
Dynamik Lokalisierter Strukturen mit Zeitverzögerung

Felix Tabbert

November 2014



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Lokalisierte Strukturen in zeitverzögerten Systemen	11
1.1 Lokalisierte Strukturen	11
1.2 Kontrolle durch zeitverzögerte Rückkopplung	15
1.3 Lineare Stabilitätsanalyse stationärer Lösungen mit zeitverzögerter Rückkopplung	17
1.3.1 Lineare Stabilitätsanalyse ohne Zeitverzögerung	18
1.3.2 Lineare Stabilitätsanalyse mit Zeitverzögerung	19
1.4 Goldstone-Moden	28
1.4.1 Bestimmung der Goldstone-Moden	29
1.4.2 Destabilisierung von Goldstone-Moden	31
2 Die Swift-Hohenberg-Gleichung mit Zeitverzögerung	35
2.1 Die Swift-Hohenberg-Gleichung	35
2.1.1 Die klassische Swift-Hohenberg-Gleichung	36
2.1.2 Die zeitverzögerte Swift-Hohenberg-Gleichung in optischen Systemen	38
2.2 Numerische Behandlung der zeitverzögerten Swift-Hohenberg-Gleichung	42
2.2.1 Direkte numerische Simulation	42
2.2.2 Numerische lineare Stabilitätsanalyse	45
2.3 Destabilisierung des homogenen Zustands	47
2.4 Destabilisierung lokalisierter Strukturen in einer Raumdimension . .	53
2.4.1 Einzelne lokalisierte Strukturen	53
2.4.2 Gebundene Zustände lokalisierter Strukturen	58

2.5	Destabilisierung lokalisierter Strukturen in zwei Raumdimensionen	69
2.5.1	Einzelne lokalisierte Strukturen	69
2.5.2	Gebundene Zustände lokalisierter Strukturen	71
2.6	Grenzen des behandelten Modells	84
3	Lokalisierte Strukturen in Systemen mit räumlichen Inhomogenitäten	87
3.1	Die Swift-Hohenberg-Gleichung mit Inhomogenitäten	89
3.2	Inhomogenitäten und Zeitverzögerung	92
3.3	Ausweitung der Untersuchung von Inhomogenitäten	99
	Zusammenfassung und Ausblick	101
	Literatur	105
	Anhang I: Rotationsinvarianz des Laplace-Operators	111
	Anhang II: Simulationsergebnisse	113

Einleitung

Selbstorganisierte lokalisierte Strukturen treten in einer Vielzahl komplexer Systeme auf, wobei sie kontextabhängig unterschiedlich bezeichnet werden. Allgemein werden lokalisierte Strukturen in dissipativen Systemen häufig als dissipative Solitonen bezeichnet [1], wobei diese Bezeichnung die, wenn auch begrenzte, Ähnlichkeit zu klassischen Solitonen betont. Darüber hinaus sind lokalisierte Strukturen in optischen Systemen auch als Kavitätssolitonen bekannt [2], die beispielsweise als transversale Strukturen in optisch gepumpten Oberflächenemittern auftreten [3].

In Systemen granularer Materie treten ähnliche Strukturen auf und werden Oszillogen genannt. Hierbei handelt es sich um formstabile einzelne Wellenpakete, welche sich bilden können, wenn granulare Materie durch eine vertikal oszillierende Platte zu Schwingungen angeregt wird [4, 5]. In magnetischen Fluiden werden lokalisierte Strukturen als Ferrosolitonen bezeichnet [6], während in chemischen und biologischen Systemen häufig von Spots oder Pulsen gesprochen wird [7, 8]. Beispiele lokalisierter Strukturen aus Natur, Neurologie und Optik sind in Abbildung E.1 zu sehen.

Aufgrund der Vielfältigkeit der beobachteten Phänomene ist die Erforschung der Entstehungsmechanismen und auch die gezielte Kontrolle sowohl lokalisierter als auch anderer selbstorganisierter Strukturen eines der zentralen Themen im Bereich der nichtlinearen Physik komplexer Systeme [12]. Die Kontrolle eines Systems durch zeitverzögerte Rückkopplung (engl.: time-delayed feedback control, im Folgenden: TDFC), welche auf die Arbeiten von E. Ott et al. [13] zurückgeht, bietet hierzu eine einfache Möglichkeit.

Die theoretische Untersuchung von TDFC ist aus zwei Gründen sinnvoll. Zum einen lässt sich die Kontrolltechnik sehr gut in realen Systemen experimentell umsetzen. Dies liegt zum Teil darin begründet, dass für eine erfolgreiche Implementierung von TDFC nur sehr wenig Vorwissen über das zu kontrollierende dynamische System notwendig

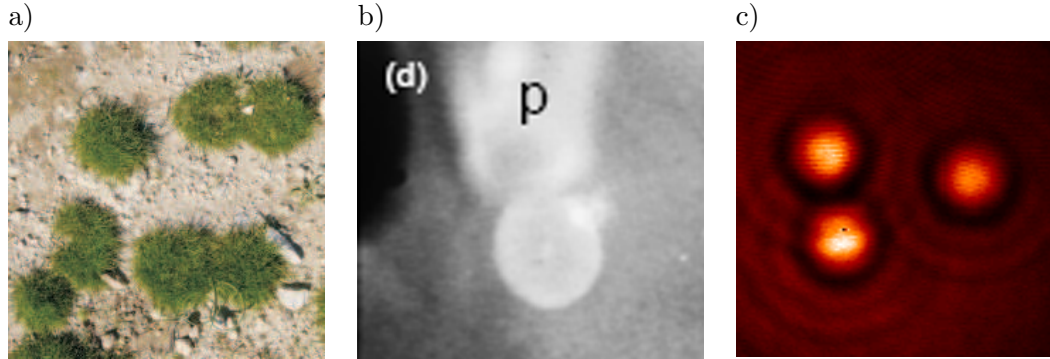


Abbildung E.1: Beispiele für lokalisierte Strukturen in verschiedenen komplexen Systemen: a) Vegetationsmuster aus der Wüste Negev [9]. b) Zirkulare Depolarisations-Welle in einer Hühner-Retina [10]. c) Optische Solitonen in Alkalimetall-Dampf [11].

ist [12]. Die Wirkung des Kontrollmechanismus ist abhängig von systeminternen Größen und muss nicht von außen vorgegeben werden. TDFC wurde bereits in einer Vielzahl von Systemen experimentell umgesetzt, unter anderem in chaotischen Taylor-Couette-Strömungen [14], in Gasentladungssystemen [15], in mechanischen Pendeln [16], aber auch in optischen Systemen [17], welche den experimentellen Hintergrund für die im zweiten Kapitel untersuchte zeitverzögerte Swift-Hohenberg-Gleichung bilden. Zum anderen tritt Zeitverzögerung natürlicherweise in Systemen mit begrenzter Signalgeschwindigkeit auf. Beispielsweise entsteht in der Neurophysik durch die begrenzte Übertragungsgeschwindigkeit eines Signals zwischen zwei Neuronen ein Zeitverzögerungseffekt [18].

TDFC wurde ursprünglich von K. Pyragas vorgeschlagen, um in dynamischen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen instabile Grenzzyklen zu stabilisieren [19] und wurde ebenfalls erfolgreich zur Stabilisierung instabiler Fixpunkte eingesetzt [20]. Der Kontrollmechanismus wurde jedoch auch bereits auf räumlich ausgedehnte Systeme partieller Differentialgleichungen angewandt. Als Beispiele seien die Kontrolle von chaotischen lokalisierten Strukturen [21], oder die Stabilisierung instabiler Strukturen, die in einer subkritischen Hopf-Bifurkation entstehen [22], genannt. Weitere Beispiele umfassen die Untersuchung des Einflusses von TDFC auf Reaktions-Diffusions-Systeme: In einem Gray-Scott-Modell konnte der Übergang von laufenden

Wellen zu stationären Turing-Mustern beschrieben werden [23]. In [24] wurde der Einfluss von TDFC auf Strukturbildungsprozesse in Plankton-Systemen untersucht, welche ebenfalls durch ein Reaktions-Diffusions-Modell beschrieben werden können. Zudem wurde unter anderem bereits die Destabilisierung lokalisierter Strukturen in einem Fitzhugh-Nagumo-Modell untersucht [25, 26]. Lokalisierte Strukturen unter dem Einfluss von TDFC in einem Swift-Hohenberg-Modell, welches im zweiten Kapitel verwendet wird, wurden unter anderem in [27, 28] behandelt. Insgesamt handelt es sich bei der Anwendung zeitverzögerter Rückkopplung auf komplexe selbstorganisierte Strukturen um ein relativ neues Forschungsfeld, weshalb der Einfluss von TDFC auf solche Strukturen zu großen Teilen noch unerforscht ist.

In der vorliegenden Arbeit soll daher der Einfluss zeitverzögerter Rückkopplung auf stationäre lokalisierte Strukturen in räumlich ausgedehnten Systemen untersucht werden.

Hierzu wird im ersten Kapitel das allgemeine Konzept lokalisierter Strukturen vorgestellt und eine Abgrenzung zu klassischen Solitonen in konservativen Systemen vorgenommen. Anschließend wird das Kontrollschema der zeitverzögerten Rückkopplung eingeführt und auf die zu betrachtenden Systeme angewandt. In Abschnitt 1.3 wird erläutert, wie für stationäre lokalisierte Lösungen eine lineare Stabilitätsanalyse unter Berücksichtigung der zeitverzögerten Rückkopplung durchgeführt werden kann. Hierbei wird auch auf die Möglichkeit eingegangen, durch TDFC einen Stabilitätswechsel der Struktur herbeizuführen, wobei die Stabilisierung instabiler Lösungen und die Destabilisierung stabiler Lösungen getrennt voneinander betrachtet werden. Außerdem wird zwischen Systemen mit Gradientenstruktur und solchen ohne Gradientenstruktur unterschieden. Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels wird die Destabilisierung sogenannter Goldstone-Moden behandelt. In Anlehnung an das Goldstone-Theorem der Elementarteilchenphysik [29] kann die Existenz und die Form dieser neutral stabilen Eigenfunktionen aus den Symmetrieeigenschaften des betrachteten Systems abgeleitet werden.

Im zweiten Kapitel der Arbeit werden die gewonnenen Erkenntnisse auf ein konkretes Beispiel angewandt. Bei dem betrachteten System handelt es sich um eine Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung [25], welche die Strukturbildung in der Strahlungsamplitude in einem nichtlinearen Resonator in transversaler Richtung be-

schreibt. Die Vorteile dieses System liegen zum einen darin, dass die zugrunde liegende Swift-Hohenberg-Gleichung ohne Zeitverzögerung bereits vielfach intensiv untersucht wurde [30], sodass sowohl die analytische als auch die numerische Behandlung der Gleichung bekannt sind. Die Auswirkungen der zeitverzögerten Rückkopplung lassen sich an diesem Beispiel daher gut isoliert untersuchen. Zum anderen ist es von Vorteil, als Beispielmmodell ein System aus der nichtlinearen Optik zu wählen, da in diesem Bereich die experimentelle Umsetzung der zeitverzögerten Kontrolle von lokalisierten Strukturen besonders weit fortgeschritten ist. Lokalisierte Strukturen lassen sich in Oberflächenemittern (vertical-cavity surface-emitting laser, kurz „VCSEL“) realisieren, welche durch einen weiteren Laser optisch gepumpt werden [3]. Aufgrund der geringen Beugung des austretenden Lichts lassen sich die Strukturen gut untersuchen und es ist zudem möglich, durch eine geeignete Spiegelkonstruktion außerhalb des Resonators eine zeitverzögerte Rückkopplung zu erzeugen [31].

Nach einer kurzen Vorstellung der Swift-Hohenberg-Gleichung und ihrer Eigenschaften wird im weiteren Verlauf des zweiten Kapitels die numerische Behandlung der zeitverzögerten Gleichung erläutert. Diese umfasst die numerische Durchführung der linearen Stabilitätsanalyse und die Erstellung von direkten numerischen Zeitsimulationen. Anschließend wird die Destabilisierung der homogenen Lösung des Systems wie auch die Destabilisierung lokalisierter Lösungen untersucht. Hierbei werden die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse mit direkten numerischen Simulationen verglichen. Die Untersuchung lokalisierter Strukturen findet dabei in einer und in zwei Raumdimensionen statt. Neben einzelnen lokalisierten Strukturen werden auch Paare lokalisierter Strukturen untersucht, welche einen gebundenen Zustand bilden können. Die Untersuchung der Eigenschaften und der Destabilisierung dieser gebundenen Zustände stellt einen Schwerpunkt dieser Arbeit dar. Sowohl für einzelne als auch für gebundene lokalisierte Strukturen kann abhängig von den gewählten Kontrollparametern der TDFC eine Vielzahl unterschiedlicher Dynamiken induziert werden. Am Ende des zweiten Kapitels werden die Grenzen der verwendeten Methoden und die Aussagekraft der Resultate für reale optische Experimente diskutiert.

Auf der Grundlage der Ergebnisse des zweiten Kapitels wird im letzten Kapitel der Arbeit eine Möglichkeit zur Erweiterung des untersuchten Systems vorgestellt. Durch die Berücksichtigung räumlicher Inhomogenitäten soll eine weitere Anpassung des ver-

wendeten Modells an reale optische Experimente erreicht werden. Solche räumlichen Inhomogenitäten oder Defekte sind zum einen in realen Systemen unvermeidlich. Zum anderen ist es möglich durch die gezielte Implementierung von Defekten die Dynamik lokalisierter Strukturen zu kontrollieren [3]. Räumliche Inhomogenitäten brechen explizit kontinuierliche Symmetrien des Systems und beeinflussen somit die Goldstone-Moden der lokalisierten Lösungen. Zudem können sie eine attraktive Wirkung auf lokalisierte Strukturen ausüben und die induzierte Dynamik so verändern. Im dritten Kapitel werden erste Ergebnisse für lokalisierte Strukturen vorgestellt, welche auf einem Defekt gepinnt sind. Darüber hinaus werden Ansätze zur weiteren Untersuchung der Wirkung von Defekten und zeitverzögerter Rückkopplung auf lokalisierte Strukturen diskutiert.

1 Lokalisierte Strukturen in zeitverzögerten Systemen

In diesem Kapitel sollen zunächst lokalisierte Strukturen in räumlich ausgedehnten Nichtgleichgewichtssystemen vorgestellt und der Unterschied zu klassischen Solitonen herausgearbeitet werden. Anschließend wird das Konzept der Kontrolle durch zeitverzögerte Rückkopplung vorgestellt. Abschließend werden die Möglichkeiten zur Stabilisierung bzw. Destabilisierung stationärer Lösungen durch zeitverzögerte Rückkopplung diskutiert. Hierbei werden noch keine Annahmen über die genaue Form des betrachteten Systems gemacht. Stattdessen wird aufgezeigt, wie aus allgemeinen Symmetrieeigenschaften des Systems auf die Existenz neutral-stabiler Goldstone-Moden geschlossen werden kann, und wie diese durch zeitverzögerte Rückkopplung beeinflusst werden.

1.1 Lokalisierte Strukturen

Lokalisierte Strukturen treten, wie in der Einleitung beschrieben, in einer Vielzahl dissipativer Nichtgleichgewichtssysteme auf und werden daher auch häufig als dissipative Solitonen bezeichnet [1]. Auch wenn der Ausdruck „dissipatives Soliton“ die Ähnlichkeit lokalisierter Strukturen zu klassischen Solitonen nahelegt, gibt es doch eine Reihe von Unterschieden, auf die es sich hinzuweisen lohnt.

Klassische Solitonen wurden zuerst theoretisch von Zabusky und Kruskal 1965 als Lösungen der Korteweg-de-Fries-Gleichung beschrieben [32]. Bei Solitonen bzw. solitären Wellen handelt es sich um formstabile Wellenpakete, welche sich in einem nichtlinearen Medium ausbreiten. Im Gegensatz zu solitären Wellen verhalten sich klassische Solitonen auch nach der Kollision mit anderen Solitonen formstabil [33].

Entscheidend für die Entstehung eines Solitons ist hierbei das Zusammenspiel von Dispersion, welche ein Auseinanderlaufen des Pakets verursacht, und einer Nichtlinearität, welche dieses Auseinanderlaufen kompensiert. Unter Dispersion versteht man hierbei, dass die Phasengeschwindigkeit \mathbf{v} der Welle von der Wellenzahl \mathbf{k} abhängt. Gleichzeitig kann die Phasengeschwindigkeit in nichtlinearen Systemen von der Höhe der Welle h abhängen. Kompensieren sich nun diese beiden Effekte, kann ein formstabiles lokalisiertes Wellenpaket entstehen, welches als Soliton bezeichnet wird.

Klassische Solitonen treten in integrablen Systeme auf, deren Lösungen beispielsweise mit Hilfe der inversen Streutheorie bestimmt werden können. Hierbei entsteht nicht ein bestimmtes Soliton als einzig mögliche Lösung. Vielmehr existieren in der Regel Lösungsfamilien, deren einzelne Lösungen sich beispielsweise in Höhe und Breite unterscheiden [1]. Welche dieser Lösungen realisiert wird, hängt von den Anfangsbedingungen ab (vergl. Abb. 1.1).

Lokalisierte großamplitudige Lösungen werden jedoch nicht nur in integrablen Systemen beobachtet. Auch realistischere physikalische Modelle, in denen zusätzliche zum Teil nichtkonservative Terme auftreten, zeigen ähnliche Lösungen, welche sich jedoch nur zum Teil wie klassische Solitonen verhalten und daher eine verallgemeinerte Theorie solcher lokalisierter Strukturen (oder auch dissipativer Solitonen) nötig machen [1].

Neben dem Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität muss nun in nichtkonservativen Systemen noch ein Gleichgewicht zwischen Energiezufuhr und Energiedissipation hergestellt werden, damit eine lokalisierte Lösung dauerhaft formstabil bleibt. In dynamischen Nichtgleichgewichtssystemen, in denen Energie sowohl dissipiert als auch von außen zugeführt wird, entscheiden also zwei Balancen über das Auftreten lokalisierter Lösungen. Es existiert daher in der Regel keine Lösungsfamilie verschiedener lokalisierter Strukturen, sondern lediglich einzeln auftretende lokalisierte Lösungen (siehe Abb. 1.1) im Phasenraum des Systems. Beispielsweise die Breite oder Höhe der lokalisierten Struktur wird nicht durch gewählte Anfangsbedingungen festgelegt, sondern ist bereits durch das komplexe Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität auf der einen Seite, sowie Energiezufuhr und Dissipation auf der anderen Seite festgelegt.

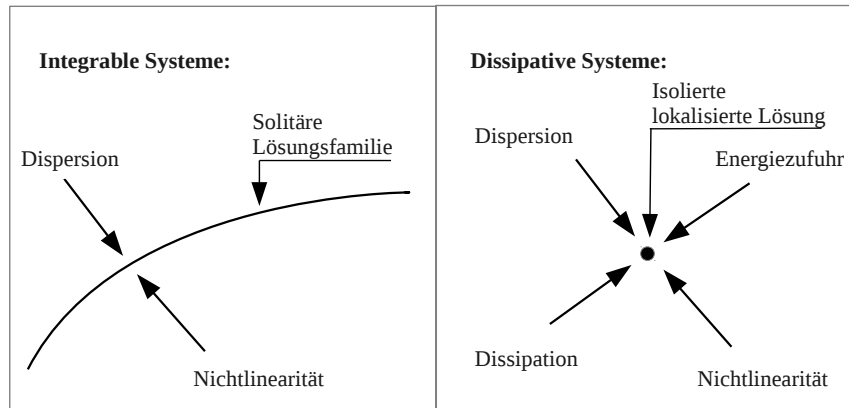


Abbildung 1.1: Qualitativer Unterschied zwischen klassischen Solitonen in integrablen Systemen und lokalisierten Strukturen in dissipativen Systemen. In integrablen Systemen sind solitäre Lösungen das Resultat einer Balance zwischen Dispersion und Nichtlinearität. Es existiert, abhängig von den Anfangsbedingungen, eine Familie von solitären Lösungen. In dissipativen Systemen sind lokalisierte Strukturen das Resultat zweier Balancen, nämlich zwischen Dispersion und Nichtlinearität, aber auch zwischen Energiezufuhr und Energiedissipation. Es existieren daher im allgemeinen nur einzelne Lösungen mit festen Eigenschaften, die nicht durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen variiert werden können. Es ist jedoch möglich, dass mehrere unabhängige lokalisierte Lösungen für die selben Parameter existieren. Welche dieser Lösungen realisiert wird, hängt von den gewählten Anfangsbedingungen ab [1].

Mathematisch entspricht eine solche lokalisierte Lösung einem Attraktor in einem unendlich-dimensionalen Phasenraum, wobei es sich bei dem Attraktor im Fall einer stationären lokalisierten Struktur um einen Fixpunkt des Systems handelt. Möglich sind auch periodisch pulsierende lokalisierte Strukturen, welche einem periodischen Orbit im Phasenraum entsprechen. Hierbei wird der oben beschriebene Unterschied zu klassischen Solitonen in integrablen Systemen deutlich: Existiert in einem solchen dynamischen Nichtgleichgewichtssystem eine stabile stationäre lokalisierte Lösung, d.h. ein stabiler Fixpunkt im Phasenraum, laufen alle Trajektorien in einem bestimmten Bereich des Phasenraums in diesen Fixpunkt. Unterschiedliche Anfangsbedingungen, welche in dem Attraktionsbereich des Fixpunkts liegen, resultieren damit in der glei-

chen lokalisierten stationären Lösung (vergl. Abb. 1.1). Dies ist in einem integrierbaren System nicht möglich, da in konservativen Systemen keine Phasenraumkontraktion stattfindet und somit auch keine attraktiven Fixpunkte, Grenzzyklen oder seltsame Attraktoren existieren [34].

In räumlich ausgedehnten dynamischen Systemen mit lokalisierten stationären Lösungen existieren in der Regel weitere Fixpunkte, d.h. weitere stationäre Lösungen. In translationsinvarianten Systemen, welche einzelne lokalisierte Lösungen besitzen, zählt hierzu notwendigerweise eine stabile räumlich homogene Lösung, da ohne diesen stabilen „Hintergrund“ keine isolierten lokalisierten stabilen Lösungen möglich wären. Es handelt sich bei den lokalisierten Lösungen jedoch in der Regel um großamplitudige Lösungen, die nicht mit der homogenen Lösung über eine superkritische Bifurkation verbunden sind, sondern in subkritischen Bifurkationen entstehen [35]. Zusätzlich zu der homogenen stationären Lösung können jedoch auch weitere lokalisierte Strukturen oder Cluster mehrerer lokalisierter Strukturen im selben Parameterbereich existieren.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf räumlich ausgedehnten komplexen Systemen, welche lokalisierte Strukturen als stationäre Lösungen besitzen. Die zeitliche Entwicklung eines Sets von Zustandsvariablen $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wird hierbei durch ein System partieller Differentialgleichungen

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.1)$$

beschrieben, wobei $\mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$ eine Funktion darstellt, welche sowohl räumliche Ableitungen von $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ als auch Terme nichtlinear in $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ enthält.

Es wird nun davon ausgegangen, dass für das beschriebene System (1.1) stationäre Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\partial_t \mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (1.2)$$

existieren, wobei zu den stationären Lösungen mindestens eine räumlich homogene Lösung sowie mehrere lokalisierte Lösungen zählen. Die Stabilität der vorhandenen Lösungen wird an dieser Stelle zunächst offen gelassen.

Da lokalisierte Lösungen von der nichtlinearen Optik [36] bis hin zur Neurophysik

[37] in einer Vielzahl unterschiedlicher Kontexte beobachtet werden (siehe Abbildung E.1), ist ihre theoretische Beschreibung sowohl für Anwendungen als auch für Grundlagenforschung von großer Bedeutung. Insbesondere die Kontrolle selbstorganisierter Strukturen hat sich in den letzten Jahren als wichtiger Bestandteil angewandter nichtlinearer Forschung etabliert [12]. Im Folgenden soll daher die Kontrollmethode der zeitverzögerten Rückkopplung dargestellt werden und untersucht werden, inwiefern die Stabilitätseigenschaften lokalisierter Strukturen gezielt verändert werden können.

1.2 Kontrolle durch zeitverzögerte Rückkopplung

Die Kontrolle dynamischer Systeme durch gezielte Nutzung von zeitverzögerter Rückkopplung (TDFC) wurde zuerst 1990 von E. Ott et al. vorgeschlagen [13]. In der hier verwendeten Form wurde TDFC zuerst 1992 von K. Pyragas verwendet [19], und wird daher auch als Pyragas-Kontrolle sowie zum Teil als Autosynchronisation bezeichnet.

Die Idee der TDFC besteht darin, ein dynamisches System nicht durch das Hinzufügen einer externen Kraft zu beeinflussen, sondern systemintern eine Rückkopplungsschleife zur Kontrolle des Systems zu nutzen. Angewandt auf ein dynamisches System

$$\partial_t \mathbf{q}(t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(t)] \quad (1.3)$$

bedeutet dies, dass aus dem Systemzustand $\mathbf{q}(t)$ zum Zeitpunkt t ein Kontrollsignal $\mathbf{s}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{q}(t)]$ gebildet wird (siehe Abbildung 1.2), wobei $\mathbf{g}[\mathbf{q}(t)]$ zunächst eine nicht näher festgelegte Funktion des Systemzustands $\mathbf{q}(t)$ ist. Anschließend wird die Differenz zwischen dem Kontrollsignal $\mathbf{s}(t)$ und dem zeitverzögerten Kontrollsignal $\mathbf{s}(t - \tau)$ gebildet. Diese Differenz wird, gewichtet mit der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$, in die Dynamik des Systems eingespeist, sodass sich folgendes System zeitverzögerter Differentialgleichungen ergibt:

$$\partial_t \mathbf{q}(t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(t)] + \underline{\underline{K}}[\mathbf{s}(\mathbf{q}(t)) - \mathbf{s}(\mathbf{q}(t - \tau))]. \quad (1.4)$$

Die Zustandsvariablen $\mathbf{q}(t)$ können hierbei auch von räumlichen Koordinaten \mathbf{x} abhängen. Es spielt für die Form des TDFC-Terms daher keine Rolle, ob es sich bei dem behandelten System wie im Folgenden angenommen um partielle Differentialgleichungen handelt, oder ob TDFC wie ursprünglich von Pyragas vorgeschlagen [19] auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt wird.

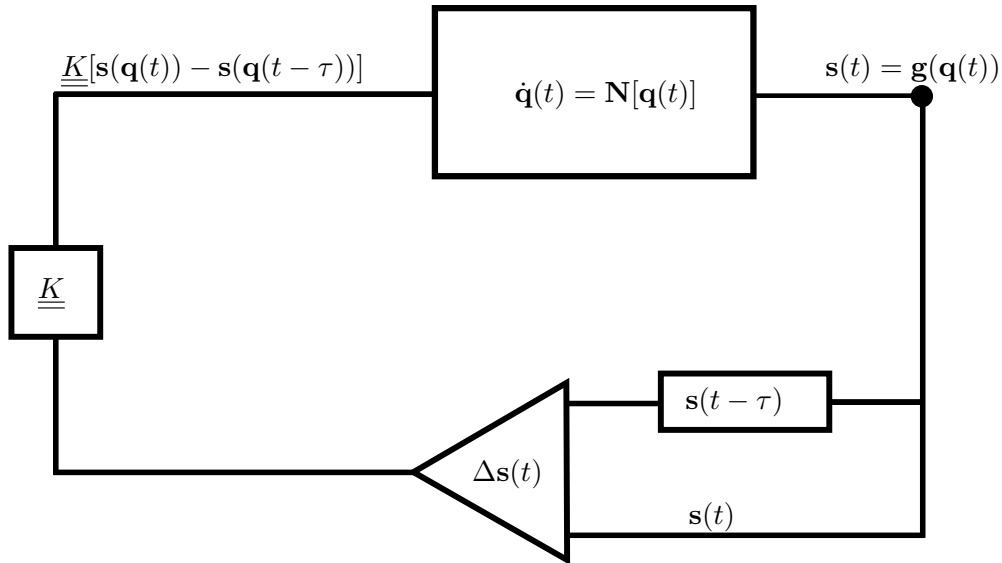


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der TDFC. Aus dem Systemzustand $\mathbf{q}(t)$ wird ein Kontrollsignal $\mathbf{s}(t)$ gebildet. Die Differenz aus dem Kontrollsignal zum Zeitpunkt t und dem Signal zum Zeitpunkt $t - \tau$ wird gewichtet mit der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ wieder in das dynamische System $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(t)]$ eingespeist und beeinflusst so die Dynamik des Systemzustands $\mathbf{q}(t)$.

TDFC wird häufig als nichtinvasive Kontrolltechnik zur Stabilisierung von Fixpunkten oder periodischen Orbits bezeichnet. Der Kontrollterm verschwindet, wenn ein stabiler Fixpunkt des Systems erreicht wird. Erreicht das System einen periodischen Orbit, verschwindet der Kontrollterm ebenfalls, wenn die Delay-Zeit τ einem Vielfachen der Periodendauer T des Orbits entspricht. Auch für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ist festzuhalten, dass TDFC die stationären Zustände eines Systems nicht verändert, da für jede stationäre Lösung des Systems ohne TDFC der Kontrollterm verschwindet. Es ist jedoch möglich, durch TDFC die Stabilität stationärer Lösungen

zu ändern, was das Hauptthema der weiteren Arbeit sein wird.

Ein weiterer Vorteil der TDFC liegt darin, dass der in Gleichung (1.4) allgemein dargestellte Kontrollmechanismus viele unterschiedliche Möglichkeiten zur Modifikation eines Systems bietet: Zunächst können je nach Bedarf unterschiedliche Kontrollsignale $\mathbf{s}(t)$ verwendet werden. Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$, welche ein Maß für die Delay-Stärke darstellt kann als skalare Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}} = \alpha \cdot \underline{\underline{1}}$ gewählt werden [26]. Die Kopplung ist in diesem Fall diagonal, jede Komponente von $\mathbf{q}(t)$ koppelt also nur an sich selbst. Die Delay-Stärke wird durch einen einzigen Skalar α festgelegt. Komplexere Formen von TDFC können durch die Einführung einer nichtskalaren Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ realisiert werden [23, 38]. Neben der Variation der Delay-Zeit τ bietet die Verwendung mehrerer Delay-Zeiten τ_n eine Möglichkeit zur Erweiterung des Kontrollmechanismus [39, 40].

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit wird der Einfluss von TDFC mit einer einzelnen Delay-Zeit τ und einer skalaren Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}} = \alpha \cdot \underline{\underline{1}}$ auf räumlich ausgedehnte Systeme untersucht. Als Kontrollsignal wird der Systemzustand selbst verwendet, d.h. $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$. In allgemeiner Form lassen sich die im Folgenden behandelten Systeme daher wie folgt darstellen:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] + \alpha [\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)]. \quad (1.5)$$

Ziel dieser Arbeit ist es, Möglichkeiten zur Einflussnahme auf die Dynamik lokalisierter Strukturen durch TDFC aufzuzeigen. Im Folgenden soll daher die Stabilität stationärer und insbesondere stationärer lokalisierter Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ von Gleichung (1.5) in Abhängigkeit von der Delay-Stärke α und der Delay-Zeit τ untersucht werden.

1.3 Lineare Stabilitätsanalyse stationärer Lösungen mit zeitverzögerter Rückkopplung

Im folgenden Abschnitt soll die lineare Stabilität stationärer Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ von Gleichung (1.5) untersucht werden. Hierzu wird eine kleine Störung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ der

stationären Lösung betrachtet:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Einsetzen dieses Ansatzes in Gleichung (1.5) unter Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme in $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ führt auf das linearisierte Problem

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau)], \quad (1.7)$$

hierbei ist $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ ein linearer Operator, der sich durch die Linearisierung von $\mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$ um $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ ergibt.

1.3.1 Lineare Stabilitätsanalyse ohne Zeitverzögerung

Möchte man zunächst die Stabilität der betrachteten stationären Lösung ohne TDFC (d.h. $\alpha = 0$ oder $\tau = 0$) bestimmen, so ist es sinnvoll, die Störung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ des Operators $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ zu zerlegen:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k e^{\mu_k t} \varphi_k(\mathbf{x}). \quad (1.8)$$

Voraussetzung für diese Zerlegung ist, dass die Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ eine vollständige Basis des zugrunde liegenden Hilbert-Raums bilden. Die Wachstumsrate der einzelnen Eigenfunktionen ist hierbei durch den Eigenwert μ_k der entsprechenden Eigenfunktion gegeben. Für die Bestimmung der Stabilität des stationären Zustands $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ ist es daher nötig, das lineare Eigenwertproblem

$$\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] \varphi_k(\mathbf{x}) = \mu_k \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

zu lösen, welches sich direkt durch Einsetzen von (1.8) in (1.7) im Fall $\alpha = 0$ ergibt.

Die stationäre Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ ist linear stabil, wenn für alle Eigenwerte des linearisierten Systems gilt: $\text{Re}(\mu) < 0$. Gilt für mindestens einen Eigenwert $\text{Re}(\mu) > 0$ ist die Lösung instabil. In diesem Fall wächst die dem Eigenwert zugeordnete Eigenfunktion exponentiell an, d.h. die lineare Näherung kleiner Störungen verliert schnell ihre Gültigkeit und nichtlineare Effekte müssen zur Beschreibung der weiteren Dynamik

berücksichtigt werden.

Gilt für alle Eigenwerte $\text{Re}(\mu) \leq 0$, existiert also mindestens ein Eigenwert mit verschwindendem Realteil, so kann im Rahmen der linearen Stabilitätsanalyse keine Aussage über die Stabilität der stationären Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ getroffen werden. Im Allgemeinen muss in diesem Fall eine schwach nichtlineare Analyse des stationären Zustands durchgeführt werden, da bei verschwindendem linearen Anteil die ersten nichtlinearen Terme in $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ über das Anwachsen oder Abfallen der Störung entscheiden. Ergibt sich aus der nichtlinearen Analyse, dass Störungen des stationären Zustands zerfallen, bezeichnet man diesen als neutral-stabil.

Einen Sonderfall bilden sogenannte Goldstone-Moden (siehe Abschnitt 1.4). Hierbei handelt es sich um Eigenfunktionen, welche aufgrund von Symmetrieeigenschaften des Systems den Eigenwert $\mu = 0$ besitzen. Aus Symmetriegründen ist hier sogar ohne weitere nichtlineare Analyse ersichtlich, dass ein System, welches Goldstone-Moden als Moden mit dem größten Eigenwert besitzt, neutral-stabil gegen Störungen in Form dieser Moden ist.

1.3.2 Lineare Stabilitätsanalyse mit Zeitverzögerung

Geht man nun zur linearen Stabilitätsanalyse der stationären Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ unter dem Einfluss von TDFC über, so stellt sich die Analyse des Falles ohne TDFC als notwendige Vorarbeit heraus, auf Grund derer die lineare Stabilität im Falle mit TDFC ableitbar ist.

Im Fall der hier diskutierten skalaren Kopplung ist leicht erkennbar, dass jede Eigenfunktion $\varphi_k(\mathbf{x})$ des linearisierten Operators $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ gleichzeitig eine Eigenfunktion der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}} = \alpha \cdot \underline{\underline{1}}$ und damit auch des gesamten Systems darstellt. Für die lineare Stabilitätsanalyse des Systems mit TDFC ist es daher lediglich nötig, die neuen Eigenwerte λ_k der bereits bekannten Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ zu berechnen.

Wird eine nichtskalare Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ verwendet, gestaltet sich die Analyse komplizierter. Für den Fall, dass die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{K}}$ und der linearisierte Operator $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ kommutieren, lässt sich jedoch eine gemeinsame Basis an Eigenfunktionen finden und die Analyse lässt sich in dieser Basis durchführen [41]. Im Folgenden soll nur der Fall skalarer Kopplung behandelt werden, in dem jede Basis

des linearisierten Systems ohne TDFC trivialerweise auch als Basis des vollständigen Systems mit TDFC verwendet werden kann.

In diesem Fall wird analog zum Vorgehen ohne TDFC die Störung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in die Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ des Operators $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ zerlegt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_k b_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(\mathbf{x}). \quad (1.10)$$

Da die Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ eine Basis des Hilbertraums bilden, kann an Stelle der zeitlichen Entwicklung der Störung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ die zeitliche Entwicklung der Eigenfunktionen einzeln betrachtet werden. Für die zeitliche Entwicklung einer Eigenfunktion gilt:

$$\partial_t \left(e^{\lambda_k t} \varphi_k(\mathbf{x}) \right) = \mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] e^{\lambda_k t} \varphi_k(\mathbf{x}) + \alpha \left[e^{\lambda_k t} - e^{\lambda_k(t-\tau)} \right] \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow \lambda_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(\mathbf{x}) = \mu_k e^{\lambda_k t} \varphi_k(\mathbf{x}) + \alpha \left[e^{\lambda_k t} - e^{\lambda_k(t-\tau)} \right] \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \mu_k + \alpha \left[1 - e^{-\lambda_k \tau} \right]. \quad (1.13)$$

Hierbei wurde für den Übergang von Gleichung (1.11) zu Gleichung (1.12) ausgenutzt, dass $\varphi_k(\mathbf{x})$ eine Eigenfunktion des Operators $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ mit dem bereits bekannten Eigenwert μ_k ist. Gleichung (1.13) stellt ein wichtiges Ergebnis für die Behandlung von Systemen mit TDFC dar und wurde bereits in [20, 27] hergeleitet. Es handelt sich um eine transzendente charakteristische Gleichung, welche die Eigenwerte λ_k des Systems mit TDFC mit den Eigenwerten μ_k ohne TDFC verknüpft.

Lambertsche W-Funktion

Lösungen von Gleichung (1.13) lassen sich nicht explizit angeben, es ist jedoch möglich sie mit Hilfe der Lambertschen W-Funktion auszudrücken [20]. Diese ist definiert als Umkehrfunktion der Funktion [42]

$$p(z) = ze^z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

1.3 Lineare Stabilitätsanalyse stationärer Lösungen mit zeitverzögerter Rückkopplung

Es gilt also

$$W(p(z)) = z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.15)$$

sowie

$$W(p)e^{W(p)} = p, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (1.16)$$

Zu beachten ist, dass die Lambertsche W-Funktion nicht eindeutig ist, sondern mehrere Lösungsäste $W_n(p)$, $n \in \mathbb{Z}$ besitzt. Dies liegt daran, dass die Funktion $p(z)$ nicht injektiv ist, d.h. unterschiedliche z werden auf den selben Funktionswert $p(z)$ abgebildet. Für reellwertige Argumente p existieren zwei reellwertige Lösungsäste im Intervall $[-\frac{1}{e}, 0)$, diese sind der häufig als Hauptast [42] bezeichnete Ast $W_0(p)$, welcher für alle $p \geq -\frac{1}{e}$ reellwertig ist, sowie der Ast $W_{-1}(p)$, welcher nur im angegebenen Intervall reellwertig ist. Die beiden reellwertigen Äste der Lambertschen W-Funktion sind in Abbildung 1.3 abgebildet.

