehnbändigen Werk werden auf Grundlage weniger Axiome, streng logisch Theoreme für die Geometrie der Ebene und des Raums bewiesen. Wegen ihrer logischen Klarheit galten die Elemente über zweitausend Jahre lang als das Standardlehrbuch für Geometrie.