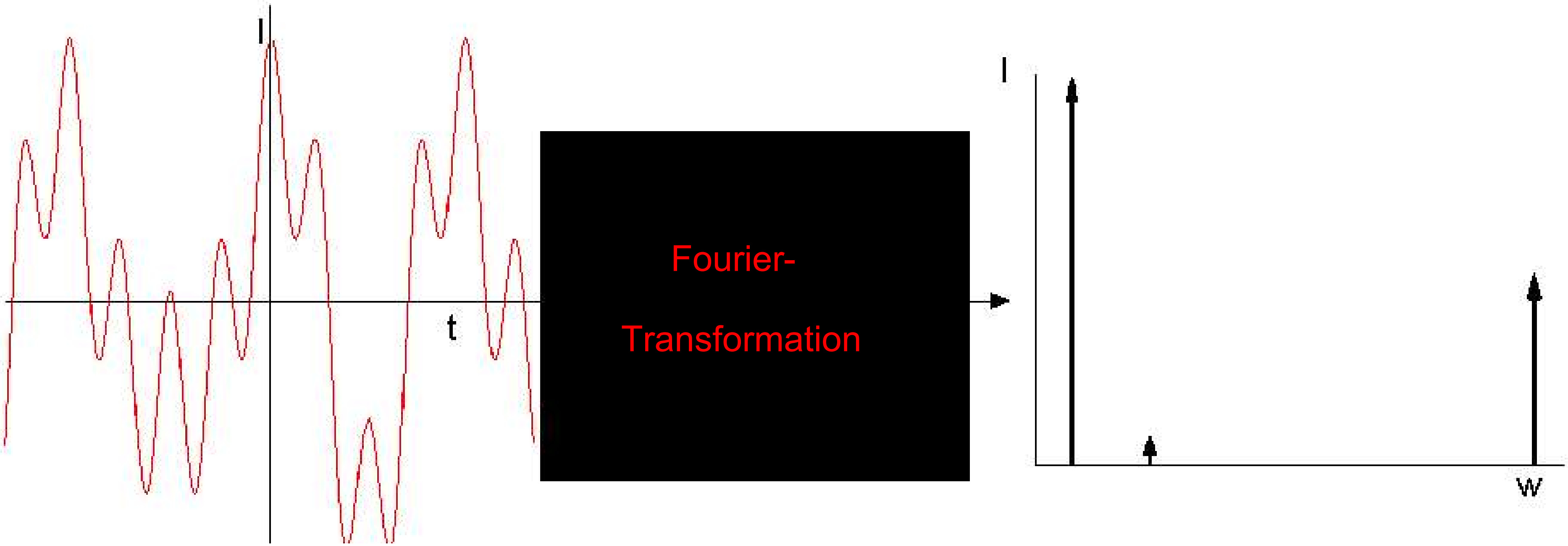
Technik der Fourier-Transformation

Technik der Fourier-Transformation

Was ist Fourier-Transformation?



Zeitabhängiges Signal
in s

Frequenzabhängiges Signal
in 1/s

Technik der Fourier-Transformation

Wozu braucht man das?

Technik der Fourier-Transformation

Wie macht man das?

Fourier- Reihe

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$$

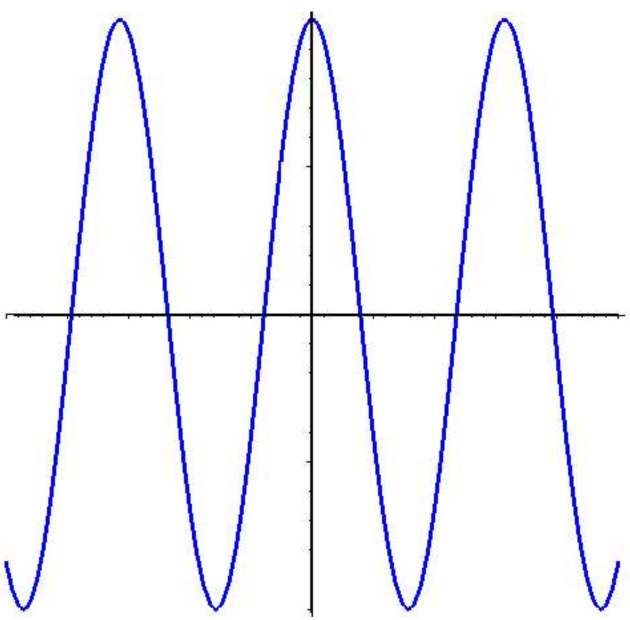
Zerlegung einer periodischen Funktion in ihre sinus- und cosinus-förmigen Anteile

Technik der Fourier-Transformation

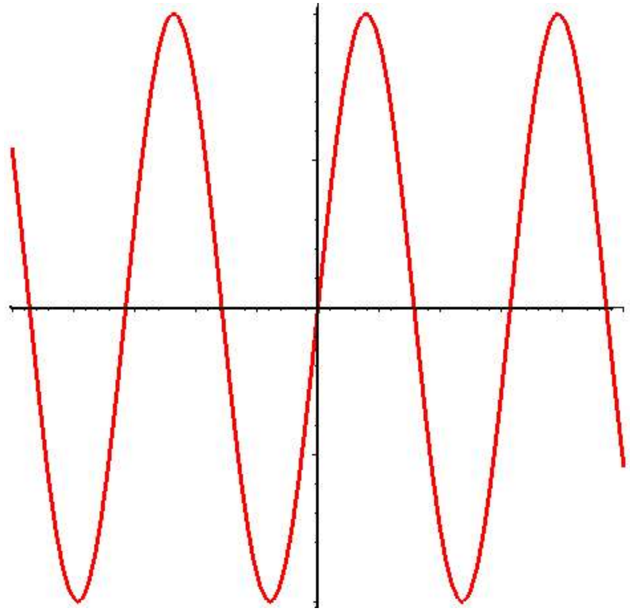
Fourier-Reihen

Voraussetzungen:

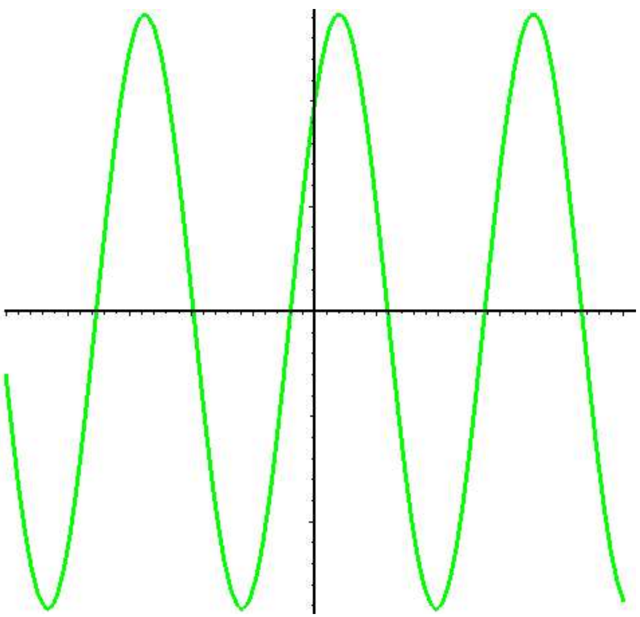
Periodische Funktionen



gerade: z.b. cosinus



ungerade: z.b. sinus



„weder, noch“ : z.b. cos + sin

Technik der Fourier-Transformation

Fourier-Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$$

A_k und B_k sind die Amplituden ,

d.h. Intensitäten der unterschiedlichen Frequenzen

ω_k ist die Frequenz $\qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$

T ist die Periode

k ist eine ganze Zahl (Laufzahl)

Technik der Fourier-Transformation

Was wollen wir herausfinden?

Unterschiedliche Amplituden bestimmter Frequenzen

A_k = ?

B_k = ?

Wozu nochmal ?

genaue Beschreibung unserer Messkurve

$$\rightarrow \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$$

Technik der Fourier-Transformation

Wie kann man die Amplituden bestimmen?