Betrachtet man auch komplexwertige Lösungen der Lambertschen W-Funktion, so existieren (auch für reellwertige Argumente p) unendlich viele Lösungsäste $W_n(p)$. Insbesondere werden alle komplexwertigen z , für die der Ausdruck ze^z den gleichen Betrag und eine sich nur um ein Vielfaches von 2π unterscheidende Phase hat, von der Funktion $p(z)$ auf den selben Funktionswert abgebildet. Die Umkehrfunktion $W_n(p)$ ist daher nicht eindeutig, sondern besitzt unendlich viele Lösungsäste. Daher wird auch Gleichung (1.15) immer nur von einem Lösungsast W_n erfüllt. Weitere Lösungen $W_n(p)$ ergeben andere z -Werte mit dem gleichen Funktionswert $p(z)$. Für komplexwertige p ergeben sich ausschließlich komplexe Lösungen der Lambertschen W-Funktion $W_n(p)$, wie leicht an Gleichung (1.14) zu erkennen ist.

Zur Lösung des Eigenwertproblems mit TDFC lässt sich Gleichung (1.13) nun wie

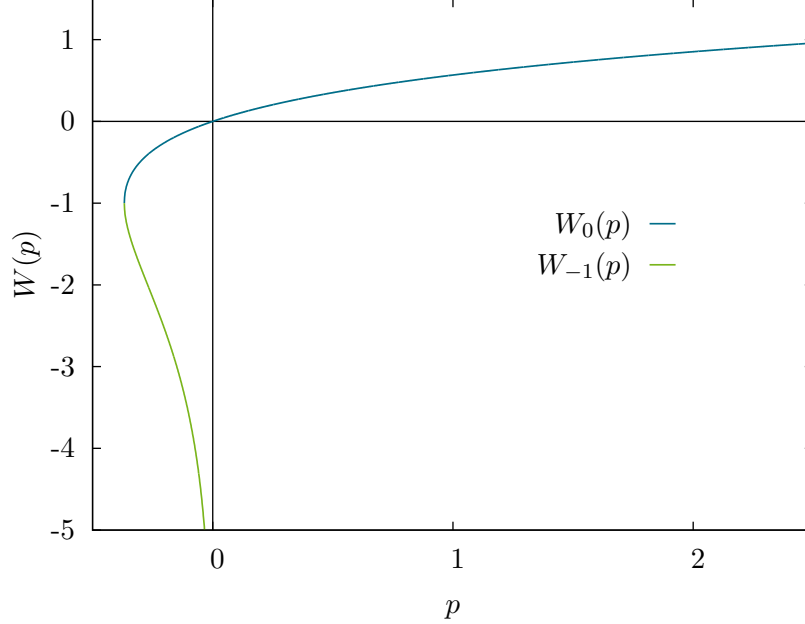


Abbildung 1.3: Reelle Zweige der Lambertschen W-Funktion $W_0(p)$ und $W_{-1}(p)$. Am sogenannten „branching point“ bei $p = -\frac{1}{e}$ stimmen die beiden Äste überein. Für Werte von $p < -\frac{1}{e}$ existieren keine reellen Lösungen der Lambertschen W-Funktion [42].

folgt umschreiben [20]:

$$\lambda_k = \mu_k + \alpha \left[1 - e^{-\lambda_k \tau} \right], \quad (1.17)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_k - \mu_k - \alpha) \tau e^{(\lambda_k - \mu_k - \alpha) \tau} = -\alpha \tau e^{-(\mu_k + \alpha) \tau}, \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow (\lambda_{k,n} - \mu_k - \alpha) \tau = W_n(-\alpha \tau e^{-(\mu_k + \alpha) \tau}), \quad (1.19)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{k,n} = \mu_k + \alpha + \frac{1}{\tau} W_n(-\alpha \tau e^{-(\mu_k + \alpha) \tau}). \quad (1.20)$$

Es ergeben sich also für einen Eigenwert μ_k des Systems ohne TDFC unendlich viele Eigenwerte $\lambda_{k,n}$ mit TDFC. Um nachzuvollziehen, wie diese zusätzlichen Eigenwerte entstehen, ist es sinnvoll die Grenzwerte von Gleichung (1.20) für verschwindende

TDFC zu betrachten. Es ergibt sich hierbei

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \lambda_{k,n} = \begin{cases} \mu_k & n = 0 \\ -\infty & n \neq 0 \end{cases}. \quad (1.21)$$

Wie zu erwarten reduzieren sich die Eigenwerte im Grenzwert verschwindender TDFC auf einen relevanten Eigenwert $\lambda_{k,0}$ pro Eigenwert μ_k ohne TDFC und es gilt: $\lambda_{k,0} = \mu_k$.

Entscheidend für die Stabilität des Systems ist daher in der Regel der Hauptast der Lambertschen W-Funktion W_0 .

Stabilisierung instabiler Lösungen mit TDFC

Ist das System ohne TDFC instabil, d.h. gilt für mindestens einen Eigenwert $\text{Re}(\mu_k) > 0$, entstehen durch die Anwendung von TDFC zwar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_{k,n}$, von diesen hat bei schwacher TDFC, d.h. kleinen Werte von α oder τ , allerdings nur der Eigenwert $\lambda_{k,0}$ einen positiven Realteil. Die weiteren Eigenwerte sind negativ und haben daher keinen Einfluss auf die Stabilität des Systems. Ist der ursprüngliche Eigenwert μ_k reell, ist eine Stabilisierung des instabilen Eigenwerts durch TDFC nicht möglich, d.h. es gilt für alle Werte von α und τ : $\text{Re}(\lambda_{k,0}) > 0$ [41].

Im Falle komplexer Eigenwerte μ_k ohne TDFC ist eine Stabilisierung durch TDFC in bestimmten Parameterbereichen möglich und wurde in [43] genutzt um atmende lokalisierte Strukturen in Reaktions-Diffusions-Systemen zu stabilisieren. Um die Parameterbereiche zu bestimmen, in denen eine solche Stabilisierung möglich ist, ist es sinnvoll, aus Gleichung (1.17) eine Lösbarkeitsbedingung für Stabilitätswechsel abzuleiten [26]. Hierfür werden die Eigenwerte $\lambda = l + i\Omega$ und $\mu = m + i\omega$ in ihre Real- und Imaginärteile zerlegt. Die k -Indizes werden hierbei vernachlässigt, da die folgenden Überlegungen wie auch schon Gleichung (1.17) für alle Eigenwerte in gleicher Weise gelten. Findet ein Wechsel der Stabilität statt, verschwindet an dieser

Stelle der Realteil von λ , es gilt also $l = 0$. Gleichung (1.17) führt in diesem Fall auf

$$i\Omega = m + i\omega + \alpha [1 - e^{-i\Omega\tau}], \quad (1.22)$$

$$\Leftrightarrow i\Omega = m + i\omega + \alpha [1 - \cos(\Omega\tau) + i \sin(\Omega\tau)]. \quad (1.23)$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil führt auf die folgenden beiden Gleichungen:

$$0 = m + \alpha [1 - \cos(\Omega\tau)], \quad (1.24)$$

$$\Omega = w + \alpha \sin(\Omega\tau). \quad (1.25)$$

Auflösen von Gleichung (1.24) nach Ω ergibt

$$\Omega = \pm \frac{1}{\tau} \arccos\left(1 + \frac{m}{\alpha}\right) + \frac{2\pi}{\tau}n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.26)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung (1.25) liefert die Lösbarkeitsbedingung

$$0 = \pm \arccos\left(1 + \frac{m}{\alpha}\right) + 2\pi n - \tau\omega \mp \alpha\tau \sqrt{1 - \left(1 + \frac{m}{\alpha}\right)^2}. \quad (1.27)$$

Nur wenn diese Bedingung erfüllt wird, ist ein Vorzeichenwechsel von $\text{Re}(\lambda)$, d.h. eine Änderung der Stabilität, möglich. Damit Gleichung (1.27) erfüllt wird, muss offensichtlich

$$-2 \leq \frac{m}{\alpha} \leq 0 \quad (1.28)$$

gelten, d.h. eine Stabilisierung eines instabilen Eigenwertes μ_k kann, wenn überhaupt möglich, nur durch negative Delay-Stärken α erfolgen. Umgekehrt ist für eine Destabilisierung stabiler Eigenwerte eine positive Delay-Stärke α notwendig. Außerdem lässt sich durch Ungleichung (1.28) ein Mindestwert für die Delay-Stärke α ermitteln, der notwendig ist, um einen Stabilitätswechsel herbeizuführen.

Wenn Gleichung (1.27) erfüllt ist, lässt sich die kritische Delay-Zeit τ_c , bei der ein Stabilitätswechsel stattfindet, in Abhängigkeit der Delay-Stärke α parametrisieren.

Umstellen von Gleichung (1.27) ergibt

$$\tau_c = \frac{\pm \arccos\left(1 + \frac{m}{\alpha}\right) + 2\pi n}{\omega \pm \alpha \sqrt{1 - \left(1 + \frac{m}{\alpha}\right)^2}}. \quad (1.29)$$

Um genauere Aussagen treffen zu können, für welche Werte von α und τ eine Stabilisierung eines instabilen Eigenwerts möglich ist, muss Gleichung (1.27) numerisch gelöst werden. Es ergeben sich in einem α - τ -Diagramm zungenähnliche Bereiche, in denen eine Stabilisierung möglich ist. Diese verlieren mit zunehmendem τ an Größe [43].

Destabilisierung stabiler Lösungen mit TDFC

Ist das System ohne TDFC stabil, gilt also für alle Eigenwerte $\operatorname{Re}(\mu_k) \leq 0$, ist eine Destabilisierung möglich. Nötig hierfür sind gemäß Gleichung (1.28) positive Delay-Stärken $\alpha > 0$. Ausschlaggebend für die ersten auftretenden Instabilitäten ist auch hier der Hauptzweig der Lambertschen W-Funktion W_0 bzw. die durch diesen generierten Eigenwerte $\lambda_{k,0}$.

Im Falle ausschließlich reeller Eigenwerte μ_k ohne TDFC wird die Reihenfolge der Eigenwerte durch TDFC nicht verändert. D.h. mit wachsendem τ bzw. wachsendem α wird zunächst der zu dem größten Eigenwert μ_k ohne TDFC zugehörige Eigenwert $\lambda_{k,0}$ instabil. Durch weiteres Erhöhen von τ oder α können auch Eigenwerte $\lambda_{k,n}$ destabilisiert werden, welche mit anderen Ästen der Lambertschen W-Funktion korrespondieren. Dies geschieht jedoch immer erst, nachdem bereits der zum Hauptast gehörige Eigenwert $\lambda_{k,0}$ instabil wurde.

Aus den bisher angestellten Überlegungen lassen sich bestimmte Mindestvoraussetzungen für α und τ herleiten, welche nötig sind, damit eine Destabilisierung des reellen Eigenwerts μ_k durch TDFC erfolgen kann. Zum einen folgt aus Gleichung (1.28), dass nur für $\alpha \geq -\frac{\mu_k}{2}$ eine Destabilisierung möglich ist. Zum anderen muss gelten, dass $\alpha\tau \geq 1$, da dieser Wert der Stabilitätsgrenze des ursprünglichen Eigenwerts $\mu_k = 0$ ohne TDFC, d.h. des größtmöglichen Eigenwerts eines stabilen Systems entspricht. Eine Herleitung dieser Stabilitätsgrenze erfolgt in Abschnitt 1.4.2, in dem die Destabilisierung neutral-stabiler Eigenwerte und der zugehörigen Eigenfunktionen

gesondert behandelt wird.

Im Spektrum lokalisierter Strukturen treten in der Regel diskrete Eigenwerte μ_k auf, welche nahe null liegen. Gilt für diese Eigenwerte $\mu_k < 0$ (handelt es sich also nicht um neutral-stabile Eigenwerte $\mu_k = 0$), so werden die zugehörigen Eigenwerte mit TDFC $\lambda_{k,0}$ in bestimmten Parameterbereichen von α und τ komplex. Der Grund hierfür liegt darin, dass auch der Hauptast der Lambertschen W-Funktion $W_0(p)$ für reelle Argumente $p < -\frac{1}{e}$ komplex ist. Gilt also

$$\alpha\tau e^{-(\mu_k+\alpha)\tau+1} - 1 > 0, \quad (1.30)$$

so besitzt $\lambda_{k,0}$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil. Gleichung (1.30) ist weder im Grenzwert kleiner Werte von α und τ , noch für sehr große Werte von α und τ erfüllt. Es existiert jedoch für Eigenwerte $\mu_k < 0$ ein begrenzter Bereich, in dem Gleichung (1.30) erfüllt ist und die Eigenwerte $\lambda_{k,0}$ somit komplex werden. In diesem Bereich findet der Stabilitätswechsel statt. Die Eigenwerte $\lambda_{k,0}$ werden also mit zunehmender TDFC zunächst komplex, verlieren dann ihre Stabilität und werden für noch größere Werte von α und τ wieder reell (siehe Abbildung 1.4). Für bestimmte Parameterbereiche existieren daher instabile komplexe Eigenwerte, welche im Vergleich zu reellen Eigenwerten eine komplexere oszillatorische Dynamik verursachen können.

Sind die stabilen Eigenwerte μ_k ohne TDFC bereits komplex, so ist auch in diesem Fall eine Destabilisierung des Systems für positive α möglich. Auch hier folgt aus Gleichung (1.28), dass eine Destabilisierung nur für Delay-Stärken $\alpha \geq -\frac{\text{Re}(\mu_k)}{2}$ möglich ist. Die für reelle Eigenwerte μ_k gültige zweite Bedingung $\alpha\tau > 1$ lässt sich im Falle komplexer Eigenwerte nicht aufrecht erhalten. Es ist möglich komplexe Eigenwerte μ_k mit kleinem negativen Realteil für bestimmte Werte von $\alpha\tau < 1$ zu destabilisieren [26]. Existieren in einem insgesamt stabilen System auch komplexe Eigenwerte μ_k , sind somit neutral-stabile Eigenwerte $\mu_k = 0$ nicht mehr zwangsläufig die ersten Eigenwerte, die durch TDFC destabilisiert werden.

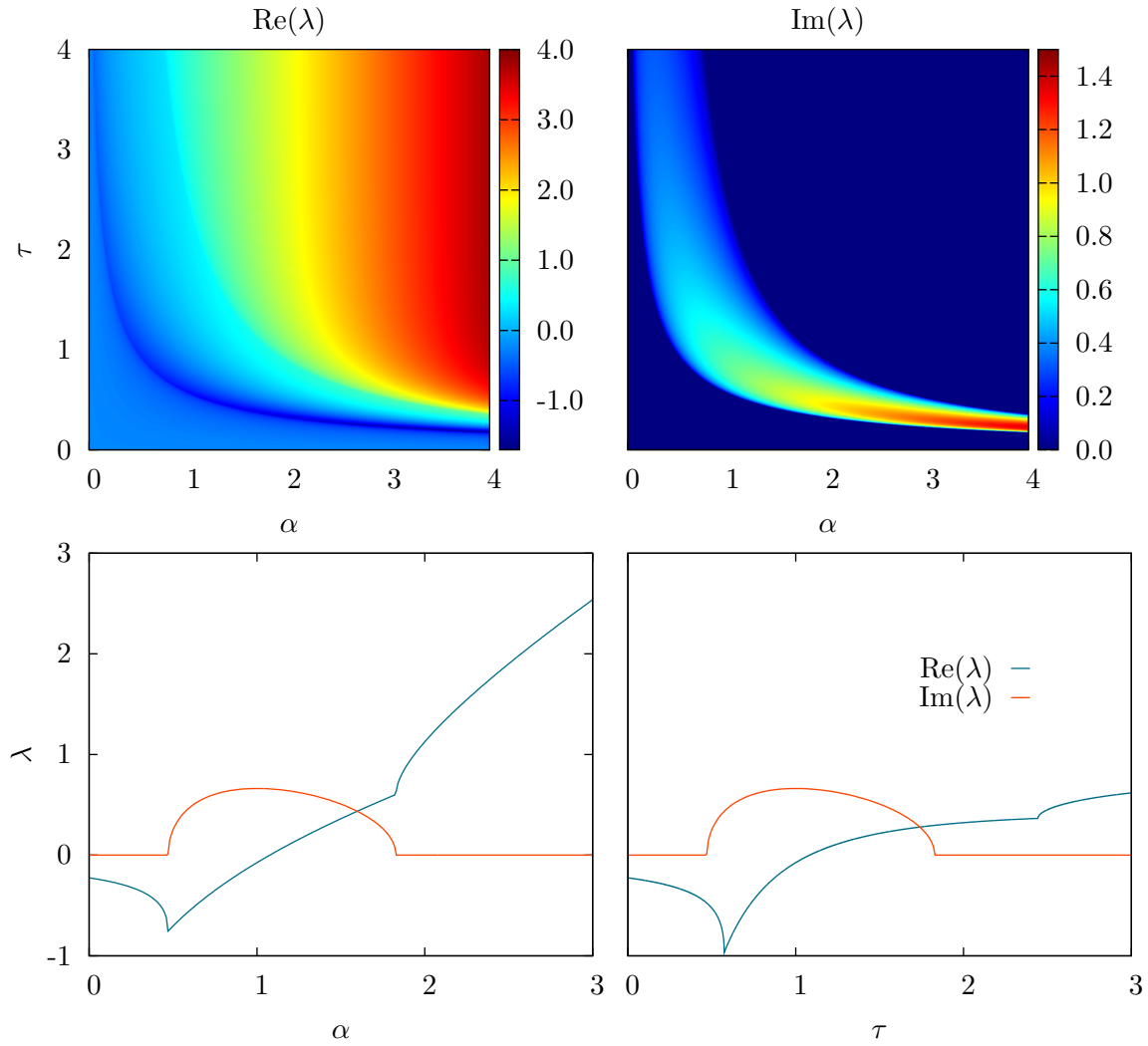


Abbildung 1.4: Oben: Real- (links) und Imaginärteil (rechts) von $\lambda_{k,0}$ für einen Eigenwert ohne TDFC von $\mu_k = -0,225$. Unten: Schnitte durch die obigen Grafiken bei $\tau = 1$ (links) und $\alpha = 1$ rechts. Deutlich zu erkennen ist, dass die Eigenwerte $\lambda_{k,0}$ in einem klar begrenzten Parametergebiet komplex sind.

1.4 Goldstone-Moden

Die in der vorliegenden Arbeit behandelten räumlich ausgedehnten dynamischen Systeme sind häufig invariant gegenüber kontinuierlichen Symmetrioperationen wie z.B. Translationen oder Rotationen. Lokalisierte stationäre Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ brechen diese Symmetrien, da sie prinzipiell nicht invariant gegenüber Translationen und je nach Form zum Teil auch nicht rotationssymmetrisch sind. Aufgrund dieser Symmetrieeigenschaften ist es möglich, die Existenz bestimmter neutral-stabiler Eigenwerte $\mu = 0$ und der zugehörigen Eigenfunktionen des linearisierten Systems vorherzusagen [44], ohne das in Gleichung (1.9) beschriebene Eigenwertproblem zu lösen.

Anschaulich lässt sich die Existenz und sogar die Form dieser auch als Goldstone-Moden bezeichneten Eigenfunktionen wie folgt erklären: Betrachtet wird ein translationsinvariantes System partieller Differentialgleichungen in einer Raumdimension x :

$$\partial_t \mathbf{q}(x,t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(x,t)]. \quad (1.31)$$

Existiert eine lokalisierte stationäre Lösung $\mathbf{q}_0(x)$ dieses Systems, so ist diese offensichtlich nicht invariant gegenüber Translationen, da eine Verschiebung eine neue, von der ursprünglichen Lösung unterscheidbare Struktur erzeugt. Da das zugrunde liegende System jedoch invariant unter Translationen ist, es daher keine Rolle spielt, an welcher Position sich die lokalisierte Struktur befindet, muss auch die verschobene lokalisierte Struktur eine stationäre Lösung des Systems mit den selben Eigenschaften wie die ursprüngliche Lösung darstellen.

Eine Störung der ursprünglichen Lösung, welche ausschließlich eine Verschiebung der lokalisierten Struktur um eine Distanz ϵ verursacht, wird daher weder verstärkt noch zerfallen sondern vom System angenommen. Das System ist also neutral-stabil gegenüber solchen Störungen. Im Rahmen des linearisierten Systems, welches für kleine Störungen das ursprüngliche System adäquat beschreibt, bedeutet dies, dass die für die Verschiebung verantwortliche Eigenfunktion den Eigenwert $\mu = 0$ besitzt. Die Form dieser Mode kann durch eine Taylor-Entwicklung der verschobenen Lösung

$\mathbf{q}_0(x + \epsilon)$ bestimmt werden [45]:

$$\mathbf{q}_0(x + \epsilon) = \mathbf{q}_0(x) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial x}. \quad (1.32)$$

Die Mode, welche die Verschiebung verursacht, ist daher

$$\mathcal{G}(x) = \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial x} \quad (1.33)$$

und wird auch als Goldstone-Mode der Translation bezeichnet. Das Abbrechen der Taylor-Entwicklung nach dem linearen Term ist hierbei konsistent mit der Reduktion des kompletten Systems auf das linearisierte System im Rahmen der linearen Stabilitätsanalyse: Auch diese besitzt nur Gültigkeit für infinitesimal kleine Störungen des stationären Zustands bzw. beschreibt die Dynamik des vollen Systems näherungsweise für ausreichend kleine Störungen.

1.4.1 Bestimmung der Goldstone-Moden

Nach der einleitenden heuristischen Begründung für die Existenz von Goldstone-Moden der Translation soll nun allgemeiner und formaler erläutert werden, wie aus den Symmetrieeigenschaften des betrachteten Systems auf die Existenz neutral-stabiler Moden geschlossen werden kann. Es wird nun wieder das bereits in Gleichung (1.1) beschriebene System partieller Differentialgleichungen betrachtet:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.34)$$

Die beschriebenen kontinuierlichen Symmetrietransformationen können durch Operatoren

$$D(\mathbf{R}) = e^{\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}} \quad (1.35)$$

charakterisiert werden [44]. Hierbei beschreibt \mathbf{R} das Ausmaß der Symmetrietransformation, gibt also beispielsweise an, wie weit eine Lösung verschoben oder gedreht wird. \mathbf{J} ist der infinitesimale Generator der Symmetrietransformation. Im Falle einer Translation gilt analog zum Impulsoperator der Quantenmechanik $\mathbf{J} = \nabla$, im Fal-

le einer Rotation entspricht der infinitesimale Generator dem Drehimpulsoperator $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \nabla$.

Es wird nun angenommen, dass das in Gleichung (1.34) beschriebene System invariant gegenüber einer durch $D(\mathbf{R})$ repräsentierten Symmetrietransformation ist, d.h. es gilt [46]

$$\partial_t D(\mathbf{R})\mathbf{q}(\mathbf{x},t) = D(\mathbf{R}) \mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x},t)] = \mathbf{N}[D(\mathbf{R})\mathbf{q}(\mathbf{x},t)]. \quad (1.36)$$

Es wird außerdem angenommen, dass für das betrachtete System stationäre Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ existieren, welche die Symmetrie des Systems brechen:

$$D(\mathbf{R})\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) \neq \mathbf{q}_0(\mathbf{x}). \quad (1.37)$$

Ist das System invariant gegenüber einer Translation, wird diese Symmetrie von jeder lokalisierten Lösung gebrochen. Auch die Rotationssymmetrie eines Systems kann durch lokalisierte Lösungen gebrochen werden, wenn es sich bei der lokalisierten Lösung z.B. um einen gebundenen Zustand aus zwei Strukturen handelt (vergl. Abschnitt 2.5.2) oder die Lösung aus anderen Gründen nicht rotationssymmetrisch ist.

Da das System invariant gegenüber der betrachteten Symmetrietransformation ist, muss auch $D(\mathbf{R})\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ eine stationäre Lösung von Gleichung (1.34) sein. Es muss daher [44]

$$\mathbf{N}[e^{\mathbf{R} \cdot \mathbf{J}} \mathbf{q}_0(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad (1.38)$$

gelten. Leitet man (1.38) nun nach einer Komponente R_i von \mathbf{R} ab und setzt anschließend $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, ergibt sich [46]

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] J_i \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1.39)$$

hierbei ist J_i eine Komponente des infinitesimalen Generators \mathbf{J} . Aus Gleichung

(1.39) wird ersichtlich, dass

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_i \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) \quad (1.40)$$

eine Eigenfunktion des linearisierten Operators $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ mit dem zugehörigen Eigenwert $\mu = 0$ ist. Diese Eigenfunktion wird als Goldstone-Mode bezeichnet.

1.4.2 Destabilisierung von Goldstone-Moden

Wird eine Eigenfunktion des linearisierten Systems instabil, welche die Form einer Goldstone-Mode besitzt, so verursacht dies einen Drift der ursprünglichen stationären Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ entlang der weiteren möglichen Lösungen $e^{\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{J}} \mathbf{q}_0(\mathbf{x})$, dem sogenannten Gruppenorbit [44]. Anschaulich bedeutet dies, dass die ursprünglich stationäre lokalisierte Lösung zu driften beginnt, wenn die instabile Mode die Form einer Goldstone-Mode der Translation besitzt, bzw. zu rotieren beginnt, wenn die instabile Mode der Goldstone-Mode der Rotation entspricht. Den Stabilitätsverlust einer solchen Mode in Form einer Goldstone-Mode bezeichnet man daher als Drift- oder Rotations-Bifurkation [47].

Genau genommen handelt es sich bei einer solchen Destabilisierung jedoch nicht um die Goldstone-Mode selbst, welche ihre Stabilität ändert. Die Goldstone-Moden existieren, solange die dem System zugrunde liegende Symmetrie erhalten bleibt. Sie besitzen wie im vorherigen Abschnitt dargestellt immer den Eigenwert $\mu = 0$ und sind neutral-stabil, beeinflussen die Stabilität der betrachteten Lösung daher nicht.

In Systemen ohne TDFC, in denen Drift- oder Rotationsbifurkationen auftreten, werden diese verursacht, indem für einen bestimmten kritischen Wert von Kontrollparametern κ_c eine weitere Eigenmode mit der Goldstone-Mode übereinstimmt und ebenfalls den Eigenwert $\mu = 0$ besitzt. An diesem Bifurkationspunkt ist das Eigenwertproblem daher degeneriert, d.h. die Basis an Eigenfunktionen muss um eine generalisierte Eigenfunktion $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ erweitert werden, für die

$$(\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] - \mu \underline{\mathbb{I}})^2 \mathcal{P}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.41)$$

gilt [47]. Da $\mu = 0$, ergibt sich so

$$\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]\mathcal{P}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.42)$$

Gleichung 1.42 ist genau dann erfüllt, wenn der linearisierte Operator $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ angewandt auf die generalisierte Eigenfunktion $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ eine Goldstone-Mode ergibt:

$$\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathcal{G}(\mathbf{x}). \quad (1.43)$$

Eine Anregung der generalisierten Eigenfunktion würde damit die Goldstone-Mode generieren und damit zu einem Drift entlang des Gruppenorbits führen. Zudem lässt sich Gleichung (1.43) als Lösungsbedingung verstehen, aus der der Bifurkationspunkt der Driftbifurkation bestimmt werden kann.

Auch durch TDFC kann eine Drift- oder Rotationsbifurkation verursacht werden, wie im Folgenden erläutert werden soll. Geht man von einem System aus, welches translations- oder rotationsinvariant ist, so existieren wie oben erläutert entsprechende Goldstone-Moden $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ mit dem Eigenwert $\mu = 0$ ohne TDFC. Unter dem Einfluss von TDFC ergeben sich die neuen Eigenwerte gemäß Gleichung (1.20) zu

$$\lambda_n = \alpha + \frac{1}{\tau} W_n(-\alpha\tau e^{-\alpha\tau}). \quad (1.44)$$

Da die Lambertsche W-Funktion als Umkehrfunktion von $p(z) = pe^z$ definiert ist, gilt gemäß Gleichung (1.15) offensichtlich

$$\lambda_n = \alpha + \frac{1}{\tau}(-\alpha\tau) = 0. \quad (1.45)$$

Dieses Ergebnis ist anschaulich verständlich, da die Addition des TDFC-Terms die zugrunde liegenden Symmetrien des Systems nicht verändert und das System mit TDFC somit die selben Goldstone-Moden mit dem Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt. Wie bereits in Abschnitt 1.3.2 beschrieben, erfüllt jedoch immer nur ein Zweig der

Lambertschen W-Funktion die Gleichung

$$W_n(-\alpha\tau e^{-\alpha\tau}) = -\alpha\tau, \quad (1.46)$$

und ergibt somit den Eigenwert $\lambda_n = 0$. Für Werte von $\alpha\tau < 1$ erfüllt der Hauptzweig der Lambertschen W-Funktion W_0 obige Gleichung, und führt auf den neutral-stabilen Eigenwert $\lambda_0 = 0$. Es existieren darüber hinaus ein weiterer negativer reeller Eigenwert λ_{-1} korrespondierend mit dem weiteren reellen Ast der Lambertschen W-Funktion W_{-1} , sowie unendlich viele komplexe Eigenwerte mit noch kleineren Realteilen. Das System ist somit weiterhin neutral-stabil gegenüber Störungen in Form der Goldstone-Moden.

Werden die TDFC-Parameter auf $\alpha\tau = 1$ erhöht ergibt sich

$$-\alpha\tau e^{-\alpha\tau} = -e^{-1}. \quad (1.47)$$

Dieser Wert entspricht dem Argument des sogenannten „branching points“ der Lambertschen W-Funktion [42], für den gilt: $W_0(-e^{-1}) = W_{-1}(-e^{-1}) = -1$. Ähnlich wie bei der oben beschriebenen Drift-Bifurkation ohne TDFC stimmen an diesem Bifurkationspunkt zwei Eigenwerte überein und auch die zugehörigen Eigenfunktionen entsprechen beide der Goldstone-Mode. Im Unterschied zur Drift-Bifurkation ohne TDFC existieren jedoch für alle Werte von α und τ unendlich viele Eigenwerte λ_n mit zugehörigen Eigenfunktionen in Form der Goldstone-Moden.

Werden die TDFC Parameter weiter erhöht, sodass $\alpha\tau > 1$ gilt, erfüllt nun der Ast W_{-1} Gleichung (1.46) und führt auf den neutral-stabilen Eigenwert $\lambda_{-1} = 0$. Da für alle positiven Werte von α und τ

$$W_0(-\alpha\tau e^{-\alpha\tau}) > W_{-1}(-\alpha\tau e^{-\alpha\tau}), \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 > \lambda_{-1}, \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 > 0 \quad (1.50)$$

gilt, ist der vormals neutral-stabile Eigenwert λ_0 nun instabil.

Die beiden reellen Eigenwerte λ können in der Nähe des Bifurkationspunkts $\alpha\tau = 1$

bestimmt werden, ohne auf die Lambertsche W-Funktion zurückzugreifen [26]:

$$\lambda_{\text{I}} = 0, \quad \lambda_{\text{II}} \simeq -\frac{2}{\tau} \frac{(1 - \alpha\tau)}{\alpha\tau}. \quad (1.51)$$

Hierbei wurde eine Taylorentwicklung bis zu quadratischen Termen genutzt, um Gleichung (1.13) näherungsweise zu lösen. Deutlich zu erkennen ist auch hier die Stabilitätsänderung des Eigenwerts λ_{II} am Bifurkationspunkt $\alpha\tau = 1$.

Ordnet man diese beiden Eigenwerten den nach den Indizes der Lambertschen W-Funktion nummerierten Eigenwerten λ_n zu, so ergibt sich

$$\lambda_0 \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha\tau \leq 1 \\ \simeq -\frac{2}{\tau} \frac{(1 - \alpha\tau)}{\alpha\tau} & \text{für } \alpha\tau > 1 \end{cases}, \quad \lambda_{-1} \begin{cases} \simeq -\frac{2}{\tau} \frac{(1 - \alpha\tau)}{\alpha\tau} & \text{für } \alpha\tau \leq 1 \\ = 0 & \text{für } \alpha\tau > 1 \end{cases}. \quad (1.52)$$

Unabhängig von der genauen Form des betrachteten Systems kann also allein aufgrund zugrunde liegender Symmetrien eine Aussage über die Existenz von Goldstone-Moden getroffen werden. Eine Destabilisierung dieser Eigenfunktionen durch TDFC ist möglich, wobei ebenfalls ohne genauere Kenntnis des Systems eine allgemein gültige Stabilitätsgrenze bestimmt werden kann. Für Werte von $\alpha\tau > 1$ wird der Eigenwert λ_0 der Goldstone-Mode korrespondierend mit dem Hauptast der Lambertschen W-Funktion instabil.

Handelt es sich bei diesem Eigenwert um den einzigen instabilen Eigenwert, verursacht diese Instabilität einen Drift entlang des Gruppenorbits, d.h. je nach zugrunde liegender Symmetrie einen Drift oder eine Rotation der lokalisierten Struktur. In Systemen mit ausschließlich stabilen reellen Eigenwerten $\mu \leq 0$ ohne TDFC, sind Goldstone-Moden daher immer die ersten Moden, welche durch zunehmende TDFC destabilisiert werden. Dies gilt nicht für Systeme mit komplexen stabilen Eigenwerten μ , da es in diesen möglich ist, andere Eigenwerte in Parameterbereichen mit $\alpha\tau < 1$ zu destabilisieren [26].

Im Folgenden sollen nun die allgemeinen Ergebnisse dieses Kapitels auf ein konkretes System, die Swift-Hohenberg-Gleichung, übertragen und anhand dieses Beispiels überprüft werden.

2 Die Swift-Hohenberg-Gleichung mit Zeitverzögerung

Im vorliegenden Kapitel sollen die Einflüsse von TDFC auf die Stabilität stationärer Lösungen einer modifizierten Swift-Hohenberg-Gleichung untersucht werden. Hierzu werden zunächst einige wesentliche Eigenschaften der Swift-Hohenberg-Gleichung vorgestellt. Außerdem wird die hier verwendete Variante der Gleichung eingeführt, welche zur Beschreibung von lokalisierten Strukturen in Systemen der nichtlinearen Optik dient.

Anschließend wird auf die numerische Behandlung der Swift-Hohenberg-Gleichung eingegangen. Abschließend wird der Einfluss von TDFC auf verschiedene stationäre Lösungen der Gleichung untersucht, wobei Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse mit direkten Zeitsimulationen verglichen werden, um die allgemeinen Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel an einem Beispiel zu überprüfen.

2.1 Die Swift-Hohenberg-Gleichung

Die Swift-Hohenberg-Gleichung zählt zu den meist untersuchten Gleichungen der nichtlinearen Physik und gilt als paradigmatisches Beispiel für eine Ordnungsparemetergleichung, welche Strukturbildungsprozesse in Nichtgleichgewichtssystemen beschreibt [30]. Im Folgenden soll daher zunächst die klassische Form der Swift-Hohenberg-Gleichung und ihre für diese Arbeit wesentlichen Eigenschaften vorgestellt werden. Anschließend wird die hier verwendete Variante der Gleichung eingeführt.

2.1.1 Die klassische Swift-Hohenberg-Gleichung

Die Swift-Hohenberg-Gleichung wurde erstmals 1977 von Swift und Hohenberg zur Beschreibung hydrodynamischer Systeme verwendet [48]. Seitdem wurde die Gleichung in verschiedenen Varianten zur Beschreibung einer Vielzahl von Strukturbildungsprozessen in unterschiedlichen Systemen genutzt. Hierzu zählt unter anderem die Beschreibung von Vegetationsmustern [49] oder die Beschreibung lokalisierter Strukturen in bistabilen Systemen der nichtlinearen Optik [28]. Abwandlungen der Swift-Hohenberg-Gleichung wurden ebenfalls bereits vielseitig eingesetzt. So wurde eine komplexe Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung verwendet um Muster zu modellieren, welche bei der Biokonvektion von Bakterien entstehen [50]. In [51] wurde eine konservierte Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung zur Beschreibung von kolloidaler Kristallisation genutzt.

Die Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung eines einzelnen reellwertigen Ordnungsparameters $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ in n räumlichen Dimensionen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und besitzt in ihrer einfachsten Form lediglich eine kubische Nichtlinearität:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = [\epsilon - (\nabla^2 + \mathbf{k}_c^2)] \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)^3. \quad (2.1)$$

Hierbei ist ϵ der entscheidende Kontrollparameter für die Bildung räumlicher Strukturen, \mathbf{k}_c^2 ist eine systemabhängige kritische Wellenzahl.

Die Swift-Hohenberg-Gleichung besitzt eine Gradientenstruktur, d.h. die rechte Seite der obigen Gleichung lässt sich als Funktionalableitung eines Lyapunov-Funktional $\mathcal{F}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$ schreiben [52]:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = - \frac{\delta \mathcal{F}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]}{\delta \mathbf{q}}, \quad (2.2)$$

mit

$$\mathcal{F}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] = -\frac{1}{2} \int d^n \mathbf{x} \left\{ \epsilon \mathbf{q}^2 - [(\nabla^2 + \mathbf{k}_c^2) \mathbf{q}]^2 - \frac{1}{2} \mathbf{q}^4 \right\}. \quad (2.3)$$

Die Existenz eines solchen Lyapunov-Funktional hat Konsequenzen für die Dynamik des Systems. So erreicht jede Lösung des Systems langfristig eine stabile stationäre

Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$, welche einem Minimum des Funktional entspricht. Es existieren daher keine dauerhaft nichtstationären Lösungen wie Oszillationen oder laufende Wellen. Die Zeitentwicklung in Richtung des Minimums des Lyapunov-Funktional erfolgt monoton, d.h. es sind auch keine zerfallenden Oszillationen möglich. Für Linearisierungen $\mathcal{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ des Systems um stationäre Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ gilt daher, dass die Eigenwerte μ_k des Systems ausschließlich reellwertig sind.

In Form von Gleichung (2.1) ist die Swift-Hohenberg-Gleichung symmetrisch gegenüber Spiegelungen $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$. Ist $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ eine Lösung der Swift-Hohenberg-Gleichung, so gilt dies auch für $-\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, wie leicht an Gleichung (2.1) zu erkennen ist. Auch an der Form des Lyapunov-Funktional lässt sich diese Symmetrieeigenschaft leicht ablesen, da $\mathcal{F}[\mathbf{q}] = \mathcal{F}[-\mathbf{q}]$ gilt.

Die Swift-Hohenberg-Gleichung ist außerdem translations- und rotationsinvariant, was für die Existenz von Goldstone-Moden bei lokalisierten Lösungen von Belang ist. Die Translationsinvarianz lässt sich leicht zeigen, da der Laplace-Operator ∇^2 mit dem Operator $D(\mathbf{R}) = e^{\mathbf{R} \cdot \nabla}$ kommutiert und somit Gleichung (1.36) erfüllt ist. Anschaulich ist diese Eigenschaft auch verständlich, da durch Gleichung (2.1) kein Punkt \mathbf{x}_0 im Raum ausgezeichnet wird und die Gleichung auch nach einer Verschiebung des Koordinatensystems ihre Form behält.

