

Bachelorarbeit

Swarmingübergänge in diskreten Modellen

Jonas Plate

21.09.2016

Gutachter: Prof. Dr. Uwe Thiele / Dr. Svetlana Gurevich

Westfälische Wilhelms-Universität Münster



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Swarming und aktive Materie	5
2. Ein minimales Modell für Jäger-Schwarm-Interaktionen	9
3. Theoretische Grundlagen	11
3.1. Graphische Analyse dynamischer Systeme	11
3.2. Stabilität linearer Systeme	12
3.3. Lineare Stabilitätsanalyse	14
3.4. Bifurkationen	15
3.4.1. Sattel-Knoten-Bifurkation	16
3.4.2. Pitchfork-Bifurkation	17
3.4.3. Hopf-Bifurkation	19
3.5. Numerische Kontinuierung	20
4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells	23
4.1. System aus zwei Beuteteilchen	23
4.2. Ein Beuteteilchen und ein Jäger	25
4.3. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen auf der Linie	28
4.4. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen in der Ebene	33
4.5. 1 Jäger und 30 Beuteteilchen	46
5. Zusammenfassung	51
A. Graphen für das Schwingungsverhalten des Systems mit einem Jäger und 30 Beuteteilchen	56
A.1. Schwingungsverhalten des Jägers in x-Richtung bei unterschiedlichen b	56
A.2. Absoluter Abstand des Jägers zum Koordinatenursprung bei unterschiedlichen b	57
A.3. Absoluter Abstand vom Jäger der Teilchen im inneren und äußeren Kreis für unterschiedliche b	58
A.4. Bewegungsverlauf eines Beuteteilchens bei unterschiedlichen b . .	59
A.5. Periodenänderung auf dem Weg ins chaotische Verhalten	60
B. Erklärung zur Bachelorarbeit	61

1. Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, ein minimales, theoretisches Modell für Jäger-Schwarm-Interaktionen - das von Chen und Kolokolnikov vorgeschlagene *minimal model of predator-swarm interactions* [2] - für unterschiedliche Schwarmgrößen genauer zu analysieren und dabei im Speziellen Übergänge im dynamischen Verhalten des Systems unter der Variation eines Systemparameters wie der Jägerstärke zu untersuchen. Nach einer kurzen Einführung ins Thema wird zunächst das zu untersuchende Modell eingeführt. Im Anschluss werden einige theoretische Grundlagen der nichtlinearen Physik, welche für diese Arbeit von Bedeutung sind, erläutert und anschließend das Modell für unterschiedliche Fälle analytisch und numerisch genauer untersucht.

1.1. Swarming und aktive Materie

„Swarming“ bezeichnet ein gemeinsames Verhalten von Organismen, speziell von Tieren wie Vögeln, Fischen und Insekten, sich zu Aggregationen zusammenzuschließen und z.B. gemeinsam fortzubewegen oder an einem bestimmten Ort wie etwa einer Tränke zu versammeln. Auch auf anderen Ebenen lebender Organismen wie in Bakterienkolonien oder in Städten lassen sich unterschiedliche Formen kollektiven Verhaltens beobachten. Es lässt sich vermuten, dass Swarming eine evolutionäre Anpassung darstellt, die einem Individuum oder Kollektiv Vorteile bietet [18]. Hierzu gehören Schutz vor Jägern wie in einem Fischschwarm [21] oder einer Herde von Zebras [19], Schutz vor Kälte in einer Gruppe von Pinguinen[27] oder eine effizientere Futtersuche[2].

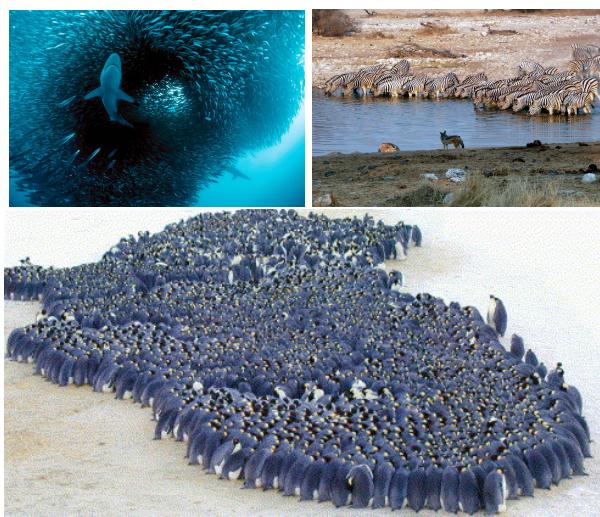


Abbildung 1: Ein Fischschwarm (oben links) versucht sich vor einem Hai zu schützen (Abbildung aus [26]). Zebras (oben rechts) versammeln sich an einer Tränke (Abbildung aus [6]) und Pinguine (unten) bilden einen Schwarm, um sich vor Kälte zu schützen (Abbildung aus [22]).

