

Aufgabe 1 (4 Punkte): Gegeben seien folgende drei Ebenen:

$$E_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 11\}$$

$$E_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 6\}$$

$$E_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 + -3x_2 + 4x_3 = 6\}$$

Bestimmen Sie den Schnitt von E_1 , E_2 und E_3 . Worum handelt es sich dabei (leerer Schnitt, Punkt, Gerade oder Ebene)?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rccccrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & -2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Mit anderen Worten: Bestimmen Sie die Menge $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \text{ erfüllt alle obigen Gleichungen}\}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ gegeben. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \text{(II)} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}$$

und beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (i) Für alle $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ besitzt das System genau eine Lösung.
- (ii) Es gibt $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ sodass das System genau eine Lösung besitzt.
- (iii) Es gilt $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$.

Hinweis: Es genügt wenn Sie die Implikationen (i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii) und (iii) \Rightarrow (i) zeigen. Bitte begründen Sie warum das ausreicht.

Hinweis: Es hilft Ihnen vielleicht die Gleichung $a_{11} \cdot \text{(II)} - a_{21} \cdot \text{(I)}$ in Ihre Überlegungen mit einzubeziehen.

Aufgabe 4 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?