Die Rotationsinvarianz gilt ebenfalls, da der Drehimpulsoperator $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \nabla$ und somit auch der Operator $D(\mathbf{R}) = e^{\mathbf{R} \cdot (\mathbf{x} \times \nabla)}$ mit dem Laplace-Operator kommutieren (Beweis im Anhang).

In der oben dargestellten Form besitzt die Swift-Hohenberg-Gleichung eine homogene stationäre Lösung $\mathbf{q} = 0$, welche für Werte von $\epsilon < 0$ linear stabil ist. Die Eigenfunktionen des um den stationären Zustand linearisierten Systems entsprechen den Eigenfunktionen des Laplace-Operators, d.h. $\varphi_k(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. Die Eigenwerte μ_k lassen sich ebenfalls durch die Wellenvektoren \mathbf{k} ausdrücken. Für Werte $\epsilon > 0$ existiert um den kritischen Wellenvektor \mathbf{k}_c ein Band instabiler Wellenvektoren, welche zu stationären periodischen Strukturen führen. Diese Streifenmuster werden auch als Turing-Strukturen bezeichnet [52].

Häufig werden Swift-Hohenberg-Modelle verwendet, die im Vergleich zu Gleichung (2.1) zusätzliche Terme aufweisen, welche die Symmetrie $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ brechen. Es muss sich daher um Terme handeln, welche mit gerader Ordnung in \mathbf{q} in die Swift-

Hohenberg-Gleichung eingehen. Eine häufig verwendete Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung beinhaltet daher eine quadratische Nichtlinearität:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = [\epsilon - (\nabla^2 + \mathbf{k}_c^2)] \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)^2 - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)^3. \quad (2.4)$$

Auch diese Gleichung besitzt ein Lyapunov-Funktional

$$\mathcal{F}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] = -\frac{1}{2} \int d^n \mathbf{x} \left\{ \epsilon \mathbf{q}^2 - [(\nabla^2 + \mathbf{k}_c^2) \mathbf{q}]^2 + \frac{2}{3} \delta \mathbf{q}^3 - \frac{1}{2} \mathbf{q}^4 \right\}, \quad (2.5)$$

und ist ebenfalls translations- und rotationsinvariant. Die stationäre Lösung $\mathbf{q} = 0$ existiert weiterhin und ist für $\epsilon < 0$ linear instabil gegenüber periodischen Störungen. Neben periodischen Streifenmustern bilden sich jedoch für bestimmte Parameterwerte von (δ, ϵ) auch periodische Hexagonmuster. Zusätzlich wurden für Gleichung (2.4) auch lokalisierte Strukturen als stationäre Lösungen gefunden [30].

Die Symmetrie $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ lässt sich auch durch das Hinzufügen konstanter Terme in Gleichung (2.1) brechen, was jedoch die stationäre homogene Lösung des Systems verändert. Eine solche Form der Symmetriebrechung wird in der in dieser Arbeit untersuchten Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung verwendet. Diese wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

2.1.2 Die zeitverzögerte Swift-Hohenberg-Gleichung in optischen Systemen

Im Folgenden soll die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendete Form der Swift-Hohenberg-Gleichung eingeführt und erläutert werden. Die Herleitung der verwendeten Gleichung findet sich in [31] und wird an dieser Stelle nur kurz skizziert.

Betrachtet wird ein Resonator (beispielsweise ein Fabry-Perot-Resonator), gefüllt mit einem nichtlinearen Medium ohne Besetzungsinversion. Dieser wird von links (vergl. Abb. 2.1) mit Licht bestrahlt, wobei angenommen wird, dass das einfallende Licht näherungsweise als ebene Welle beschrieben werden kann. Die zeitverzögerte Rückkopplung wird durch einen Spiegel hinter dem Resonator umgesetzt. Zwischen Resonator und Spiegel wird die Strahlung gebündelt und abgeschwächt, um Streuung zu vermeiden. Die Delay-Zeit τ ist damit auch nach Skalierungen, die im Laufe der

Herleitung vorgenommen werden, proportional zum Abstand zwischen Resonator und Spiegel. Die Delay-Stärke α ist proportional zur Reflektivität des Spiegels. In [31] wird nun auf einen Ansatz von Lang und Kobayashi [53] zurückgegriffen. Unter der Annahme, dass es sich bei dem einfallenden Licht um eine einzelne longitudinale Mode handelt, und dass der Lichtstrahl zwischen Resonator und Spiegel ausreichend abgeschwächt wird, können die Einhüllende des elektrischen Feldes im Resonator, die Polarisation und die Besetzungsinversion mit Hilfe der Maxwell-Bloch-Gleichungen mit einem zusätzlichen zeitverzögerten Term beschrieben werden. Ohne Zeitverzögerung besitzen diese Gleichungen stationäre homogene Lösungen. Die

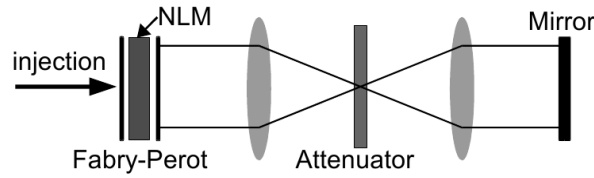


Abbildung 2.1: Schematischer experimenteller Aufbau eines Fabry-Perot-Resonators gefüllt mit einem nichtlinearen Medium (NLM). Das Licht tritt von links in den Resonator ein (injection). Austretendes Licht wird gebündelt und durch einen Dämpfer (Attenuator) abgeschwächt. Die zeitverzögerte Rückkopplung wird durch einen Spiegel rechts des Resonators umgesetzt [31].

weitere Analyse erfolgt in [31] in der Nähe der Grenze zur optischen Bistabilität. Nun entwickelt man die Amplitude des elektrischen Felds in dem Resonator, die Polarisation, die Besetzungsinversion sowie das einfallende elektrische Feld und den Kooperativitätsparameter in Potenzen eines Kleinheitsparameters ϵ um die Werte an der Grenze zur Bistabilität. Außerdem werden die Zeit und die Ortskoordinaten in transversaler Richtung mit Potenzen von ϵ skaliert, da man davon ausgeht, dass es sich um langsam veränderliche Prozesse handelt. Delay-Stärke und Delay-Zeit werden ebenfalls mit Potenzen von ϵ skaliert. Aus den Lösungsbedingungen für die verschiedenen Ordnungen von ϵ lässt sich nun nach weiterem Umskalieren die

zeitverzögerte Swift-Hohenberg-Gleichung

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = (-a_1 \nabla^2 - a_2 \nabla^4 + C) \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + Y - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)^3 + \alpha(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)) \quad (2.6)$$

ableiten. Gleichung (2.6) beschreibt die zeitliche Entwicklung transversaler Muster nahe der Grenze zur Bistabilität in zwei Dimensionen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Der Ordnungsparameter $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ beschreibt die Abweichung der Einhüllenden des elektrischen Felds im Resonator von dem kritischen Wert an der Grenze zur Bistabilität. Analog beschreibt Y die Abweichung der Amplitude des einfallenden Lichts von dem entsprechenden Wert am kritischen Punkt. Außerdem beschreibt α die Delay-Stärke, τ die Delay-Zeit, a_1 ist proportional zur Differenz zwischen der atomaren Frequenz im Resonator und der Frequenz des Lichts außerhalb des Resonators und a_2 ergibt sich auf Grund der vorgenommenen Skalierungen der Ortskoordinaten zu $a_2 = \frac{4}{3}$. Der Parameter C wird als Kooperativitätsparameter bezeichnet und ist ein Maß dafür, wie stark die Polarisation an die Einhüllende des elektrischen Feldes koppelt [31].

Ohne den TDFC Term, d.h. für $\alpha\tau = 0$, besitzt Gleichung (2.6) ebenfalls eine Gradientenstruktur mit dem Lyapunov-Funktional

$$\mathcal{F}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] = -\frac{1}{2} \int d^n \mathbf{x} \left\{ a_1 (\nabla \mathbf{q})^2 - a_2 (\nabla^2 \mathbf{q})^2 + 2Y \mathbf{q} + C \mathbf{q}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{q}^4 \right\}. \quad (2.7)$$

Jede zeitliche Entwicklung des Systems endet damit zwangsläufig in einer stationären Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$, welche einem Minimum des Funktional $\mathcal{F}[\mathbf{q}]$ entspricht. Im Folgenden wird obige Gleichung mit den Parametern $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$ und $C = 1$ untersucht. Variiert wird lediglich die Delay-Zeit τ und die Delay-Stärke α . Für die genannten Parameterwerte besitzt das System ohne TDFC mehrere stabile Lösungen. Hierzu zählt eine homogene Lösung \mathbf{q}_{hom} , für die gilt:

$$0 = Y + C \mathbf{q}_{\text{hom}} - \mathbf{q}_{\text{hom}}^3, \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{q}_{\text{hom}} \approx -1,1597. \quad (2.9)$$

Neben dieser homogenen stationären Lösung existieren weitere stabile lokalisierte Lösungen. Die einfachste dieser Lösungen besteht aus einer „hellen“ lokalisierten

Struktur, d.h. einer lokalisierten Struktur $\mathbf{q}_{\text{LS}}(\mathbf{x})$ mit positivem Maximum und oszillatorischen Ausläufern, die sich von dem homogenen Hintergrund abhebt. Die stationäre Lösung ist also

$$\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{\text{hom}} + \mathbf{q}_{\text{LS}}(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Weitere lokalisierte Lösungen bestehen aus mehreren lokalisierten Strukturen vor dem homogenen Hintergrund \mathbf{q}_{hom} . Diese lokalisierten Strukturen können unabhängig voneinander existieren, wenn der Abstand zwischen den Strukturen ausreichend groß ist und die Überschneidung der Ausläufer der Strukturen vernachlässigt werden kann. Wird der Abstand zwischen den Strukturen verringert, bilden sich gebundene Zustände der lokalisierten Strukturen. Diese Lösungen werden in den Abschnitten 2.4.2 und 2.5.2 diskutiert.

Die Symmetrie $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ wird in Gleichung (2.6) durch den konstanten Term Y gebrochen. Eine Änderung des Vorzeichens dieses Terms hätte somit eine positive räumlich homogene Lösung \mathbf{q}_{hom} zur Folge, vor deren Hintergrund sich negative lokalisierte Strukturen bilden können. In den Arbeiten von M. Tlidi [2, 28, 31] werden diese „dunklen“ lokalisierten Strukturen in Gleichung (2.6) behandelt, welche jedoch kein von den „hellen“ lokalisierten Strukturen abweichendes Verhalten zeigen.

Für die weitere Analyse ist es sinnvoll, Gleichung (2.6) um eine stationäre Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ zu linearisieren. Hierbei spielt es zunächst keine Rolle, ob es sich bei der stationären Lösung um eine räumlich homogene oder eine lokalisierte Lösung handelt. Für die kleine Abweichung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ von der stationären Lösung ergibt sich durch die Linearisierung

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (-a_1 \nabla^2 - a_2 \nabla^4 + C - 3\mathbf{q}_0(\mathbf{x})^2) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau)) \quad (2.11)$$

$$= \mathcal{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau)). \quad (2.12)$$

Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, ist es zur Bestimmung der linearen Stabilität von $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ notwendig, zunächst die lineare Stabilität ohne TDFC zu untersuchen. Hierzu müssen die Eigenwerte μ_k sowie die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ des

Operators $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ bestimmt werden.

Da Gleichung (2.6) wie auch die klassische Swift-Hohenberg-Gleichung invariant gegenüber Translationen und Rotationen ist, enthält das Spektrum für stationäre lokalisierte Strukturen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ zwei Goldstone-Moden der Translation (für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$) mit dem Eigenwert $\mu = 0$. Ist die lokalisierte Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ zudem nicht rotationssymmetrisch, existiert eine weitere Goldstone-Mode der Rotation.

Darüber hinaus müssen jedoch in der Regel das Eigenwertspektrum wie auch die zugehörigen Eigenfunktionen von $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ numerisch bestimmt werden. Im folgenden Abschnitt wird daher die numerische Behandlung von Gleichung (2.6) erläutert.

2.2 Numerische Behandlung der zeitverzögerten Swift-Hohenberg-Gleichung

Die Analyse des Einflusses von TDFC auf die stationären Lösungen von Gleichung (2.6) erfolgt in dieser Arbeit zu großen Teilen numerisch. Im Folgenden wird daher zunächst erläutert, wie Gleichung (2.6) direkt numerisch simuliert werden kann. Direkte Simulationen von Gleichung (2.6) ohne TDFC werden in der vorliegenden Arbeit genutzt, um lokalisierte stationäre Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ zu bestimmen. Mit TDFC dient die direkte numerische Simulation der Überprüfung der durch die lineare Stabilitätsanalyse erzielten Ergebnisse sowie zur Untersuchung der durch TDFC induzierten Dynamik über die Grenzen der linearen Stabilitätsanalyse hinaus.

Zum Zwecke der linearen Stabilitätsanalyse werden zudem das Eigenwertspektrum sowie die zugehörigen Eigenfunktionen von $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ numerisch bestimmt. Außerdem werden ebenfalls numerisch die Stabilitätsgrenzen der verschiedenen Eigenmoden unter dem Einfluss von TDFC ermittelt.

2.2.1 Direkte numerische Simulation

Für die direkte numerische Simulation von Gleichung (2.6) müssen zunächst Randbedingungen festgelegt werden. Für die Behandlung von lokalisierten Lösungen bietet sich die Verwendung periodischer Randbedingungen an, da bei ausreichend großem Grundgebiet $L_x \times L_y$ eine Interaktion der lokalisierten Struktur mit Rändern des

Systems vernachlässigt werden kann. Auch eine Interaktion der lokalisierten Struktur mit den weiteren periodisch fortgesetzten lokalisierten Strukturen kann vernachlässigt werden. Es gilt daher in zwei Dimensionen $\mathbf{x} = (x, y)$

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}(x + nL_x, y, t) = \mathbf{q}(x, y + mL_y, t), \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

Zur numerischen Lösung von Gleichung (2.6) muss für jeden Zeitschritt die rechte Seite der Gleichung bestimmt werden. Aufgrund der periodischen Randbedingungen kann hierzu ein Pseudospektralverfahren [54] genutzt werden. Hierbei wird die Rechte-Hand-Seite der Gleichung in einen Term $\mathcal{L}(\nabla^2)\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ linear in $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ und einen Term $\mathcal{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$ nichtlinear in $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ zerlegt:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(\nabla^2)\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)], \quad (2.14)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{L}(\nabla^2) = (-a_1 \nabla^2 - a_2 \nabla^4 + C), \quad (2.15)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] = Y - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)^3 + \alpha(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)). \quad (2.16)$$

Aus praktischen Gründen wird hierbei der TDFC-Term dem nichtlinearen Term zugeordnet, auch wenn er streng genommen linear in $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ ist. Die Idee des Pseudospektralverfahrens ist nun, zunächst den nichtlinearen Term im Realraum auszuwerten, den linearen Term jedoch im Fourierraum zu berechnen, da dort die Bildung der räumlichen Ableitungen einer Multiplikation mit entsprechenden \mathbf{k} -Werten entspricht und somit weniger rechenaufwendig ist als im Realraum [54]. Die Nichtlinearität muss jedoch im Realraum berechnet werden, da die Bestimmung des nichtlinearen Terms im Fourierraum die rechenaufwendige Lösung eines Faltungsintegrals erfordern würde. Die Faltung einer an $N_x \cdot N_y = N^2$ Stellen diskretisierten Funktion benötigt $\mathcal{O}(N^4)$ Rechenoperationen, wohingegen die Fouriertransformation der selben Funktion mit Hilfe des Fast-Fourier Algorithmus nur $\mathcal{O}(N^2 \log_2 N^2)$ Rechenoperationen benötigt

[55]. Im Fourierraum ergibt sich Gleichung (2.14) zu

$$\partial_t \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{L}(-\mathbf{k}^2) \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t) + \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, t). \quad (2.17)$$

Hierbei ist $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t)$ die Fouriertransformierte von $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, t)$ die Fouriertransformierte von $\mathcal{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$. Ausgehend von einem bestehenden Zustand $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ wird also zunächst der nichtlineare Term $\mathcal{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$ im Realraum berechnet. Anschließend werden von $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathcal{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]$ mit Hilfe der Fast-Fourier Transformation [56] die Fourier-Transformierten gebildet.

Der Zeitschritt wird nun im Fourierraum durchgeführt, wobei der lineare Term $\mathcal{L}(-\mathbf{k}^2)$ implizit behandelt wird, der nichtlineare Term $\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, t)$ wird explizit behandelt [52]. Für kleine Zeitschritte Δt wird Gleichung (2.17) angenähert durch

$$\frac{\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t + \Delta t) - \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t)}{\Delta t} = \mathcal{L}(-\mathbf{k}^2) \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t + \Delta t) + \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, t), \quad (2.18)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t + \Delta t) = \frac{1}{1 - \Delta t \mathcal{L}(-\mathbf{k}^2)} \left(\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t) + \Delta t \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, t) \right). \quad (2.19)$$

Nachdem der neue Zustand $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, t + \Delta t)$ mit Hilfe des oben beschriebenen Zeitschrittverfahrens bestimmt wurde, kann durch eine Rücktransformation $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ ermittelt werden.

Als Anfangsbedingung für lokalisierte Strukturen kann zu der homogenen Lösung \mathbf{q}_{hom} eine Gauß-Funktion addiert werden:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{q}_{\text{hom}} + \Gamma e^{-\mathbf{x}^2} \quad (2.20)$$

Für Werte von $\Gamma \gtrsim 1,9$ relaxiert diese Anfangsbedingung ohne TDFC gegen eine einzelne lokalisierte Struktur. Wird ein kleineres Γ gewählt, zerfällt die Struktur und es stellt sich die homogene Lösung \mathbf{q}_{hom} ein. Auch für die Untersuchung lokalisierter Strukturen unter dem Einfluss von TDFC können Gauß-Pulse als Anfangsbedingungen gewählt werden, da diese sehr schnell zu einer lokalisierten Lösung relaxieren und durch TDFC induzierte Instabilitäten deutlich langsamer einsetzen. Alternativ kann man auch die lokalisierte stationäre Lösung ohne TDFC bestimmen und als Anfangsbedingung dem Programm mit TDFC übergeben. Soll für schwache Instabi-

litäten eine Destabilisierung forciert werden, kann zu den Anfangsbedingungen noch Rauschen addiert werden. Dies beschleunigt das Einsetzen der Instabilität in der Nähe der Stabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ merklich.

Zur Bestimmung des TDFC-Terms zum Zeitpunkt t muss der Systemzustand $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)$ bekannt sein. Es müssen also immer die Systemzustände der letzten $\frac{\tau}{\Delta t}$ -Zeitschritte gespeichert werden. Für ein zweidimensionales System mit großen Delay-Zeiten τ werden daher große Datenmengen zwischengespeichert, weshalb der verfügbare Arbeitsspeicher die Größe der Delay-Zeit bzw. die mögliche räumliche Auflösungen Δx und Δy limitiert. Zu Beginn der Simulation werden die $\frac{\tau}{\Delta t}$ -Zeitschritte mit der Anfangsbedingung $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t = 0)$ gefüllt. Im Verlauf der Simulation ist es sinnvoll, nicht in jedem Zeitschritt alle zwischengespeicherten Systemzustände zu verschieben, sondern lediglich am Ende des Zeitschritts $t \rightarrow t + \Delta t$ den nicht mehr benötigten letzten Zustand $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)$ mit dem neuen Systemzustand $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ zu überschreiben. Verschieben werden unter Verwendung von entsprechenden Zeigern in C++ lediglich die Speicheradressen der weiteren gespeicherten Systemzustände.

2.2.2 Numerische lineare Stabilitätsanalyse

Die lineare Stabilitätsanalyse einer stationären Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ wird immer zuerst ohne TDFC durchgeführt. Hierzu muss das lineare Eigenwertproblem

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]\varphi_k(\mathbf{x}) = \mu_k \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

gelöst werden. Für die homogene stationäre Lösung $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{\text{hom}}$ ist dies analytisch möglich (siehe Abschnitt 2.3). Im Falle lokalisierter stationärer Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ muss das Eigenwertproblem jedoch numerisch gelöst werden. Hierzu wird zunächst die stationäre Lösung durch die im vorherigen Abschnitt beschriebene direkte Simulation von Gleichung (2.6) bestimmt. Diese wird als Vektor der Dimension $N_x \cdot N_y$ im Row-Major Format gespeichert, wobei $N_x = \frac{L_x}{\Delta x}$ und $N_y = \frac{L_y}{\Delta y}$. Anschließend wird der lineare Swift-Hohenberg-Operator

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})] = -a_1 \nabla^2 - a_2 \nabla^4 + C - 3\mathbf{q}_0(\mathbf{x})^2 \quad (2.22)$$

diskretisiert, indem der Laplace-Operator ∇^2 und der biharmonische Operator ∇^4 durch finite Differenzen [52] genähert werden. Angewandt auf eine in zwei Raumdimensionen diskretisierte Funktion $u_{i,j}$, wobei $i, j \in \mathbb{N}$ die Position auf dem zweidimensionalen Gitter bestimmen, ergibt sich für den Laplace-Operator:

$$(\nabla^2 u)|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (-4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (2.23)$$

wobei von $\Delta x = \Delta y$ ausgegangen wurde. Für den biharmonischen Operator ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\nabla^4 u)|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^4} & (20u_{i,j} - 8(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \\ & + 2(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}) \\ & + u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j-2} + u_{i,j+2}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die obigen beiden Formeln lassen sich durch sogenannte Stencils nachvollziehen, in denen dargestellt wird mit welcher Gewichtung die benachbarten Punkte in die Berechnung einer räumlichen Ableitung an einem Punkt eingehen (siehe Abb. 2.2). Wie die stationäre Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ müssen auch die räumlichen Ableitungen nach einem Index l gemäß des Row-Major-Formats sortiert werden. Dieser ergibt sich gemäß $l = j + i \cdot N_y$. So lässt sich nun $\mathfrak{L}[\mathbf{q}_0(\mathbf{x})]$ näherungsweise durch eine $(N_x \cdot N_y) \times (N_x \cdot N_y)$ -Matrix darstellen.

Von dieser Matrix können mit einem geeigneten linearen Algebra-Paket wie z.B. Matlab die Eigenwerte μ_k sowie die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ bestimmt werden. Eine grobe Abschätzung der Genauigkeit der bestimmten Eigenwerte μ_k kann beispielsweise vorgenommen werden, indem die numerisch bestimmten Eigenwerte der Goldstone-Moden mit dem analytisch bekannten Wert $\mu = 0$ verglichen werden.

Die Eigenwerte $\lambda_{k,n}$ unter dem Einfluss von TDFC können nun durch Lösen von Gleichung (1.20) bestimmt werden. Die Stabilitätsgrenze für jeden Eigenwert μ_k ohne TDFC kann bestimmt werden, indem für verschiedene α der Wert $\tau = \tau_c$ ermittelt wird, für den gemäß Gleichung (1.20) $\text{Re}(\lambda_{k,0}) = 0$ gilt. Alternativ kann auch die aus der Bedingung für den Stabilitätswechsel folgende Gleichung (1.29) gelöst werden.

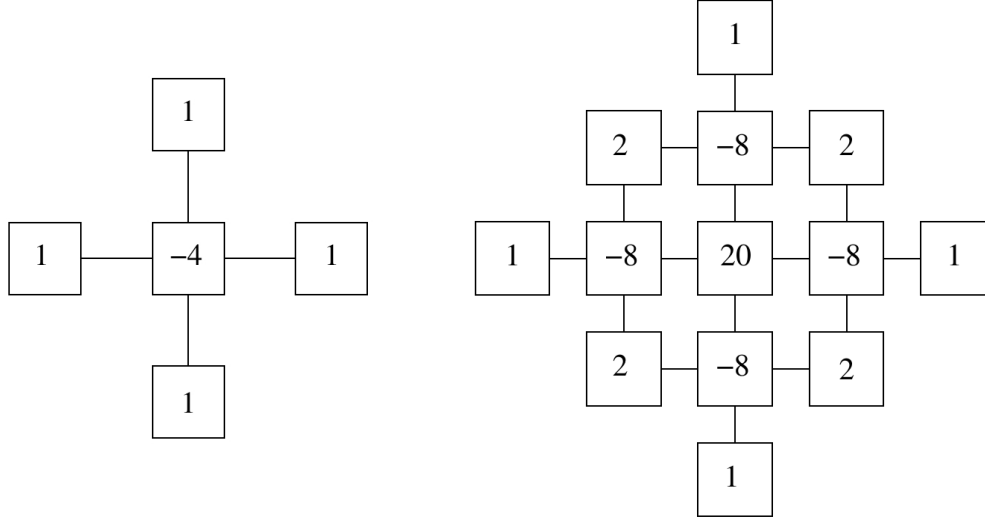


Abbildung 2.2: Anschauliche Darstellung des Laplace-Operators ∇^2 (links) und des biharmonischen Operators ∇^4 (rechts) in finiten Differenzen. Die Stencils zeigen mit welcher Gewichtung benachbarte Punkte eingehen, wenn am Mittelpunkt des Stencils die entsprechende räumliche Ableitung gebildet werden soll [52].

2.3 Destabilisierung des homogenen Zustands

In den folgenden Abschnitten wird nun die Destabilisierung verschiedener stationärer Lösungen von Gleichung (2.6) durch TDFC untersucht. Zunächst wird der Einfluss von TDFC auf die homogene stationäre Lösung \mathbf{q}_{hom} behandelt. Dies ist sinnvoll für die weitere Betrachtung lokalisierter Lösungen, da die Existenz einer stabilen homogenen Lösung eine notwendige Voraussetzung für die Stabilität lokalisierter Strukturen ist. Instabilitäten der homogenen Lösung \mathbf{q}_{hom} betreffen daher immer auch die lokalisierten Lösungen des Systems.

Zur Untersuchung der linearen Stabilität werden, wie bereits beschrieben, zunächst die Eigenwerte μ_k und die zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k(\mathbf{x})$ ohne TDFC bestimmt. Im Gegensatz zu lokalisierten stationären Lösungen ist die Bestimmung der Eigenfunktionen in diesem Fall analytisch möglich. Der linearisierte Swift-Hohenberg-Operator

ergibt sich zu

$$\mathfrak{L}[\mathbf{q}_{\text{hom}}] = -a_1 \nabla^2 - a_2 \nabla^4 + C - 3\mathbf{q}_{\text{hom}}^2. \quad (2.25)$$

Die Eigenfunktionen entsprechen daher den Eigenfunktionen des Laplace-Operators

$$\varphi_k(\mathbf{x}) \propto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.26)$$

Das kontinuierliche Eigenwertspektrum $\mu(\mathbf{k})$, welches die Wachstumsraten der einzelnen Eigenfunktionen beschreibt, ergibt sich nun gemäß

$$\mu(\mathbf{k}) = a_1 \mathbf{k}^2 - a_2 \mathbf{k}^4 + C - 3\mathbf{q}_{\text{hom}}^2. \quad (2.27)$$

Das Spektrum ist in Abbildung 2.3 dargestellt (gestrichelte Linie). Von besonderem Interesse in diesem Spektrum ist der größte Eigenwert, welcher Wellenvektoren mit $|\mathbf{k}_{\text{krit}}| = \sqrt{\frac{a_1}{2a_2}}$ entspricht:

$$\mu_{\text{krit}} = \mu \left(\mathbf{k} = \sqrt{\frac{a_1}{2a_2}} \right) = \frac{a_1^2}{4a_2} + C - 3\mathbf{q}_{\text{hom}}^2. \quad (2.28)$$

Von Bedeutung ist außerdem der Eigenwert $\mu_{\text{Hopf}} = \mu(\mathbf{k} = 0) = C - 3\mathbf{q}_{\text{hom}}^2$, der mit räumlich homogenen Störungen der stationären Lösung korrespondiert.

Durch TDFC kann zunächst der Eigenwert μ_{krit} zugehörig zum Wellenvektor \mathbf{k}_{krit} destabilisiert werden. Es ergibt sich ein begrenztes Band von instabilen \mathbf{k} -Vektoren um \mathbf{k}_{krit} . Dies führt zu laufenden Wellen und nicht zu stationären periodischen Strukturen wie in der klassischen Swift-Hohenberg-Gleichung (siehe Abschnitt 2.1.1), da die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_0(\mathbf{k})$ im Allgemeinen komplex sind. Mit zunehmender Zeitverzögerung vergrößert sich das Band instabiler \mathbf{k} -Vektoren, bis schließlich auch die Eigenfunktion mit $\mathbf{k} = 0$ zugehörig zum Eigenwert μ_{Hopf} destabilisiert wird. Somit sind in diesem Parameterbereich auch räumlich homogene Hopf-Oszillationen möglich. Insbesondere für kleine Delay-Zeiten τ liegt die Stabilitätsgrenze für laufende Wellen und homogene Hopf-Oszillationen sehr nahe der Stabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$.

Dies wird in Abbildung 2.3 veranschaulicht: Neben den Eigenwerten $\mu(\mathbf{k})$ ohne TDFC wird für $\alpha\tau = 1,1$ für verschiedene τ der Realteil des Eigenwertes $\lambda_0(\mathbf{k})$

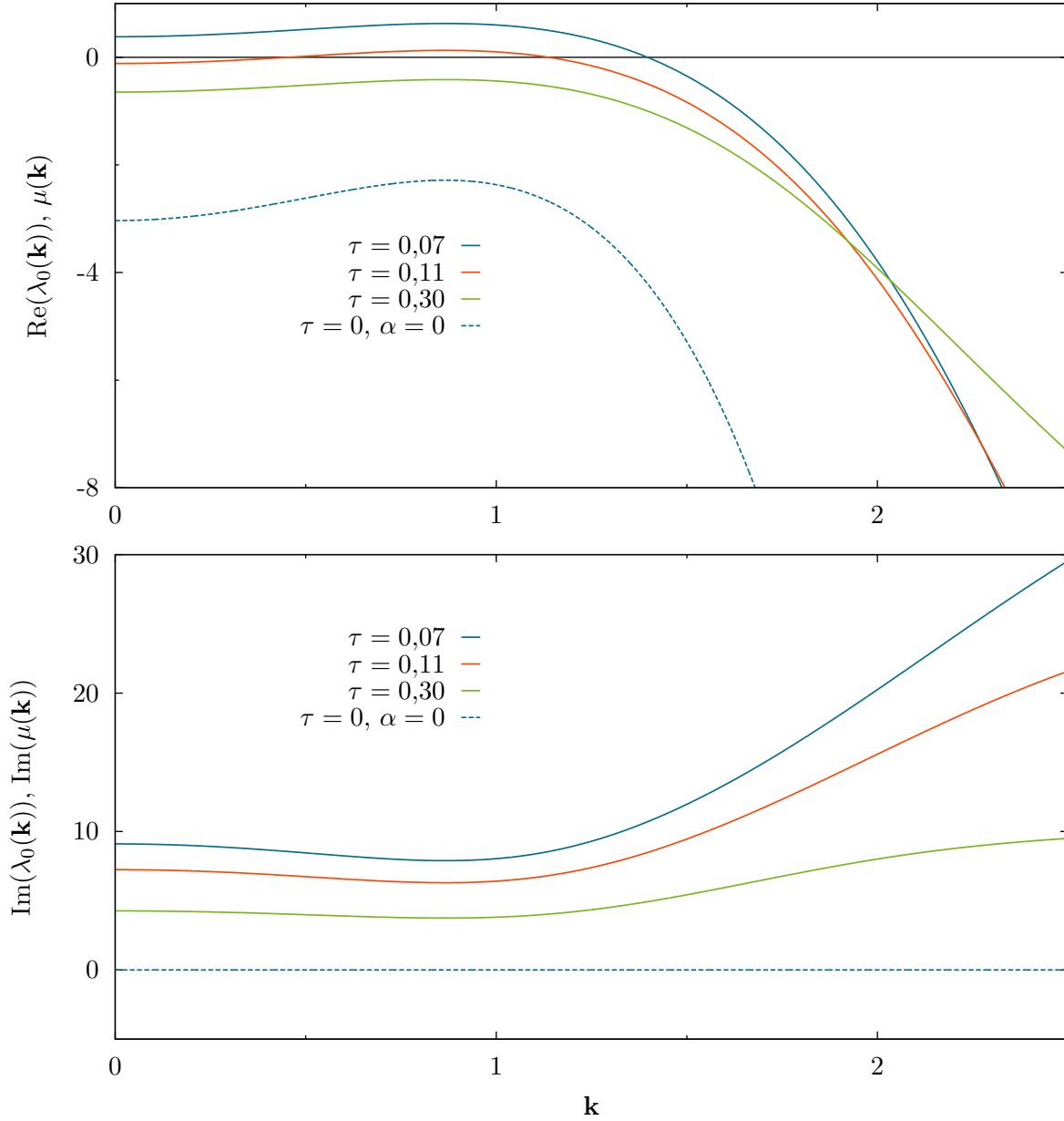


Abbildung 2.3: Abgebildet sind Real- (oben) und Imaginärteile (unten) der Eigenwerte $\mu(\mathbf{k})$ ohne TDFC (gestrichelte Linie), sowie der Eigenwerte $\lambda_0(\mathbf{k})$ mit TDFC für verschiedene Werte von α und τ , wobei $a = \alpha\tau = 1,1$ konstant bleibt. Ohne TDFC ist der homogene Zustand stabil. Mit TDFC ist der homogene Zustand ebenfalls stabil, solange τ nicht zu klein wird ($\tau = 0,3$, grüne Linie). Wird τ weiter gesenkt ($\tau = 0,11$, rote Linie), werden die Eigenwerte für ein begrenztes Band von \mathbf{k} -Vektoren um $|\mathbf{k}| = \sqrt{\frac{a_1}{2a_2}}$ instabil. Dies führt zu laufenden Wellen der entsprechenden Wellenzahl, da der Imaginärteil des Eigenwerts $\text{Im}(\lambda_0(\mathbf{k}))$ (unten) nicht verschwindet. Für noch kleinere τ ($\tau = 0,07$, blaue Linie) wird außerdem der Eigenwert $\lambda_0(\mathbf{k} = \mathbf{0})$ instabil, was räumlich homogene Hopf-Oszillationen ermöglicht.

dargestellt. Während für $\tau = 0,3$ noch alle \mathbf{k} -Vektoren stabil sind, bildet sich für $\tau = 0,11$ ein instabiles Band von \mathbf{k} -Vektoren um \mathbf{k}_{krit} . In diesem Bereich sind also Instabilitäten in Form laufender Wellen zu erwarten. Für $\tau = 0,07$ wird auch die Eigenfunktion mit $\mathbf{k} = 0$ instabil. Zusätzlich zu laufenden Wellen sind in diesem Bereich also auch räumlich homogene Hopf-Oszillationen möglich.

Direkte numerische Simulationen mit den in Abbildung 2.3 verwendeten Werten für α und τ stimmen mit den beschriebenen Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse überein. Während für $\tau = 0,3$ der homogene Zustand stabil gegenüber Störungen bleibt, bilden sich für $\tau = 0,11$ nach einer gewissen Zeit laufende Wellen (Abbildung 2.4). Für $\tau = 0,07$ bilden sich langfristig ebenfalls laufende Wellen. Die Instabilität des homogenen Zustands gegenüber Störungen mit der Wellenzahl \mathbf{k}_{krit} scheint also die langfristige Dynamik des Systems zu bestimmen. Während des Bildungsprozesses dieser regelmäßigen Strukturen sind jedoch auch periodische Änderungen des kompletten Systems zu beobachten (siehe Abbildung 2.5). Der Einfluss der Instabilität gegenüber homogenen Störungen ist also zumindest zwischenzeitlich bemerkbar.