1. Einleitung

Moskitos bilden zur Paarungszeit kurzzeitig kleinere Schwärme [18], da dies die Paarungssuche vereinfacht. Einer Herde Zebras gelingt es beispielsweise, durch erhöhte Wachsamkeit in der Gruppe einen Jäger wie eine Hyäne oder einen Löwen früher zu entdecken und diesem durch den *Verwirrungs-Effekt* (die Unfähigkeit des Jägers, sich auf ein bestimmtes Beutetier einer großen Gruppe zu konzentrieren) zu entkommen [18]. Auf der anderen Seite ziehen große Gruppen Jäger an, weil sie von diesen einfacher zu entdecken sind. Weitere Gründe für die Aggregation sind energetische Vorteile beim Fliegen oder Schwimmen sowie eine effizientere Futtersuche[2], [18].

Ein Schwarm kann dabei anfangs durch zufälliges Aufeinandertreffen von Individuen zustande kommen und anschließend durch Faktoren wachsen, die von der Schwarmdichte abhängen. Die Größe des Schwarms wird dabei durch den Nutzen aller Individuen bestimmt und beeinflusst seine Effektivität. Bei einer geringen Anzahl an Mitgliedern wirkt sich das Fehlerverhalten eines Individuums stark auf das Gruppenverhalten aus, da die Fehlinformation nicht durch statistische Effekte wie bei einem großen Schwarm abgeschwächt wird. Dadurch wird die Kommunikation innerhalb der Gruppe fehlerhaft, z.B. könnten Jäger schwerer abgeschüttelt werden. Bei einer großen Anzahl an Individuen hingegen steigt die Gefahr, dass diese um mangelnde Ressourcen kämpfen oder an Krankheiten erliegen [18].

Obwohl Schwärme aus einzelnen Individuen bestehen, funktionieren sie als eine Einheit und zeigen komplexe Verhaltensweisen, die auf der Ebene des individuellen Organismus nicht möglich wären. Manchmal führt dies zu ganz neuen Funktionen und einer Art von Intelligenz, Schwarmintelligenz genannt [1]; wie z.B. im Fall von Ameisen die Fähigkeit, ein Nest zu bauen, dieses effektiv gegen Angreifer zu verteidigen und den kürzesten Weg zur Nahrung zu finden [7], oder bei Bienen die Fähigkeit, die Temperatur des Stocks zu regulieren [9].

Die *complexity theory* [13], welche sich mit dem Verhalten komplexer Systeme beschäftigt, zeigt jedoch, dass sich auch in der unbelebten Welt, bei großen Populationen einer Einheit, Strukturen als Epiphänomene (Zustände eines Systems, die keine signifikante Auswirkung auf dieses haben) ausbilden[18]. Deshalb stellt sich die Frage, ob alle Eigenschaften von Schwärmen eine Funktion erfüllen, oder ob manche nur zufällig gebildete Strukturen darstellen. Um dieser Frage nachzugehen und die Prozesse, die zur Schwarmbildung führen und sein Verhalten bestimmen, besser zu verstehen, ist es nötig, theoretische Modelle zu untersuchen und diese mit empirischer Forschung zu verbinden. Die dadurch gewonnenen Erkenntnisse könnten dabei helfen, Autoverkehr zu optimieren, autonome Autos zu verbessern und Roboter-Teams zu programmieren, die z.B. in ein brennendes Gebäude geschickt werden können. Auch militärische Einsatzgebiete z.B. für Kampfdrohnen gibt es; ein großes Potenzial liegt ebenfalls im Internet und der intelligenten Vernetzung des Wissens aller Individuen [16].

Es gibt unterschiedliche Ansätze zur theoretischen Untersuchung von Schwarm-

verhalten. Ein Ansatz besteht darin, das aus diskreten Teilchen bestehende System in einer Dichtefeld-Näherung als Kontinuum zu betrachten. Dabei werden die Effekte, die von allen einzelnen Teilchen auf ein gegebenes Teilchen wirken, durch einen einzigen durchschnittlichen Effekt angenähert, wodurch das Viel-Körper Problem auf ein Ein-Körper Problem reduziert wird[18].