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$$

Multiplikation mit cos $\omega_{k'}$t :

$$f(t)\cos(\omega_{k'} t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \cos(\omega_{k'} t)$$

Integration:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_{k'} t \; dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\omega_k t\right) \cos\left(\omega_{k'} t\right) + B_k \sin\left(\omega_k t\right) \cos\left(\omega_{k'} t\right)\right) \; dt$$

Vereinfachung durch Orthogonalitätsrelationen!

Technik der Fourier-Transformation

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_{k'}t\;dt \;=\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(A_k\cos\left(\omega_k t\right)\cos\left(\omega_{k'} t\right)+\cancel{B_k\sin\left(\omega_k t\right)\cos\left(\omega_{k'} t\right)}\Big)\;dt$$

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi kt}{T}\cos\frac{2\pi k't}{T}\,dt\quad\begin{cases}0 & \mathit{für}\ k\neq k'\\ T/2 & \mathit{für}\ k=k'\neq 0\\ T & \mathit{für}\ k=k'=0\end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\sin\frac{2\pi kt}{T}\sin\frac{2\pi k't}{T}\,dt\quad\begin{cases}0 & \mathit{für}\ k\neq k',\ k=0\ \mathit{und}\ /\\ & \mathit{oder}\ k'=0\\ T/2 & \mathit{für}\ k=k'\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi kt}{T}\sin\frac{2\pi k't}{T}\,dt=0$$

Technik der Fourier-Transformation

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\omega_{k'}t\right)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} A_k \cos\left(\omega_k t\right)\cos\left(\omega_{k'}t\right)$$

k = k´≠ 0

k = k´= 0

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_{k'}t)\,dt = A_k\frac{T}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = A_0\,T$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_k t)\,dt$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

Technik der Fourier-Transformation

Berechnung von B_k ähnlich,

aber Multiplikation mit $\sin \omega_{k'} t$

k = k´≠ 0

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_k t)\, dt$$

k = k´= 0

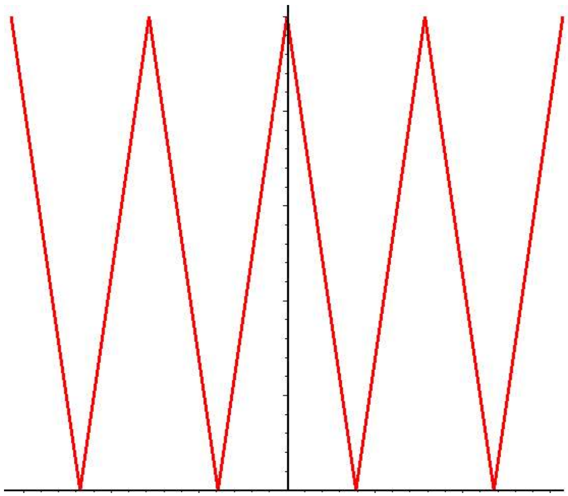
$$B_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{=0}\, dt$$

$$\longrightarrow B_0 = 0$$

Technik der Fourier-Transformation

Beispielrechnung: Dreieckfunktion

Was ist das?



$$f(t)=\begin{cases}1+\dfrac{2t}{T} & \textit{für } -T/2\le t\le 0\\[2ex] 1-\dfrac{2t}{T} & \textit{für } 0\le t\le T/2\end{cases}$$

Diese Dreieckfunktion ist eine gerade Funktion.

→ nur A_k berechnen

Technik der Fourier-Transformation

Warum nur A_k ?

Aus Symmetriegründen:

$$B_k = \frac{2}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_k t \, dt}_{=0}$$

Produkt von gerader und ungerader Funktion = ungerade Funktion

Fläche einer ungeraden Funktion in einer Periode = 0

Technik der Fourier-Transformation

Wir setzen die Dreieckfunktion in die Gleichung von A_k ein

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2t}{T} & \textit{für } -T/2 \le t \le 0 \\ 1 - \dfrac{2t}{T} & \textit{für } \; 0 \le t \le T/2 \end{cases}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_k t) \, dt$$

Technik der Fourier-Transformation

$$A_k = -\frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \cos \frac{2\pi kt}{T} \; dt$$

Mit Hilfe der folgenden Gleichung lässt sich A_k berechnen:

$$\int x \cos ax \; dx = \frac{a}{x} \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax$$

Technik der Fourier-Transformation

$$A_k = \frac{2(1-\cos \pi k)}{\pi^2 k^2}$$

k gerade Zahlen $\longrightarrow$ **A = 0**

k ungerade Zahlen $\longrightarrow$ **A =** $\dfrac{4}{\pi^2 k^2}$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$$

k = 0 $\longrightarrow$ **A = ½**

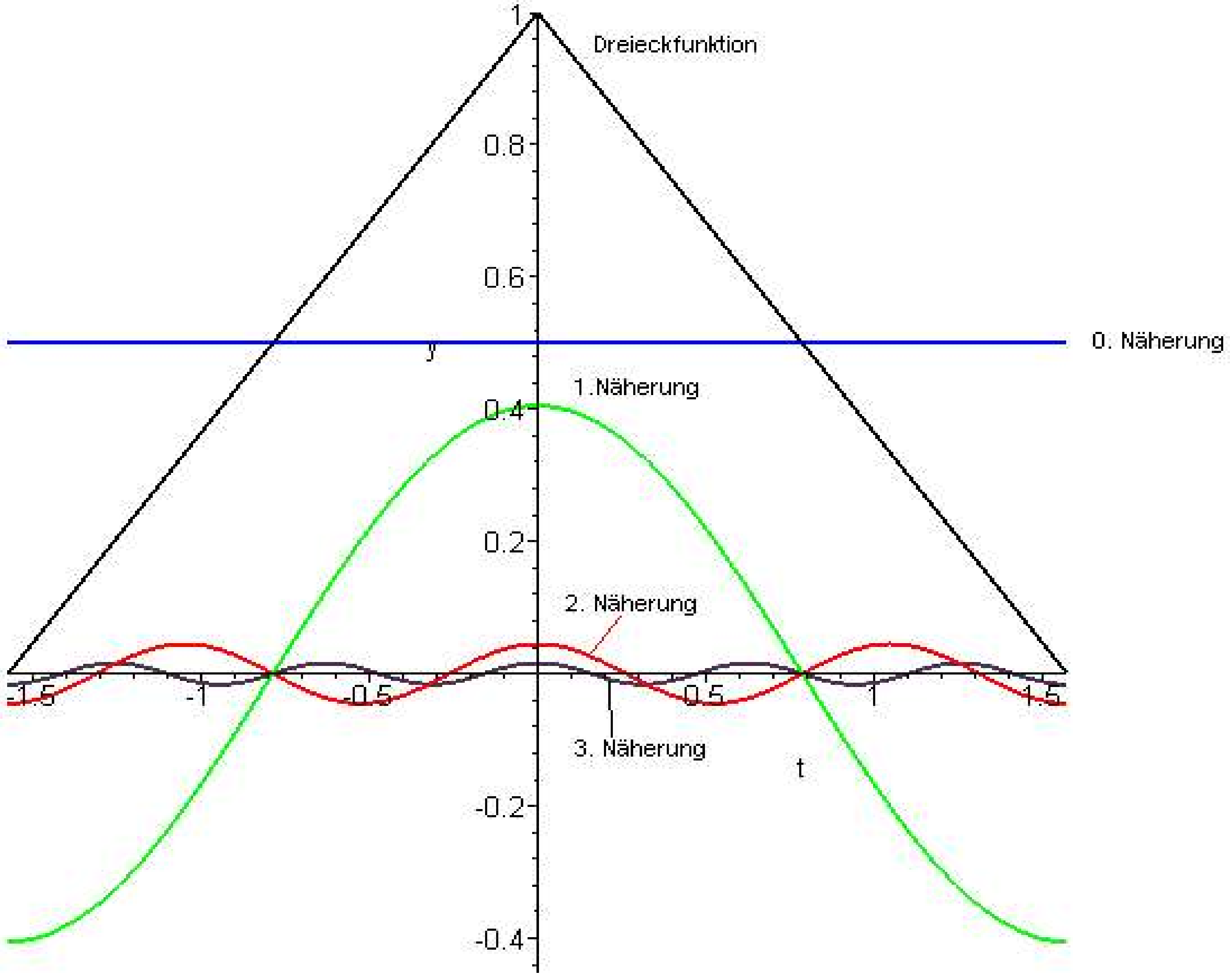
Technik der Fourier-Transformation

$$f(t)=\sum_{k=\cancel{0}}^{\infty}\left(A_k\cos(\omega_k t)+\cancel{B_k\sin(\omega_k t)}\right)$$