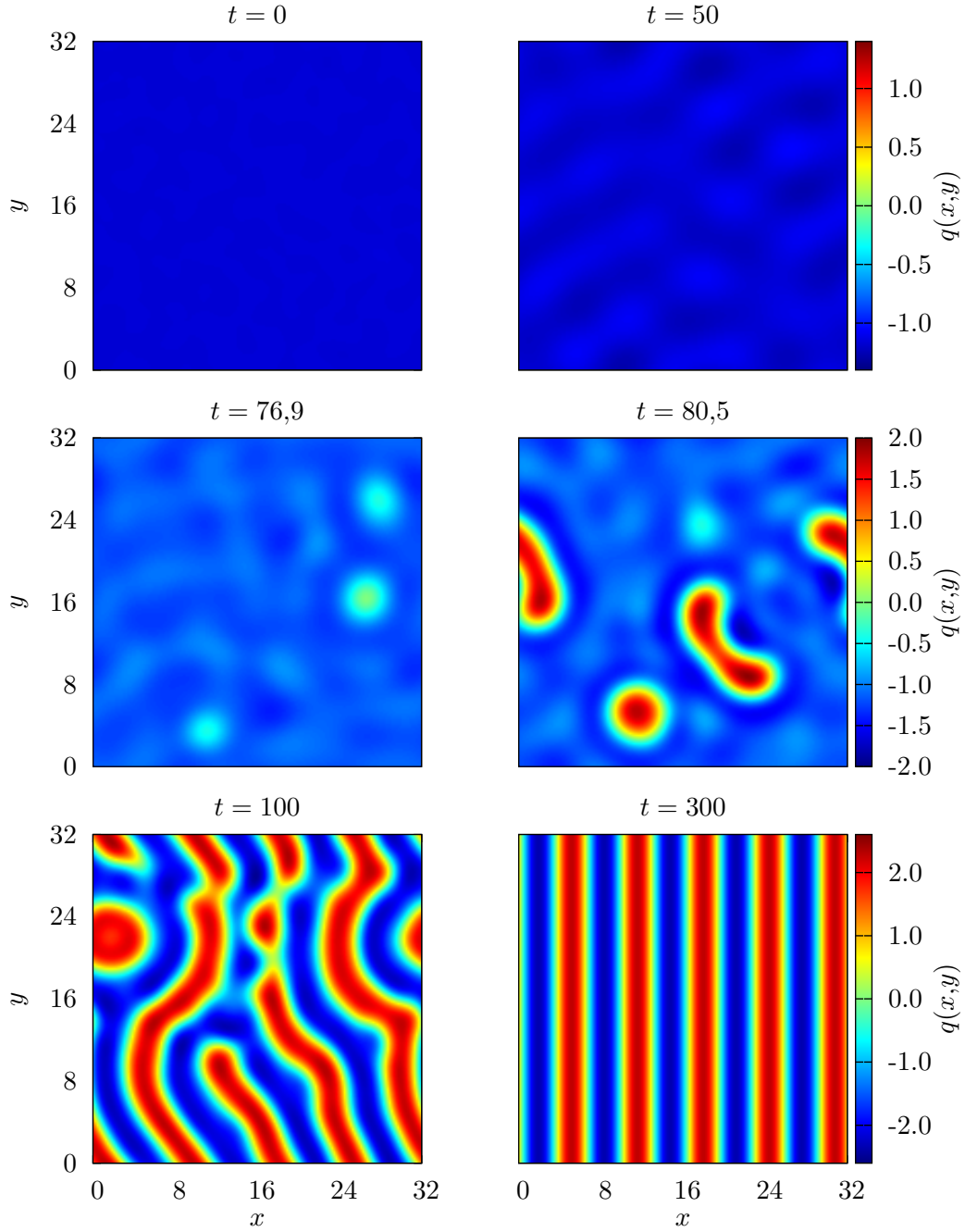


Abbildung 2.4: Bildung laufender Wellen in Gleichung (2.6) für $\tau = 0,11$, $\alpha = 10$, ($a = \alpha\tau = 1,1$). Als Anfangsbedingung wurde die homogene Lösung \mathbf{q}_{hom} mit Rauschen überlagert. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 32$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

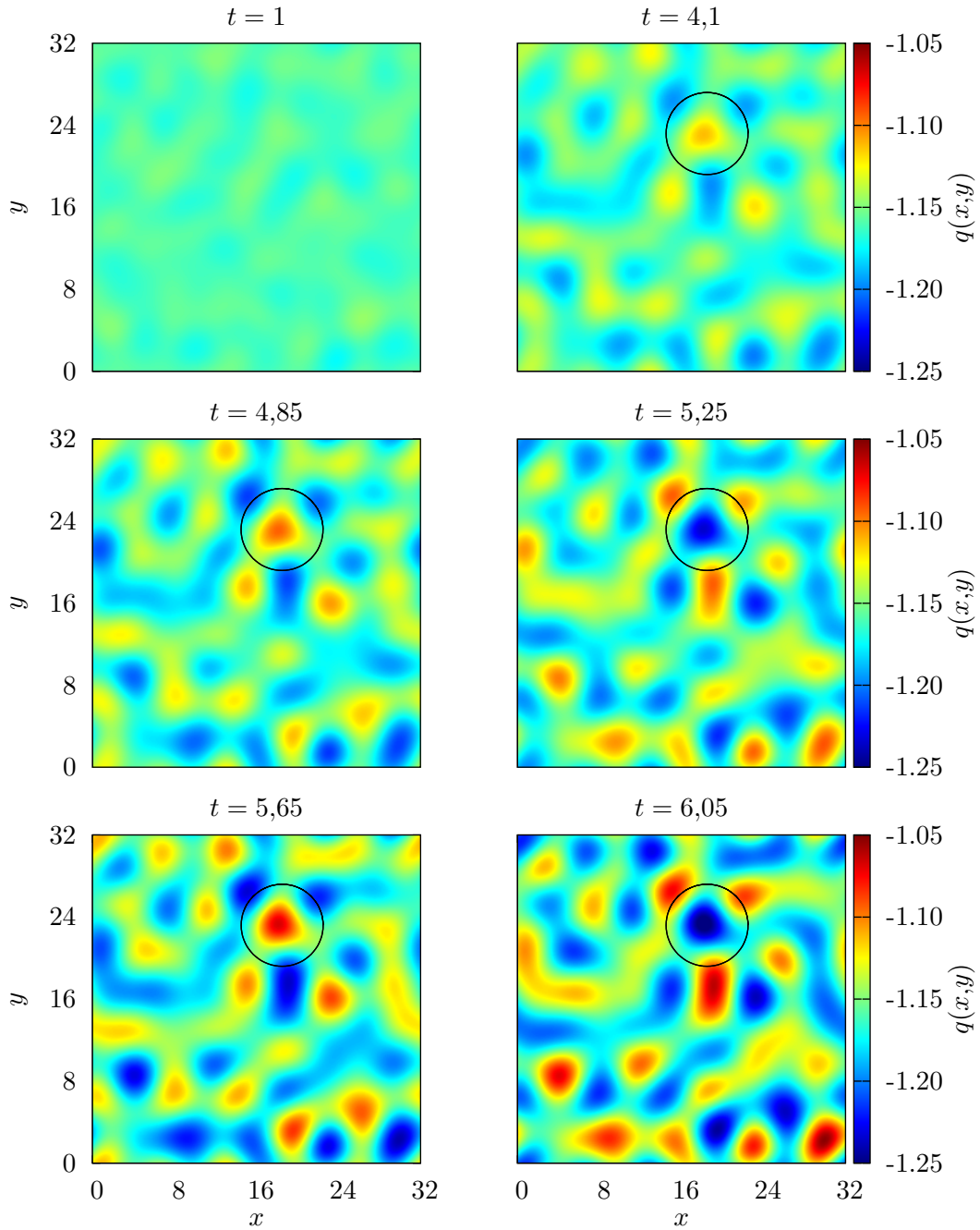


Abbildung 2.5: Hopf-Oszillationen in Gleichung (2.6) für $\tau = 0,07$, $\alpha = 15,71$, ($a = \alpha\tau = 1,1$). Aufgrund der Instabilität der homogenen Lösung \mathbf{q}_{hom} bilden sich räumliche Muster, welche homogene Oszillationen ausführen (deutlich erkennbar an der markierten Struktur). Langfristig ordnen sich die Muster und es bildet sich eine laufende Welle. Als Anfangsbedingung wurde die homogene Lösung \mathbf{q}_{hom} mit Rauschen überlagert. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 32$, $dx = dy = 0,1$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

2.4 Destabilisierung lokalisierter Strukturen in einer Raumdimension

Im folgenden Abschnitt soll der Einfluss von TDFC auf lokalisierte Strukturen in Gleichung (2.6) in einer Raumdimension untersucht werden. Hierbei wird zunächst die lineare Stabilität der stationären Lösungen in Abhängigkeit der Delay-Stärke α sowie der Delay-Zeit τ bestimmt. Anschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse mit direkten Simulationen von Gleichung (2.6) verglichen. Dies wird zunächst für eine einzelne lokalisierte Struktur durchgeführt, anschließend wird die Untersuchung auf zwei Strukturen die einen gebundenen Zustand bilden ausgeweitet.

Die Beschränkung auf zunächst eine Raumdimension ist aus mehreren Gründen sinnvoll. Zum einen bietet die Beschäftigung mit lokalisierten Strukturen in einer Dimension einen geeigneten anschaulichen Einstieg, insbesondere die Entstehung gebundener Zustände lässt sich in einer Raumdimension einfach visualisieren. Darüber hinaus ist der Abgleich zwischen Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse und der direkten numerischen Simulation einfacher und systematischer möglich, da die erforderlichen Simulationen in einer Raumdimension deutlich weniger Rechenzeit benötigen. Insofern stellt die Untersuchung in einer Raumdimension eine sinnvolle Vorarbeit für die Betrachtung lokalisierter Strukturen in zwei Dimensionen dar, die es ermöglicht potentiell interessante Parameterbereiche zunächst ohne hohen Rechenaufwand zu untersuchen.

Zum anderen ist es sinnvoll, die Unterschiede zwischen lokalisierten Strukturen in einer und in zwei Raumdimensionen zu untersuchen. Die Dynamik lokalisierter Strukturen in zwei Raumdimensionen ist insbesondere aufgrund zusätzlicher Goldstone-Moden komplexer als in einer Raumdimension. Zudem unterscheiden sich die möglichen gebundenen Zustände bestehend aus zwei Strukturen in zwei Dimensionen von denen in einer Dimension.

2.4.1 Einzelne lokalisierte Strukturen

Untersucht wird zunächst eine einzelne lokalisierte Struktur $\mathbf{q}_0(x)$, welche ohne TDFC stabil ist und in Abbildung 2.6 links dargestellt ist. Die Struktur ergibt sich durch

die direkte Simulation von Gleichung (2.6) mit $\alpha\tau = 0$. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt, wobei aus diesem eine lokalisierte Struktur mit deutlich erkennbaren oszillatorischen Ausläufern entsteht.

Die lineare Stabilitätsanalyse ohne TDFC führt auf reelle Eigenwerte $\mu \leq 0$, da die Struktur linear stabil ist. Im Eigenwertspektrum existieren zwei diskrete Eigenwerte $\mu = 0$ und $\mu = -0,8558$, korrespondierend mit lokalisierten Eigenfunktionen, welche ebenfalls in Abbildung 2.6 dargestellt sind. Hierbei handelt es sich um eine Goldstone-Mode ($\mu = 0$), welche, sollte sie durch TDFC destabilisiert werden, eine Translation der Struktur verursacht. Die weitere Mode ($\mu = -0,8558$) verursacht eine Größenveränderung der Struktur wenn sie instabil wird, und wird daher als Wachstumsmode bezeichnet.

Die beschriebene Wirkung instabiler lokalisierter Eigenfunktionen wird in Abbildung 2.7 veranschaulicht. Dort wird die ursprüngliche lokalisierte Struktur $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ sowie die Addition der lokalisierten Struktur und der lokalisierten Eigenfunktion $\mathbf{q}_0(x) + \epsilon\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Addition der Wachstumsmode zu einer vergrößerten Struktur führt (Abbildung 2.7 rechts), während die Addition der Goldstone-Mode zu einer verschobenen Struktur führt (Abbildung 2.7 links). Allerdings ist bei der Addition der Goldstone-Mode auch ein Größenzuwachs zu erkennen. Es handelt sich bei Abbildung 2.7 lediglich um eine anschauliche Darstellung des Einflusses lokalisierter Eigenfunktionen. Die Addition der Goldstone-Mode zu einer lokalisierten Struktur $\mathbf{q}_0(x) + \epsilon\boldsymbol{g}(\mathbf{x})$ führt tatsächlich, wie in Abschnitt 1.4 beschrieben, nur für ein infinitesimal kleines ϵ zu einer reinen (infinitesimalen) Verschiebung der Struktur. Die Linearisierung des nichtlinearen Systems um die stationäre Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ ist ebenfalls nur für infinitesimal kleine Werte von ϵ gültig. Für größere Werte von ϵ verursacht die Addition der entsprechenden Mode zusätzliche Verformungen der ursprünglichen Struktur.

Die lineare Stabilitätsanalyse mit TDFC kann nun, wie in Abschnitt 1.3.2 erläutert, durchgeführt werden. Für Werte von $\alpha\tau > 1$ wird zunächst der zur Goldstone-Mode zugehörige Eigenwert λ_0 instabil. Durch weiteres Erhöhen von α oder τ kann auch die Wachstumsmode destabilisiert werden. Die Stabilitätsgrenze kann mit Hilfe von Gleichung (1.29) bestimmt werden und ist neben der Stabilitätsgrenze der Goldstone-Mode sowie der Stabilitätsgrenzen des homogenen Zustands in Abbildung

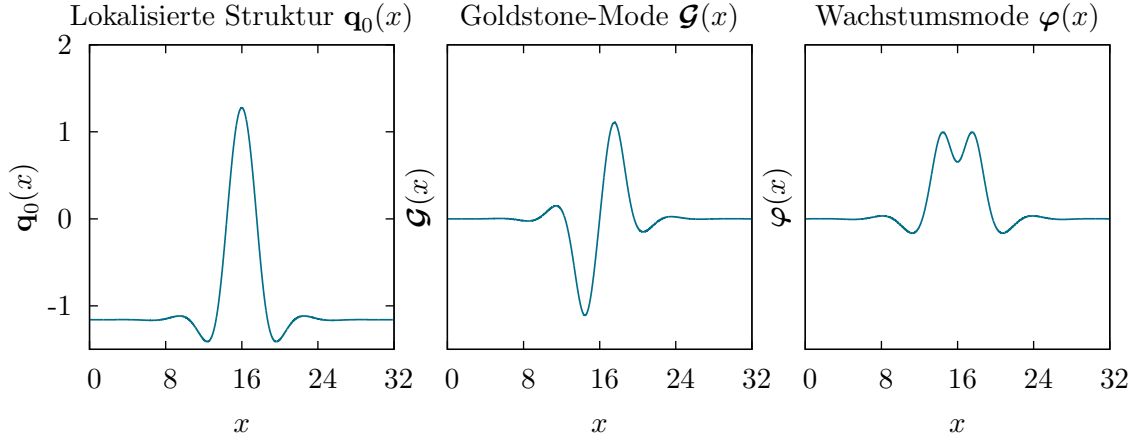


Abbildung 2.6: Einzelne lokalisierte Struktur (links) resultierend aus der Simulation von Gleichung (2.6) mit $\alpha = 0$ und $L = 32$, $dx = 0,01$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$. Zugehörige Goldstone-Mode der Translation mit $\mu = 0$ (Mitte), und Wachstumsmodus mit $\mu = -0,8558$ (rechts) resultierend aus der numerischen Lösung des Eigenwertproblems.

2.8 dargestellt. Die in Abschnitt 1.3.2 beschriebenen Mindestvoraussetzungen für eine Destabilisierung $\alpha\tau \geq \max\left\{\frac{-\mu\tau}{2}, 1\right\}$ sind in Abbildung 2.8 als Grenzfälle zu erkennen. Im Grenzfall $\alpha \rightarrow \infty$ nähern sich alle Stabilitätsgrenzen an $\alpha\tau = 1$ an, was der Grenze der Goldstone-Mode entspricht. Im Grenzfall $\tau \rightarrow \infty$ besitzen nicht alle Stabilitätsgrenzen einen gemeinsamen Grenzwert. In diesem Fall ergibt sich $\alpha \rightarrow \frac{-\mu}{2}$ gemäß Gleichung (1.29).

Die in Abbildung 2.8 dargestellten Stabilitätsgrenzen können nun mit direkten Simulationen von Gleichung (2.6) verglichen werden. Ein Teil der Ergebnisse der direkten Simulationen ist in Abbildung 2.9 abgebildet. Die verwendeten Simulationsparameter sind in Abbildung 2.8 als Kreuze erkennbar.

Die Destabilisierung der Goldstone-Mode resultiert wie erwartet in einem Drift der lokalisierten Struktur (Abbildung 2.9, links oben). Wird als Anfangsbedingung ein Gauß-Puls oder bereits die numerisch bestimmte lokalisierte Struktur $q_0(x)$ verwendet, so setzt der Drift der Struktur äußerst langsam ein (ungefähr bei $t = 1000$). Das Einsetzen des Drifts lässt sich beschleunigen, indem die verwendeten Anfangsbedingungen mit Rauschen überlagert werden. Da jeder der $\frac{\tau}{\Delta t}$ -Zeitschritte,

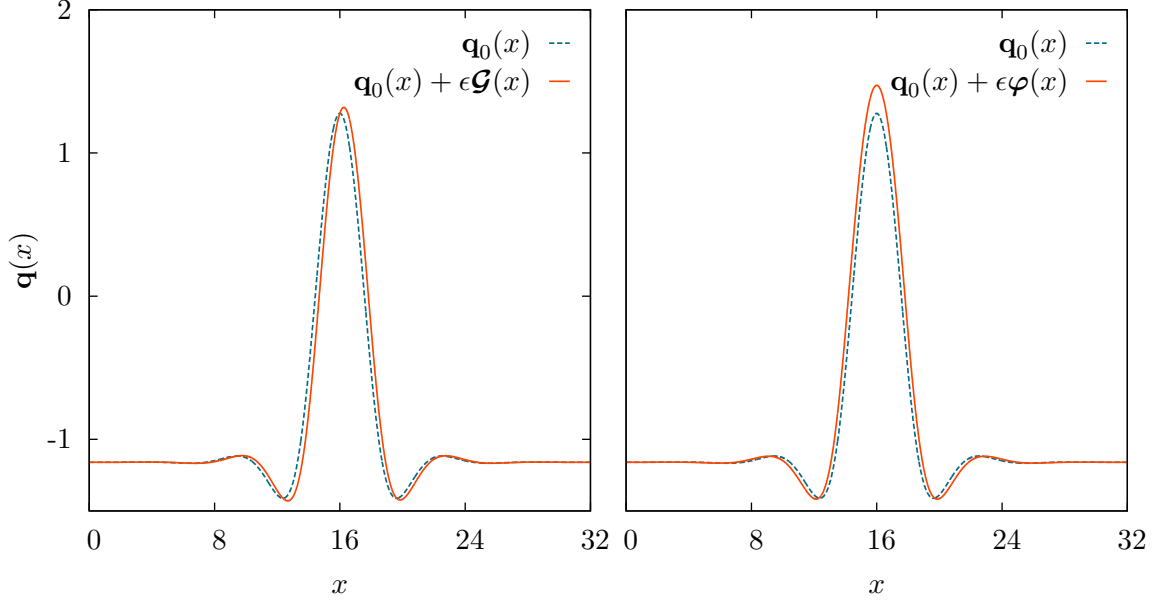


Abbildung 2.7: Auswirkung instabiler lokalisierter Eigenfunktionen auf die lokalisierte Lösung $\mathbf{q}_0(x)$ (blau, gestrichelt). Die Addition der Goldstone-Mode ($\epsilon = 0,3$) führt zu einer verschobenen lokalisierten Struktur (rot, links), die Addition der Wachstumsmode führt zu einer vergrößerten lokalisierten Struktur (rot, rechts). Parameter: $\alpha = 0$, $L = 32$, $dx = 0,01$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

welche zu Beginn als Delay-Schritte gespeichert werden, einzeln mit Rauschen belegt wird, entsteht so schneller ein nicht verschwindender Delay-Term $\mathbf{q}(x,t) - \mathbf{q}(x,t - \tau)$, welcher die Dynamik des Systems antreibt und zu einer schnelleren Destabilisierung der lokalisierten Struktur führt.

Weitere in Abbildung 2.9 dargestellte Simulationen zeigen das Verhalten des Systems in der Nähe der Stabilitätsgrenze der Wachstumsmode. Knapp unterhalb dieser Grenze (rechts oben) ist die einsetzende Instabilität bereits erkennbar, da die lokalisierte Struktur in ihrer Größe oszilliert, was auf den komplexen Eigenwert der Wachstumsmode zurückzuführen ist. Letztlich setzt sich jedoch die instabile Goldstone-Mode durch und die Struktur beginnt zu driften. Knapp oberhalb der Stabilitätsgrenze der Wachstumsmode (unten links) setzt ebenfalls eine Oszillation der Größe der lokalisierten Struktur ein. Die Amplitude dieser Oszillation wächst

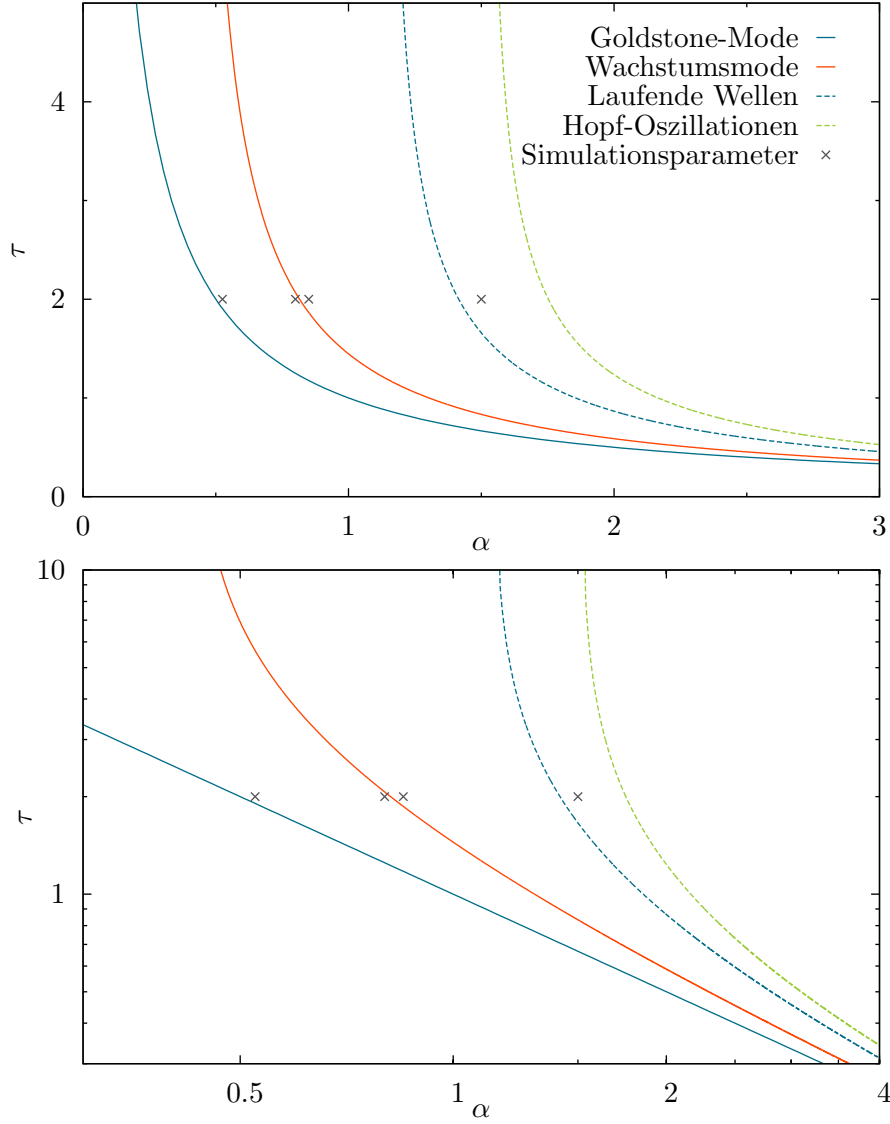


Abbildung 2.8: Stabilitätsgrenzen für eine einzelne lokalisierte Struktur in einer Dimension abhängig von α und τ in normaler (oben) und logarithmischer Skalierung (unten). Die Grenze der Goldstone-Mode entspricht $\alpha\tau = 1$ (blau). Außerdem sind die Stabilitätsgrenzen der Wachstumsmode (rot) dargestellt, sowie die Stabilitätsgrenze der homogenen Lösung gegenüber laufenden Wellen (blau, gestrichelt) und gegen homogene Hopf-Oszillationen (grün, gestrichelt). Die Kreuze markieren Parameterwerte, an denen Simulationen durchgeführt wurden (siehe Abb. 2.9).

jedoch an, was schließlich zu einer Auslöschung der Struktur führt. Die anwachsende Amplitude der Oszillation legt nahe, dass die beschriebene Instabilität als Ergebnis einer subkritischen Hopf-Bifurkation beschrieben werden kann. Die beiden Simulationen, in denen eine Oszillation der Größe der Struktur auftritt, wurden mit Gauß-Pulsen ohne Rauschen als Anfangsbedingungen durchgeführt. Verwendet man stark verrauschte Anfangsbedingungen (Rauschen in der Größenordnung $\mathcal{O} = (0,1)$), beginnt die Struktur zu driften. Die Auswirkungen der instabilen Wachstumsmoden sind in diesem Fall nicht mehr so deutlich wahrnehmbar und es findet insbesondere keine Auslöschung der lokalisierten Struktur statt.

Die Destabilisierung des homogenen Hintergrunds lässt sich ebenfalls beobachten. In Abbildung 2.9 ist unten rechts die Bildung einer laufenden Welle ausgehend von einer lokalisierten Struktur dargestellt.

2.4.2 Gebundene Zustände lokalisierter Strukturen

In diesem Abschnitt werden gebundene Zustände von zwei lokalisierten Strukturen sowie die Destabilisierung dieser Strukturen durch TDFC untersucht. Die Bildung gebundener Zustände ist möglich, da die lokalisierten Lösungen, wie im letzten Abschnitt gezeigt, in dem in dieser Arbeit betrachteten Parameterbereich von Gleichung (2.6) oszillatorische Ausläufer besitzen. Diese sind notwendig für die Bildung gebundener Zustände, wie im Folgenden erläutert wird.

Für die Untersuchung gebundener Zustände ist es sinnvoll, zunächst mit der Betrachtung zweier unabhängiger Strukturen zu beginnen. Befinden sich die Strukturen in ausreichend großem Abstand d zueinander, so überlappen die oszillatorischen Ausläufer der Strukturen nicht und die beiden Strukturen sind voneinander unabhängig. Dementsprechend bildet jede Anordnung zweier lokalisierter Strukturen in Abständen $d > d_0$ eine stabile stationäre Lösung des Systems ohne TDFC. Für die verwendeten Parameter gilt $d_0 \approx 19$. Für $d = 24$ ist eine solche Lösung in Abbildung 2.10 oben dargestellt.

Aufgrund der Unabhängigkeit der beiden lokalisierten Strukturen kann eine solche Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ als Addition von zwei lokalisierten Strukturen $\mathbf{q}_{LS1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{q}_{LS2}(\mathbf{x})$ und

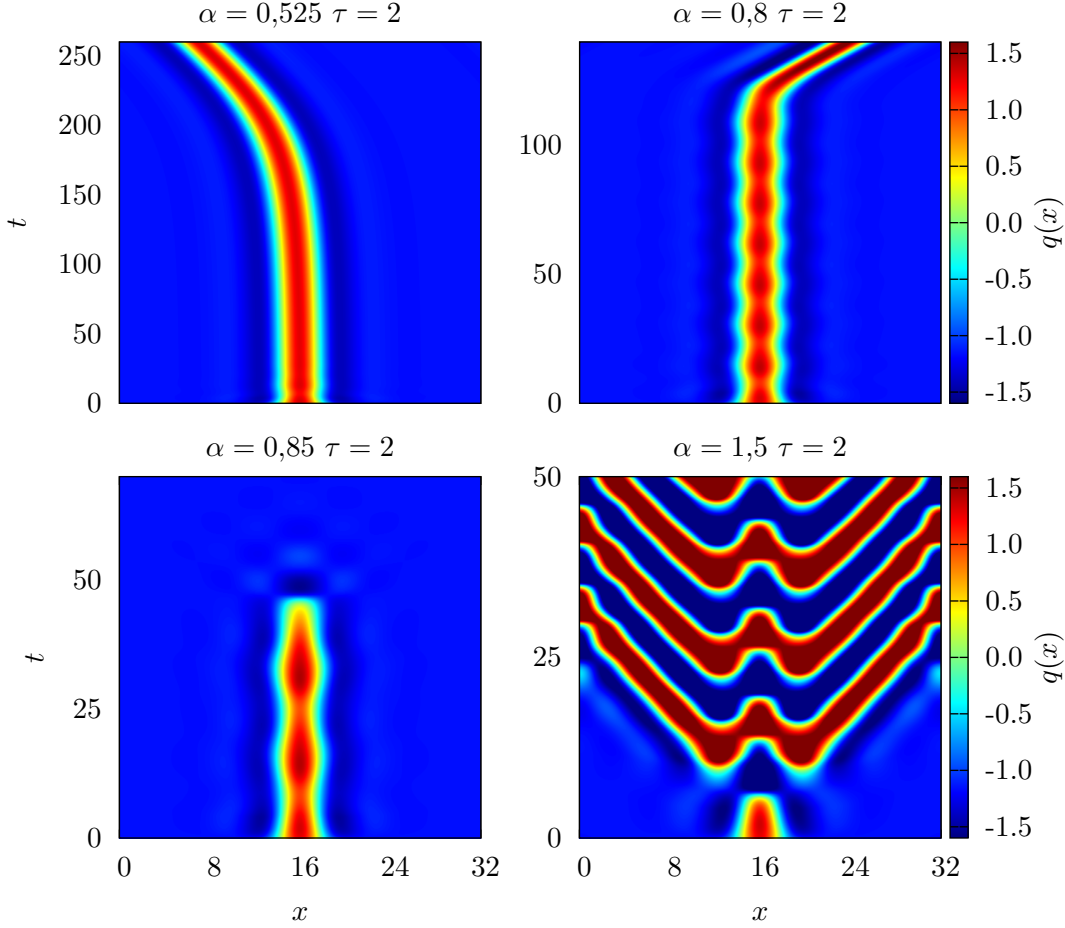


Abbildung 2.9: Numerische Simulationen einer einzelnen lokalisierten Struktur in einer Raumdimension für verschiedene Werte von α und τ . Oben links ist der reine Drift der lokalisierten Struktur nahe der Instabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ zu sehen. Oben rechts driftet die Struktur ebenfalls, aufgrund der Nähe zur Instabilität der Wachstums-Mode ist zunächst auch eine periodische Veränderung der Größe der Struktur bemerkbar. Unten links ist die Wachstumsmode bereits instabil, was zu einer Auslöschung der Struktur führt. Unten rechts ist die Bildung laufender Wellen aufgrund einer Instabilität des homogenen Hintergrunds zu sehen. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls verwendet. Dieser wurde in der Simulation links oben zusätzlich mit Rauschen überlagert, was das Einsetzen des Drifts beschleunigt, die Dynamik aber sonst unverändert lässt. Die weiteren Parameter sind: $L_x = 32$, $dx = 0,01$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

der homogenen Lösung \mathbf{q}_{hom} dargestellt werden:

$$\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{\text{hom}} + \mathbf{q}_{\text{LS1}}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}_{\text{LS2}}(\mathbf{x}). \quad (2.29)$$

Die beiden lokalisierten Strukturen haben hierbei die selbe Form und unterscheiden sich nur in ihrer Position, sodass

$$\mathbf{q}_{\text{LS2}}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{\text{LS1}}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) \quad (2.30)$$

gilt. Das Spektrum einzelner lokalisierter Lösungen $\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{\text{hom}} + \mathbf{q}_{\text{LS}i}(\mathbf{x})$, $i \in (1, 2)$ wurde in Abschnitt 2.4.1 bestimmt. Mit Hilfe dieser Ergebnisse lässt sich der diskrete Anteil des Spektrums der vollen Lösung bestimmen, die in Gleichung (2.29) dargestellt ist. Sei $\varphi_1(\mathbf{x})$ eine Eigenfunktion mit dem diskreten Eigenwert μ des um die Lösung $\mathbf{q}_{\text{hom}} + \mathbf{q}_{\text{LS1}}(\mathbf{x})$ linearisierten Systems $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}[\mathbf{q}_{\text{hom}} + \mathbf{q}_{\text{LS1}}(\mathbf{x})]$. Entsprechend sei $\varphi_2(\mathbf{x})$ eine Eigenfunktion der zweiten lokalisierten Struktur zugehörig zum selben Eigenwert μ . In diesem Fall ist jede Linearkombination der beiden Eigenfunktionen $\varphi(\mathbf{x}) = c_1\varphi_1(\mathbf{x}) + c_2\varphi_2(\mathbf{x})$ eine Eigenfunktion des vollen linearisierten Systems $\mathfrak{L}_{\text{ges}} = \mathfrak{L}[\mathbf{q}_{\text{hom}} + \mathbf{q}_{\text{LS1}}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}_{\text{LS2}}(\mathbf{x})]$ zum selben Eigenwert μ , da

$$\mathfrak{L}_{\text{ges}}(c_1\varphi_1(\mathbf{x}) + c_2\varphi_2(\mathbf{x})) = \mathfrak{L}_1 c_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \mathfrak{L}_2 c_2\varphi_2(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mathbf{q}_{\text{LS2}}\varphi_1) + \mathcal{O}(\mathbf{q}_{\text{LS1}}\varphi_2). \quad (2.31)$$

gilt. Nimmt man nun an, dass aufgrund des großen Abstandes zwischen den Strukturen eine lokalisierte Struktur nicht mit den lokalisierten Eigenfunktionen der anderen Struktur überlappt, d.h. $\mathbf{q}_{\text{LS}i}\varphi_j = 0$ für $i \neq j$, so ergibt sich

$$\mathfrak{L}_{\text{ges}}(c_1\varphi_1(\mathbf{x}) + c_2\varphi_2(\mathbf{x})) = \mathfrak{L}_1 c_1\varphi_1(\mathbf{x}) + \mathfrak{L}_2 c_2\varphi_2(\mathbf{x}) = \mu(c_1\varphi_1(\mathbf{x}) + c_2\varphi_2(\mathbf{x})). \quad (2.32)$$

Obwohl der linearisierte Operator \mathfrak{L} nichtlinear von der stationären Lösung, um die linearisiert wird, abhängt (siehe Gleichung (2.12)), bildet also im Grenzfall nicht überlappender Strukturen jede Linearkombination von Eigenfunktionen der Einzelstrukturen mit Eigenwert μ eine Eigenfunktion des Gesamtsystems. Insbesondere ist daher auch jede Eigenfunktion einer einzelnen Struktur eine Eigenfunktion des

Gesamtsystems. In Hinblick auf den Übergang zu gebundenen Paaren lokalisierter Strukturen ist es jedoch sinnvoll, als Basis des Gesamtsystems Eigenfunktionen der Form

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(\mathbf{x}) \pm \varphi_2(\mathbf{x})) \quad (2.33)$$

zu wählen, wobei φ_1, φ_2 die Eigenfunktionen der Einzelstrukturen zu einem Eigenwert μ darstellen.

Die obige Betrachtung gilt für beliebige Raumdimensionen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. In einer Raumdimension ergeben sich entsprechend zwei Eigenfunktionen korrespondierend mit dem Eigenwert $\mu = 0$ sowie zwei Eigenfunktionen mit dem Eigenwert $\mu = -0.8558$. Wie schon bei einer einzelnen Struktur entsprechen die neutral-stabilen Eigenfunktionen einer Translation der Strukturen, wobei eine Eigenfunktion einer gleichläufigen Verschiebung der Strukturen und die andere einer gegenläufigen Verschiebung der beiden Strukturen entspricht. Entsprechend bewirken die Eigenfunktionen zum Eigenwert $\mu = -0.8558$, wenn sie instabil werden, ein symmetrisches Wachstum der Strukturen (beide Strukturen wachsen, oder beide Strukturen schrumpfen), oder ein asymmetrisches Wachstum (eine Struktur wächst, die andere schrumpft).

Nach diesen Vorüberlegungen zu unabhängigen lokalisierten Strukturen sollen nun gebundene Zustände untersucht werden. Wird die Distanz zwischen zwei lokalisierten Strukturen verringert, so ist auffällig, dass nicht mehr jede beliebige Distanz zwischen den Strukturen realisiert werden kann. Tatsächlich gibt es für die gewählten Parameter nur zwei Distanzen $d < d_0$, für die stabile stationäre Lösungen existieren. Je nach anfänglich gewähltem Abstand zwischen den Strukturen relaxiert das System gegen eine dieser stationären Lösungen. Die stabilen Lösungen sind in Abbildung 2.10 in der Mitte bzw. unten dargestellt.

Die Existenz dieser gebundenen Zustände lässt sich mit Hilfe der oszillatorischen Ausläufer der lokalisierten Strukturen erklären [57]. Im Falle des gebundenen Zustands mit $d = 13,1$ überlappen diese Ausläufer gerade so, dass die ersten Nebenmaxima der Strukturen übereinander liegen. Bei den im Abstand von $d = 7,14$ gebundenen Strukturen liegen die ersten Minima übereinander.

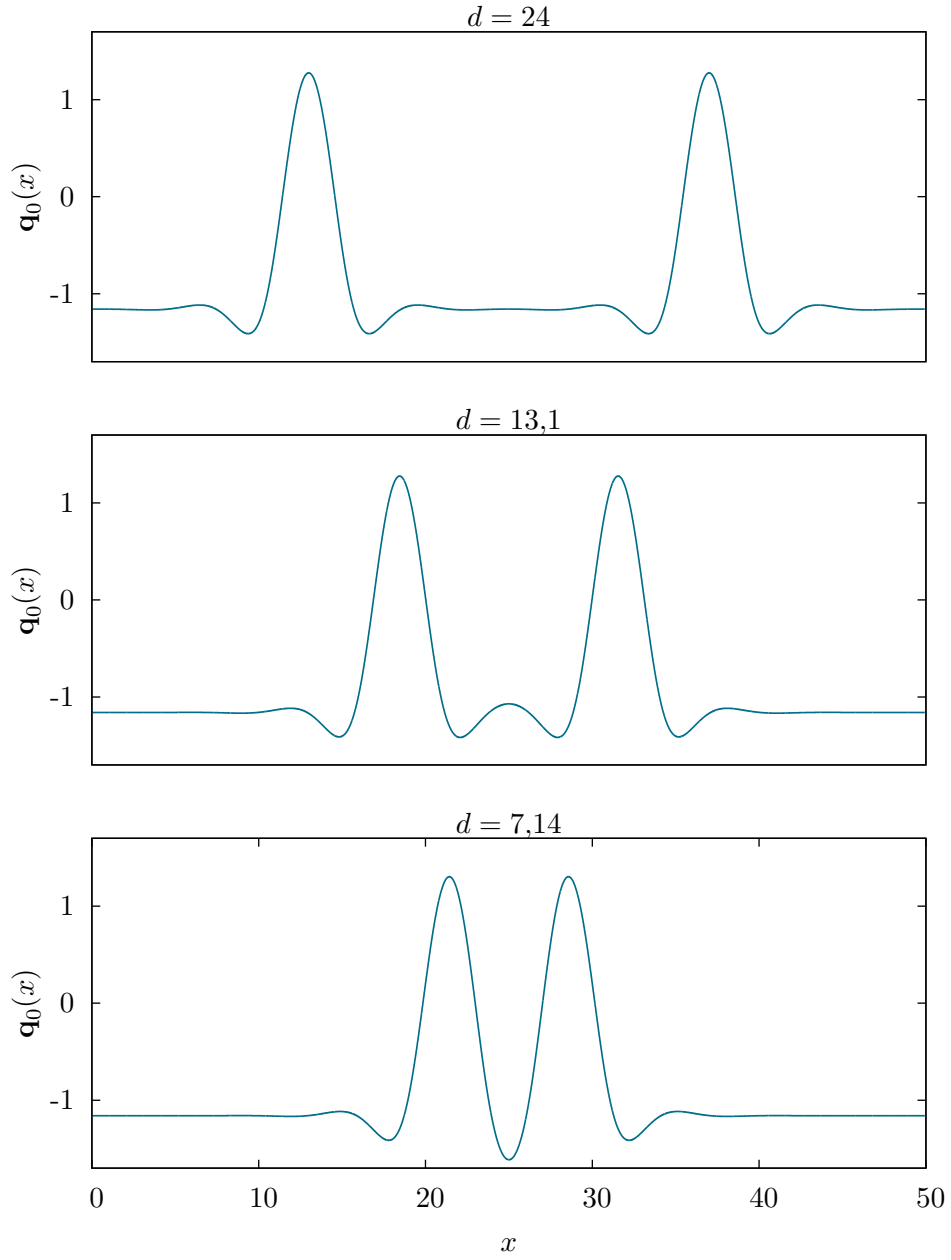


Abbildung 2.10: Stabile Lösungen $\mathbf{q}_0(x)$ bestehend aus zwei lokalisierten Strukturen (LS): Zwei unabhängige LS im Abstand $d = 24$ (oben), im Abstand $d = 13,1$ an den Nebenmaxima gebundene LS (Mitte), sowie am ersten Minimum im Abstand $d = 7,14$ gebundene LS (unten). Die Lösungen wurden durch direkte Simulation von Gleichung (2.6) mit $\alpha = 0$ bestimmt. Als Anfangsbedingungen wurden zwei Gauß-Pulse in unterschiedlichen Abständen verwendet. Weitere Parameter: $L_x = 50$, $dx = 0,01$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

Der Unterschied zwischen unabhängigen und gebundenen lokalisierten Strukturen lässt sich ebenfalls am Eigenwertspektrum der gebundenen Zustände nachvollziehen. Während das Eigenwertspektrum der unabhängigen lokalisierten Strukturen dem einer einzelnen Struktur entspricht, spalten sich die vorhandenen Eigenwerte im Falle der gebundenen Zustände auf, sodass in einer Raumdimension tatsächlich vier unterschiedliche diskrete Eigenwerte μ existieren. Während der Eigenwert der asymmetrischen Wachstumsmode nahezu konstant bleibt ($\mu = -0,8797$ für die engste Bindung $d = 7,14$), spaltet sich der Eigenwert der symmetrischen Wachstumsmode deutlich von diesem Wert ab ($\mu = -1,1332$ für $d = 7,14$). Ähnliches ist bei den beiden neutral-stabilen Eigenmoden der unabhängigen Strukturen zu beobachten: Die Eigenfunktion, die eine Verschiebung beider Strukturen in die gleiche Richtung bewirkt, behält den Eigenwert $\mu = 0$ bei, da es sich um eine Goldstone-Mode handelt. Die Eigenfunktion, welche mit einer Verschiebung der beiden Strukturen in gegenläufiger Richtung korrespondiert, verändert ihren Eigenwert jedoch deutlich. Der Eigenwert dieser Eigenfunktion, die im Folgenden als Wechselwirkungsmode bezeichnet wird, beträgt $\mu = -5.1 \cdot 10^{-3}$ für die äußere Bindung bei $d = 13,1$ bzw. $\mu = -0,1809$ in der engsten Bindung bei $d = 7,14$.