Ein weiterer Ansatz basiert auf diskreten Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen des Systems, nach denen die Bewegung des Individuums durch einfache Verhaltensregeln bestimmt wird. Modelle dieser Art können lebhafte und sichtbare Voraussagen über den individuellen Beitrag eines Teilchens zum Verhalten des Schwarms geben [18]. Ein Beispiel für diese Herangehensweise ist das von Chen und Kolokolnikov vorgeschlagene *minimal model of predator-swarm interactions* [2], welches hier genauer untersucht werden soll und etwas weiter unten eingeführt wird.

Die oben beschriebenen Systeme werden häufig unter dem Überbegriff der *aktiven Materie* zusammengefasst. Solche Systeme teilen die charakteristische Eigenschaft, dass sie aus selbst angetriebenen Einheiten, aktiven Teilchen bestehen. Diese können gespeicherte oder freie Energie aus der Umgebung in systematische Bewegung umwandeln[15].

Nach Marchetti et al. [15] haben aktive Teilchen meist eine längliche Form, deren eigene Antriebsrichtung mehr durch ihre Anisotropie bestimmt wird, als durch ein äußeres Feld. Systeme, mit denen sich die Forschung der aktiven Materie beschäftigt und die der Laie gewöhnlich nicht mit dem Begriff Swarming in Verbindung bringt, sind z.B. Zell-Filamente wie Mikrotubuli mit zugehörigen Motor-Proteinen [25]. Mikrotubuli sind Zellstrukturen, die einen Teil des Zellskelets einer Zelle ausmachen[12]. Weitere untersuchte Systeme sind Bakterienkolonien[5], Zellschichten[11] sowie die schon erwähnten Schwärme. Ebenso leblose aktive Materie, wie kolloidale oder Nanopartikel, die sich durch chemische Reaktionen innerhalb einer Flüssigkeit fortbewegen, gehören zum Forschungsfeld[15].

Im Unterschied zu anderen Nichtgleichgewichtssystemen besitzt aktive Materie die definierende Eigenschaft, dass die zugeführte Energie, durch die das System aus dem Gleichgewicht gebracht wird, von lokaler Ebene kommt, also von der Ebene jedes Teilchens und nicht von den Grenzen des Systems, wie es z.B. bei Strömungen der Fall ist[15].

Marchetti et al. [15] teilen Systeme aktiver Materie in vier Einheitsklassen ein. Innerhalb dieser Einheitsklassen zeigen die Systeme makroskopisch ähnliche Eigenschaften, obwohl sie auf mikroskopischer Ebene sehr unterschiedlich in der Größenordnung und detaillierten Dynamik sein können.

Eine Einteilung erfolgt über die Symmetrie in polar - für Individuen mit Vorder und Hinterteil, wie z.B. Fische, die im Durchschnitt eine gemeinsame Ausrichtung sowie einen gemeinsamen Richtungssinn besitzen - und nematisch für gemeinsam ausgerichtete Teilchen ohne gemeinsamen Richtungssinn. Eine weitere Aufteilung erfolgt in trocken - für Systeme in denen der Impuls nicht erhalten ist wie bei einer Flüssigkeit, die sich auf einem Untergrund bewegt und dabei einen Teil des

1. Einleitung

Impulses z.B. durch Reibung an diesen abgibt¹ - und in feucht für Systeme, in denen der Impuls erhalten ist. Dieses Thema wird im Artikel *Hydrodynamics of soft active matter* von Marchetti et al. [15] ausführlicher behandelt.

Bevor im Weiteren das zu untersuchende Modell eingeführt wird, soll darauf hingewiesen werden, dass einige der hier erwähnten Systeme, insbesondere solche, die aus Schwärmen mit Beute- und Jägertieren bestehen, das dritte newtonscche Gesetz brechen. Dieses besagt, dass die von einem Teilchen A auf ein zweites Teilchen B wirkende Kraft der vom Teilchen B auf das Teilchen A wirkenden Kraft entgegengesetzt ist: $F_{AB} = -F_{BA}$. Dies ist vielleicht für Schwärme von Tieren und Jägertieren intuitiv und nicht überraschend, da die hier wirkenden Kräfte nicht physikalisch sind. Es gibt jedoch auch Systeme aus nicht lebender Materie, für die dies zutrifft; z.B. wenn ein System aus verschiedenen Teilchen besteht, deren Interaktion mit der Umwelt im Ungleichgewicht ist[10]². In dem hier untersuchten Modell bleibt die Symmetrie der Kräfte innerhalb des Schwärms ohne den Jäger erhalten. Bei der Interaktion eines Beuteteilchens mit dem Jäger wird diese jedoch dadurch gebrochen, dass der Jäger eine Anziehung in Richtung Beute spürt und diese wiederum eine Abstoßung vom Jäger. Das heißt die Kräfte der Teilchen zeigen in dieselbe Richtung und sind nicht entgegengerichtet. Des Weiteren unterscheiden sie sich quantitativ dadurch, dass der Jäger erst später, also bei kleineren Abständen, auf in der Nähe befindliche Beute reagiert und dann jedoch stärker als die Beute.

