Prof. Dr. Urs Hartl
Verena Edenfeld

SoSe 19
Übungsblatt 10

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Montag, 17.6.2019, 10:15 Uhr

1. Sei $A \in K^{n\times n}$ und $\chi_A \in K[X]$ das charakteristische Polynom, sowie $mipo_A \in K[X]$ das Minimalpolynom von A. Sei $\overline{K} \supset K$ eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung. Zeigen Sie:

   (a) Ist $\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{n_i}$ in $\overline{K}[X]$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in \overline{K}$, so gilt in $\overline{K}[X]$ $mipo_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{d_i}$ mit $1 \leq d_i \leq n_i$ für alle i.

   (b) A ist genau dann (in $K^{n\times n}$) diagonalisierbar (d.h. $\exists\ S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist), wenn $mipo_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in K$.

   Hinweis zu (a): Betrachten Sie $A \in \overline{K}^{n\times n}$ und benutzen Sie Blatt 8, Aufgabe 2.

   (4 Punkte)

2. Es bezeichnen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei beliebige Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V := \mathbb{R}^2$. In welchen der folgenden Fälle ist die gegebene Abbildung $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear? In welchen Fällen ist φ gegebenenfalls ausgeartet, symmetrisch oder positiv definit?

   (i) $\varphi(x, y) := x_1x_2 + y_1y_2$
   (ii) $\varphi(x, y) := x_1y_2 + x_2y_1$
   (iii) $\varphi(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

   (4 Punkte)

3. Es sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ferner seien $u, v \in V$ zwei Vektoren der Länge 1. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig?

   (i) Sind u und v orthogonal zueinander, so gilt $|u + v| = \sqrt{2}$.
   (ii) Gilt $|u + v| = \sqrt{3}$, so hat $\langle u, v\rangle$ den Realteil $1/2$.
   (iii) Gilt $\langle u, v\rangle = i$, so sind u und v linear abhängig.
   (iv) Ist $\langle u, v\rangle$ eine reelle Zahl, so gilt $\langle u, v\rangle \leq 1$.

   (4 Punkte)

4. Das Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ auf dem reellen Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\langle x, y\rangle := x^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y.$$

   Zeigen Sie, dass der Vektor $v_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ die Länge 1 hat und ergänzen Sie v_1 zu einer Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?