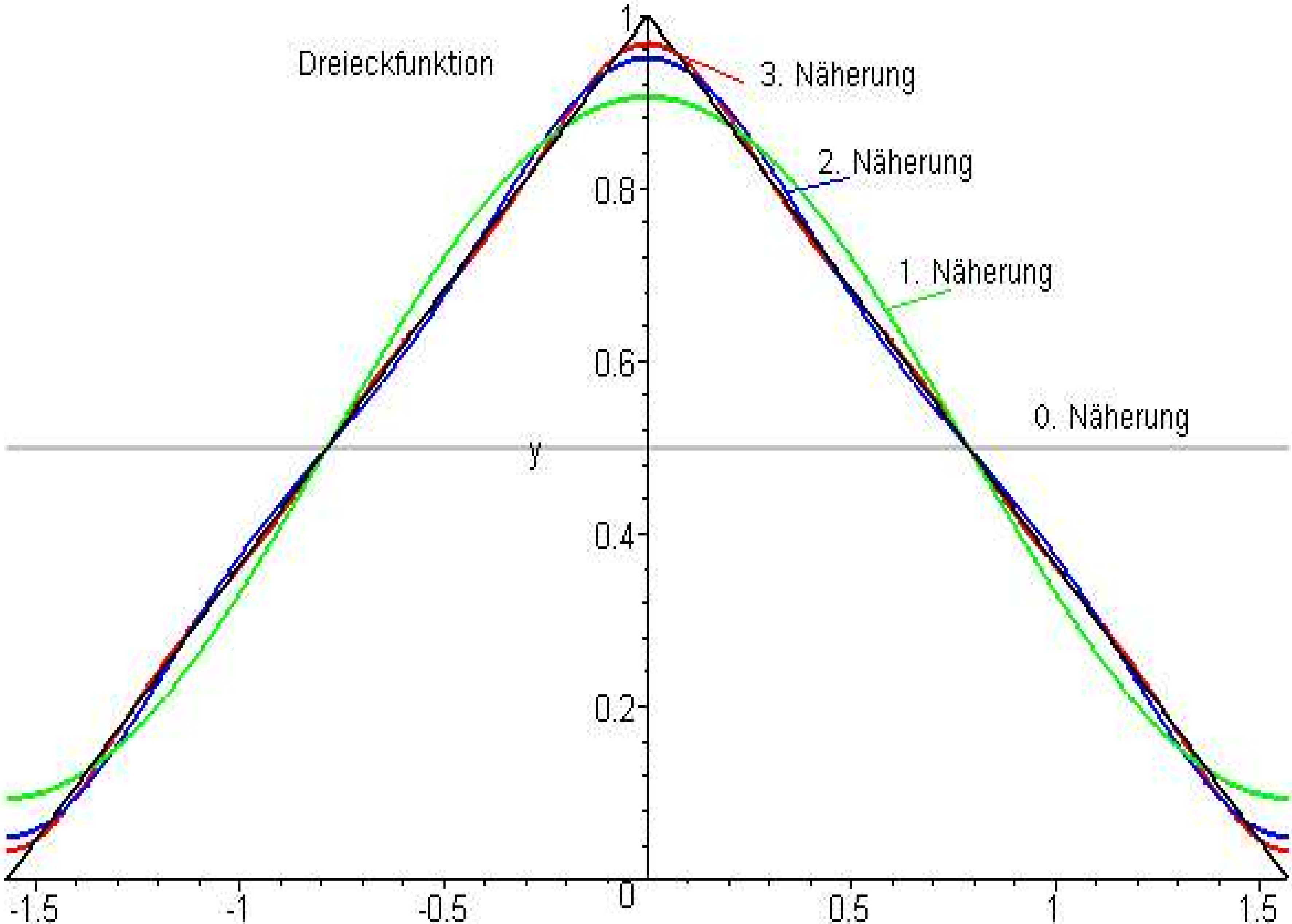
$$f(t)=\boxed{A_0}+\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(\omega_k\cdot t)}$$

Damit ergibt sich folgende Funktion:

$$f(t)=\boxed{\frac{1}{2}}+\boxed{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos(1\omega t)+\frac{1}{3^2}\cos(3\omega t)+\frac{1}{5^2}\cos(5\omega t)+\dots\right)}$$

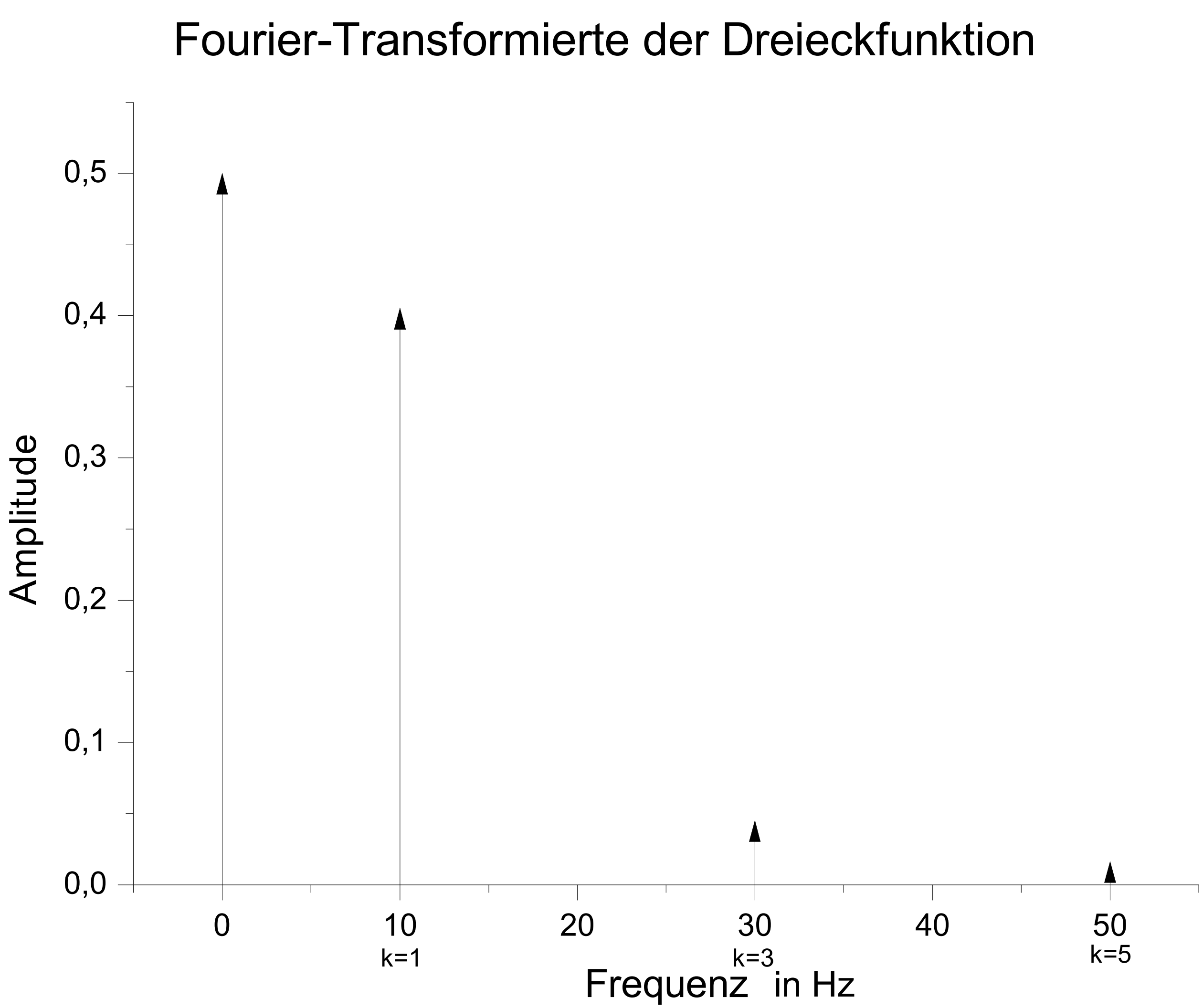


Dreieckfunktion
0. Näherung
1.Näherung
2. Näherung
3. Näherung
y
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5