Insbesondere die Veränderung des Eigenwerts der Wechselwirkungsmode mit zunehmender Bindung der beiden Strukturen lässt sich anschaulich nachvollziehen. Im Fall unabhängiger Strukturen lassen sich beide Strukturen einzeln verschieben, wodurch neue stabile Lösungen entstehen. Es existieren daher zwei Goldstone-Moden. Im Falle gebundener Zustände entstehen äquivalente stabile Lösungen, nur wenn beide Strukturen gleichzeitig verschoben werden. Der gebundene Zustand besitzt daher nur noch eine Goldstone-Mode der Translation und ist stabil gegenüber Störungen in Form der Wechselwirkungsmode. Wie bereits beschrieben, existieren bei nahegelegenen Strukturen nur zwei stabile Distanzen d , entsprechend den beiden möglichen gebundenen Zuständen. Eine kleine Abweichung von dieser stabilen Distanz durch eine Störung in Form der Wechselwirkungsmode muss daher zerfallen, was sich in dem negativen Eigenwert der Wechselwirkungsmode widerspiegelt.

Im Folgenden soll nun die Destabilisierung des engsten gebundenen Zustands mit $d = 7,14$ durch TDFC untersucht werden, da sich dieser in seinem Eigenwertspektrum ohne TDFC am deutlichsten von einzelnen lokalisierten Strukturen unterscheidet.

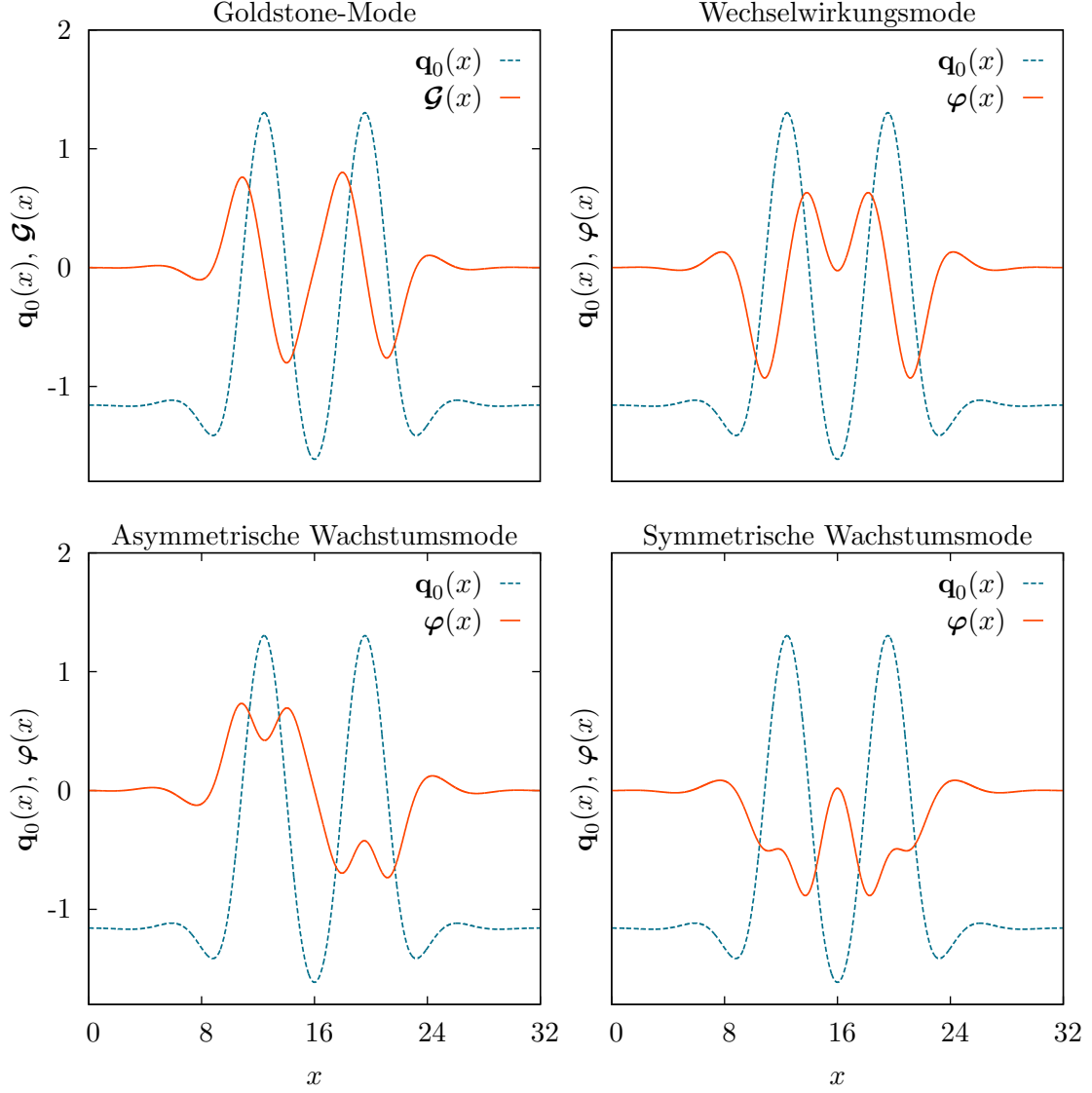


Abbildung 2.11: Gebundener Zustand $q_0(x)$ (blau, gestrichelt) mit den zugehörigen Eigenfunktionen (rot). Oben links: Goldstone-Mode ($\mu = 0$). Oben rechts: Interaktionsmode ($\mu = -0,1810$). Unten links: Asymmetrische Wachstumsmoden ($\mu = -0,8797$). Unten rechts: Symmetrische Wachstumsmoden ($\mu = -1,1332$). Parameter: $L_x = 32$, $dx = 0,01$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

Die lokalisierten Eigenfunktionen des gebundenen Zustands sind in Abbildung 2.11 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist beispielsweise bei der symmetrischen Wachstums-mode, dass sich diese von einer reinen Linearkombination zweier Wachstumsmoden unterscheidet und aufgrund der Nähe der beiden Strukturen Verformungen aufweist. Die Stabilitätsgrenzen der einzelnen Eigenfunktionen sind in Abbildung 2.12 dargestellt. Die Ergebnisse einer Auswahl von direkten Simulationen von Gleichung (2.6) sind in Abbildung 2.13 dargestellt, wobei die verwendeten Parameter Abbildung 2.12 zu entnehmen sind.

Für Werte von α und τ , bei denen lediglich die Goldstone-Mode der Translation instabil ist, setzt ein Drift des gebundenen Zustands ein, wobei das Einsetzen des Drifts wie auch schon bei einer einzelnen Struktur durch verrauschte Anfangsbedingungen beschleunigt werden kann. Der Parameterbereich, in dem ausschließlich die Goldstone-Mode instabil ist, ist relativ schmal, durch Erhöhen der Delay-Parameter wird schnell ebenfalls die Wechselwirkungs-mode destabilisiert. Aufgrund des komplexen Eigenwerts λ dieser Mode führt dies zu einer Oszillation der beiden Strukturen gegeneinander. Die Amplitude dieser Oszillation wird verstärkt, bis der gebundene Zustand aufbricht und beide Strukturen einzeln driften. Dieses Verhalten ist jedoch stark rauschempfindlich. Bei stark verrauschten Anfangsbedingungen setzt ein Drift der kompletten Struktur ein, bevor die Struktur aufbricht, d.h. die ebenfalls instabile Goldstone-Mode dominiert die Dynamik.

Eine gegenläufige Oszillation der beiden Strukturen ist auch in Abbildung 2.13 oben rechts zu erkennen. In diesem Fall wird die Oszillation jedoch nicht durch eine Instabilität der Wachstums-mode verursacht, da lediglich die Goldstone-Mode instabil ist. Für die entsprechende Simulation wurden die beiden Strukturen in einem Abstand $d = 8$ platziert, was nicht dem Abstand des gebundenen Zustands $d = 7,14$ entspricht. Die beobachtete Oszillation ist daher auf das Zusammenspiel zwischen der instabilen Drift-Mode und den sich anziehenden lokalisierten Strukturen zurückzuführen. Ohne verrauschte Anfangsbedingungen lässt sich diese Oszillation lange aufrecht erhalten, langfristig zerfällt sie jedoch und es setzt ein Drift des gebundenen Zustands ein. Parameterbereiche, in denen die Oszillation dauerhaft stabil ist, wurden nicht beobachtet.

Die Auswirkungen der instabilen asymmetrischen Wachstums-mode sind nicht

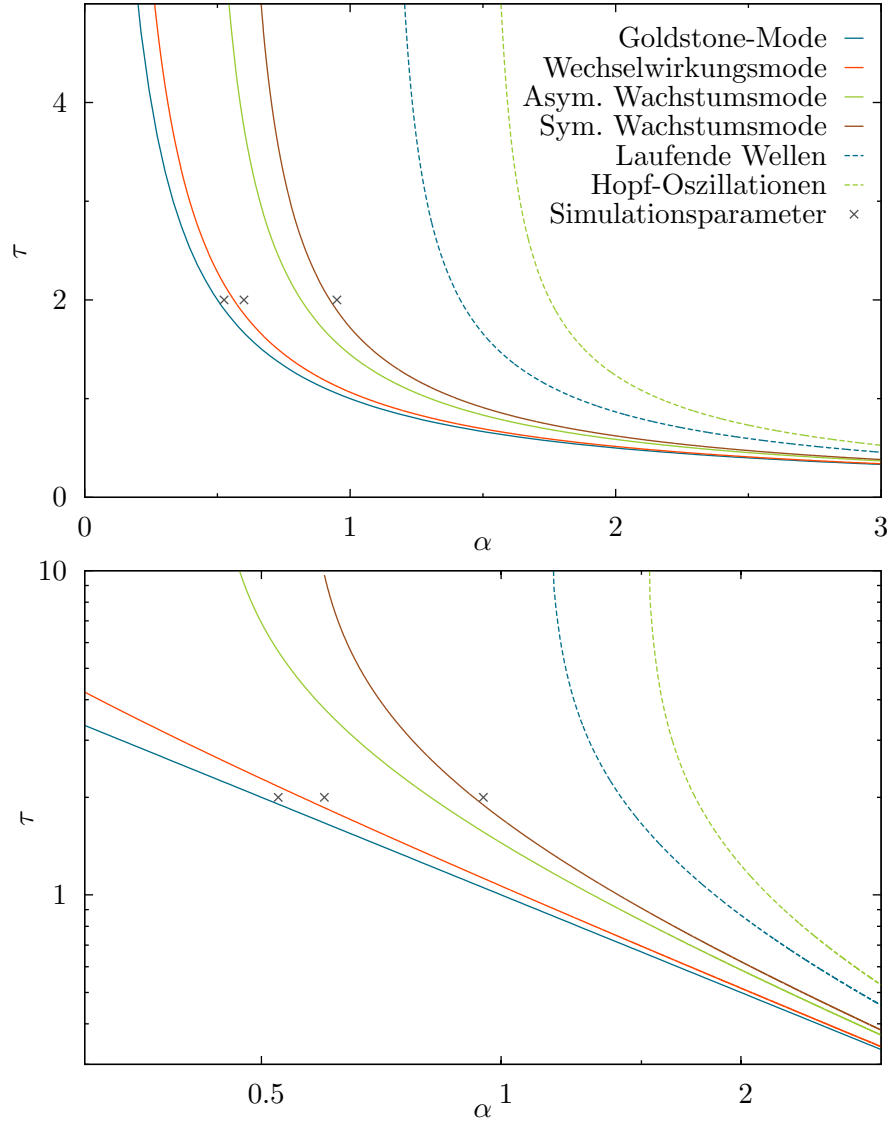


Abbildung 2.12: Stabilitätsgrenzen für zwei im Abstand $d = 7,14$ gebundene lokalisierte Strukturen in einer Dimension abhängig von α und τ in normaler (oben) und logarithmischer Skalierung (unten). Dargestellt sind die Grenze der Goldstone-Mode (blau), der Wechselwirkungsmode (rot), der asymmetrischen (grün) und der symmetrischen Wachstumsmode (braun), sowie die Stabilitätsgrenze der homogenen Lösung gegenüber laufenden Wellen (blau, gestrichelt) und gegen homogene Hopf-Oszillationen (grün, gestrichelt). Die Kreuze markieren Parameterwerte, an denen Simulationen durchgeführt wurden (siehe Abb. 2.13).

bemerkbar, in den entsprechenden Parameterbereichen ist ebenfalls ein Aufbrechen des Zustands, d.h. eine durch die Wechselwirkungsmoden dominierte Dynamik zu beobachten. Eine Erhöhung der Delay-Parameter, bis auch die symmetrische Wachstumsmoden instabil ist, wirkt sich jedoch auf die Dynamik aus. Wie in Abbildung 2.13 unten rechts zu sehen, führt dies zu einer Verbreiterung und dem Auseinanderlaufen der Strukturen. Zwischen den auseinanderlaufenden Strukturen bilden sich an den oszillatorischen Ausläufern neue Strukturen, was zu einer raumfüllenden laufenden Welle führt. Zu beachten ist jedoch, dass diese Welle nicht auf eine Instabilität des homogenen Hintergrundes zurückzuführen ist.

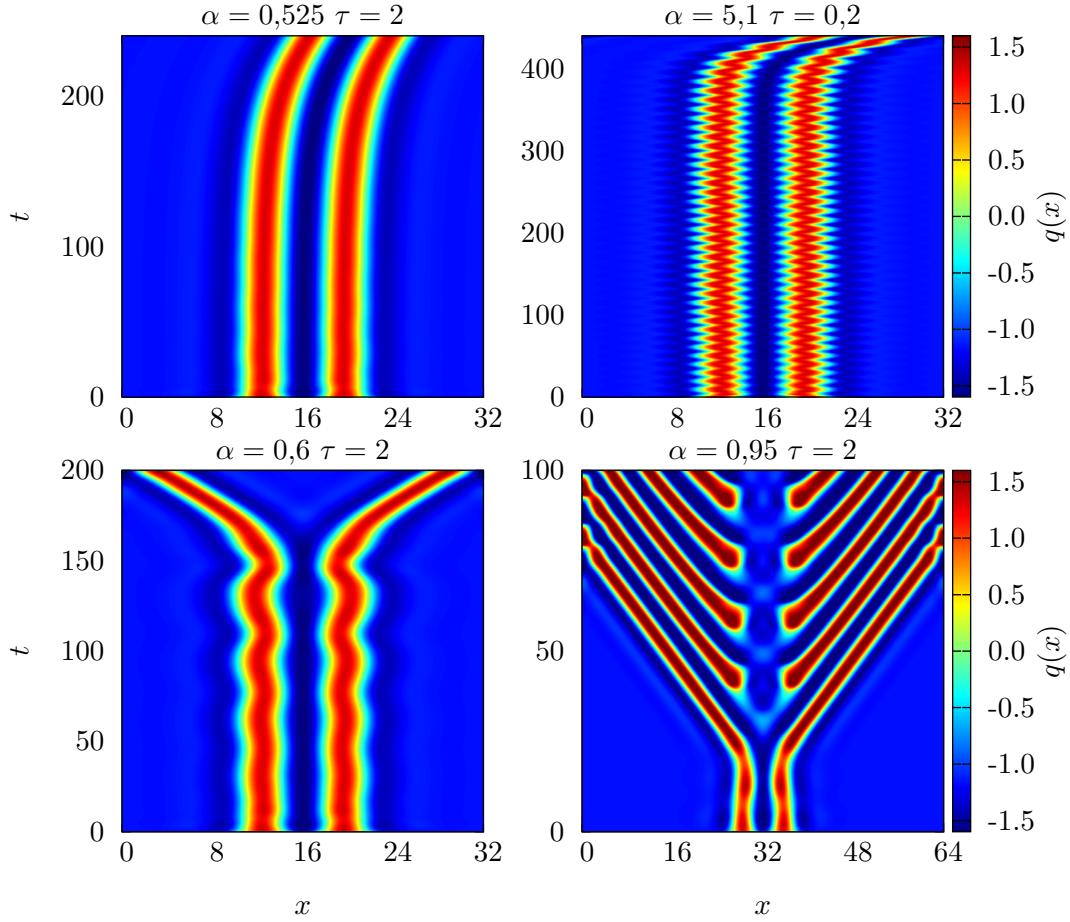


Abbildung 2.13: Numerische Simulationen von zwei gebundenen lokalisierten Strukturen in einer Raumdimension für verschiedene Werte von α und τ . Oben links ist der reine Drift der lokalisierten Struktur knapp oberhalb der Instabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ zu sehen. Als Anfangsbedingung wurden zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 7,2$ mit Rauschen überlagert. Oben rechts wurden zwei Gauß-Pulse in einem vergrößerten Abstand $d = 8$ als Anfangsbedingung gewählt. Die konkurrierenden Effekte der sich anziehenden Strukturen und der instabilen Drift-induzierenden Goldstone-Mode führen zu einer Oszillation der Strukturen bevor sich die instabile Goldstone-Mode durchsetzt.

Unten links ist die Wechselwirkungsmode bereits instabil, was zur Oszillation der Strukturen und schließlich zur Aufspaltung des gebundenen Zustands führt. Unten rechts ist die symmetrische Wachstumsmode instabil, was zu einer Verbreiterung der Strukturen und zu einem Auseinanderdriften führt. Zwischen den auseinanderlaufenden Strukturen bilden sich neue Strukturen, die ebenfalls zerlaufen, sodass sich eine laufende Welle ergibt. Es handelt sich jedoch nicht um eine lineare Instabilität des homogenen Hintergrunds (siehe Abb. 2.12). Als Anfangsbedingung wurden in den unteren beiden Simulationen zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 7,2$ verwendet. Die weiteren Parameter sind: $dx = 0,01$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

2.5 Destabilisierung lokalisierter Strukturen in zwei Raumdimensionen

Für die Beschreibung transversaler Strukturen, wie sie in den in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen optischen Experimenten auftreten, ist die Betrachtung lokalisierter Strukturen in zwei Raumdimensionen notwendig. In diesem Abschnitt wird daher die Destabilisierung lokalisierter Strukturen durch TDFC in zwei Raumdimensionen untersucht.

Zu klären ist insbesondere, wie sich das Verhalten von lokalisierten Strukturen in zwei Raumdimensionen von dem in einer Raumdimension unterscheidet. Zwar lassen sich einige Ergebnisse, wie beispielsweise die Stabilitätsgrenze der Goldstone-Moden, auf den zweidimensionalen Fall übertragen, das Auftreten zusätzlicher lokalisierter Eigenfunktionen bietet jedoch Raum für komplexeres dynamisches Verhalten. In zwei Dimensionen weist das betrachtete System Translationssymmetrien in zwei Raumrichtungen sowie eine Rotationssymmetrie auf. Entsprechend besitzen lokalisierte Lösungen bis zu drei Goldstone-Moden, wenn diese Symmetrien spontan gebrochen werden.

Das Vorgehen erfolgt analog zu dem vorherigen Abschnitt; zunächst wird die Destabilisierung einer einzelnen lokalisierten Struktur untersucht, anschließend werden gebundene Zustände zwischen zwei lokalisierten Strukturen behandelt. Die Darstellung beschränkt sich jedoch im Folgenden auf das Aufzeigen von Unterschieden zwischen dem dynamischen Verhalten in einer bzw. zwei Raumdimensionen. Umfassendere Simulationsergebnisse sind im Anhang dargestellt.

2.5.1 Einzelne lokalisierte Strukturen

Betrachtet wird zunächst eine einzelne lokalisierte Struktur, welche ohne TDFC eine stabile stationäre Lösung von (2.6) darstellt und in Abbildung 2.14 links oben abgebildet ist. Die Lösung ist radialsymmetrisch, die Rotationssymmetrie des Systems wird daher nicht gebrochen. Aufgrund der gebrochenen Translationssymmetrie existieren daher lediglich zwei neutral-stabile Goldstone-Moden der Translation \mathcal{G}_x und \mathcal{G}_y , welche neben den weiteren lokalisierten Eigenfunktionen in Abbildung 2.14 dargestellt

sind. Außerdem existiert im diskreten Teil des Eigenwertspektrums eine lokalisierte Wachstumsmode ($\mu = -0,46$) vergleichbar zur Wachstumsmode im eindimensionalen Fall, sowie zwei Eigenfunktionen ($\mu = -0,86$), welche bei einer Instabilität zu einer Verformung der lokalisierten Struktur führen würden. Diese Moden werden daher im Folgenden als Verformungsmoden bezeichnet.

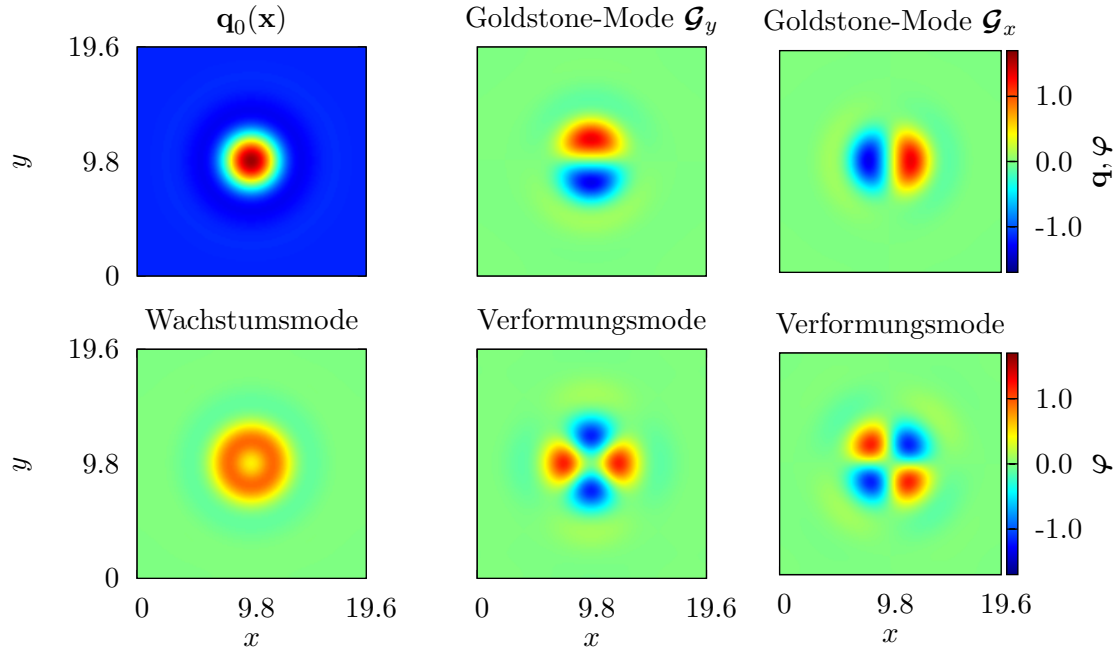


Abbildung 2.14: Lokalisierte Lösung $q_0(\mathbf{x})$ (oben links) sowie die numerisch bestimmten lokalisierten Eigenfunktionen $\varphi(\mathbf{x})$. Oben Mitte und links: Goldstone-Moden ($\mu = 0$). Unten links: Wachstumsmode ($\mu = -0,46$). Unten Mitte und unten rechts: Verformungsmoden ($\mu = -0,86$). Parameter: $L_x = L_y = 19,6$, $dx = dy = 0,14$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

Da die Verformungsmoden bei einer Instabilität zu einem Wachstum der Struktur in einer Raumrichtung und zu einem Schrumpfen in der dazu orthogonalen Raumrichtung führen, können diese im Prinzip als asymmetrische Wachstumsmoden in zwei Raumdimensionen aufgefasst werden. Tatsächlich entspricht der Eigenwert der Verformungsmoden dem Eigenwert der Wachstumsmode im eindimensionalen Fall.

In Kugelkoordinaten (r, ϕ) lässt sich die Winkelabhängigkeit der lokalisierten Eigenfunktionen näherungsweise durch $\varphi(r, \phi) = e^{im\phi} \tilde{\varphi}(r)$ beschreiben. In Analogie zu den

Kugelflächenfunktionen werden die oben beschriebenen lokalisierten Eigenfunktionen in der Literatur [27, 58] zum Teil gemäß ihrer Winkelabhängigkeit benannt. Die Goldstone-Moden entsprechen gemäß dieser Nomenklatur den Eigenfunktionen mit $m = 1$, die Wachstumsmode entspricht $m = 0$ und die Verformungsmoden entsprechen $m = 2$. Für lokalisierte Lösungen in Reaktions-Diffusions-Systemen wurden zum Teil auch Verformungsmoden mit einer Winkelabhängigkeit $m = 3$ festgestellt [26], welche im vorliegenden Fall jedoch nicht existieren.

Die Untersuchung der Destabilisierung durch TDFC erfolgt analog zum Fall in einer Raumdimension. Erneut werden zunächst die Stabilitätsgrenzen der einzelnen Eigenfunktionen bestimmt und dann mit direkten Simulationen von Gleichung (2.6) verglichen. Oberhalb der Stabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ beginnt die Struktur zunächst zu driften, wobei die Richtung des einsetzenden Drifts aufgrund der beiden instabilen Goldstone-Moden nicht vorhersagbar ist. Durch weiteres Erhöhen der Delay-Parameter wird die Wachstumsmode destabilisiert, was ohne verrauschte Anfangsbedingungen zu einer anwachsenden Oszillation der Größe der Struktur führt und eine Auslöschung der Struktur zur Folge hat.

Für noch höhere Werte von α bzw. τ werden zwar die Verformungsmoden destabilisiert, dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Dynamik der Struktur. Die Struktur wird ohne verrauschte Anfangsbedingungen ausgelöscht, mit verrauschten Anfangsbedingungen setzt ein Drift der Struktur ein. Die Instabilitäten des homogenen Hintergrunds welche zu laufenden Wellen bzw. zu Hopf-Oszillationen führen, sind in den entsprechenden Parameterbereichen wiederum deutlich wahrnehmbar. Insgesamt lässt sich jedoch kein fundamental neues Verhalten feststellen, weswegen das Stabilitätsdiagramm wie auch die beschriebenen Simulationsergebnisse für eine einzelne lokalisierte Struktur in zwei Dimensionen im Anhang dargestellt werden.

2.5.2 Gebundene Zustände lokalisierter Strukturen

Geht man nun zur Betrachtung von zwei lokalisierten Strukturen über, so muss man wie schon in Abschnitt 2.4.2 zwischen zwei voneinander unabhängigen lokalisierten Strukturen und zwei Strukturen in einem gebundenen Zustand unterscheiden. Im Falle zweier unabhängiger Strukturen bestehen die lokalisierten Eigenfunktionen wie

in Abschnitt 2.4.2 gezeigt aus Linearkombinationen der Eigenfunktionen einzelner lokalisierter Strukturen mit dem gleichen Eigenwert. Ohne TDFC existieren daher vier neutral-stabile Eigenfunktionen, welche bei einsetzender Instabilität zu einer Verschiebung der Strukturen führen. Wie in einer Raumdimension existieren außerdem eine symmetrische und eine asymmetrische Wachstumsmoden. In zwei Raumdimensionen ergeben sich zusätzlich vier Verformungsmoden.

Für geringere Abstände zwischen den Strukturen existieren stabile Lösungen nur noch für bestimmte Distanzen d . Die Distanz dieser gebundenen Zustände weicht leicht von den in Abschnitt 2.4.2 für eine Raumdimension ermittelten Werten ab. Die gebundenen Zustände existieren für $d = 14,1$, sowie $d = 8,1$. Die Stabilität für genau diese Distanzen ist wie auch schon in einer Raumdimension auf das Überlappen der oszillatorischen Ausläufer der Einzelstrukturen zurückzuführen. Wie in einer Raumdimension zeichnen sich die gebundenen Zustände durch ein Aufspalten der diskreten Eigenwerte aus. Die vier verschiedenen Verformungsmoden besitzen nun unterschiedliche Eigenwerte, ebenso unterscheiden sich die Eigenwerte der asymmetrischen und der symmetrischen Wachstumsmoden. Am deutlichsten ist der Unterschied bei den vormals neutral-stabilen Eigenfunktionen. Die neutral-stabile Eigenfunktion, welche bei unabhängigen Strukturen mit einer Verschiebung der Strukturen gegeneinander korrespondiert, verliert ihren neutralen Eigenwert und besitzt nun einen Eigenwert $\mu < 0$. Diese Veränderung des Eigenwerts der Wechselwirkungsmoden ist charakteristisch für gebundene Zustände, welche gerade nicht mehr neutral-stabil gegenüber Änderungen der Distanz zwischen den Strukturen sind. Die Veränderung des Eigenwerts der Wechselwirkungsmoden ist allerdings nicht so deutlich, wie in einer Raumdimension, was auf die größeren Bindungsabstände der Strukturen in zwei Dimensionen zurückzuführen ist.

In zwei Raumdimensionen besitzen gebundene Zustände damit drei neutral-stabile Eigenfunktionen. Zwei dieser Moden korrespondieren mit einer Verschiebung des kompletten gebundenen Zustands, es handelt sich somit um Goldstone-Moden der Translation. Die weitere neutral-stabile Eigenfunktion verursacht eine Rotation des gebundenen Zustands wenn sie instabil wird. Es handelt sich um eine Goldstone-Mode der Rotation, die existiert, da der gebundene Zustand (im Gegensatz zu einer einzelnen lokalisierten Struktur) die Rotationssymmetrie des Systems bricht. Die

lokalisierten Eigenfunktionen des engsten gebundenen Zustands $d = 8,1$ sind in Abbildung 2.16 dargestellt.

Die Destabilisierung der lokalisierten Eigenfunktionen durch TDFC kann wie in den vorherigen Abschnitten untersucht werden. In Abbildung 2.17 sind die Stabilitätsgrenzen der einzelnen lokalisierten Eigenfunktionen zu sehen, wobei aus Übersichtsgründen nur eine der vier leicht voneinander abweichenden Stabilitätsgrenzen der Verformungsmoden dargestellt ist.

Das Verhalten des gebundenen Zustands unter dem Einfluss von TDFC ist jedoch durch die lineare Stabilitätsanalyse nicht vollständig bestimmt. Bereits für Werte von α und τ knapp oberhalb der Stabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ sind sowohl die Goldstone-Moden der Translation als auch die Goldstone-Mode der Rotation instabil. Führt man in diesem Parameterbereich Zeitsimulationen durch (siehe Abbildung 2.18), so beginnt der gebundene Zustand tatsächlich zu driftten und zu rotieren, wobei die Rotation mit der Zeit ausstirbt und die Struktur in Richtung ihrer Hauptachse driftet. Dass sich langfristig der Drift der Struktur gegenüber der Rotation durchsetzt, ist nicht im Rahmen der linearen Stabilitätsanalyse des stationären Zustandes erklärbar.

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} des resultierenden Drifts wurde für den Fall einer einzelnen lokalisierten Struktur nahe des Bifurkationspunkts $\alpha\tau = 1$ in [2, 27] analytisch bestimmt. Unter der Annahme, dass die lokalisierte Struktur in der Nähe der Stabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ ohne Formänderung entlang des Gruppenorbits $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = e^{\mathbf{R}(t) \cdot \nabla} \mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ driftet, wurde in [27] folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Geschwindigkeit \mathbf{v} hergeleitet:

$$\frac{\alpha\tau^2}{2} \dot{\mathbf{v}}(t) = (\alpha\tau - 1) \mathbf{v}(t) - \frac{\alpha\tau^3}{6} \beta |\mathbf{v}(t)|^2 \mathbf{v}(t), \quad (2.34)$$

mit

$$\beta = \frac{||\partial_x^2 \mathbf{q}_0||^2 + ||\partial_y^2 \mathbf{q}_0||^2}{||\nabla \mathbf{q}_0||^2}. \quad (2.35)$$

Hierbei beschreibt $||\dots||$ die Norm im Hilbertraum L^2 , welche durch räumliche Integration über das gesamte Grundgebiet gebildet wird. Gleichung (2.34) entspricht der Normalform einer Pitchfork-Bifurkation, welche in diesem Kontext häufig auch als

Drift-Bifurkation bezeichnet wird [27]. Für Werte von $\alpha\tau < 1$ ergibt sich in Übereinstimmung mit den vorliegenden Ergebnissen für Gleichung (2.34) die stabile Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Oberhalb des Bifurkationspunkts $\alpha\tau = 1$ ergeben sich stabile stationäre Lösungen für die Geschwindigkeit mit

$$|\mathbf{v}| = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{6(\alpha\tau - 1)}{\beta\alpha\tau}}. \quad (2.36)$$

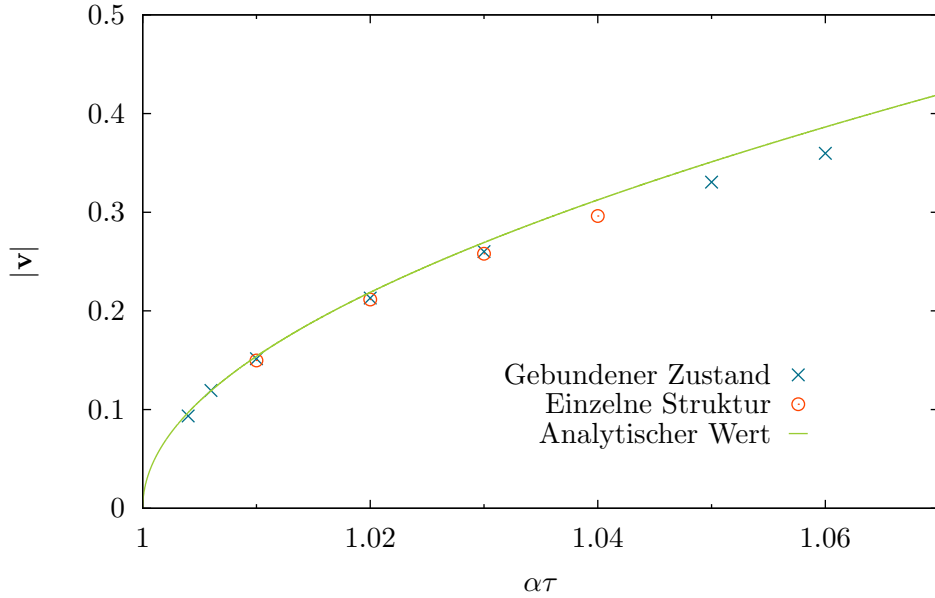


Abbildung 2.15: Geschwindigkeit eines gebundenen Zustands (blaue Kreuze) und einer einzelnen lokalisierten Struktur (rote Kreise) für verschiedene Werte von $\alpha\tau$. Außerdem ist die gemäß Gleichung (2.36) analytisch bestimmte Geschwindigkeit für einen gebundenen Zustand dargestellt (grün).

Vernachlässigt man bei der Betrachtung gebundener Zustände mit instabilen Goldstone-Moden die zu Beginn einsetzende Rotation und beschränkt sich auf die Beschreibung des Drifts, welcher die Dynamik des Zustands langfristig dominiert, so lässt sich die Argumentation aus [27] auf gebundene Zustände ausweiten und führt zu dem selben Ausdruck für die Geschwindigkeit. In Abbildung 2.15 ist der in Gleichung (2.36) analytisch bestimmte Wert von $|\mathbf{v}|$ für einen im Abstand $d = 8,1$ gebundenen

Zustand in Abhängigkeit von $\alpha\tau$ dargestellt. Dieser stimmt insbesondere für Werte von $\alpha\tau \approx 1$ sehr gut mit den direkt aus Simulationen gewonnen Geschwindigkeitsbeträgen überein.

Neben der Geschwindigkeit gebundener Zustände ist in Abbildung 2.15 außerdem die Geschwindigkeit einzelner lokalisierter Strukturen dargestellt. Wie deutlich zu erkennen ist, stimmt diese sehr gut mit der Geschwindigkeit gebundener Zustände überein. Der einzige Parameter, der in Gleichung (2.36) von der Form der Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$ abhängt, ist β . Da der gebundene Zustand jedoch näherungsweise zwei einzelnen lokalisierten Strukturen entspricht und somit

$$(\nabla \mathbf{q}_0)_{\text{gebunden}} \approx 2 \cdot (\nabla \mathbf{q}_0)_{\text{einzeln}}, \quad (2.37)$$

gilt, ergibt sich $\beta_{\text{gebunden}} \approx \beta_{\text{einzeln}}$ und somit in guter Näherung die gleiche Geschwindigkeit.

In Abbildung 2.15 ist deutlich zu erkennen, dass der ermittelte analytische Wert für die Geschwindigkeit nur in der Nähe des Bifurkationspunkts $\alpha\tau = 1$ gut mit den tatsächlichen Geschwindigkeiten übereinstimmt. Für größere Werte von $\alpha\tau$ verliert die Annahme, dass die weiteren stabilen Moden die Dynamik nicht beeinflussen, d.h. dass eine Verformung der Struktur vernachlässigt werden kann, ihre Gültigkeit. Zudem muss für die Betrachtung gebundener Zustände das Ergebnis der abklingenden Rotation bereits vorausgesetzt werden, und lässt sich nach aktuellem Stand nicht mit Hilfe eines vergleichbaren Ansatzes erklären.