¹Der Gesamtimpuls von Flüssigkeit und Untergrund bleibt natürlich erhalten.

²Für das gesamte Systeme: Teilchen + Umwelt bleibt das Gesetz erhalten

2. Ein minimales Modell für Jäger-Schwarm-Interaktionen

An dieser Stelle wird das von Chen und Kolokolikov vorgeschlagene *minimal model of predator-swarm interactions*[2] eingeführt, welches in dieser Arbeit untersucht wird.

Angenommen, es gibt einen Schwarm bestehend aus N Beuteteilchen B_i , welche sich in der xy-Ebene an der Position

$$\mathbf{x}_{B_i}(t) = \begin{pmatrix} x_{B_i}(t) \\ y_{B_i}(t) \end{pmatrix}, i = 1 \dots N \quad (1)$$

befinden und ein Jägerteilchen J an der Stelle $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x}_J(t) = \begin{pmatrix} x_J(t) \\ y_J(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Die Teilchen sollen den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_B \frac{d^2 \mathbf{x}_{B_i}}{dt^2} + \mu \frac{d\mathbf{x}_{B_i}}{dt} = F_{i,Beute-Beute} + F_{i,Beute-Jaeger} \quad (3)$$

$$m_J \frac{d^2 \mathbf{x}_J}{dt^2} + \mu \frac{d\mathbf{x}_J}{dt} = F_{Jaeger-Beute} \quad (4)$$

folgen. Hierbei sind m_B bzw. m_J die Masse des jeweiligen Teilchens, μ die Reibung und $F_{i,Beute-Beute}$ die Gesamtkraft zwischen dem i . Beuteteilchen und allen anderen Beuteteilchen sowie $F_{i,Beute-Jaeger}$ die Kraft zwischen dem i . Beuteteilchen und dem Jägerteilchen. $F_{Jaeger-Beute}$ entspricht der von allen Beuteteilchen auf das Jägerteilchen wirkenden Kraft.

Geht man davon aus, dass die Zeit, die ein Teilchen zur Beschleunigung auf seine, durch μ bestimmte Maximalgeschwindigkeit braucht, klein ist im Verhältnis zu den betrachteten Zeitintervallen, lässt sich der Trägheitsterm gegenüber dem Reibungsterm vernachlässigen. Damit können die Differentialgleichungen auf Gleichungen erster Ordnung reduziert werden. Nach einer Reskalierung des Systems, sodass $\mu = 1$ wird, erhält man.

$$\frac{d\mathbf{x}_{B_i}}{dt} = F_{i,Beute-Beute} + F_{i,Beute-Jaeger} \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_J}{dt} = F_{Jaeger-Beute}. \quad (6)$$

Dieses Modell ist im Gegensatz zum Ausgangsmodell analytisch einfacher zu untersuchen.

Als nächstes werden die einzelnen Kräfte definiert. Um den Schwarm zusammenzuhalten, wirkt jeweils zwischen dem i . Beuteteilchen i_B und dem k . Beuteteilchen k_B eine lineare, langreichweite, anziehende Kraft $-a(\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k})$, die durch eine

2. Ein minimales Modell für Jäger-Schwarm-Interaktionen

kurzreichweitige, abstoßende Kraft $\frac{\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}}{|\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}|^2}$ ergänzt wird, um Kollisionen unter den Beuteteilchen zu verhindern. Hierbei ist a die Stärke der Anziehung zwischen den Beuteteilchen.