Dreieckfunktion
3. Näherung
2. Näherung
1. Näherung
0. Näherung
y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5

Technik der Fourier-Transformation



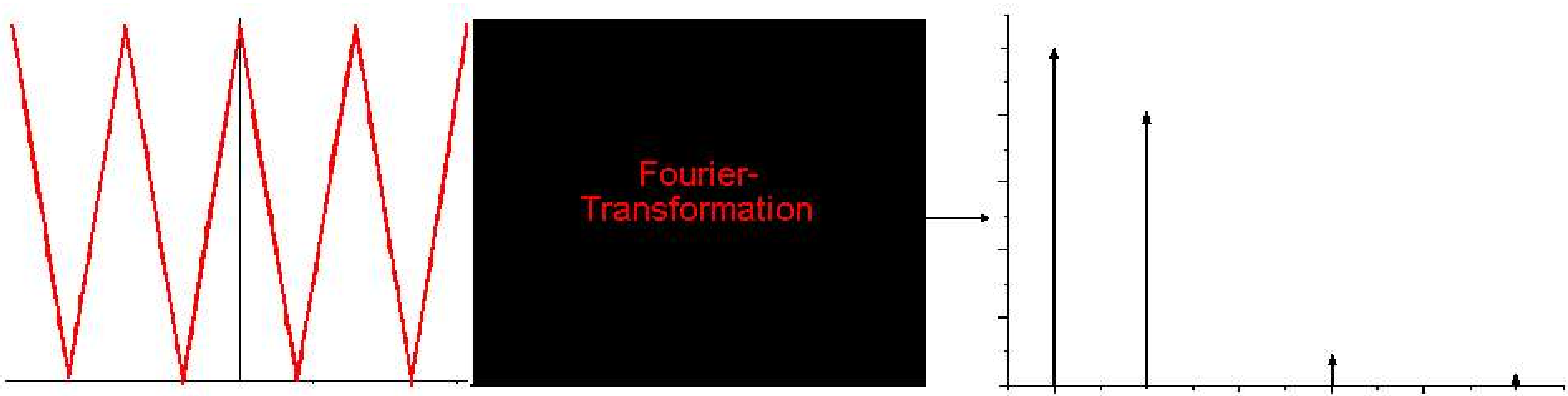
Technik der Fourier-Transformation

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_k t)\, dt$$

$$B_k = \frac{2}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_k t)\, dt}_{=0}$$

$$A_k = \frac{2(1 - \cos(\pi k))}{\pi^2 k^2}$$



Technik der Fourier-Transformation

Komplexe Schreibweise:

$$f(t) = \sum_{\boxed{k=-\infty}}^{\infty} \left(A'_k \cos(\omega_k t) + B'_k \sin(\omega_k t) \right)$$

nicht mehr von 0

Spektrale Intensität gleichermaßen auf positive und negative Frequenzen aufteilen

- A_k-Amplituden halbieren, d.h. $A_k \, ½ = A'_k$

- B_k-Amplituden halbieren, aber :

  negative Frequenzen: $B_k \; -½ = B'_k$

  positive Frequenzen: $B_k \; ½ = B'_k$

Technik der Fourier-Transformation

Komplexe Schreibweise:

Eulersche Regel:

$$\cos(\omega_k t) = \frac{1}{2}\left(\exp(i\omega_k t) + \exp(-i\omega_k t)\right)$$

$$\sin(\omega_k t) = \frac{1}{2i}\left(\exp(i\omega_k t) - \exp(-i\omega_k t)\right)$$

Einsetzen in:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k - iB_k}{2}\exp(i\omega_k t) + \frac{A_k + iB_k}{2}\exp(-i\omega_k t)\right)}$$

Technik der Fourier-Transformation

$$f(t) = \underbrace{A_0}_{C_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{A_k - iB_k}{2}}_{C_k} \underbrace{\exp(i\omega_k t)}_{\text{für } k} + \underbrace{\frac{A_k + iB_k}{2}}_{C_{-k}} \underbrace{\exp(-i\omega_k t)}_{\text{für } -k} \right)$$

Durch Vereinfachung ergibt sich:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \boxed{C_k} \exp(i\omega_k t) \qquad \omega = \frac{2\pi k}{T}$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i\omega_k t)\, dt}$$

für $-\infty \leq k \leq \infty$

Technik der Fourier-Transformation

Kontinuierliche Fouriertransformation

Was ist das?

Alternativ: Zerlegung eines zeitabhängigen Signals in sein Spektrum

Auch hier gilt:

Transformation ergibt Funktion im reziproken Raum

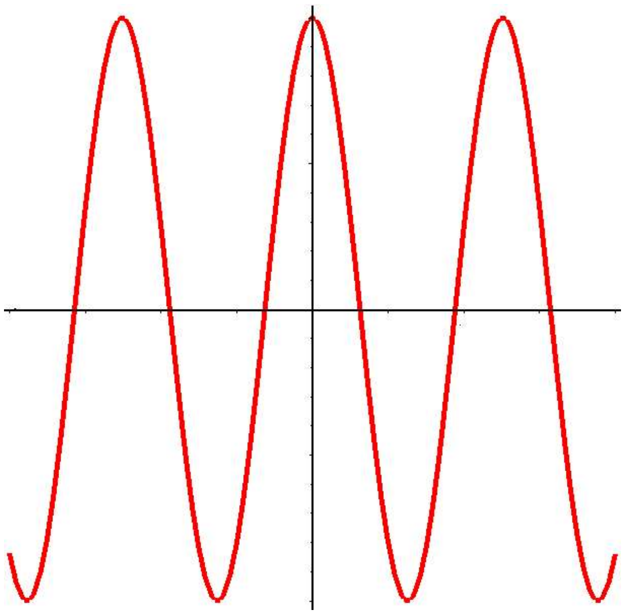
→ $FT\,[f(t[s])] = F(1/t[s]) = F(\omega[s^{-1}])$

Technik der Fourier-Transformation

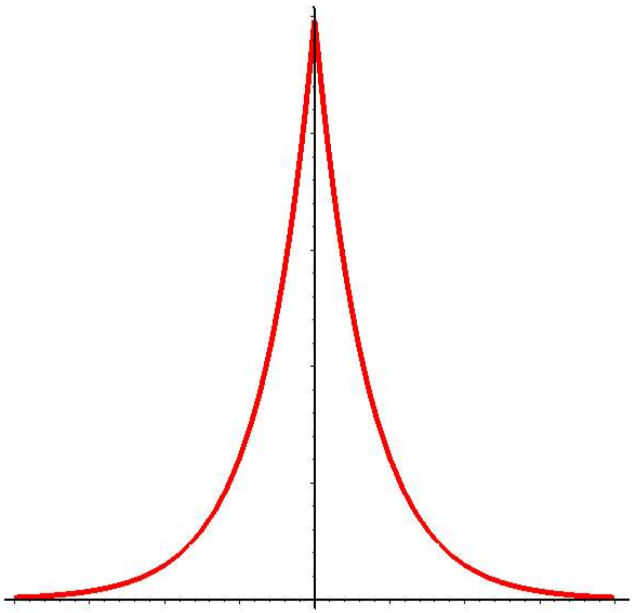
Warum kontinuierliche Fouriertransformation ?

- Transformation nichtperiodischer Signale möglich

periodisches Signal



nicht -*periodisches Signal*



Technik der Fourier-Transformation

Was bedeutet kontinuierlich?