Der Einfluss der weiteren lokalisierten Eigenfunktionen kann insbesondere bei der Betrachtung gebundener Zustände nur in unmittelbarer Nähe des Bifurkationspunkts vernachlässigt werden. Durch Erhöhen der Delay-Parameter α oder τ wird schnell ebenfalls die Wechselwirkungsmoden destabilisiert, was ohne verdrauschte Anfangsbedingungen wie schon in einer Dimension eine Oszillation zwischen den Strukturen bewirkt. Diese führt zum Aufbrechen des gebundenen Zustands (siehe Abbildung 2.19). Mit verdrauschten Anfangsbedingungen ist für ansonsten gleiche Parameter weiterhin der Drift des gebundenen Zustands zu beobachten. Der Einfluss instabiler Wachstumsmoden ist in den entsprechenden Parameterbereichen nicht erkennbar. Stattdessen wird der gebundene Zustand aufgebrochen und es kommt

anschließend zu einer Verformung der einzelnen Strukturen, welche sich aufgrund einer Krümmungsinstabilität zusätzlich zu krümmen beginnen (siehe Abbildung 2.20). Mit verrauschten Anfangsbedingungen kommt es zum Drift und zur Rotation des gebundenen Zustands sowie zu einer Verformung der beiden Strukturen (siehe Abbildung 2.21).

Für höhere Werte von α oder τ ist der Einfluss instabiler Verformungsmoden wahrnehmbar. Wie schon bei instabilen Wachstumsmoden in einer Dimension, die in Abschnitt 2.4.2 behandelt wurden, führt die Instabilität dieser Moden zu einer Verformung. Außerdem ist eine Krümmung der verformten Strukturen zu beobachten. Schließlich entstehen an den oszillatorischen Ausläufern der ursprünglichen Strukturen neue Strukturen, was zu raumfüllenden laufenden Wellen führt (siehe Abbildung 2.22), welche jedoch nicht auf eine Instabilität des homogenen Hintergrunds zurückzuführen sind. Die Bildung laufender Wellen oder mit homogenen Hopf-Oszillationen überlagerter laufender Wellen lässt sich bei instabilem homogenen Hintergrund ebenfalls beobachten und erfolgt analog zum Fall in einer Dimension oder zu den im Anhang dargestellten Simulationen für eine lokalisierte Struktur in einer Raumdimension.

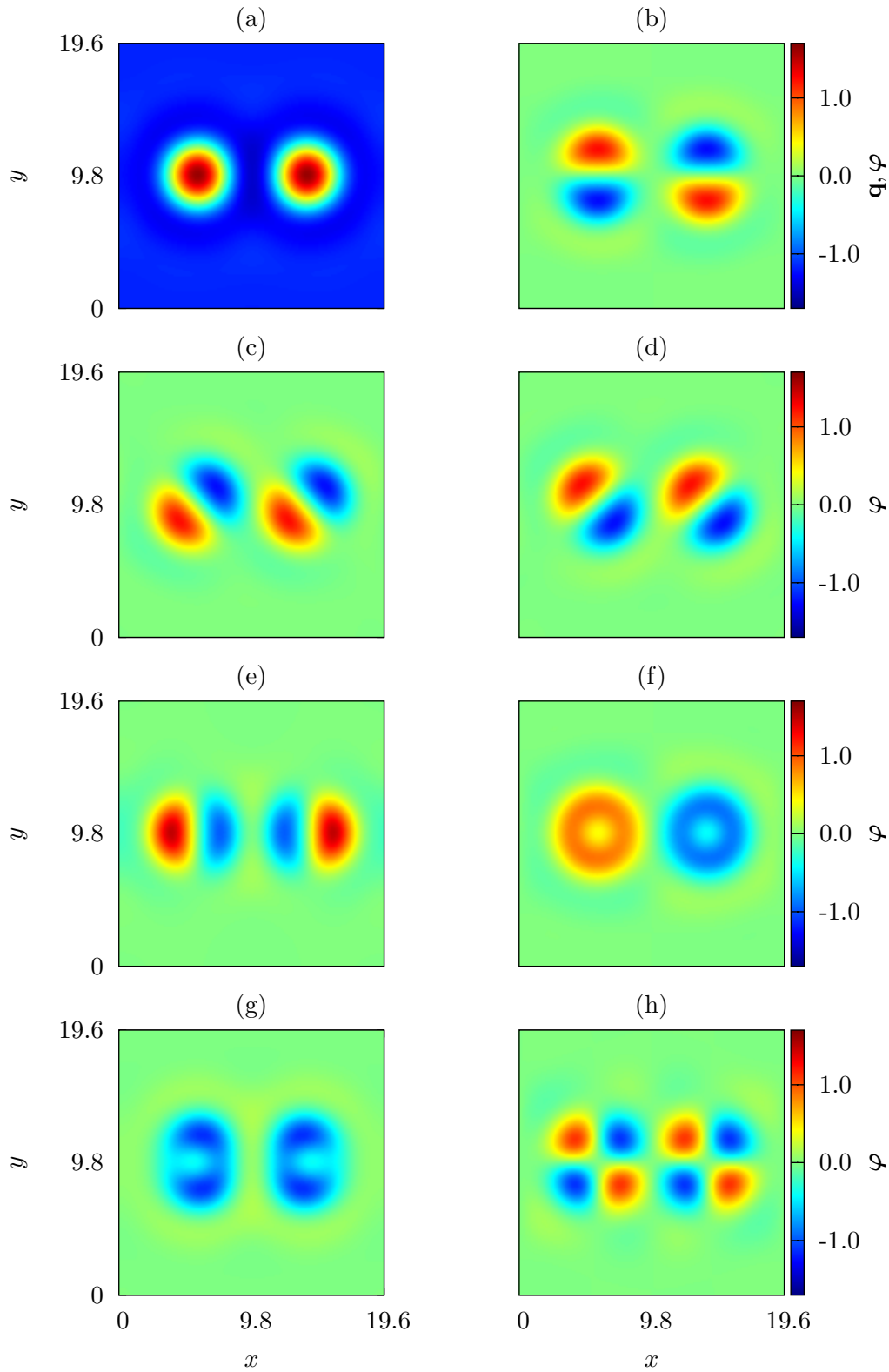


Abbildung 2.16: (a) Im Abstand $d = 8,1$ gebundene lokalisierte Lösung $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$, sowie die numerisch bestimmten lokalisierten Eigenfunktionen $\varphi(\mathbf{x})$: (b) Goldstone-Mode der Rotation, (c)+(d) Goldstone-Moden der Translation (alle $\mu = 0$), (e) Interaktionsmode ($\mu = -0,08$), (f) asymmetrische Wachstumsmode ($\mu = -0,47$), (g) symmetrische Wachstumsmode ($\mu = -0,50$), (h) erste der vier Verformungsmoden ($\mu = -0,85$). Parameter: $L_x = L_y = 19,6$, $dx = dy = 0,14$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

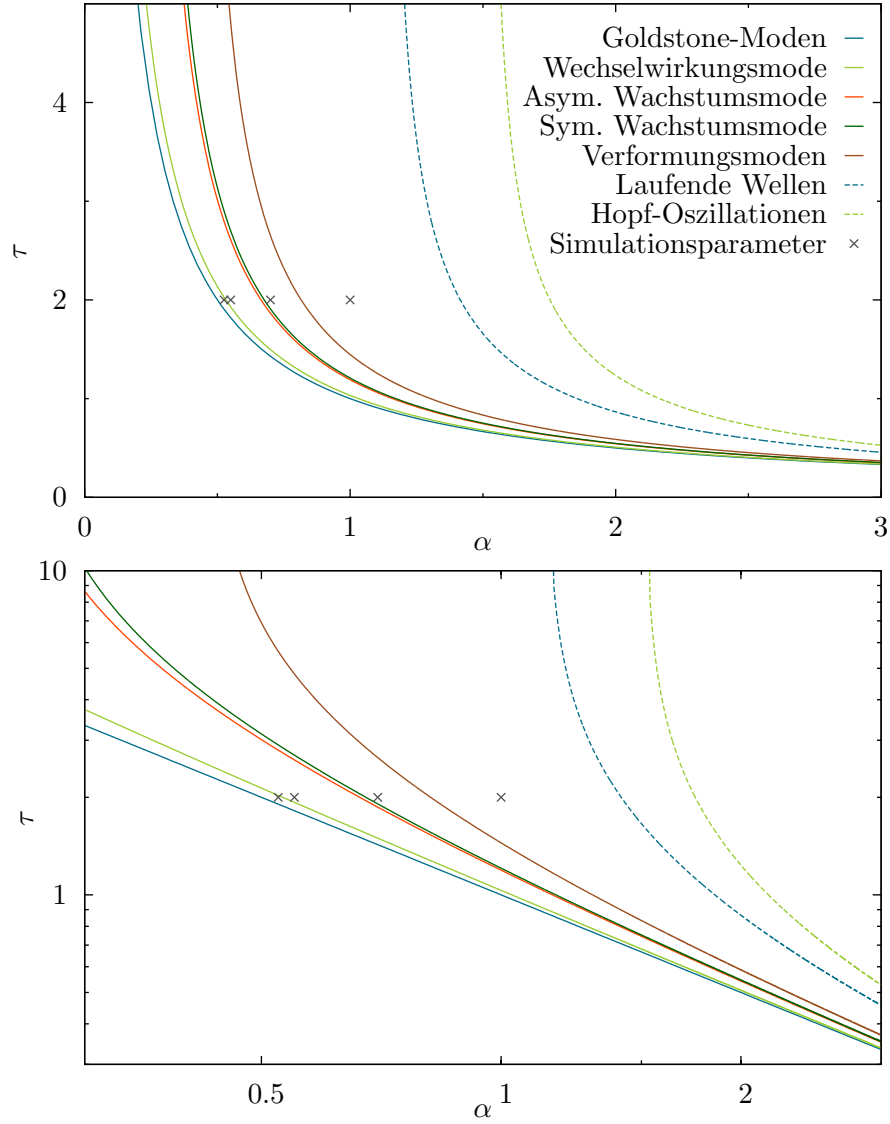


Abbildung 2.17: Stabilitätsgrenzen für einen im Abstand $d = 8,1$ gebundenen Zustand von zwei lokalisierten Strukturen in zwei Dimensionen abhängig von α und τ in normaler (oben) und logarithmischer Skala (unten). Die Grenze der Goldstone-Moden entspricht $\alpha\tau = 1$ (blau). Außerdem sind die Stabilitätsgrenzen der Wechselwirkungsmoden (grün), der asymmetrischen (rot) und der symmetrischen Wachstumsmoden (dunkelgrün), sowie die Grenze einer Verformungsmoden (braun) dargestellt. Ebenfalls abgebildet sind die Stabilitätsgrenzen der homogenen Lösung gegenüber laufenden Wellen (blau, gestrichelt) und gegen homogene Hopf-Oszillationen (grün, gestrichelt). Die Kreuze markieren Parameterwerte, an denen Simulationen durchgeführt wurden.

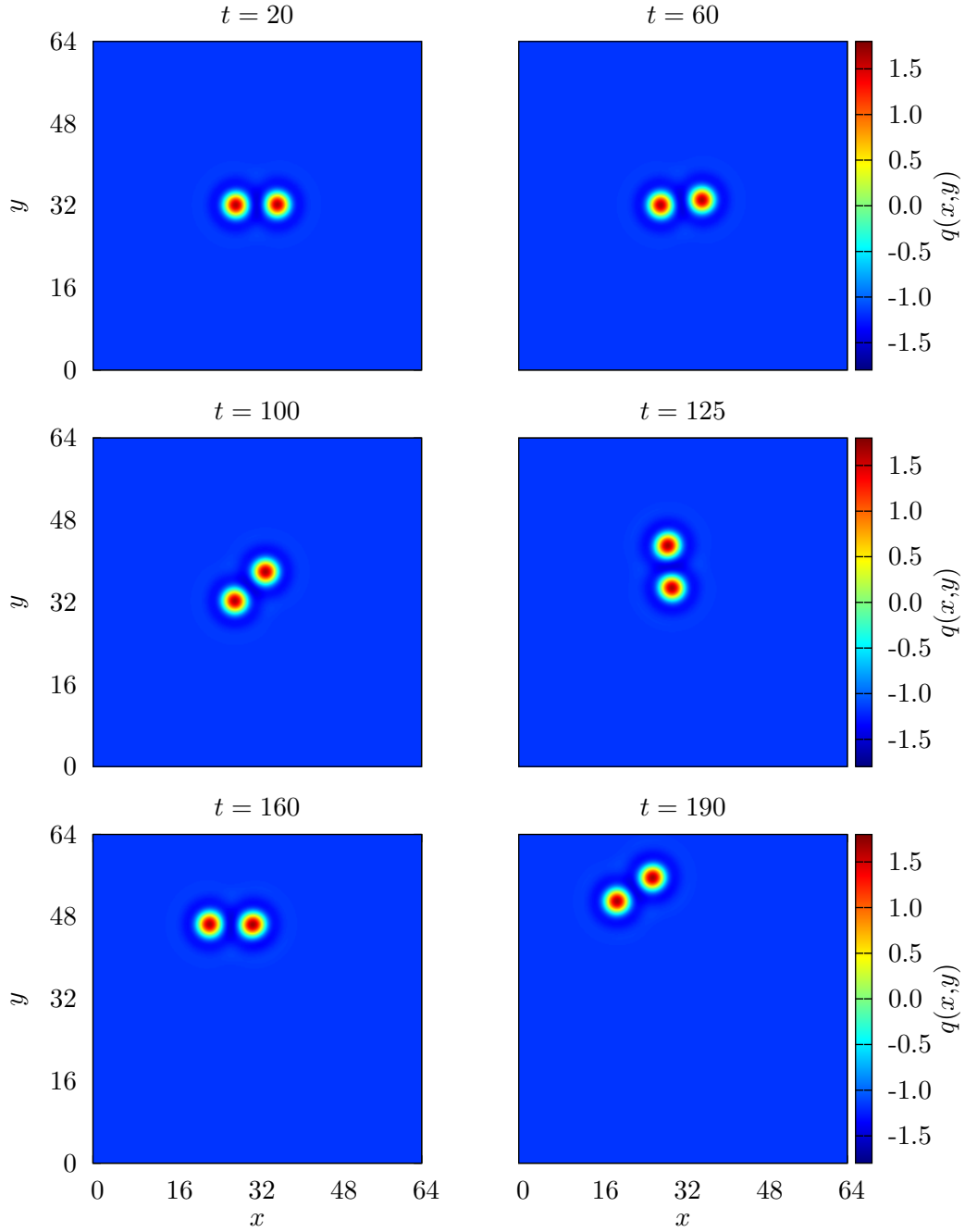


Abbildung 2.18: Drift und Rotation des gebundenen Zustands für $\tau = 2$, $\alpha = 0,525$. Die gebundenen Strukturen beginnen zu rotieren und zu driften. Langfristig zerfällt die Rotation und die gebundene Lösung driftet in Richtung ihrer Längsachse. Als Anfangsbedingung wurden zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 8,1$ gewählt und mit Rauschen überlagert. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

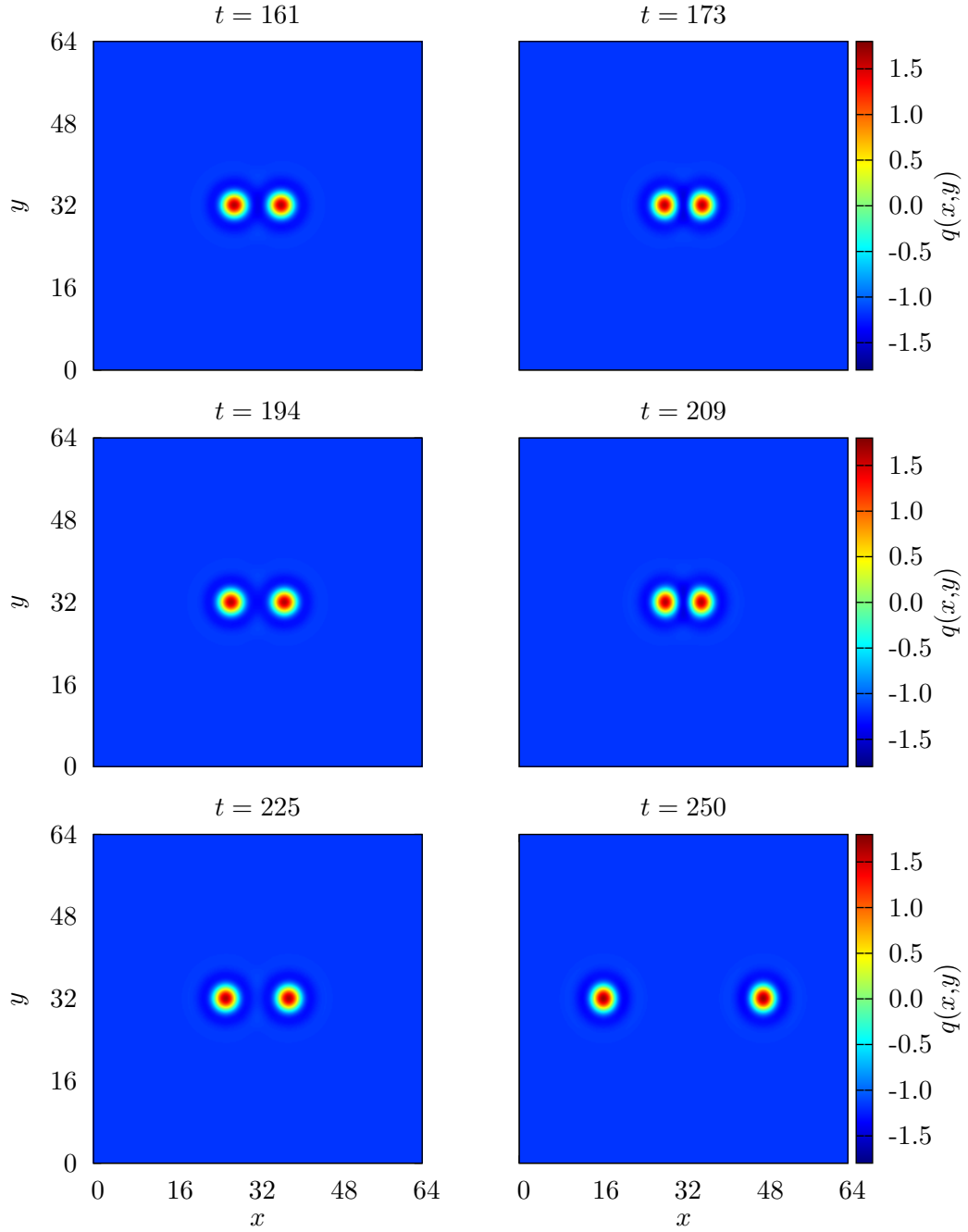


Abbildung 2.19: Aufspaltung der gebundenen Lösung für $\tau = 2$, $\alpha = 0,55$. Aufgrund der instabilen Interaktionsmode beginnen die beiden Strukturen gegenläufig zu schwingen. Die Amplitude dieser Schwingungen steigt an, bis der gebundene Zustand aufgebrochen wird und beide Strukturen einzeln driften. Als Anfangsbedingung wurden zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 8,1$ gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

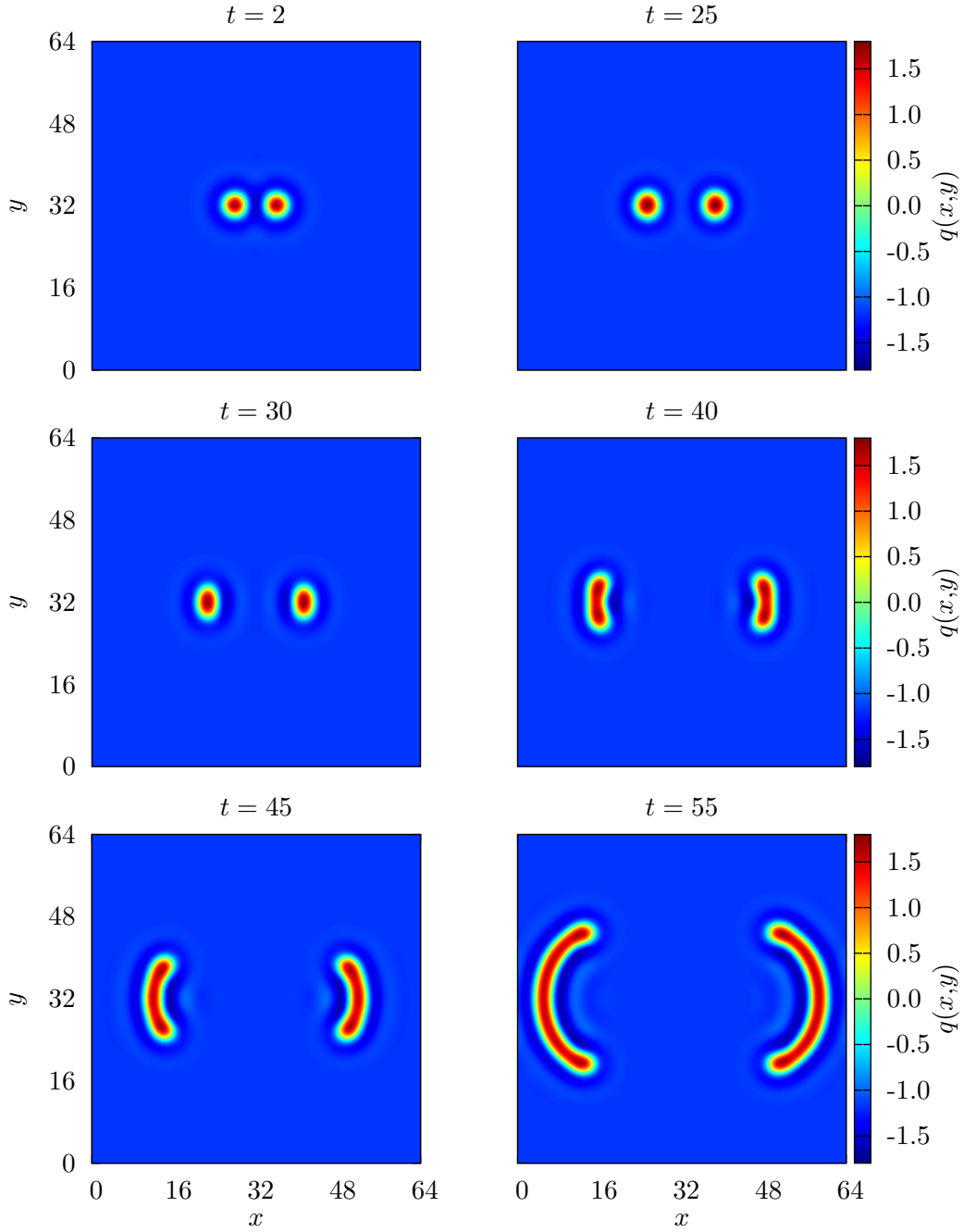


Abbildung 2.20: Aufspaltung der gebundenen Lösung mit anschließender Verformung für $\tau = 2$, $\alpha = 0,7$. Als Anfangsbedingung wurden zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 8,1$ gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

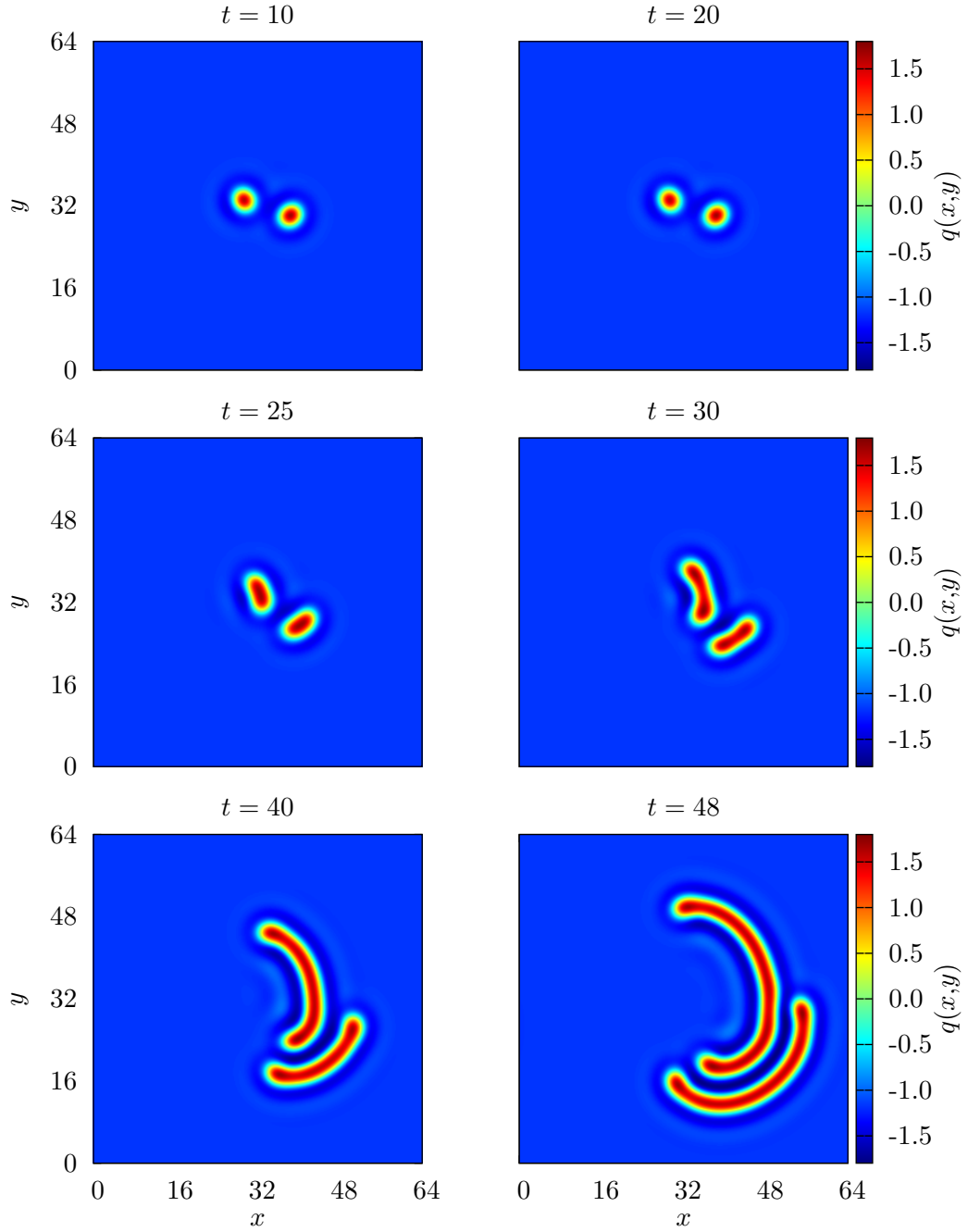


Abbildung 2.21: Rotation und Drift der gebundenen Lösung mit anschließender Verformung für $\tau = 2$, $\alpha = 0,7$. Als Anfangsbedingung wurden zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 8,1$ mit Rauschen überlagert. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

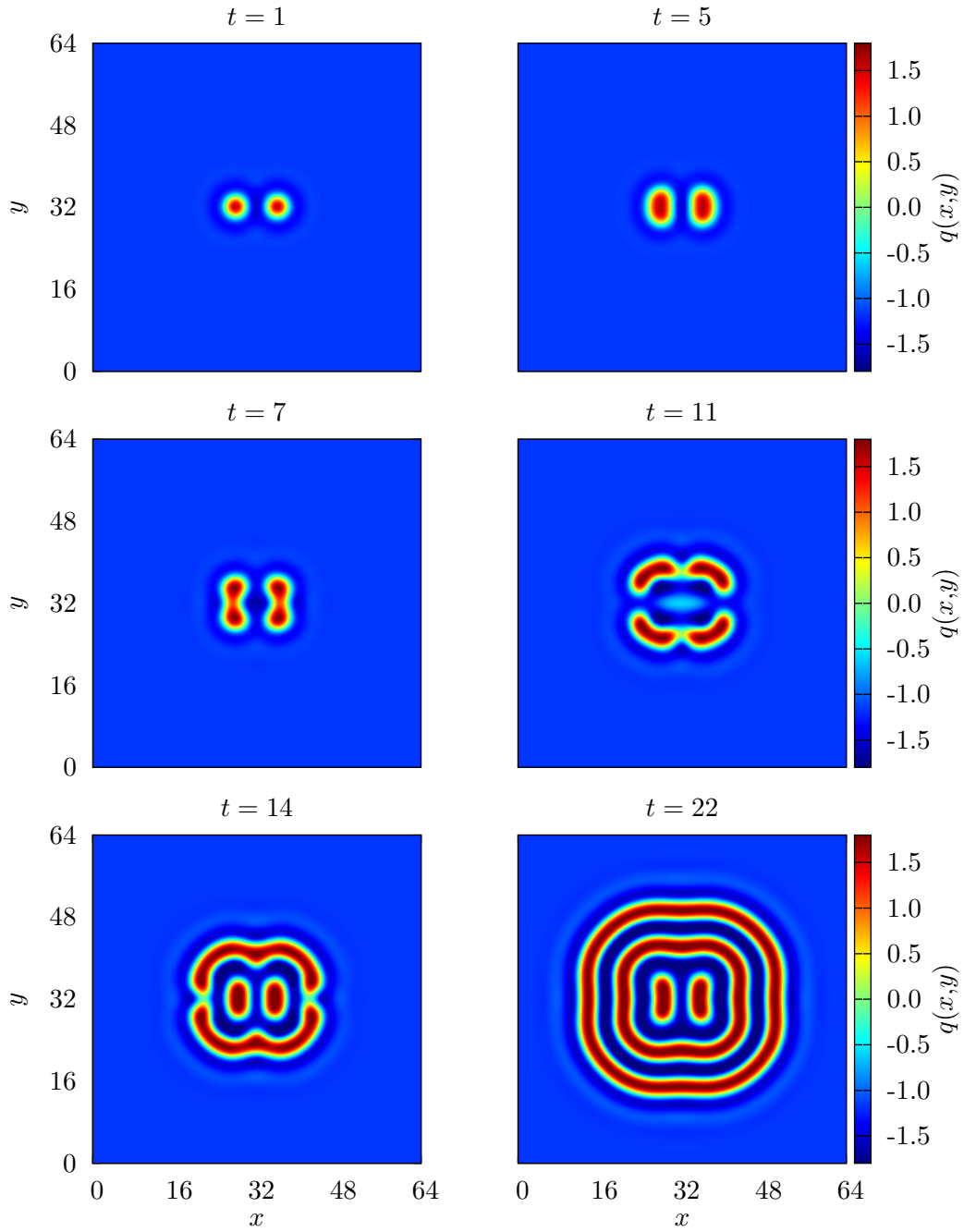


Abbildung 2.22: Verformung der gebundenen Lösung für $\tau = 2$, $\alpha = 1$. Aufgrund der instabilen Verformungsmoden beginnen sich die beiden Strukturen zu verformen. Die Strukturen laufen vom Zentrum des Simulationsgebiets nach außen und bilden einen Ring, zwischen dem sich neue Strukturen bilden, welche ebenfalls auseinanderlaufen. Im Ergebnis bildet sich eine nach außen laufende Welle, welche jedoch nicht auf eine lineare Instabilität des homogenen Hintergrunds zurückzuführen ist, sondern durch die Verformung bereits vorhandener lokalisierter Strukturen entsteht. Als Anfangsbedingung wurden zwei Gauß-Pulse im Abstand $d = 8,1$ gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

2.6 Grenzen des behandelten Modells

Im vorliegenden Kapitel wurden die Ergebnisse aus dem ersten Kapitel auf ein System angewendet, welches transversale Strukturen in einem optischen Resonator an der Grenze zur Bistabilität beschreibt. Das Hauptaugenmerk lag hierbei auf der Beschreibung lokalisierter Strukturen sowohl in einer als auch in zwei Raumdimensionen. Neben der Untersuchung einzelner lokalisierter Strukturen konnte auch das Verhalten gebundener Zustände untersucht werden.

Um den Einfluss von TDFC auf die Dynamik des Systems zu untersuchen wurde, wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, zunächst die lineare Stabilitätsanalyse der stationären Lösungen ohne TDFC durchgeführt. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Systems und der betrachteten Lösungen konnte die Existenz bestimmter neutral-stabiler Goldstone-Moden analytisch vorausgesagt werden. Die Bestimmung des weiteren Eigenwertspektrums mit den zugehörigen Eigenfunktionen erfolgte numerisch. Aufbauend auf diesen Ergebnisse konnten die Eigenwerte mit TDFC in Abhängigkeit von α und τ und somit die Stabilitätsgrenzen der einzelnen Eigenfunktionen bestimmt werden.

Die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse stimmen gut mit den direkten numerischen Simulationen von Gleichung (2.6) überein. Da jedoch mit zunehmender Zeitverzögerung die Anzahl der instabilen Moden wächst, kann allein anhand der linearen Stabilitätsanalyse die induzierte Dynamik nicht zweifelsfrei vorhergesagt werden. Deutlich wurde dies bereits bei der Betrachtung gebundener Zustände in einer Dimension. In diesem Fall hatte die Destabilisierung der Wachstumsmoden keinen wahrnehmbaren Einfluss auf die Dynamik des Systems. Das Verhalten des gebundenen Zustands wurde nach wie vor von der instabilen Wechselwirkungsmoden bzw. bei verrauschten Anfangsbedingungen von der instabilen Goldstone-Mode der Translation dominiert. Bei einer einzelnen lokalisierten Struktur in zwei Dimensionen war entsprechend der Einfluss der instabilen Verformungsmoden nicht wahrnehmbar.

Am deutlichsten wurden die Grenzen der linearen Stabilitätsanalyse bei der Betrachtung gebundener Zustände in zwei Raumdimensionen. Auch hier ist ein Einfluss instabiler Wachstumsmoden nicht feststellbar. Darüber hinaus sind jedoch bereits direkt oberhalb der Stabilitätsgrenze $\alpha\tau = 1$ zwei Goldstone-Moden der Transla-

tion sowie eine Goldstone-Mode der Rotation instabil. Allein auf der Grundlage der linearen Stabilitätsanalyse lässt sich nicht erklären, warum sich der durch die Goldstone-Moden der Translation induzierte Drift durchsetzt, während die Rotation des Zustands zerfällt. Auch eine schwach nichtlineare Analyse in der Nähe des Bifurkationspunkts erlaubt es bisher nicht, die zeitliche Entwicklung der gleichermaßen instabilen Moden zu beschreiben und so die Dynamik des Systems zu erklären. Die Ergänzung der linearen Stabilitätsanalyse durch direkte numerische Simulationen ist daher unverzichtbar.

Über die oben beschriebenen Probleme hinaus ist jedoch auch die Aussagekraft des zugrunde gelegten Modells für optische Experimente begrenzt. Gleichung (2.6) wurde aus den zeitverzögerten Maxwell-Bloch-Gleichungen an der Grenze zur optischen Bistabilität hergeleitet und ist schon deshalb nur beschränkt gültig [31]. Darüber hinaus wird lediglich die Amplitude der Einhüllenden des E-Feldes betrachtet, sodass insbesondere Phasenunterschiede zwischen dem E-Feld im Resonator $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ und dem mit Zeitverzögerung reinjizierten E-Feld $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)$ unberücksichtigt bleiben. Es ist offensichtlich, dass solche Phasenunterschiede die Wirkung der TDFC drastisch verändern. Wie in Abschnitt 1.3.2 beschrieben, ist zur Destabilisierung stabiler Strukturen eine positive Delay-Stärke α notwendig. Eine negative Delay-Stärke, entsprechend einer Phasenverschiebung von π zwischen $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau)$, hätte dagegen einen stabilisierenden Effekt auf die stationären Lösungen. Die Auswirkungen der Phase des Delay-Terms wurden unter anderem in [59] für ein realistischeres Modell eingehend untersucht.

Dennoch ist die Beschäftigung mit dem hier verwendeten Modell sinnvoll. Ohne TDFC entspricht das Modell einer Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung, welche analytisch wie auch numerisch bereits vielfach untersucht wurde. Da das Verhalten des Systems ohne TDFC hinlänglich bekannt ist, lassen sich anhand des verwendeten Modells die Einflüsse der Zeitverzögerung gut isoliert studieren. Das im zweiten Kapitel verwendete Modell bietet daher einen geeigneten Einstieg zur Untersuchung des Einflusses von TDFC auf lokalisierte Strukturen.

Im folgenden Kapitel soll eine Möglichkeit vorgestellt werden, das vorhandene Modell zu erweitern, um so einer realistischen Beschreibung lokalisierter Strukturen in optischen Systemen näher zu kommen.

3 Lokalisierte Strukturen in Systemen mit räumlichen Inhomogenitäten

Bisher wurde der Einfluss von TDFC auf lokalisierte Strukturen in einer Variante der Swift-Hohenberg-Gleichung untersucht. Abhängig von der Delay-Stärke α und der Delay-Zeit τ konnte die Destabilisierung unterschiedlicher Eigenmoden nachgewiesen werden, was eine große Bandbreite unterschiedlichen dynamischen Verhaltens ermöglicht. In Abschnitt 2.6 wurde jedoch auch auf die begrenzte Aussagekraft der gewonnenen Erkenntnisse für lokalisierte Strukturen in realen optischen Experimenten hingewiesen. Im Folgenden soll daher ein erster Schritt vorgeschlagen werden, um das behandelte System weiter an experimentelle Ergebnisse anzupassen.

Eines der wesentlichen Ergebnisse aus dem zweiten Kapitel ist der starke Einfluss der Goldstone-Moden, insbesondere der Goldstone-Moden der Translation, auf die Dynamik des Systems. Diese sind die ersten Moden, welche für Werte von $\alpha\tau > 1$ destabilisiert werden, was zu einem Drift einzelner lokalisierter Strukturen führt. Auch die Dynamik gebundener Zustände in zwei Raumdimensionen wird oberhalb der Stabilitätsgrenze von den Drift-induzierenden Goldstone-Moden der Translation bestimmt, während die ebenfalls einsetzende Rotation zerfällt. Fügt man den Anfangsbedingungen Rauschen hinzu, wird der Einfluss der Drift-induzierenden Moden noch verstärkt. Einzelne lokalisierte Strukturen, welche ohne Rauschen durch eine Instabilität der Wachstumsmode ausgelöscht werden, beginnen nun ebenfalls zu driften. Bei gebundenen Zuständen kann durch Rauschen das Aufbrechen des Zustands aufgrund der instabilen Wechselwirkungsmoden unterdrückt werden; auch hier beginnt die Struktur stattdessen zu driften.

Wie in Abschnitt 1.4 erläutert, hängt die Existenz von Goldstone-Moden nicht von der speziellen Form des Systems, sondern nur von seinen Symmetrieeigenschaften.

ten ab. Lokalisierte Lösungen translationsinvarianter Systeme besitzen daher immer Goldstone-Moden der Translation. Diese sind in Gradientensystemen auch zwangsläufig die ersten Eigenfunktionen, die durch TDFC destabilisiert werden. Auch in Systemen die keine Gradientenform besitzen, sind die Goldstone-Moden in weiten Parameterbereichen die einzigen instabilen Moden [26]. Die im zweiten Kapitel beschriebene Dominanz der Drift-induzierenden Goldstone-Moden der Translation ist daher nicht auf die spezielle Form von Gleichung (2.6) zurückzuführen, sondern ist in ähnlicher Form auch in anderen Systemen zu erwarten, welche die selben Symmetrieeigenschaften wie das untersuchte System besitzen.