Um die durchschnittliche, auf ein Teilchen wirkende, Kraft zu erhalten, wird noch über alle N Beuteteilchen gemittelt. Dadurch bleibt die maximal erreichbare Kraft, die auf ein Teilchen wirken kann für alle N gleich.

$$\mathbf{F}_{i,Beute-Beute} = \frac{1}{N} \sum_{k=1, k \neq i}^N \left(\frac{\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}}{|\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}|^2} - a(\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}) \right). \quad (7)$$

Für die kurzreichweitige, abstoßende Kraft $F_{i,Beute-Jaeger}$ die das i . Beuteteilchen vom Jäger teilchen erfährt, wird dieselbe Form wie für die Abstoßung unter den Beuteteilchen gewählt:

$$F_{i,Beute-Jaeger} = b \frac{\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_J|^2},$$

hierbei ist b die Stärke der Abstoßung der Beute vom Jäger.

Im einfachsten Fall setzt sich $F_{Jaeger-Beute}$ aus dem Mittelwert über alle Jaeger-Beute-Wechselwirkungen zusammen, wobei diese jeweils einem Kraftgesetz folgen, welches mit steigendem Abstand abnimmt, sodass sich das folgende System aus gekoppelten Differentialgleichungen ergibt:

$$\dot{\mathbf{x}}_{B_i} = \frac{1}{N} \sum_{k=1, k \neq i}^N \left(\frac{\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}}{|\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}|^2} - a(\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_{B_k}) \right) + b \frac{\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_J|^2} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_J = \frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{x}_J|^p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Dabei kann c als Stärke des Jägers und p als dessen Empfindlichkeit auf in der Nähe befindliche Beute interpretiert werden. Obwohl dieses Modell sehr einfach ist, erfasst es die essentiellen Eigenschaften von Jäger-Schwarm-Verhalten und reproduziert in der Natur beobachtbare Verhaltensmuster, wie sie z.B. bei einem Hirten inmitten einer Herde von Schafen zu beobachten sind. Des Weiteren kann es im Gegensatz zu komplexeren Modellen, die nur über numerische Simulationen zugänglich sind, analytisch untersucht werden[2].

3. Theoretische Grundlagen

Bevor das vorgestellte Modell genauer untersucht wird, werden im Folgenden noch einige Begriffe und Methoden aus der nichtlinearen Physik erläutert, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

3.1. Graphische Analyse dynamischer Systeme

Ein allgemeines dynamisches System kann durch das folgende Gleichungssystem aus Gleichungen 1. Ordnung beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Hierbei ist $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$. *System* wird hier im Sinne eines dynamischen Systems gemeint und nicht im Sinne einer Reihe von Gleichungen. Das heißt, auch eine einzige Gleichung kann ein System sein.

Lösungen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ eines solchen Systems erfüllen alle Gleichungen des Gleichungssystems.

Oft ist es sinnvoll und hilfreich, die Lösungen in einem sogenannten *Phasenportrait* darzustellen. Dabei kann man diese als eine Kurve, Trajektorie genannt, in einem sogenannten N -dimensionalen *Phasenraum* interpretieren. Die Differentialgleichungen des Systems repräsentieren dabei ein Vektorfeld für die Bewegung eines Punktes auf der Trajektorie. Der Vorteil einer graphischen Analyse gegenüber reinen Formeln soll am folgenden, eindimensionalen Beispiel illustriert werden, welches dem Buch *Nonlinear Dynamics and Chaos* von S.H. Strogatz [24, S.16] entnommen wurde. Man betrachte die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \sin(x), \tag{10}$$

welche eine der wenigen nichtlinearen Gleichungen ist, die in geschlossener Form gelöst werden kann. Die Lösung lautet

$$t = \ln \left(\left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right| \right),$$

mit der Zeit t und der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Diese ist zwar exakt, aber implizit und schwer zu interpretieren. Durch eine graphische Analyse wird das Verhalten des Systems jedoch schnell klar. Gleichung (10) lässt sich als Vektorfeld auf der Linie interpretieren, welches an jedem Ort x die Bewegungsrichtung eines Punktes auf der x-Achse angibt. Dieses lässt sich graphisch darstellen, indem man \dot{x} gegen x aufträgt und auf der x-Achse Pfeile einzeichnet, die der Richtung der Geschwindigkeit entsprechen (Abb. 2).