Formal: $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\omega t)\, dt$$

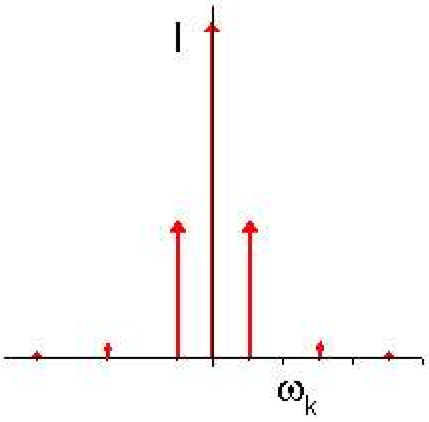
Vergleich

Diskrete Fourierreihe:	Kontinuierlich Fouriertransformation:
- k sind ganze Zahlen in der Reihendarstellung	- keine k
→ diskrete Frequenzen ω_k mit den jeweils eigenenen Amplituden A_k und B_k	keine diskreten Frequenzen, sondern kontinuierliche Transformierte $F(\omega)$; Funktion $F(\omega)$ gibt Amplituden in Abhängigkeit von der Frequenz wieder
$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\omega t)\, dt$

Technik der Fourier-Transformation

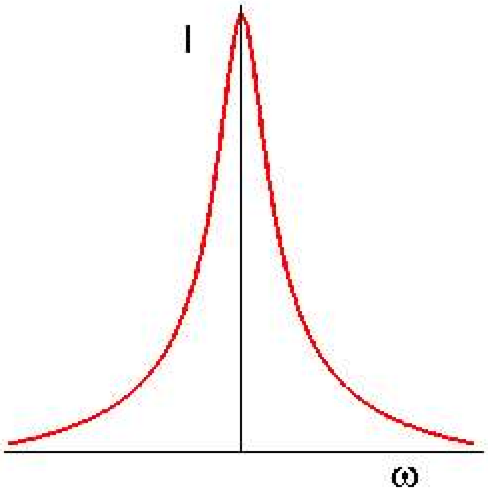
Zeitabhängiges periodisches Signal

Fourier-Analyse



Zeitabhängiges, periodisches / nicht periodisches Signal

Kontinuierliche Transformation



Technik der Fourier-Transformation

Zu den Verkehrsregeln

- Fouriertransformation ist keine Einbahnstraße:

Hintransformation:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt$$

Vorsicht bei den Faktoren

Rücktransformation:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t)\, dt$$

Technik der Fourier-Transformation

Fouriertransformierte ist eine komplexe Größe

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\omega t)\, dt$$

Transformierte aufteilbar in Real- und Imaginär- teil.

Als Beispiel:

aus $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\omega t)\, dt$$

mit $$e^{(-i\omega t)} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$$

wird $$F(\omega) = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt} - i \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega t)\, dt}$$

Technik der Fourier-Transformation

Real und Imaginärteil können einzeln dargestellt werden

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \cos(\omega t)\ dt \quad - \quad i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \sin(\omega t)\ dt$$

$$F(\omega) = \qquad R(\omega) \qquad + \; i \qquad I(\omega)$$

Hierbei ist R(ω) der Realteil und I(ω) der Imaginärteil

Die Fouriertransformierte ist darstellbar als:

Betrag der Fouriertransformierten: $\left|F(\omega)\right| = \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$

oder als $\left|F(\omega)\right|^2 = R(\omega)^2 + I(\omega)^2$, auch *Power Darstellung* genannt

Technik der Fourier-Transformation

Beispiel einer Fouriertransformation

- Exponentieller Zerfall

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda t) & t \geq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \exp(-i \omega t) dt$$

es ergibt sich:

$$F(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\omega}$$

$$F(\omega) = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}} - \boxed{\frac{i\omega}{\lambda^2 + \omega^2}}$$

Realteil Imaginärteil

Technik der Fourier-Transformation

Fouriertransformation eines Exponentiellen Zerfalls

$$F(\omega) = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}} - \boxed{\frac{i\omega}{\lambda^2+\omega^2}}$$

Betrag der Fouriertransformierten:

$$\left|F(\omega)\right| = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{\lambda^2+\omega^2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{\lambda^2+\omega^2}{\left(\lambda^2+\omega^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2+\omega^2}}$$

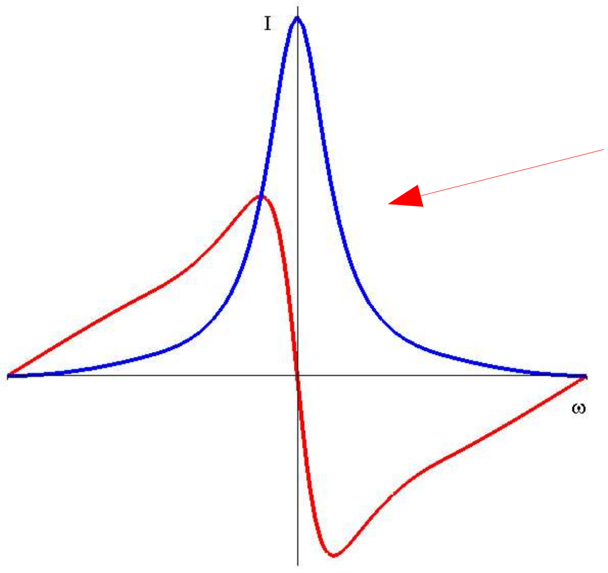
Power Darstellung:

$$\left|F(\omega)\right|^2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{\lambda^2+\omega^2}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2+\omega^2}$$

Technik der Fourier-Transformation

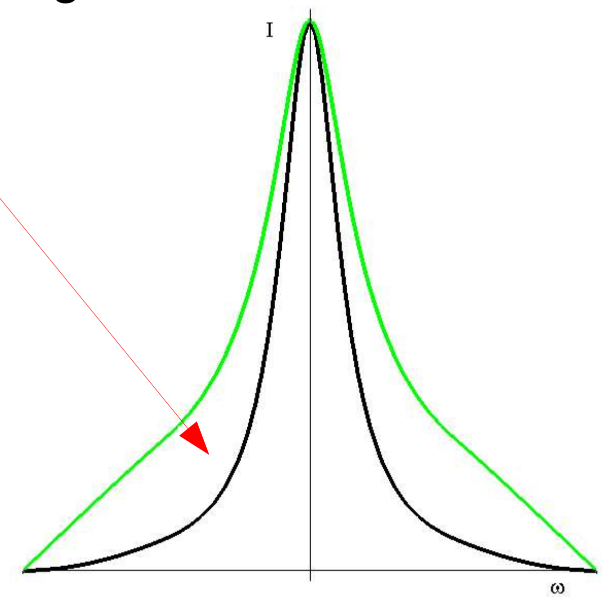
Fouriertransformierten des Exponentiellen Zerfalls

Real und Imaginärteil



Lorentz-Funktion

Betrag und Power-Darstellung



Real:

$$R(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

Imaginär:

$$I(\omega) = -\frac{i\omega}{\lambda^2 + \omega^2}$$

Betrag:

$$|F(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 + \omega^2}}$$

Power:

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2}$$

Technik der Fourier-Transformation

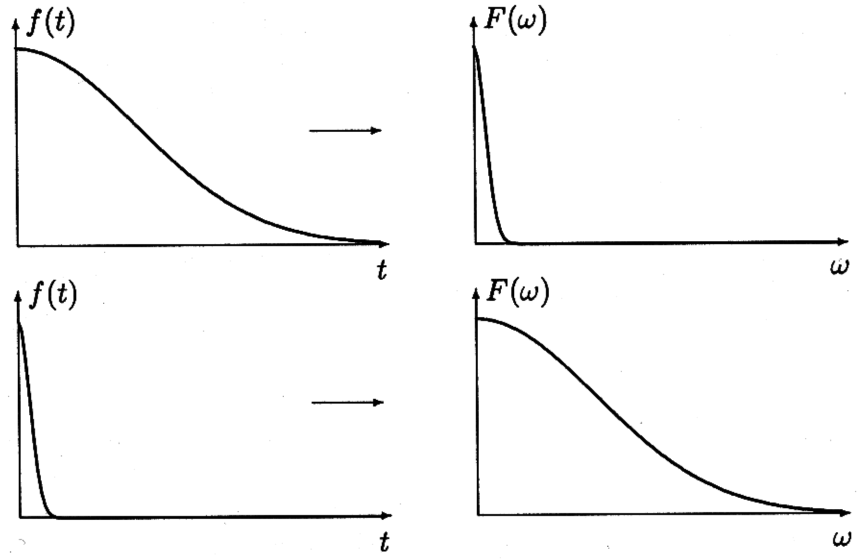
Signale und ihre Transformierten

Langsam variierende Signale :

- Schnell abfallende Transformierte
  - ➔ Kleines Frequenzspektrum

Schnell variierende Signale :

- Langsam abfallende Transformierte
  - ➔ Großes Frequenzspektrum



Technik der Fourier-Transformation

Zusammenfassung

- Kontinuierliche Transformation durchführbar mit periodischen und nicht-periodischen Signalen
- Transformierte des Signals (Spektrum) ist kontinuierlich
- Transformierte des Signals ist eine komplexe Größe
- Schnell variierende Signale haben langsam abfallende Transformierte

  und umgekehrt

Technik der Fourier-Transformation

Was beim Transformieren beachtet werden muß?