In experimentellen Untersuchungen in optischen Resonatoren wurde der freie Drift von lokalisierten Strukturen jedoch bisher nicht beobachtet [60]. Eine naheliegende Erklärung dieser Abweichung zwischen Experiment und Theorie ist die Tatsache, dass reale Systeme nicht translationsinvariant sind und dementsprechend keine Goldstone-Moden der Translation besitzen. Zum einen wird die Translations-Symmetrie eines Systems explizit durch seine endliche Ausdehnung, d.h. durch die Existenz von Rändern gebrochen. Da jedoch lokalisierte Strukturen bereits in oberflächenemittierenden Halbleiter-Lasern (VCSELs) nachgewiesen wurden, deren räumliche Ausdehnung deutlich größer ist als die einer einzelnen lokalisierten Struktur [59], ist es gerechtfertigt den Effekt von Rändern auf die Dynamik lokalisierter Strukturen zu vernachlässigen und die Untersuchung wie im zweiten Kapitel mit periodischen Randbedingungen durchzuführen. Zum anderen wird die Translationssymmetrie realer Systeme durch räumliche Defekte oder Inhomogenitäten gebrochen.

Im Folgenden soll daher der Einfluss von räumlichen Inhomogenitäten auf die Dynamik lokalisierter Strukturen behandelt werden. Ausgangspunkt ist wieder das in Abschnitt 2.1.2 beschriebene optische System. Für dieses System wurde angenommen, dass der Resonator mit Licht einer räumlich homogenen Amplitude, d.h. mit ebenen Wellen, bestrahlt wird. Zu diesem Zweck werden in Experimenten in der Regel kantenemittierende Halbleiter-Laser verwendet [59], deren Strahlprofil jedoch nicht völlig homogen ist [61]. Im folgenden Abschnitt wird daher zunächst Gleichung (2.6) um einen Term erweitert, der räumlich inhomogenes einfallendes Licht beschreibt. Anschließend wird der Einfluss dieser Inhomogenität im Zusammenspiel mit TDFC

auf lokalisierte Strukturen diskutiert und es werden einige vorläufige Ergebnisse präsentiert.

3.1 Die Swift-Hohenberg-Gleichung mit Inhomogenitäten

Die bisher verwendete Swift-Hohenberg-Gleichung (2.6) wird zunächst erweitert, indem der vormals konstante Term $Y = Y_0$ durch einen ortsabhängigen Term

$$Y(\mathbf{x}) = Y_0 + Ae^{-\frac{\mathbf{x}^2}{B}} \quad (3.1)$$

ersetzt wird. Anstelle der homogenen ebenen Welle wird also von einem gaußförmigen Strahlprofil des einfallenden Lichts ausgegangen. A beschreibt hierbei die Amplitude der Inhomogenität und wird daher als Defekt-Amplitude bezeichnet. B ist ein Maß für die Breite des Defekts, wobei im Folgenden nur die Auswirkungen unterschiedlicher Defekt-Amplituden auf lokalisierte Strukturen untersucht werden und daher $B = 1$ angenommen wird. Der nichtlineare Operator $\mathbf{N}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}]$ aus Gleichung (1.1), der die Dynamik des Systems beschreibt, hängt nun direkt von den Ortskoordinaten \mathbf{x} ab, die Translationssymmetrie wird also explizit gebrochen. Die Rotationssymmetrie des Systems bleibt hingegen erhalten.

Durch Hinzufügen der Inhomogenität werden die stationären Lösungen des Systems, welches zunächst ohne TDFC untersucht wird, verändert. Wie bereits in [62] festgestellt, existiert in diesem Fall keine räumlich homogene Lösung \mathbf{q}_{hom} . Die vormals homogene Lösung weist nun ebenfalls eine räumliche Inhomogenität auf, deren Position und Größe von der Amplitude A , der Breite B und der Position des Defekts aus Gleichung (3.1) abhängen. Es handelt sich bei diesen Lösungen jedoch nicht um lokalisierte Strukturen, wie sie in Abschnitt 1.1 vorgestellt wurden. Die Strukturen entstehen nicht spontan aus einer subkritischen Bifurkation, sondern existieren als direkte Konsequenz der räumlichen Inhomogenität. Ihre Größe und Form wird direkt durch die Inhomogenität bestimmt. Zudem handelt es sich für kleine Inhomogenitäten um Strukturen kleiner Amplitude, weswegen diese Lösung im Folgenden als quasi-homogene Lösung bezeichnet wird.

Von dieser quasi-homogenen Lösung zu unterscheiden sind lokalisierte Lösungen,

die nach wie vor existieren. Einzelne stationäre lokalisierte Lösungen können entweder in ausreichendem Abstand zur Inhomogenität oder unmittelbar auf der Inhomogenität existieren. Lokalisierte Strukturen in unmittelbarer Nähe der Inhomogenität sind nicht stationär. Diese Strukturen werden in Richtung der Inhomogenität gezogen und auf der Inhomogenität gepinnt. Ändert man das Vorzeichen von Y_0 und lässt so „dunkle“ lokalisierte Strukturen vor einem hellen Hintergrund zu, werden diese nicht an ihrem Zentrum von der Inhomogenität gepinnt, sondern am ersten Maximum ihrer oszillatorischen Ausläufer [62].

Betrachtet man lokalisierte Strukturen, die auf der Inhomogenität gepinnt sind, so ist auch bei diesen Strukturen sowohl die räumliche Ausdehnung als auch die maximale Höhe von der Amplitude A und der Breite B des Defekts abhängig. Für $A = 0$ ergeben sich die im vorangegangenen Kapitel untersuchten lokalisierten Strukturen. Mit zunehmender Amplitude A entstehen breitere und höhere lokalisierte Strukturen. Auch im Eigenwertspektrum in zwei Raumdimensionen sind Veränderungen aufgrund der Inhomogenität bemerkbar. Für $A = 0$ ergeben sich die in Abschnitt 2.5.1 beschriebenen diskreten Eigenwerte μ mit den zugehörigen Eigenfunktionen. Auch für Werte von $A \neq 0$ lassen sich unter den Eigenfunktionen eindeutig Translations-, Wachstums- und Verformungsmoden identifizieren.

Die zugehörigen Eigenwerte verändern sich jedoch deutlich, was in Abbildung 3.1 nachzuvollziehen ist. Dargestellt sind die Eigenwerte der Translations-, Wachstums- und Verformungsmoden in Abhängigkeit der Defekt-Amplitude A . Hierbei wird der pinnende Effekt der Inhomogenität auf die lokalisierte Struktur deutlich. Ohne Defekt ist die Struktur neutral-stabil gegenüber Verschiebungen. Die Translationsmode, bei der es sich in diesem Fall um eine Goldstone-Mode handelt, besitzt also den Eigenwert $\mu = 0$. Mit zunehmendem A sinkt der Eigenwert μ dieser Mode. Störungen in Form der Translationsmode, welche einer kleinen Verschiebung der Struktur entsprechen, fallen exponentiell ab. Damit ist die Struktur stabil gegenüber Verschiebungen, d.h. auf der Inhomogenität gepinnt.

Auch die Eigenwerte der Verformungs- und Wachstumsmoden werden für große Defekt-Amplituden A gesenkt, die Struktur wird also weiter stabilisiert. Dies ist anschaulich nachvollziehbar, da für große Defekt-Amplituden Form und Größe der lokalisierten Struktur von der Inhomogenität bestimmt werden. Es bilden sich somit

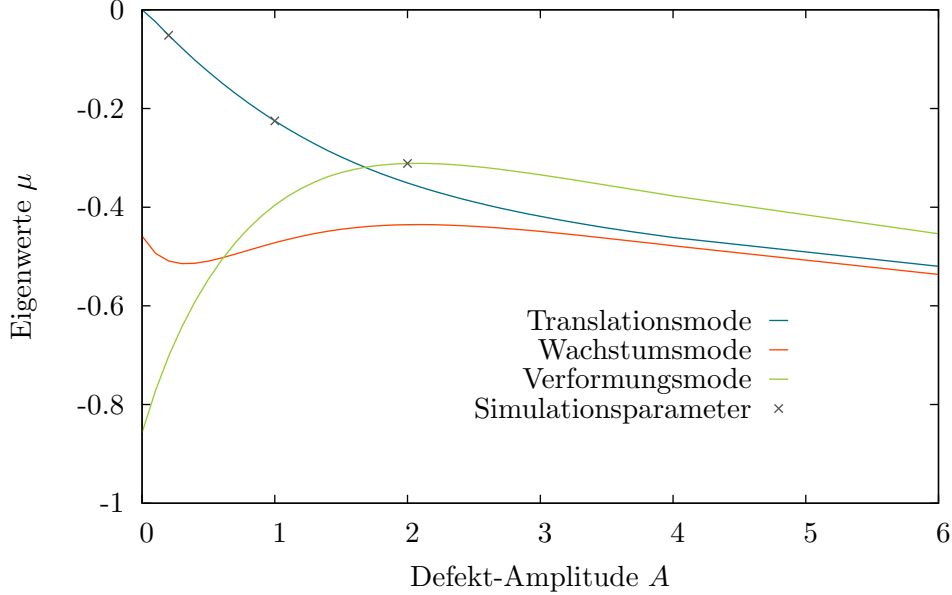


Abbildung 3.1: Eigenwerte μ von Translations- (blau), Wachstums- (rot) und Verformungsmoden (grün) einer auf dem Defekt gepinnten lokalisierten Struktur in zwei Raumdimensionen in Abhängigkeit von der Defekt-Amplitude A bei $B = 1$. Mit Kreuzen sind die Eigenwerte markiert, welche in Abschnitt 3.2 durch TDFC in direkten numerischen Simulationen destabilisiert werden.

Strukturen, die besonders stabil gegenüber Änderungen dieser Form sind. Auffällig in Abbildung 3.1 ist, dass der Eigenwert der Verformungsmode für bestimmte Werte von A ansteigt und für Werte von $A \gtrsim 1,7$ den größten Eigenwert des Eigenwertspektrums bildet.

Die oben beschriebenen Veränderungen der Eigenwerte μ liefern interessante Ansätze für die Anwendung von TDFC auf gepinnte lokalisierte Strukturen. In den Bereichen, in denen die Translationsmode den höchsten Eigenwert besitzt, ist zu untersuchen, ob die lokalisierte Struktur durch Destabilisierung der Translationsmode von dem Defekt gelöst werden kann. Für größere Defekt-Amplituden A lässt sich die Verformungsmode isoliert destabilisieren, was ohne Inhomogenität nicht möglich ist. Im nächsten Abschnitt sollen daher die Auswirkungen von TDFC auf gepinnte lokalisierte Strukturen untersucht werden.

3.2 Inhomogenitäten und Zeitverzögerung

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen gepinnten lokalisierten Strukturen können durch TDFC in gleicher Weise destabilisiert werden, wie die im zweiten Kapitel beschriebenen lokalisierten Strukturen in translationsinvarianten Systemen. Aufgrund des pinnenden Effekts der Inhomogenität ergeben sich jedoch erhebliche Unterschiede im dynamischen Verhalten der Strukturen. Im Folgenden wird daher für unterschiedliche Defekt-Amplituden A , die in Abbildung 3.1 als Kreuze dargestellt sind, die durch TDFC induzierte Dynamik in direkten numerischen Simulationen untersucht.

Für Defekt-Amplituden $A < 1,7$ wird, wie auch schon in Systemen ohne Inhomogenitäten, mit zunehmendem α bzw. zunehmendem τ zunächst die Translationsmode destabilisiert. Die resultierende Dynamik unterscheidet sich jedoch von dem im zweiten Kapitel beobachteten reinen Drift der Struktur, was auf zwei wesentliche Unterschiede zu Systemen ohne Inhomogenität zurückzuführen ist. Zum einen hat die Inhomogenität eine attraktive Wirkung auf die lokalisierte Struktur [62]. Strukturen in der Nähe der Inhomogenität werden ohne TDFC in Richtung der Inhomogenität gezogen. Werden zusätzlich die Translationsmoden destabilisiert, entsteht ein konkurrierender Effekt zwischen Delay-induziertem Drift und attraktiver Inhomogenität. Linear-instabile Translationsmoden führen daher nicht zwangsläufig dazu, dass die Struktur den Defekt verlässt und frei driftet. Nahe der Stabilitätsgrenze der Translationsmoden ist es möglich, dass das Anwachsen von Störungen in Form der Translationsmoden durch die attraktive Wirkung der Inhomogenität aufgehalten wird und die Struktur in der Nähe der Inhomogenität verbleibt.

Zum anderen liegt die Ursache für die im Vergleich zum freien Drift komplexere Dynamik in den veränderten Eigenwerten μ der Translationsmoden ohne TDFC. Ohne Inhomogenität handelt es sich bei den Translationsmoden um Goldstone-Moden mit dem zugehörigen Eigenwert $\mu = 0$. Mit Inhomogenität besitzen die Translationsmoden aufgrund des pinnenden Effekts des Defekts Eigenwerte $\mu < 0$. Auch für schwache Inhomogenitäten führt dies dazu, dass der oberste Eigenwert λ_0 der Translationsmoden nicht mehr wie bei der Destabilisierung von Goldstone-Moden reell ist, sondern einen nicht verschwindenden Imaginärteil besitzt (siehe Abschnitt 1.3.2). Auch dies hat Einfluss auf die durch TDFC induzierte Dynamik.

Im Bereich schwacher Defekt-Amplituden ($A = 0,2$) lässt sich die Auswirkung von attraktivem Defekt und destabilisierender TDFC gut erkennen. Direkt oberhalb der Stabilitätsgrenze der Translationsmode (z.B. $\tau = 1$, $\alpha = 1,05$) ist der Effekt der instabilen Translationsmode ($\lambda_0 = 0,0320 + 0,3168i$)¹ deutlich erkennbar, die Struktur löst sich jedoch nicht von der Inhomogenität sondern bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Trajektorie um den Mittelpunkt der Inhomogenität. Durch Erhöhen der TDFC-Parameter (z.B. $\tau = 1$, $\alpha = 1,1$) wird die Translationsmode weiter destabilisiert ($\lambda_0 = 0,0797 + 0,3057i$). In diesem Fall beginnt die Struktur ebenfalls um den Defekt zu oszillieren, die Amplitude dieser Oszillation wächst jedoch an, bis sich die Struktur von der Inhomogenität löst und frei driftet (siehe Abbildung 3.2).

Bei stärkeren Defekt-Amplituden ($A = 1$) löst sich die lokalisierte Struktur nicht mehr von der Inhomogenität. Bei instabilen Translationsmoden ist nur noch die Bewegung der Struktur auf einer kreisähnlichen Trajektorie um die Inhomogenität zu beobachten (siehe Abbildung 3.3). Die weitere Untersuchung dieses Phänomens erscheint vielversprechend, da diese Dynamik dem beobachteten Verhalten lokalisierter Strukturen in optischen Experimenten deutlich ähnlicher ist, als der freie Drift einer lokalisierten Struktur [60].

Die annähernd kreisförmige Bewegung lässt sich durch das Zusammenspiel aus pinnendem Defekt und Drift-induzierenden Translationsmoden erklären. Störungen in Form der Translationsmoden wachsen aufgrund des positiven Realteils des zugehörigen Eigenwerts λ_0 an und führen wegen des nicht verschwindenden Imaginärteils $\text{Im}(\lambda_0)$ zu Oszillationen. Das weitere Anwachsen der Amplitude dieser Oszillationen wird durch die attraktive Wirkung der starken Inhomogenität begrenzt, sodass dauerhaft Oszillationen der Struktur mit konstanter Amplitude in zwei Raumrichtungen bestehen bleiben. Je nach Phasenunterschied dieser Oszillationen ergibt sich eine mehr oder weniger stark verzerrte Kreisbahn.

Die Frequenz ω der Oszillationen stimmt hierbei in den durchgeführten Simulationen annähernd mit dem Imaginärteil des Eigenwertes $\text{Im}(\lambda_0)$ überein. Während also die Sättigung der Amplitude der Oszillation auf die konkurrierenden Effekte der

¹Für komplexe Eigenwerte λ_0 gilt $\overline{\lambda_0} = \lambda_{-1}$, der komplex konjugierte Wert $\overline{\lambda_0} = 0,0320 - 0,3168i$ ist daher ebenfalls ein Eigenwert des Systems.

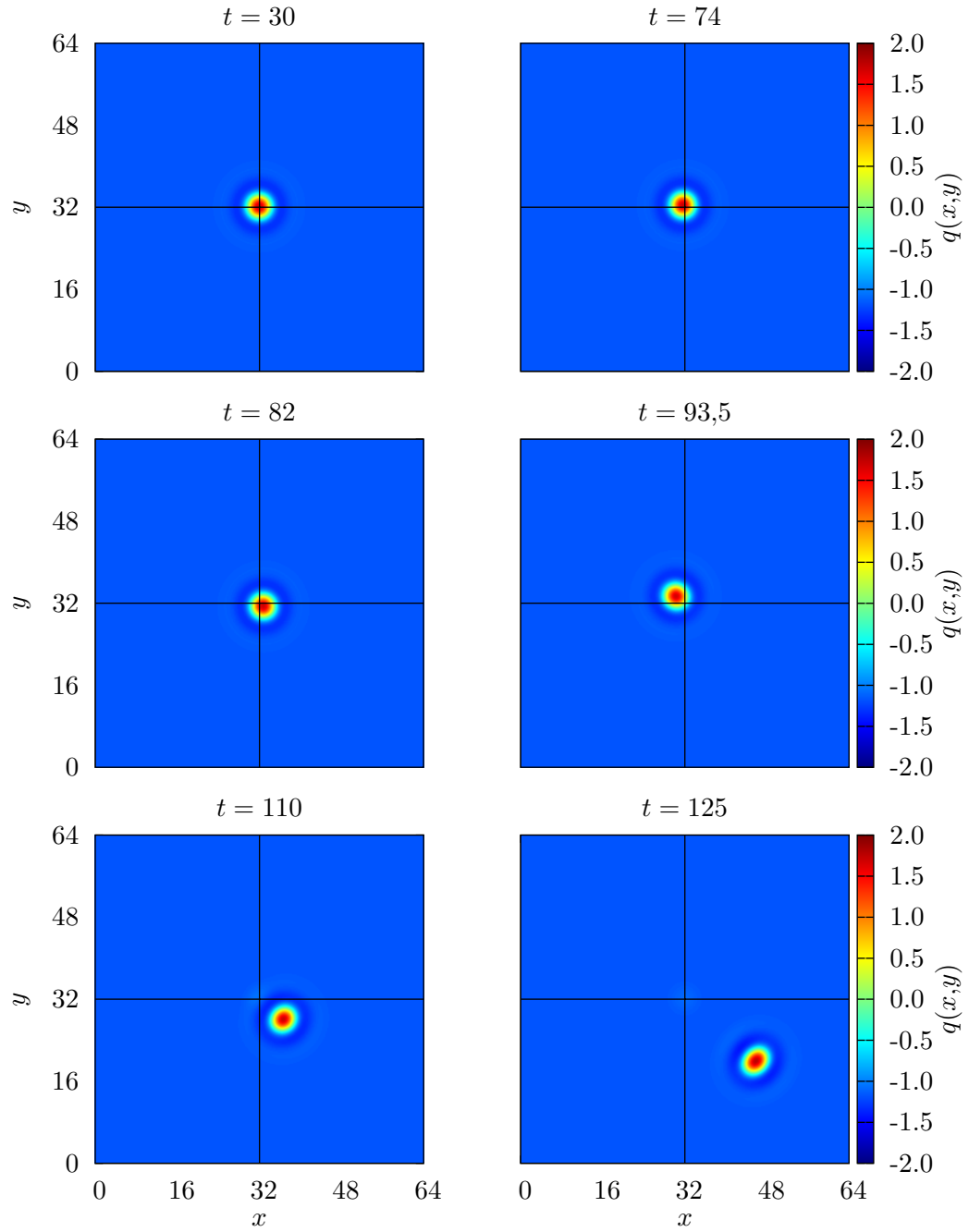


Abbildung 3.2: Zeitsimulation einer auf der Inhomogenität gepinnten lokalisierten Struktur bei kleiner Defekt-Amplitude $A = 0.2$. Die Destabilisierung der Translationsmoden führt dazu, dass sich die lokalisierte Struktur von der Inhomogenität löst. TDFC-Parameter: $\tau = 1$, $\alpha = 1,1$. Der Eigenwert der Translationsmode ist $\lambda_0 = 0,0797 + 0,3057i$. Das Kreuz markiert den Mittelpunkt der Inhomogenität. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $C = 1$.

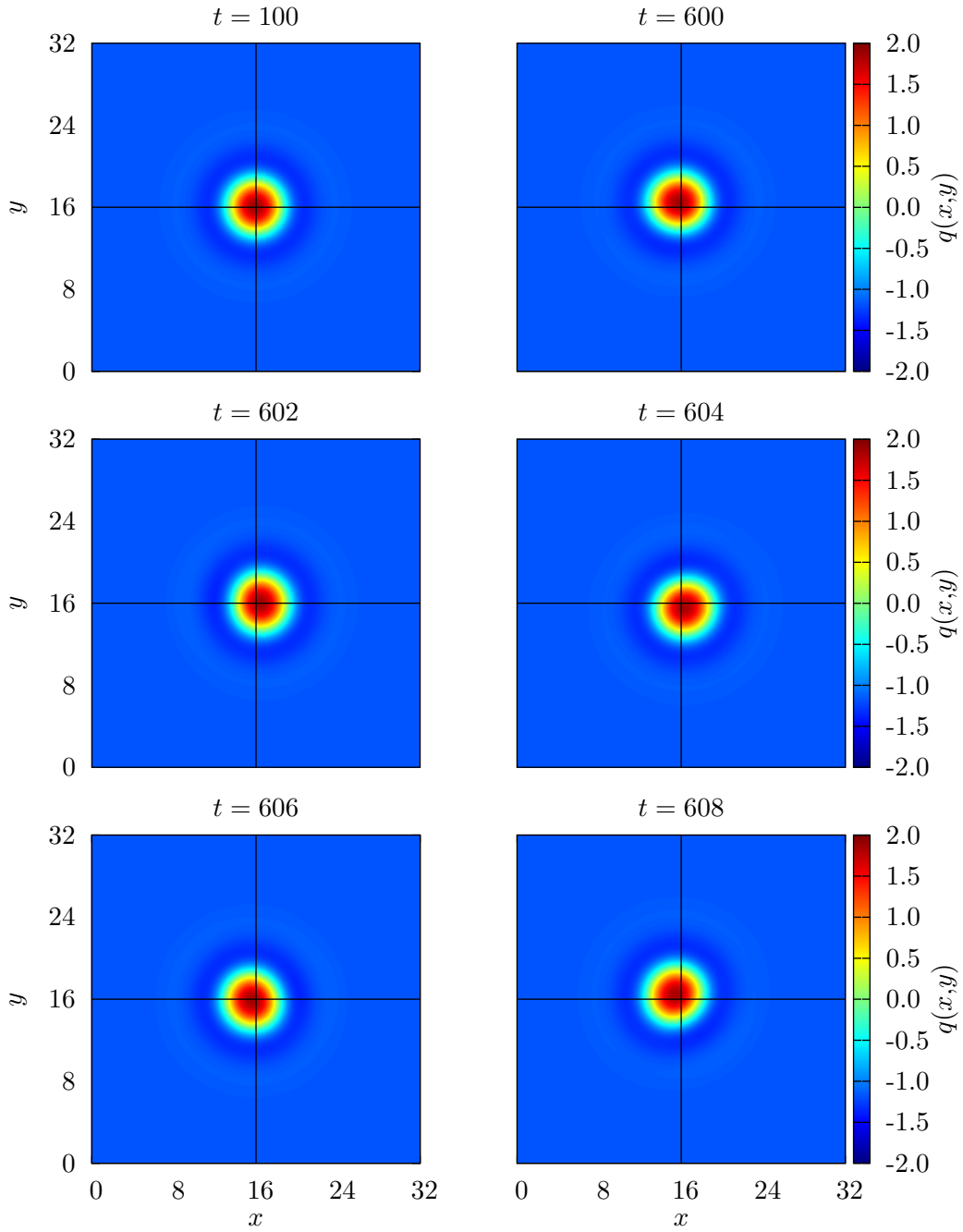


Abbildung 3.3: Zeitsimulation einer auf der Inhomogenität gepinnten lokalisierten Struktur bei einer Defekt-Amplitude $A = 1$. Die lokalisierte Struktur bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Trajektorie um den Mittelpunkt der Inhomogenität. TDFC-Parameter: $\tau = 1$, $\alpha = 1,1$. Der Eigenwert der Translationsmode ist $\lambda_0 = 0,0226 + 0,6558i$. Die Drehfrequenz entspricht $\omega \approx 0,68$. Das Kreuz markiert den Mittelpunkt der Inhomogenität. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 32$, $dx = dy = 0,1$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $C = 1$.

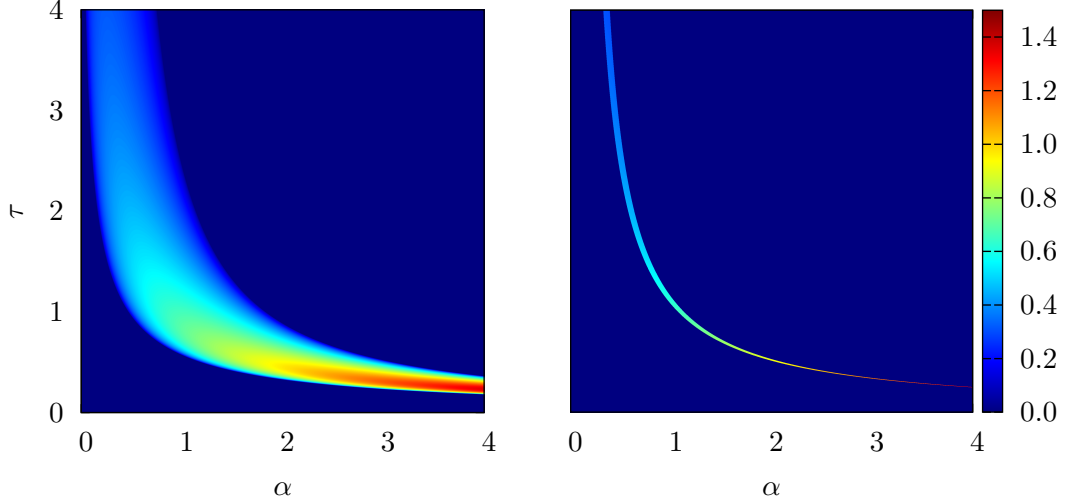


Abbildung 3.4: Imaginärteil $\text{Im}(\lambda_0)$ des Eigenwerts λ_0 der Translationsmode in Abhängigkeit von α und τ für eine Defekt-Amplitude $A = 1$. Rechts sind nur diejenigen Werte als $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$ dargestellt, bei denen die Translationsmode die einzige instabile Mode darstellt.

instabilen Translationsmoden und der attraktiven Inhomogenität zurückzuführen ist, scheint es sich bei der Oszillationsfrequenz um einen linearen Effekt zu handeln. Diese Hypothese muss jedoch noch weiter geprüft werden. Die Schwierigkeiten liegen hierbei zum einen in der begrenzten Ortsauflösung Δx der durchgeführten Simulationen. Aufgrund der groben Diskretisierung lässt sich die Trajektorie des Mittelpunkts nur schlecht verfolgen. Es ist daher nötig, das Maximum der Struktur durch eine passende Interpolation zwischen den Gitterpunkten genauer zu lokalisieren. Sinnvoll wäre außerdem, die genauere Untersuchung der Oszillationsfrequenz zunächst in einer Raumdimension vorzunehmen, da in diesem Fall höhere Ortsauflösungen technisch umsetzbar sind. Eine weitere Schwierigkeit bei der Verifizierung der Hypothese $\omega \approx \text{Im}(\lambda_0)$ liegt darin, dass die beobachtete kreisförmige Bewegung nur in einem sehr schmalen Bereich der TDFC-Parameter auftritt (siehe Abbildung 3.4) und in diesem Bereich die Werte von $\text{Im}(\lambda_0)$ nur wenig variieren. In Abbildung 3.4 (links) sind die Werte von $\text{Im}(\lambda_0)$ für verschieden Werte von α und τ dargestellt. In Abbildung 3.4 (rechts) sind nur diejenigen Werte von $\text{Im}(\lambda_0)$ dargestellt, für die sich die beschriebe-

nen Oszillationen tatsächlich beobachten lassen. Die untere Grenze dieses Bereiches ergibt sich, da die Translationsmode nur für Werte $\text{Re}(\lambda_0) > 0$ instabil ist. Die obere Grenze ergibt sich, da für zu hohe Werte von α bzw. τ die Verformungsmoden ebenfalls destabilisiert werden, was zu einer zusätzlichen Deformation der Struktur führt.

Für noch stärkere Defekte ($A = 2$) sind die Verformungsmoden die ersten Eigenfunktionen, welche durch TDFC destabilisiert werden (siehe Abbildung 3.1). Im Gegensatz zu den im zweiten Kapitel behandelten Strukturen ist es daher in diesem Fall möglich, bei geeigneter Wahl von α und τ ausschließlich die Verformungsmoden zu destabilisieren. Dies führt, wie in Abbildung 3.5 zu sehen, zu einer Verformung der Struktur. Die Struktur verliert ihre Rotationssymmetrie und beginnt sich zu drehen. Langfristig bildet sich so eine spiralförmige Struktur. Auffällig ist, dass die Struktur zu rotieren beginnt, sobald die Rotationssymmetrie der Struktur durch die Verformung gebrochen wird. Betrachtet man die verformte Lösung als annähernd stationär, so lässt sich die einsetzende Rotation als Folge einer durch TDFC destabilisierten Goldstone-Mode der Rotation erklären. Durch eine explizite Brechung der Rotationssymmetrie des Systems müsste sich die Rotation daher unterbinden lassen.

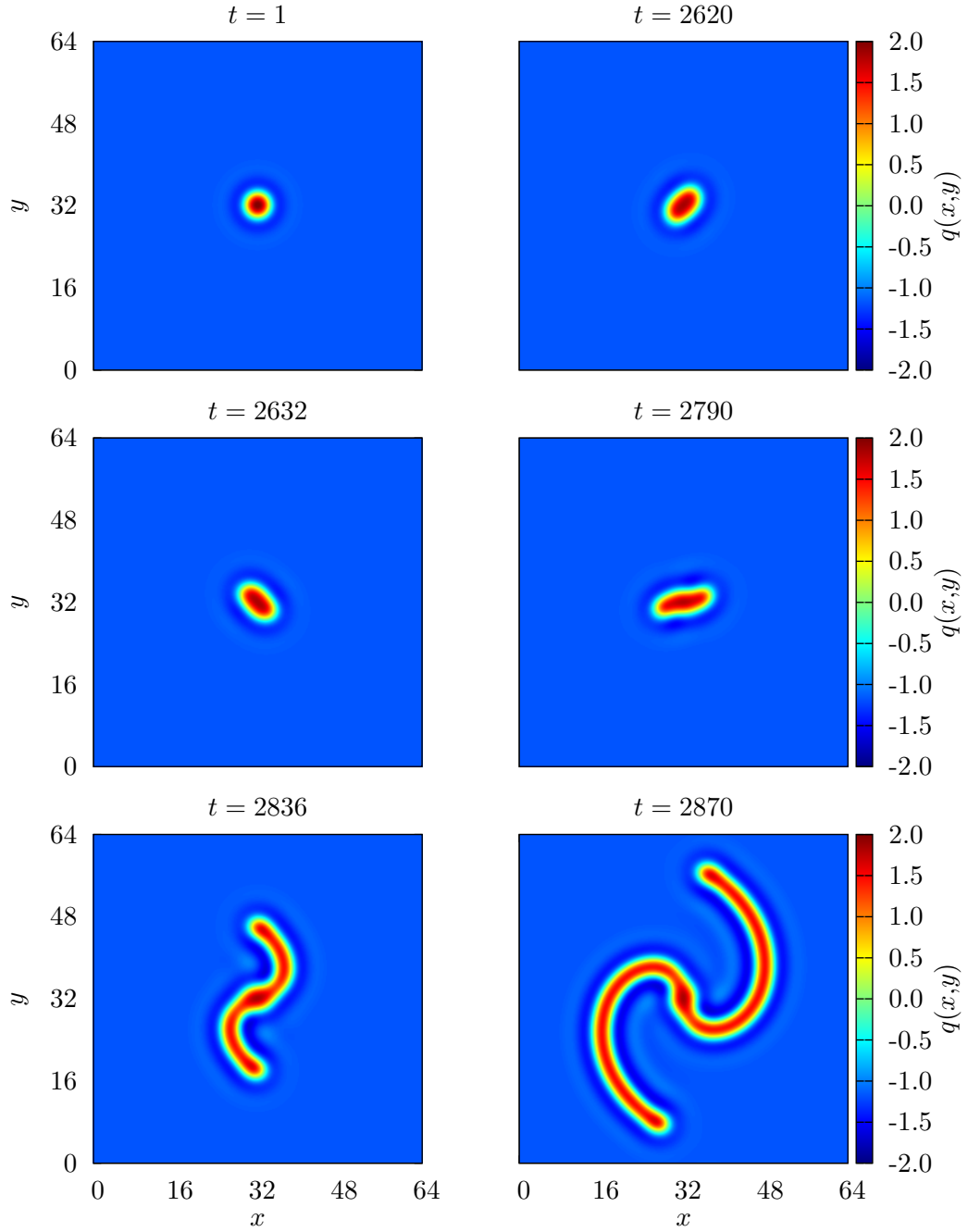


Abbildung 3.5: Zeitsimulation einer auf der Inhomogenität gepinnten lokalisierten Struktur bei einer Defekt-Amplitude $A = 2$. Für TDFC-Parameter von $\tau = 5,7$, $\alpha = 0,31$ bildet sich eine Spiralstruktur aus. Der Eigenwert der Verformungsmoden ist $\lambda_0 = 0,0143 + 0,2852i$. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $C = 1$.

3.3 Ausweitung der Untersuchung von Inhomogenitäten

Die in diesem Kapitel präsentierten ersten Ergebnisse der Untersuchung lokalisierter Strukturen in Systemen mit Inhomogenitäten sind sehr vielversprechend. Räumliche Inhomogenitäten sind in realen Systemen nicht zu vermeiden, die Berücksichtigung dieser Defekte ist daher notwendig für eine realistische Beschreibung der Dynamik lokalisierter Strukturen. So beschreibt die in Abbildung 3.3 dargestellte Bewegung einer gepinnten lokalisierten Struktur die in realen Experimenten beobachtete Dynamik deutlich besser, als der im zweiten Kapitel beobachtete freie Drift der lokalisierten Strukturen.

Darüber hinaus bietet der gezielte Einsatz räumlicher Inhomogenitäten eine zusätzliche Möglichkeit zur Kontrolle lokalisierter Strukturen. In [3] wurde eine solche Inhomogenität durch einen zusätzlichen Laser realisiert. Dieser diente als Schreib-Strahl („writing beam“) zur kontrollierten Erzeugung lokalisierter Strukturen. Es ist jedoch denkbar, mit einem ähnlichen experimentellen Aufbau Inhomogenitäten zu erzeugen, welche vorhandene lokalisierte Strukturen pinnen und so eine durch TDFC induzierte Dynamik beeinflussen können.

Die oben begonnene theoretische Untersuchung der Wirkung von Inhomogenitäten im Zusammenspiel mit TDFC auf lokalisierte Strukturen muss daher fortgesetzt und ausgeweitet werden. Wie bereits erläutert, sollte das Zusammenspiel zwischen Drift-induzierenden Translationsmoden und attraktiver Inhomogenität weiter untersucht werden. Es lohnt sich außerdem, die Betrachtung auf lokalisierte Strukturen in der Nähe der Inhomogenität auszuweiten. Diese werden ohne TDFC in Richtung des Defekts gezogen. Es bleibt zu untersuchen, ob durch eine Destabilisierung der Translations-Moden dieses Einzugsgebiet der Inhomogenität vergrößert oder verkleinert werden kann.

Darüber hinaus können gebundene Zustände in Systemen mit Inhomogenitäten untersucht werden. Befindet sich beispielsweise eine Struktur des gebundenen Zustands auf dem Defekt und eine zweite daneben, so besitzt diese stabile Lösung eine Goldstone-Mode der Rotation, welche destabilisiert werden kann und so eine Rotation der freien Struktur um die gepinnte Struktur verursacht. Ebenfalls möglich ist die Untersuchung „dunkler“ lokalisierter Strukturen vor einem hellen Hintergrund, welche

nicht an ihrem Zentrum sondern am ersten Maximum ihrer oszillatorischen Ausläufer von der Inhomogenität gepinnt werden [62]. Auch diese lassen sich destabilisieren, wobei als erste Instabilität eine Rotation um die Inhomogenität zu erwarten ist.

Insgesamt ist es erstrebenswert, das verwendete Modell aus dem zweiten Kapitel noch weiter an reale optische Experimente anzupassen, um eine gezielte experimentelle Überprüfung der Ergebnisse zu ermöglichen. In Bezug auf Inhomogenitäten ist es daher notwendig, die Stärke der Inhomogenitäten, d.h. die Defekt-Amplitude, in optischen Experimenten zu bestimmen. Auch der bisher nicht berücksichtigte Einfluss der Breite B sollte untersucht werden. Des weiteren stellt das in diesem Kapitel verwendete Strahlprofil in Form eines Gauß-Pulses eine grobe Vereinfachung dar. In optischen Experimenten werden als einstrahlende Lichtquelle in der Regel kantenemittierende Halbleiterlaser verwendet [59]. Diese besitzen aufgrund der unterschiedlich starken Beugung des austretenden Lichts in zwei Raumrichtungen in der Regel ein elliptisches Strahlprofil [61]. Die Berücksichtigung dieses Strahlprofils hätte die explizite Brechung der Rotationssymmetrie des betrachteten Systems zur Folge und würde die induzierte Dynamik daher voraussichtlich deutlich verändern.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde der Einfluss zeitverzögerter Rückkopplung (TDFC) auf lokalisierte Strukturen in räumlich ausgedehnten Nichtgleichgewichtssystemen untersucht.

Im ersten Kapitel wurde das Konzept lokalisierter Strukturen eingeführt, wobei anhand der notwendigen Entstehungsbedingungen solcher Strukturen in Nichtgleichgewichtssystemen eine Abgrenzung zu klassischen Solitonen in konservativen Systemen vorgenommen wurde. Anschließend wurde die Kontrolle durch zeitverzögerte Rückkopplung vorgestellt. Im Verlauf der Arbeit wurde eine zeitverzögerte Rückkopplung mit einer einzelnen Delay-Zeit τ und einer skalaren Kopplungsmatrix verwendet, deren Kopplungsstärke durch die skalare Delay-Stärke α ausgedrückt werden kann. Zur Bestimmung der linearen Stabilität mit TDFC war es zunächst notwendig, die lineare Stabilitätsanalyse ohne Zeitverzögerung durchzuführen. Aufgrund der einfachen Form des TDFC-Terms wurden die Eigenfunktionen $\varphi(\mathbf{x})$ des linearisierten Systems durch Hinzufügen der Zeitverzögerung nicht verändert. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{k,m}$ mit Zeitverzögerung konnten mit Hilfe der Lambertschen W-Funktion W_m aus den Eigenwerten μ_k ohne TDFC bestimmt werden, wobei jedem Eigenwert μ_k ohne TDFC unendlich viele Eigenwerte $\lambda_{k,m}$ mit TDFC entsprechen.

In Abhängigkeit von Delay-Zeit τ und Delay-Stärke α wurde eine Bedingung für den Stabilitätswechsel eines Eigenwertes μ abgeleitet. Anschließend wurde die Stabilisierung instabiler Strukturen und die Destabilisierung stabiler Strukturen behandelt. Eine Stabilisierung instabiler Strukturen ist nur für komplexe instabile Eigenwerte μ_k möglich, d.h. nur wenn das betrachtete System keine Gradientenstruktur besitzt. Die Destabilisierung stabiler Strukturen durch TDFC ist bei geeigneter Wahl von α und τ immer möglich. Im besonderen Fall eines Systems mit Gradientenstruktur verändert sich durch TDFC die Reihenfolge der Eigenwerte nicht, d.h. neutral stabile

Eigenwerte $\mu_k = 0$ ohne TDFC sind zwangsläufig die ersten Eigenwerte, die mit wachsenden TDFC-Parametern destabilisiert werden. Ein Beispiel für neutral stabile Eigenfunktionen sind die im letzten Abschnitt des ersten Kapitels eingeführten Goldstone-Moden. Ist das betrachtete System invariant unter kontinuierlichen Symmetrietransformationen wie beispielsweise Translationen oder Rotationen, so existieren im Spektrum einer lokalisierten stationären Lösung, die diese Symmetrien bricht, neutral stabile Goldstone-Moden. Instabile Moden in Form dieser Goldstone-Moden verursachen einen Drift der Lösung entlang des Gruppenorbits, d.h. je nach Art der gebrochenen Symmetrie einen Drift oder eine Rotation der lokalisierten Struktur. Die Existenz der Goldstone-Moden hängt hierbei allein von den Symmetrieeigenschaften des Systems und der betrachteten Lösung ab und nicht von der konkreten Form des untersuchten Systems. Die Stabilitätsgrenze von Goldstone-Moden unter dem Einfluss von TDFC konnte systemunabhängig analytisch bestimmt werden.

Im zweiten Kapitel der Arbeit wurden die Ergebnisse des ersten Kapitels auf ein Beispielsystem angewandt. Hierbei handelte es sich um eine modifizierte Swift-Hohenberg-Gleichung, welche die Strukturbildung in der Lichtamplitude in nichtlinearen optischen Resonatoren in transversaler Richtung an der Grenze zur optischen Bistabilität beschreibt. Im Folgenden wurde die Destabilisierung der homogenen Lösung sowie lokalisierter Lösungen des Systems untersucht. Hierbei konnte durch Variation von α und τ eine Vielzahl unterschiedlicher Dynamiken nachgewiesen werden, deren Auftreten sehr gut mit den Ergebnissen der numerisch durchgeführten linearen Stabilitätsanalyse übereinstimmt.

Ein besonderer Fokus lag auf der Untersuchung gebundener Zustände aus zwei lokalisierten Strukturen. Für zwei lokalisierte Strukturen in ausreichendem Abstand konnte nachgewiesen werden, dass die Eigenfunktionen des diskreten Teils des Spektrums dieser Lösungen Linearkombinationen der Eigenfunktionen einzelner Strukturen mit dem gleichen Eigenwert entsprechen. Für lokalisierte Strukturen mit überlappenden Ausläufern verliert diese Aussage ihre Gültigkeit. Die beiden Strukturen bilden dann einen gebundenen Zustand bei dem die möglichen Distanzen zwischen den Strukturen durch die oszillatorischen Ausläufer der Strukturen vorgegeben werden. Es konnte außerdem nachgewiesen werden, dass die Bildung eines gebundenen Zustands mit dem Verlust eines neutralen Eigenwerts verbunden ist, da die Wechselwirkungsmode

von gebundenen Zuständen stabilisiert wird.

Die durch TDFC induzierte Dynamik resultiert in weiten Parameterbereichen in einem Drift der lokalisierten Strukturen, der durch instabile Goldstone-Moden der Translation verursacht wird. Insbesondere bei verrauschten Anfangsbedingungen dominieren die instabilen Goldstone-Moden der Translation das Verhalten der Strukturen auch in Parameterbereichen, in denen bereits weitere instabile lokalisierte Eigenfunktionen existieren. Für den Drift gebundener Zustände konnte gezeigt werden, dass der analytisch für einzelne Strukturen in der Nähe der Stabilitätsgrenze der Goldstone-Mode hergeleitete Ausdruck für die Driftgeschwindigkeit auch für gebundene Zustände Gültigkeit besitzt.

Das verwendete Swift-Hohenberg-Modell eignet sich ausgezeichnet, um die Auswirkungen zeitverzögerter Rückkopplung auf lokalisierte Strukturen an einem einfachen Beispiel zu untersuchen. Wie im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels diskutiert, ist die Aussagekraft dieses Modells für reale optische Experimente jedoch äußerst begrenzt. Das betrachtete Modell wurde durch verschiedene Näherungen aus den zeitverzögerten Maxwell-Bloch-Gleichungen abgeleitet. So gilt es nur in der Nähe der Grenze zur Bistabilität und beschreibt ausschließlich die Dynamik der reellwertigen Amplitude des elektrischen Feldes. Zusätzliche Effekte wie die Phase des TDFC-Terms oder die eigenständige Dynamik der Besetzungsinversion wurden vernachlässigt. Insbesondere entspricht jedoch der in den Simulationen vielfach beobachtete freie Drift lokalisierter Strukturen nicht den experimentellen Ergebnissen.

Aus diesem Grund wurde im dritten Kapitel eine erste Erweiterung des Modells vorgenommen. Die Berücksichtigung räumlicher Inhomogenitäten, welche zum einen in realen Systemen unvermeidlich sind und zum anderen auch gezielt zur Kontrolle lokalisierter Strukturen eingesetzt werden können, verändert die Dynamik lokalisierter Strukturen nachhaltig. Aufgrund der Brechung der Translationssymmetrie des Systems beeinflussen sie insbesondere die Dynamik der Translations-Moden, die nun nicht mehr die Eigenschaften von Goldstone-Moden besitzen. Die aus der Destabilisierung der Translations-Moden resultierende Dynamik unter Berücksichtigung räumlicher Inhomogenitäten weist deutlich größere Ähnlichkeiten zu experimentellen Ergebnissen auf. Der freie Drift wird unterdrückt, stattdessen bleiben die lokalisierten Strukturen auf der Inhomogenität gepinnt und bewegen sich um den Defekt.

Insgesamt konnte in dieser Arbeit der Einfluss zeitverzögerter Rückkopplung auf lokalisierte Strukturen an einem einfachen Beispielmmodell erfolgreich untersucht werden. Die weitere Anpassung des verwendeten Modells an reale optische Experimente ist jedoch erstrebenswert. Die Einbeziehung von räumlichen Inhomogenitäten hat sich hierbei als erster sinnvoller Schritt erwiesen und sollte, wie im dritten Kapitel diskutiert, weiter untersucht werden. Die Auswirkungen räumlicher Inhomogenitäten müssen in optischen Systemen also berücksichtigt werden. Daher sollte über das verwendete Swift-Hohenberg-Modell hinaus auch der Einfluss räumlicher Inhomogenitäten in realistischeren Modellen untersucht werden. Da lokalisierte Strukturen zudem in einer Vielzahl anderer Kontexte auftreten, ist es außerdem denkbar, die Untersuchung des Einflusses von zeitverzögerter Rückkopplung und räumlichen Inhomogenitäten auf Systeme außerhalb der Optik auszuweiten.

Literatur

- [1] N. Akhmediev and A. Ankiewicz. *Dissipative Solitons: From optics to biology and medicine*. Springer, 2008.
- [2] M. Tlidi, A. G. Vladimirov, D. Pieroux, and D. Turaev. Spontaneous motion of cavity solitons induced by a delayed feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 103:103904, 2009.
- [3] S. Barland, J. R. Tredicce, M. Brambilla, L. A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tissoni, T. Knoedl, et al. Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities. *Nature*, 419:699–702, 2002.
- [4] P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382:793–796, 1996.
- [5] E. Clément, L. Vanel, J. Rajchenbach, and J. Duran. Pattern formation in a vibrated two-dimensional granular layer. *Phys. Rev. E*, 53:2972–2975, 1996.
- [6] R. Richter and I. V. Barashenkov. Two-dimensional solitons on the surface of magnetic fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 94:184503, 2005.
- [7] M. Tlidi, R. Lefever, and A. Vladimirov. On vegetation clustering, localized bare soil spots and fairy circles. In *Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine*, pages 1–22. Springer, 2008.
- [8] A. S. Mikhailov and K. Showalter. Control of waves, patterns and turbulence in chemical systems. *Phys. Rep.*, 425:79–194, 2006.
- [9] E. Meron, E. Gilad, J. von Hardenberg, M. Shachak, and Y. Zarmi. Vegetation patterns along a rainfall gradient. *CSF*, 19:367–376, 2004.

- [10] M. A. Dahlem, R. Graf, A. J. Strong, J. P. Dreier, Y. A. Dahlem, M. Sieber, W. Hanke, K. Podoll, and E. Schöll. Two-dimensional wave patterns of spreading depolarization: retracting, re-entrant, and stationary waves. *Physica D*, 239:889–903, 2010.
- [11] B. Schäpers, M. Feldmann, T. Ackemann, and W. Lange. Interaction of localized structures in an optical pattern-forming system. *Phys. Rev. Lett.*, 85:748–751, 2000.
- [12] E. Schöll and H. G. Schuster. *Handbook of chaos control*. Wiley-VCH, 2008.
- [13] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, 1990.
- [14] O. Lüthje, S. Wolff, and G. Pfister. Control of chaotic taylor-couette flow with time-delayed feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1745–1748, 2001.
- [15] T. Pierre, G. Bonhomme, and A. Atipo. Controlling the chaotic regime of nonlinear ionization waves using the time-delay autosynchronization method. *Phys. Rev. Lett.*, 76:2290–2293, 1996.
- [16] D. J. Christini, V. In, M. L. Spano, W. L. Ditto, and J. J. Collins. Real-time experimental control of a system in its chaotic and nonchaotic regimes. *Phys. Rev. E*, 56:3749–3752, 1997.
- [17] K. Panajotov, M. Sciamanna, M. A. Arteaga, and H. Thienpont. Optical feedback in vertical-cavity surface-emitting lasers. *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron.*, 19:1700312–1700312, 2013.
- [18] E. Schöll, G. Hiller, P. Hövel, and M. A. Dahlem. Time-delayed feedback in neurosystems. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 367:1079–1096, 2009.
- [19] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 170:421–428, 1992.
- [20] P. Hövel and E. Schöll. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods. *Phys. Rev. E*, 72:046203, 2005.

-
- [21] P. Fronczak and J. A. Hołyst. Control of chaotic solitons by a time-delayed feedback mechanism. *Phys. Rev. E*, 65:026219, 2002.
- [22] M. Kehrt, P. Hövel, V. Flunkert, M. A. Dahlem, P. Rodin, and E. Schöll. Stabilization of complex spatio-temporal dynamics near a subcritical hopf bifurcation by time-delayed feedback. *Eur. Phys. J. B*, 68:557–565, 2009.
- [23] Y. N. Kyrychko, K. B. Blyuss, S. J. Hogan, and E. Schöll. Control of spatiotemporal patterns in the gray–scott model. *Chaos*, 19:043126, 2009.
- [24] C. Tian and L. Zhang. Delay-driven irregular spatiotemporal patterns in a plankton system. *Phys. Rev. E*, 88:012713, 2013.
- [25] M. Tlidi, A. Sonnino, and G. Sonnino. Delayed feedback induces motion of localized spots in reaction-diffusion systems. *Phys. Rev. E*, 87:042918, 2013.
- [26] S. V. Gurevich. Dynamics of localized structures in reaction-diffusion systems induced by delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 87:052922, 2013.
- [27] S. V. Gurevich and R. Friedrich. Instabilities of localized structures in dissipative systems with delayed feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 110:014101, 2013.
- [28] M. Tlidi, P. Mandel, and R. Lefever. Localized structures and localized patterns in optical bistability. *Phys. Rev. Lett.*, 73:640–643, 1994.
- [29] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Westview, 1995.
- [30] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851, 1993.
- [31] M. Tlidi, A. G. Vladimirov, D. Turaev, G. Kozyreff, D. Pieroux, and T. Erneux. Spontaneous motion of localized structures and localized patterns induced by delayed feedback. *Eur. Phys. J. D*, 59:59–65, 2010.
- [32] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, 1965.

- [33] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*. 1982.
- [34] J. Argyris, G. Faust, R. Friedrich, and M. Haase. *Die Erforschung des Chaos: Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme*. Springer, 2010.
- [35] H. G. Purwins, H. U. Bödeker, and S. Amiranashvili. Dissipative solitons. *Adv. Phys.*, 59:1193, 2010.
- [36] M. Tlidi and P. Mandel. Space-time localized structures in the degenerate optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, 59:2575–2578, 1999.
- [37] D. Golomb and G. B. Ermentrout. Bistability in pulse propagation in networks of excitatory and inhibitory populations. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4179–4182, 2001.
- [38] F. M. Schneider, E. Schöll, and M. A. Dahlem. Controlling the onset of traveling pulses in excitable media by nonlocal spatial coupling and time-delayed feedback. *Chaos*, 19:015110, 2009.
- [39] S. Yanchuk and G. Giacomelli. Pattern formation in systems with multiple delayed feedbacks. *Phys. Rev. Lett.*, 112:174103, 2014.
- [40] A. Ahlborn and U. Parlitz. Stabilizing unstable steady states using multiple delay feedback control. *Phys. Rev. Lett.*, 93:264101, 2004.
- [41] A. Kraft. Application and analysis of time delayed feedback control on the Swift-Hohenberg equation. Master’s thesis, WWU Münster, 2014.
- [42] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 5:329–359, 1996.
- [43] S. V. Gurevich. Time-delayed feedback control of breathing localized structures in a three-component reaction-diffusion system. *ArXiv e-prints*, 2014.
- [44] R. Friedrich. Group theoretic methods in the theory of pattern formation. In *Collective Dynamics of Nonlinear and Disordered Systems*, pages 61–84. Springer, 2005.

-
- [45] R. Gilmore. *Lie groups, physics, and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists*. Cambridge University Press, 2008.
 - [46] R. Friedrich. Higher instabilities in synergetic systems with continuous symmetries. *Zeitschrift für Physik B*, 90:373–376, 1993.
 - [47] A. W. Liehr. *Dissipative solitons in reaction-diffusion systems*. Springer, 2013.
 - [48] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15:319–328, 1977.
 - [49] R. Lefever, N. Barbier, P. Couteron, and O. Lejeune. Deeply gapped vegetation patterns: on crown/root allometry, criticality and desertification. *J. Theor. Biol.*, 261:194–209, 2009.
 - [50] J. Lega and N. H. Mendelson. Control-parameter-dependent Swift-Hohenberg equation as a model for bioconvection patterns. *Phys. Rev. E*, 59:6267–6274, 1999.
 - [51] U. Thiele, A. J. Archer, M. J. Robbins, H. Gomez, and E. Knobloch. Localized states in the conserved Swift-Hohenberg equation with cubic nonlinearity. *Phys. Rev. E*, 87:042915, 2013.
 - [52] M. Bestehorn. *Hydrodynamik und Strukturbildung: Mit einer kurzen Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Springer, 2006.
 - [53] R. Lang and K. Kobayashi. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. Quantum Electron.*, 16:347–355, 1980.
 - [54] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Dover Publications, 2001.
 - [55] M. Frigo. A fast fourier transform compiler. In *Acm sigplan notices*, volume 34, pages 169–180. ACM, 1999.
 - [56] M. Frigo and S. G. Johnson. Fftw-manual. <http://www.fftw.org/fftw3.pdf>. Stand: 05.09.2014.

- [57] M. Bode, A.W. Liehr, C.P. Schenk, and H.G. Purwins. Interaction of dissipative solitons: particle-like behaviour of localized structures in a three-component reaction-diffusion system. *Physica D*, 161:45–66, 2002.
- [58] C. P. Schenk. *Numerische und analytische Untersuchung solitärer Strukturen in zwei-und dreikomponentigen Reaktions-Diffusions-Systemen*. PhD thesis, 1999.
- [59] A. G. Vladimirov, A. Pimenov, S. V. Gurevich, K. Panajotov, E. Averlant, and M. Tlidi. Delayed feedback control of the self-induced motion of localized structures of light. *WIAS Preprint*, 1924, 2014.
- [60] K. Panajotov and M. Tlidi. Private communications.
- [61] E. Hering and R. Martin. *Photonik*. Springer, 2006.
- [62] P. Parra-Rivas, D. Gomila, M. A. Matias, and P. Colet. Dissipative soliton excitability induced by spatial inhomogeneities and drift. *Phys. Rev. Lett.*, 110:064103, 2013.
- [63] G. Walz. *Lexikon der Mathematik: In sechs Bänden*. Spektrum Akad. Verlag, 2003.

Anhang I: Rotationsinvarianz des Laplace-Operators

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass der Laplace-Operator $\nabla^2 = \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ in $N \geq 2$ Dimensionen mit einer Komponente $L_k = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ des Drehimpulsoperators kommutiert, d.h. dass

$$[\nabla^2, L_k] = \left[\sum_{l=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}, \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] = \sum_{l=1}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}, \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Für Summanden mit $l \neq i, l \neq j$ gilt

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}, \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] = 0,$$

vorausgesetzt, die einzelnen Ableitungsoperatoren kommutieren. Dies ist nach dem Satz von Schwarz gegeben, wenn die Operatoren ausschließlich auf Funktionen angewandt werden, die mindestens zweimal partiell differenzierbar sind [63]. Für den Summand mit $l = i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\ &= \left(x_i \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - x_j \frac{\partial^3}{\partial x_i^3} \right) - \left(x_i \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} - x_j \frac{\partial^3}{\partial x_i^3} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise ergibt sich für $l = j$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] = -2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

In Gleichung (A.1) heben sich somit die Summanden für $l = i$ und $l = j$ auf, sodass insgesamt $[\nabla^2, L_k] = 0$ gilt.

Anhang II: Simulationsergebnisse

Einzelne lokalisierte Strukturen

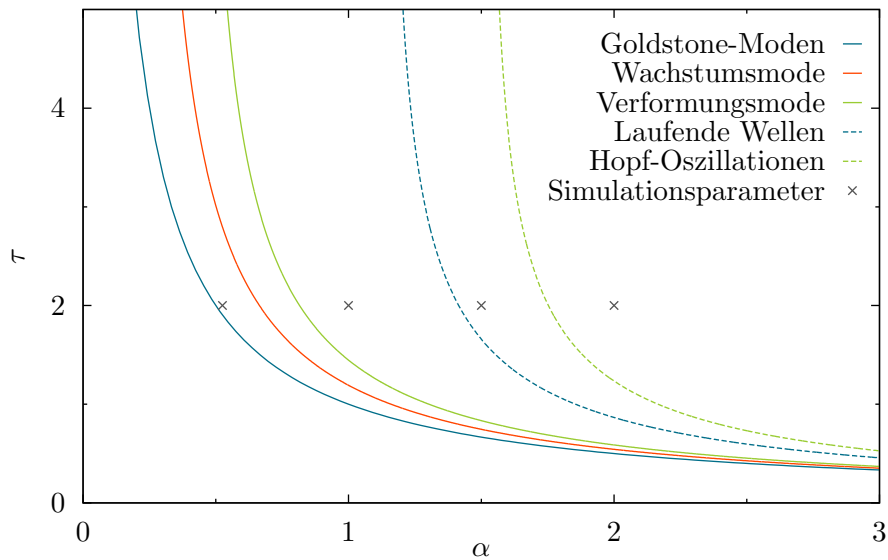


Abbildung A.6: Stabilitätsgrenzen für eine einzelne lokalisierte Struktur in zwei Dimensionen abhängig von α und τ . Die Grenze der Goldstone-Moden entspricht $\alpha\tau = 1$ (blau). Außerdem sind die Stabilitätsgrenzen der Wachstumsmoden (rot) und der Verformungsmoden (grün) dargestellt, sowie die Stabilitätsgrenze der homogenen Lösung gegenüber laufenden Wellen (blau, gestrichelt) und gegen homogene Hopf-Oszillationen (grün, gestrichelt). Die Kreuze markieren Parameterwerte, an denen Simulationen durchgeführt wurden.

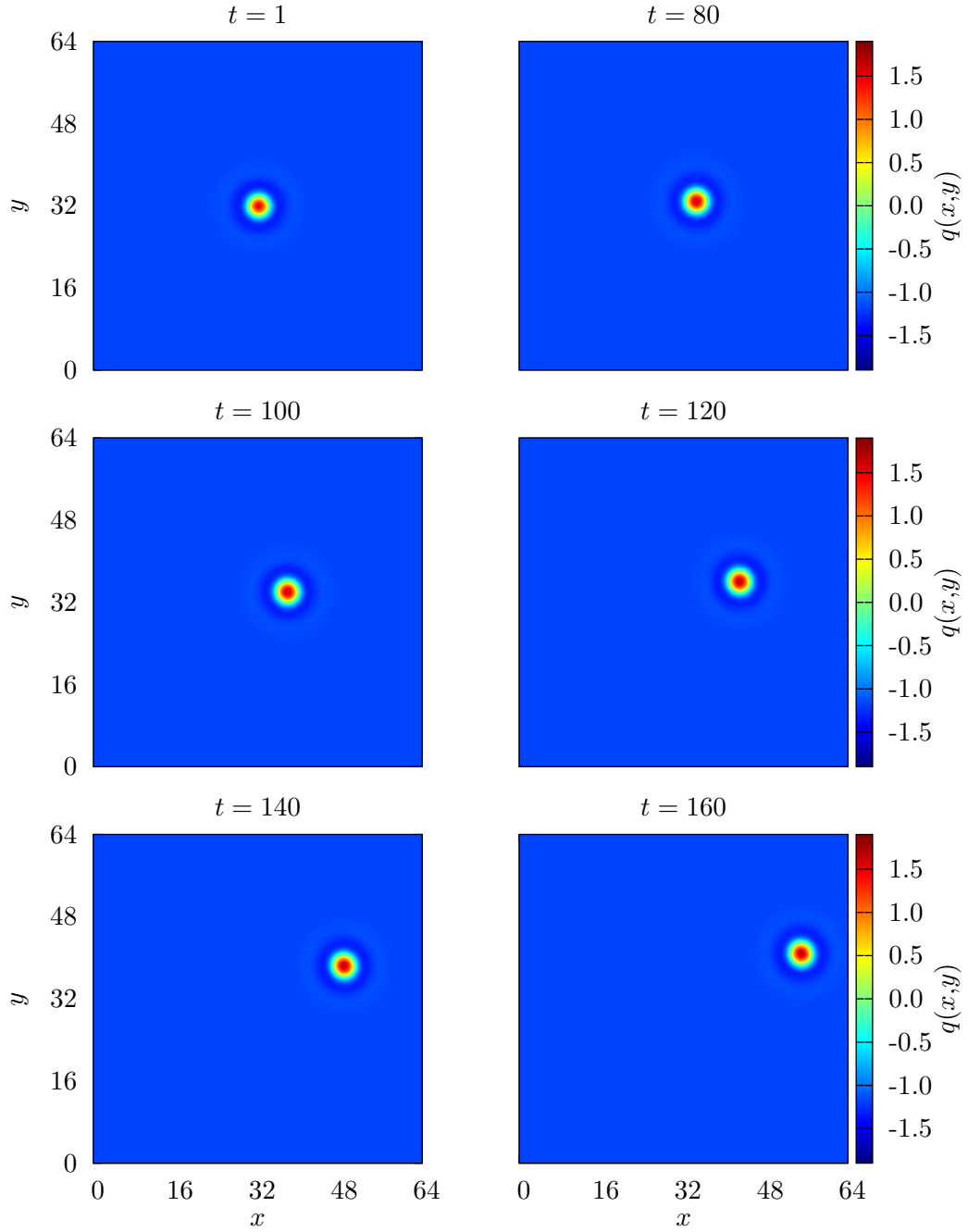


Abbildung A.7: Drift der lokalisierten Struktur für $\tau = 2$, $\alpha = 0,525$. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt und mit Rauschen überlagert. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

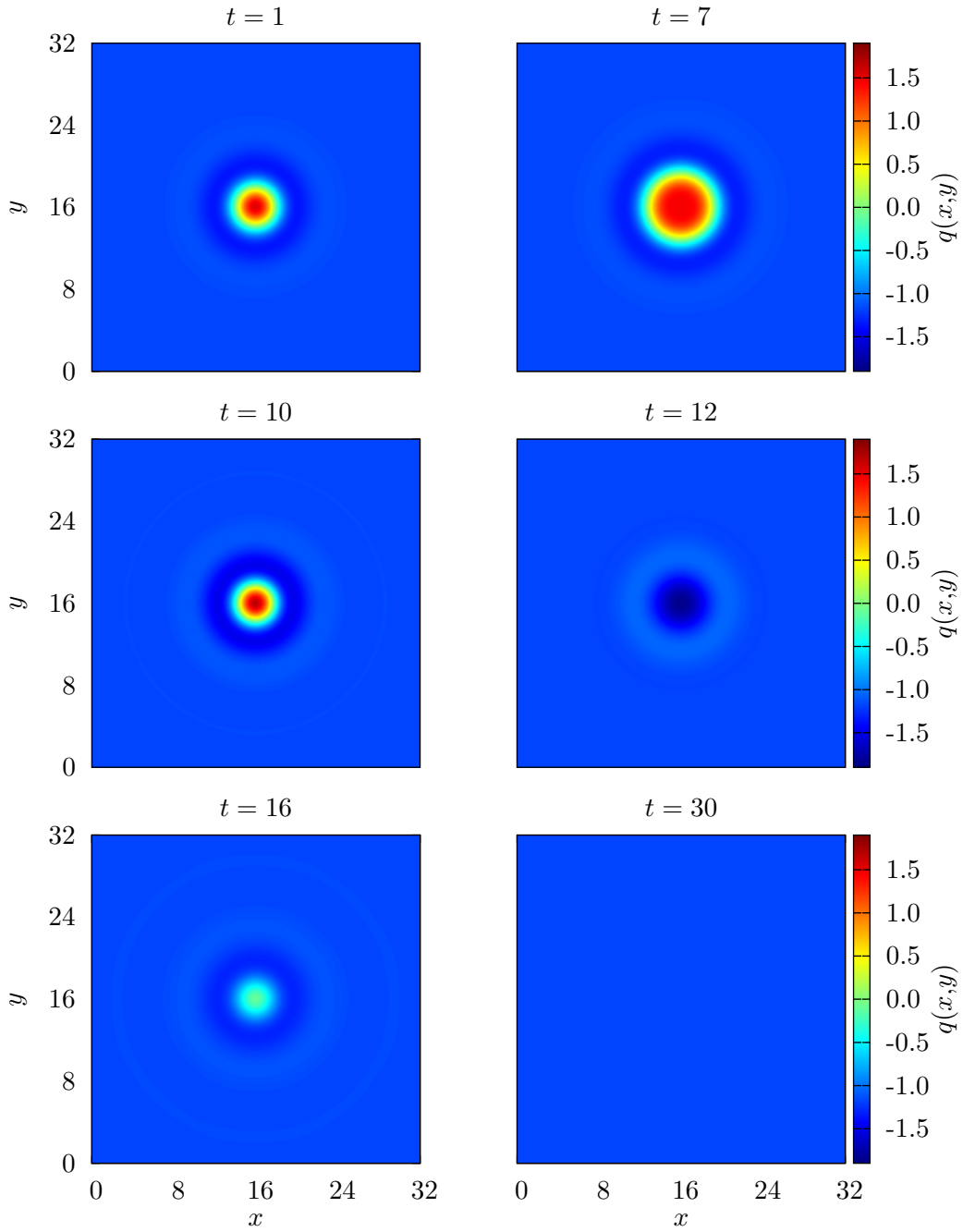


Abbildung A.8: Auslöschung der lokalisierten Struktur für $\tau = 2$, $\alpha = 1$. Da die Wachstumsmoden für diese Parameter einen instabilen komplexen Eigenwert $\lambda_0 = 0,55 + 0,09i$ besitzt, beginnen die beiden Strukturen in ihrer Größe zu oszillieren, schlägt dabei zwischenzeitlich in eine dunkle lokalisierte Struktur um ($t=12$) und verschwindet schließlich. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 32$, $dx = dy = 0,1$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

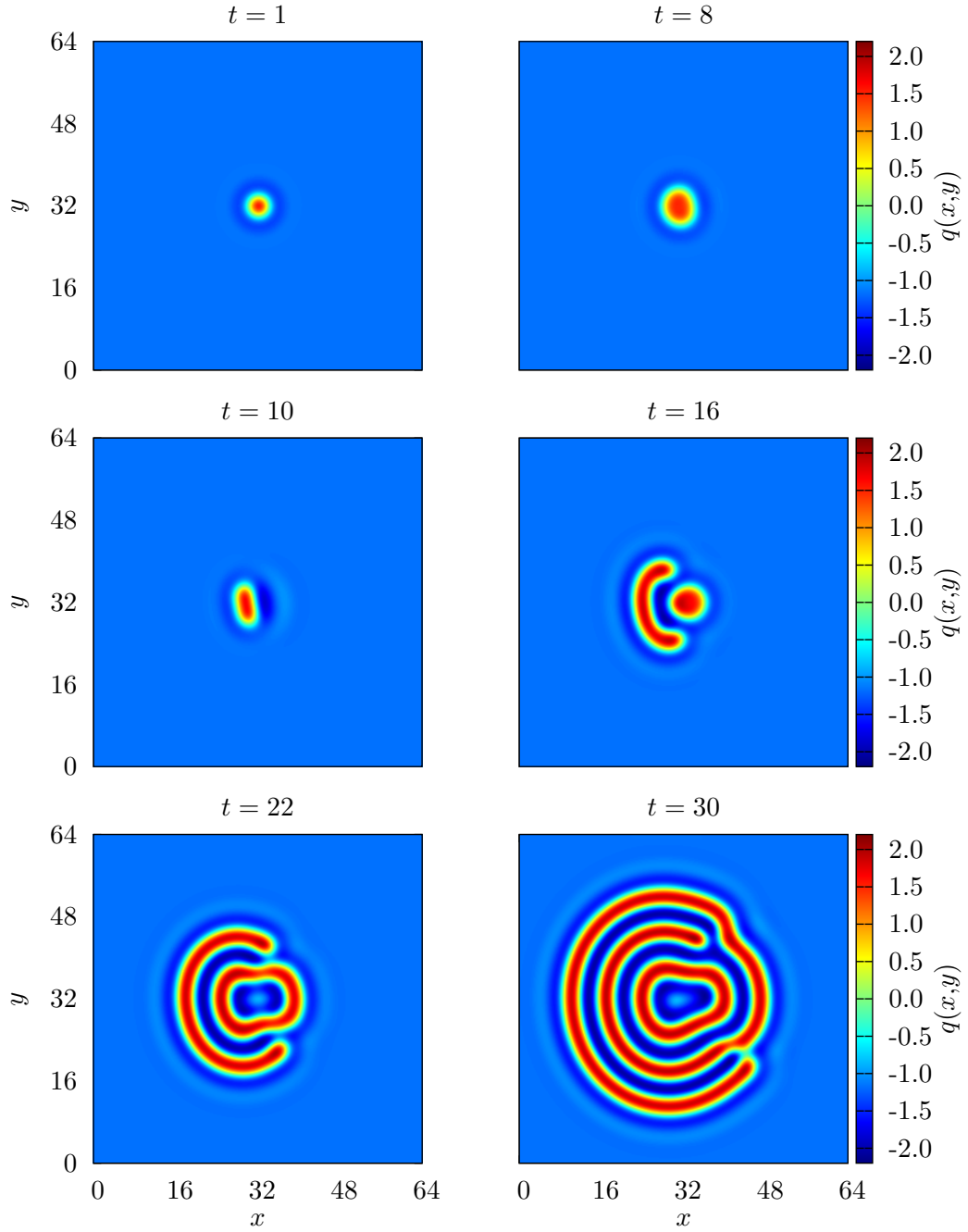


Abbildung A.9: Bildung einer laufenden Welle aus einer lokalisierten Struktur für $\tau = 2$, $\alpha = 1,5$. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt und mit Rauschen überlagert. Zu Beginn der Simulation ist ein leichter Drift der Struktur zu erkennen, welcher auf die verrauschten Anfangsbedingungen zurückzuführen ist. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

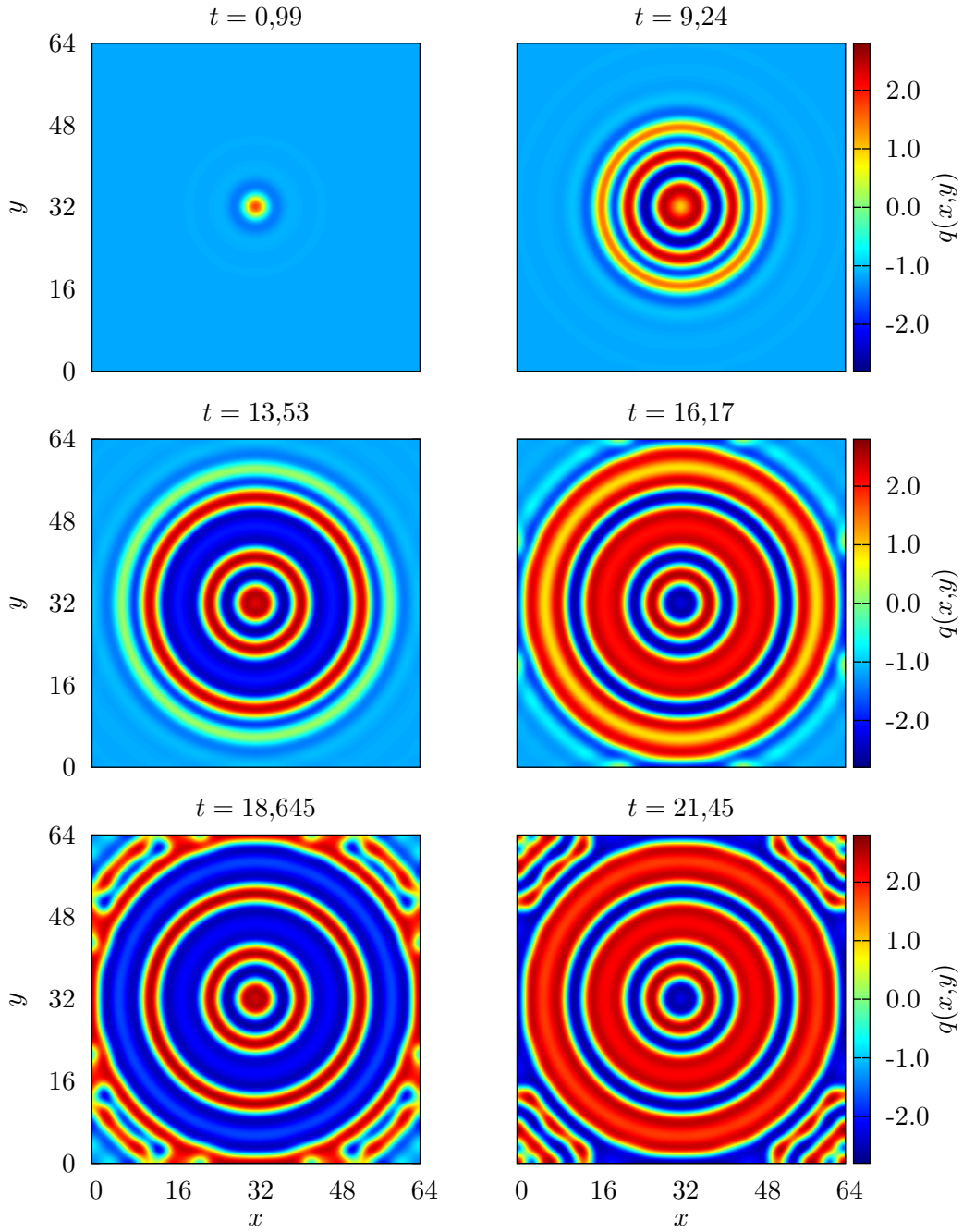


Abbildung A.10: Laufende Wellen überlagert mit homogenen Hopf-Oszillationen ausgehend von einer lokalisierten Struktur für $\tau = 2$, $\alpha = 2$. Der homogene Hintergrund \mathbf{q}_{hom} ist sowohl gegenüber laufenden Wellen, als auch gegen homogene Hopf-Oszillationen instabil. Neben den laufenden Wellen und den durch die periodischen Randbedingungen entstehenden Artefakten am Rand sind auch die homogenen Oszillationen als Farbumschlag zwischen zwei Wellenbergen erkennbar. Als Anfangsbedingung wurde ein Gauß-Puls gewählt. Weitere Parameter: $L_x = L_y = 64$, $dx = dy = 0,2$, $dt = 0,001$, $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $Y = -0,4$, $C = 1$.

Danksagung

Am Ende dieser Masterarbeit möchte ich mehreren Personen danken, die mich beim Verfassen der Arbeit unterstützt haben.

Ich danke Prof. Dr. Andreas Heuer für die Bereitschaft, die Betreuung und Begutachtung der Arbeit zu übernehmen. Ebenfalls danken möchte ich Dr. Svetlana Gurevich für die engagierte und sehr freundliche Betreuung und viele thematische Anregungen.

Markus Wilczek danke ich für die Bereitschaft, die Arbeit Korrektur zu lesen und für seine große Hilfsbereitschaft bei Problemen fast jeder Art. Alexander Kraft danke ich für zahlreiche Ratschläge bei der numerischen Behandlung des Themas. Außerdem danke ich Walter Tewes und Lukas Ophaus für das Korrekturlesen der Arbeit und der gesamten Arbeitsgruppe für die schöne Arbeitsatmosphäre.

Besonderer Dank gilt meiner Schwester Anne und meinen Eltern für das Korrekturlesen der Arbeit und vor allem für ihre bedingungslose Unterstützung.

Erklärung zur Masterarbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Münster, den 03. November 2014