- Praktisch ist Integration über die Grenzen -∞ bis ∞ unmöglich

$$F(\omega) = \int_{-\cancel{\infty}}^{\cancel{\infty}} f(t)\ \exp(-i\omega t)\ dt$$

kein Signal kann unendlich lange aufgenommen werden

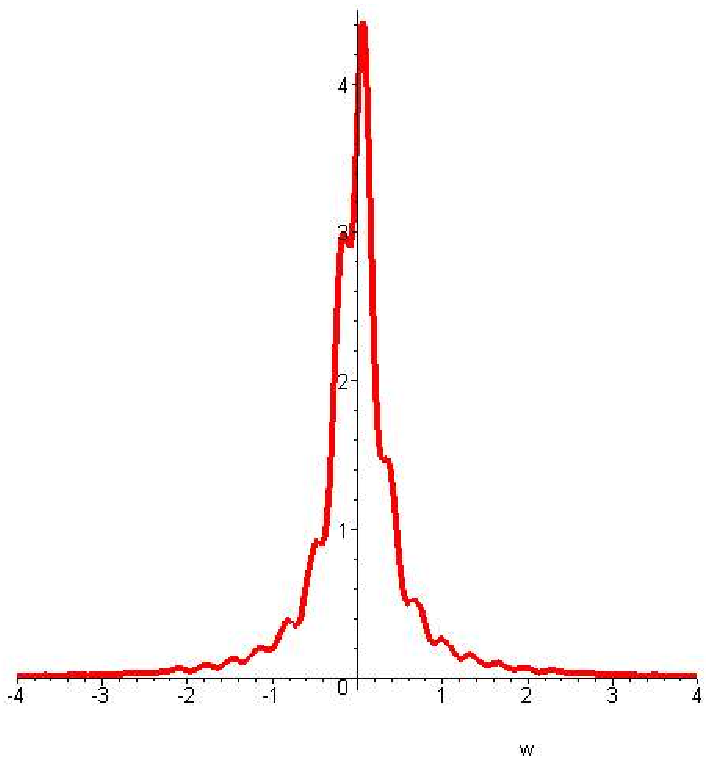
Abschneiden des Signals bei -T und T

$$F(\omega) = \int_{-T}^{T} f(t)\ \exp(-i\omega t)\ dt$$

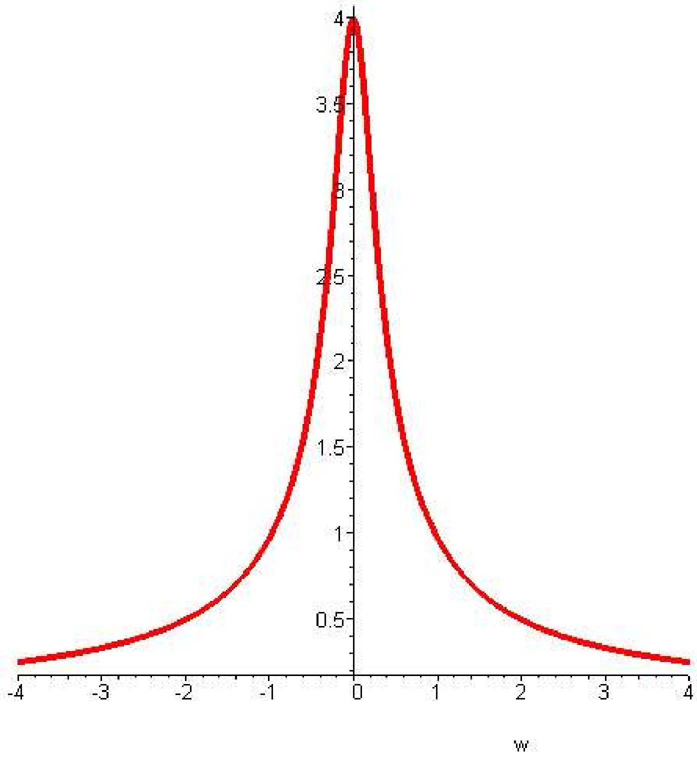
Technik der Fourier-Transformation

Fehler durch Abschneiden

- Betragsdarstellung des abgeschnittenen Meßsignals eines exponentiellen Zerfalls



- Betragsdarstellung des vollständigen Meßsignals eines exponentiellen Zerfalls

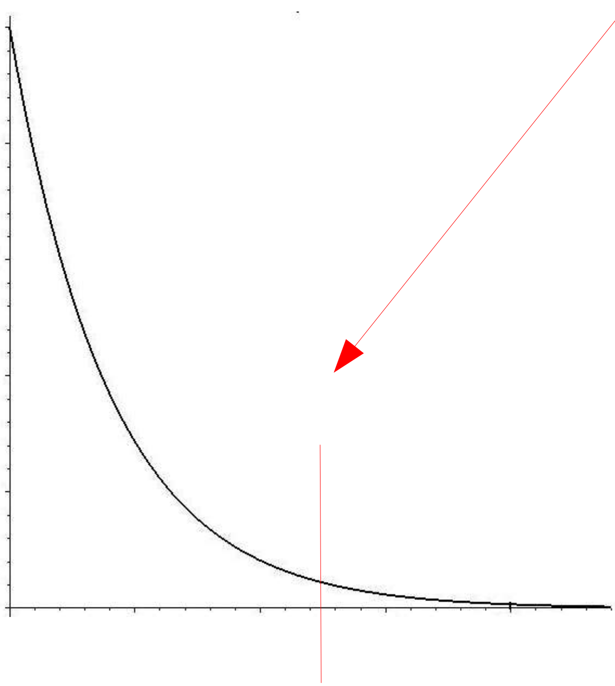


Technik der Fourier-Transformation

Mathematische Betrachtung

- Im Beispiel wurde folgende Funktion verwendet:

$$f(t) = \exp(-\frac{1}{4}t)$$



- Abschneiden der Funktion beim einem Funktionswert *f(t)=exp(-3)*

- Rechenbeispiel an einem exponentiellen Zerfall :

$$f(t) = \exp(-\lambda t)$$

Abgeschnitten :

$$F(\omega) = \int_0^T f(t)\exp(-i\omega t)dt$$

Unabgeschnitten :

$$F(\omega) = \int_0^\infty f(t)\exp(-i\omega t)$$

Technik der Fourier-Transformation

Abschneidefehler

- Als Ergebnis für die Transformation ergeben sich die Funktionen:

$$F(\omega) = \frac{\exp(-\lambda T)\exp(-i\omega T) - 1}{-\lambda - i\omega}$$

für das Abgeschnittene Signal

$$F(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\omega}$$

für das vollständige Signal

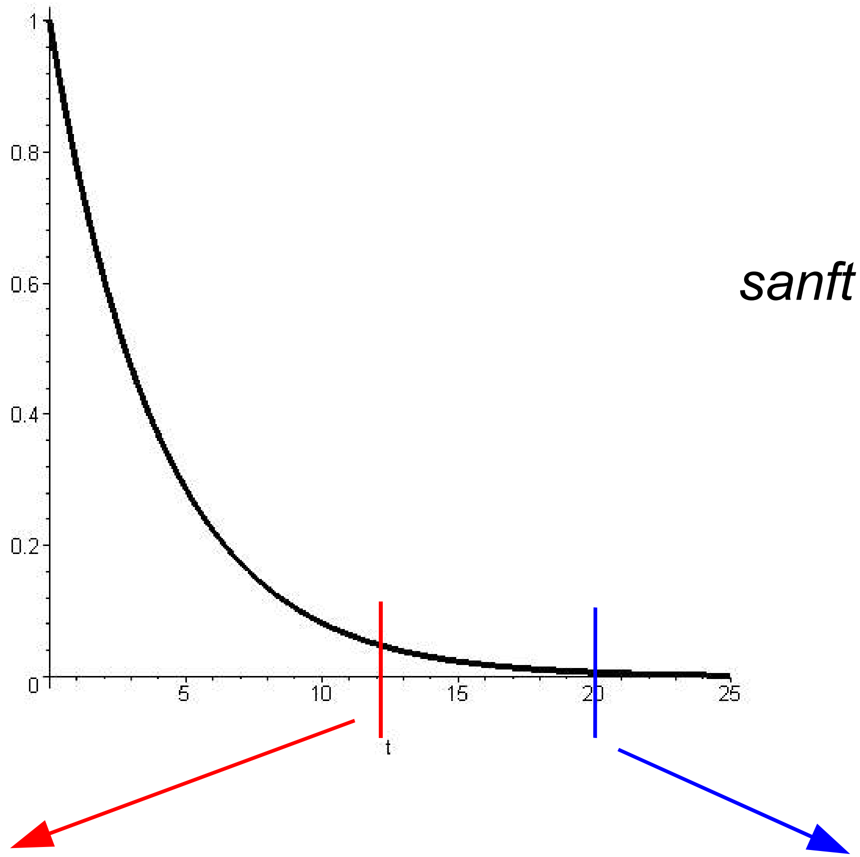
- Durch das Abschneiden hat man sich eine Oszilation eingefangen;

erkennbar, wenn man Euler-Beziehung einsetzt.

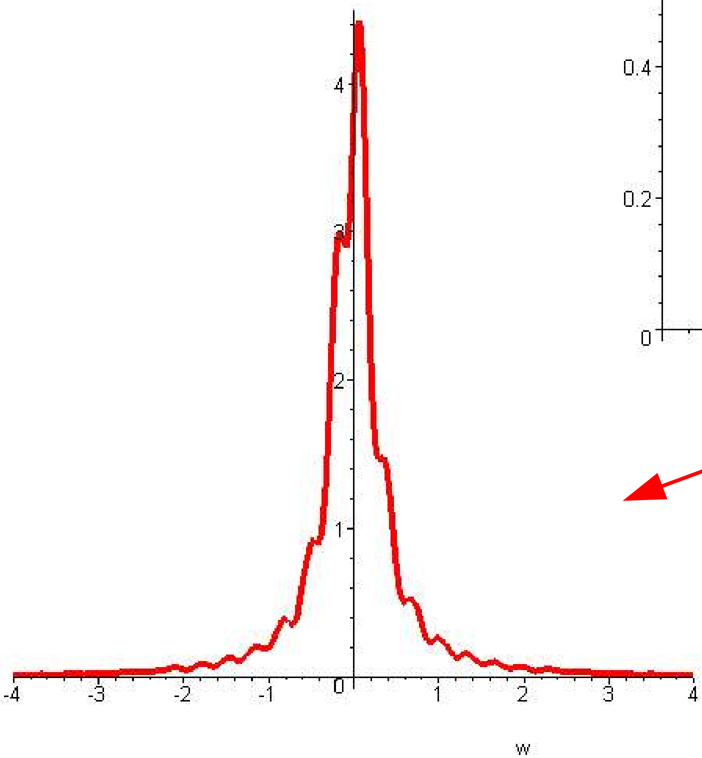
Wenn möglich nicht Abschneiden, schon gar nicht schlagartig oder unsanft

Technik der Fourier-Transformation

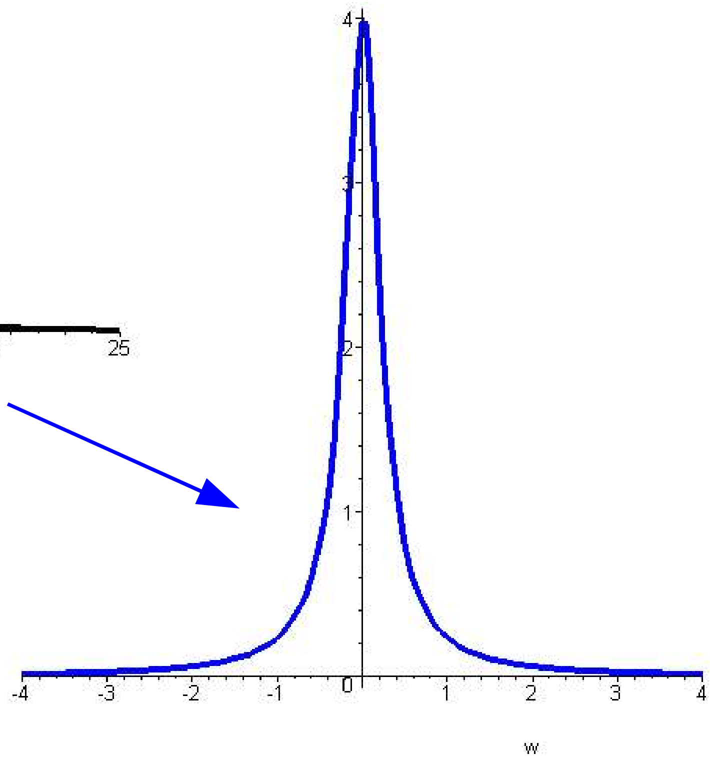
Abschneiden: Schlagartig und unsanft ?



Schlagartig und unsanft



sanft und zärtlich

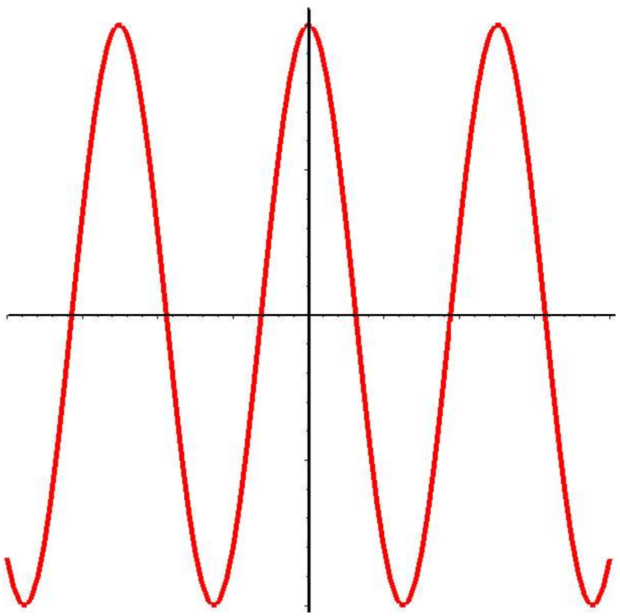


Technik der Fourier-Transformation

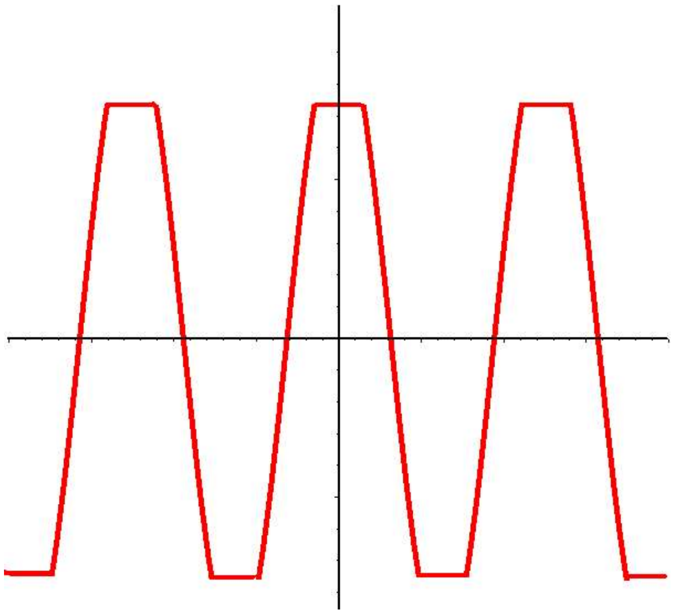
Abschneiden des Signals auf der y-Achse

- Wie geht das?
  - Einfach übersteuern

Was vorher so aussieht



sieht nachher so aus



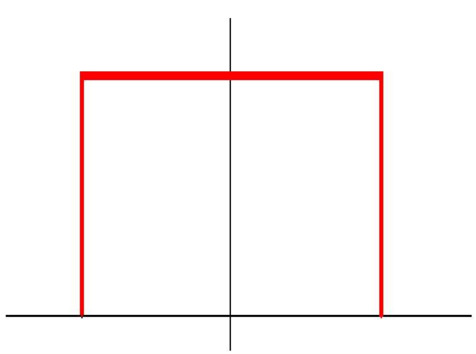
Technik der Fourier-Transformation

Was passiert dann ?

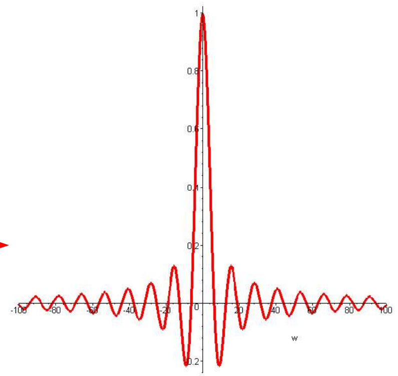
- Die E-Gitarre hört sich so gut an

Warum ?

- Fouriertransformation gibt Antwort:
  - Eckige Funktionen besitzen ein unendlich großes Frequenzspekrum
    - → Instrumente mit großem Spektrum klingen gut



Fouriertransformation



Technik der Fourier-Transformation

Digitalisierung

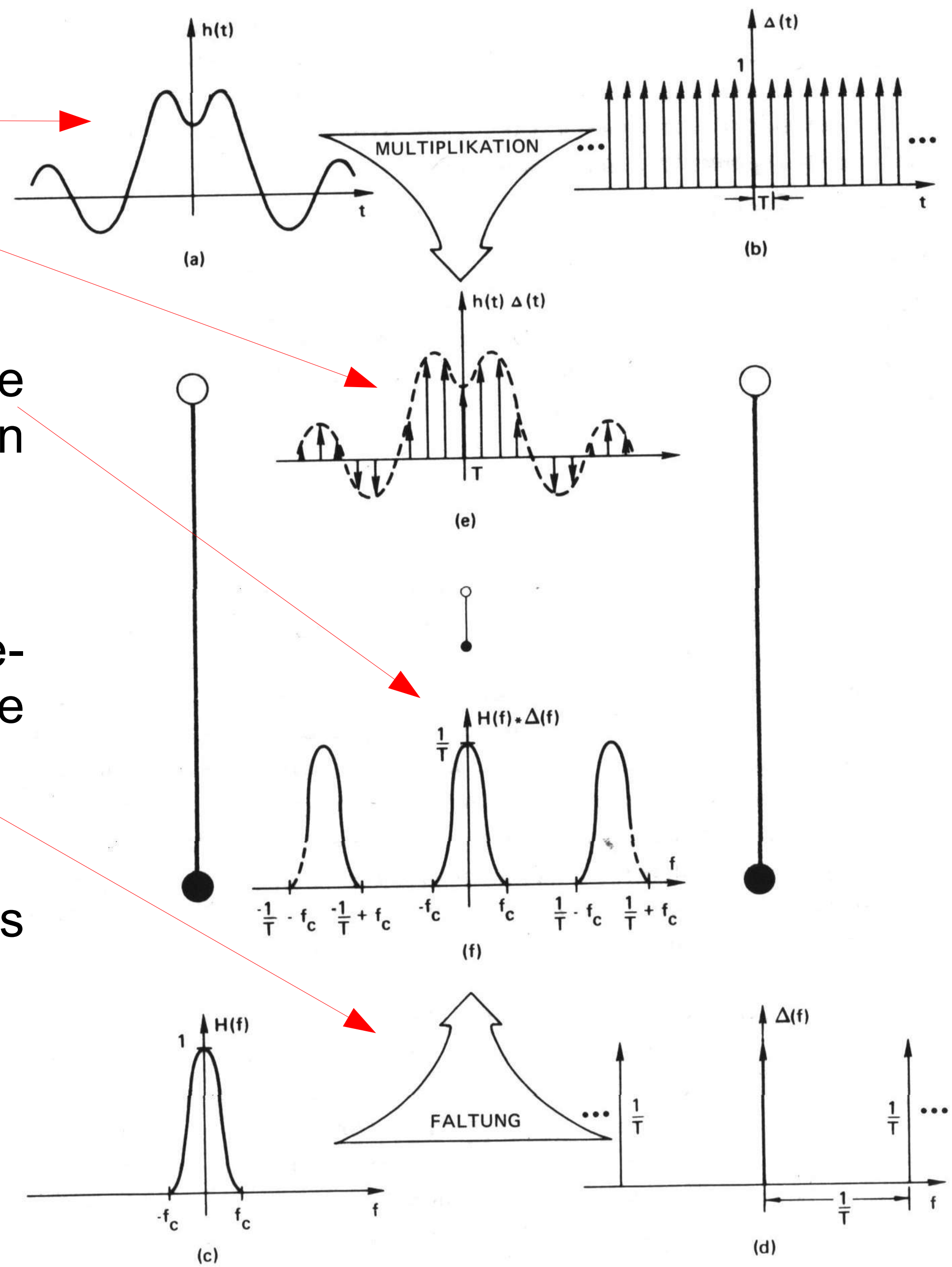
- Beispiel CD:
  - Kein kontinuierliches Signal auf der CD
    - ✗ Aber kontinuierliches Signal aus dem Hifi-Gerät

Wie gehts das?

Fouriertransformation

Technik der Fourier-Transformation

- Messsignal unbekannt
  - Nur Messpunkte bekannt
- Transformation der Messpunkte liefert kontinuierliches Signal in der Frequenzdomäne
- Durch eine Mathematische Operation erhält man Transformierte des Messsignal
- Rücktransformation liefert das Messsignal



Technik der Fourier-Transformation

- Signal ist vollständig durch Reihe an Messpunkten beschrieben

Voraussetzung:

- Die Abtastrate stimmt

Was bedeutet das ?

- Die Abtastrate bzw. Abtastfrequenz muss doppelt so groß sein, wie die maximale darzustellende Frequenz

Nyquist -Theorem

$$T_{Abtast} = \frac{1}{2 f_{\max}}$$

Technik der Fourier-Transformation

Zurück zum Beispiel CD

- Wir höhren maximal Töne bis 20 kHz
  - ➔ Nyquist sagt : Mindestens mit 40 kHz Abtasten $2 f_{Abtast} = f_{\max}$
    - ➔ 44 kHz ist die von der Industrie verwendete Abtastrate; entsprichtdem Speicherformat für Audiodateien auf bekannten Datenträger (CD, HDD ....)
      - ➔ Heißt alle 0,025 ms Abtasten
        - ➔ Ein 3 minütiges Lied besitzt 21.6 Mio Abtastwerte

Technik der Fourier-Transformation

Zusammenfassung

- Fourierreihe $$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) \right)$$
  - Bestimmung der Amplituden
- Kontinuierliche Transformation $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\omega t)\, dt$$
  - Die Transformierte erhält man durch einfaches Integrieren
- Messungen sind nie vollständig
  - daraus resultieren Fehler
  - Vermeidung der Fehler

Es gibt tatsächlich alltägliche Anwendungen,

die jeder benutzt, zum Teil ohne es zu wissen

Technik der Fourier-Transformation

Literatur

- BUTZ, Tillmann (2003), Fouriertransformation für Fußgänger
- BRIGHAM, E.Oran (1992), 5.Aufl., FFT Schnelle Fouriertransformation

Ende