3. Theoretische Grundlagen

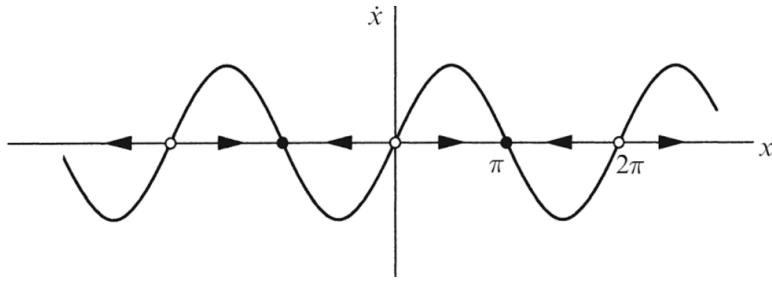


Abbildung 2: Phasenportrait des Systems (10), die Vektoren auf der x-Achse zeigen in die Richtung der Geschwindigkeit eines Punktes an der jeweiligen Stelle. Schwarze Punkte repräsentieren Senken (stabile Fixpunkte), weiße Punkte repräsentieren Quellen (instabile Fixpunkte). (Abbildung aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S. 17])

Auf der x-Achse befinden sich Punkte x^* , von denen alle Pfeile weg oder zu denen alle Pfeile hin zeigen. Dies sind sogenannte *Fixpunkte*, auch stationäre Lösungen genannt. Diese erfüllen die Bedingung $f(x^*) = 0$: Startet ein System an einem dieser Punkte, bleibt es - vorausgesetzt, es erfährt keine Störung - für alle Zeit in diesem Zustand. Was passiert, wenn das System in diesem Zustand gestört wird, hängt von der Stabilität des Fixpunktes ab. Dabei ist eine stationäre Lösung stabil, wenn alle ausreichend kleinen Störungen $\delta x = x - x^*$ vom Fixpunkt weg mit der Zeit geringer werden und umgekehrt ist ein Fixpunkt instabil, wenn eine Störung mit der Zeit wächst. Ein Fixpunkt \mathbf{x}^* eines Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist

- anziehend, wenn es ein $\delta x > 0$ gibt, sodass $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ gilt, immer wenn $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta x$ ist.
- Lyapunov-stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta x > 0$ existiert, sodass $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$ und $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta x$.
- asymptotisch stabil, wenn er anziehend und Lyapunov-stabil ist.
- instabil, wenn er weder anziehend, noch Lyapunov-stabil ist [24].

3.2. Stabilität linearer Systeme

In einem späteren Abschnitt wird die sogenannte *lineare Stabilitätsanalyse* eingeführt, bei der ein nichtlineares System an einem Fixpunkt durch ein lineares System angenähert wird, um dessen Stabilität an dieser Stelle zu untersuchen. Deshalb wird an dieser Stelle zuerst die Stabilitätsbestimmung für lineare Systeme hergeleitet und im Abschnitt 3.3 das Vorgehen auf nichtlineare Systeme erweitert.

Ein n -dimensionales, lineares System hat die Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n,\end{aligned}$$

wobei $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ Parameter sind. Dies kann auch geschrieben werden als: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ wobei A eine Matrix ist und \mathbf{x} ein Vektor:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ein solches lineares Gleichungssystem hat die Eigenschaft, dass wenn \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 Lösungen sind, auch $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ eine Lösung ist. Diese Tatsache lässt sich ausnutzen, um alle möglichen Trajektorien eines n -dimensionalen, linearen Systems zu bestimmen. Dabei geht man wie folgt vor: Zunächst werden Trajektorien auf einer Linie der Form

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (11)$$

gesucht, wobei $\mathbf{v} \neq 0$ ein noch zu bestimmender Vektor und λ eine ebenfalls noch zu bestimmende Wachstumsrate ist. Wenn solche Lösungen existieren, entsprechen sie einer exponentiellen Bewegung entlang der von \mathbf{v} aufgespannten Linie. Setzt man den Ansatz $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ in $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ein erhält man:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0. \quad (12)$$

Das bedeutet, diese Lösung existiert, wenn der Vektor \mathbf{v} ein Eigenvektor der Matrix A mit dem Eigenwert λ ist.

Sind alle Eigenwerte unterschiedlich $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$, dann sind alle zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig und spannen den gesamten Raum auf. Dann kann jeder Anfangswert \mathbf{x}_0 als eine Linearkombination der Eigenvektoren geschrieben werden: $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$. Damit kann auch die allgemeine Lösung als Linearkombination geschrieben werden: $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$. Dies ist so, weil sie eine Linearkombination der Lösungen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ist und weil sie die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ erfüllt. Das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem besagt außerdem, dass es die einzige Lösung ist[24]

Um die Stabilität eines Fixpunktes zu bestimmen, reicht es aus, die Eigenwerte λ_1 bis λ_n zu kennen. Sind die Realteile aller Eigenwerte negativ, dann ist der Fixpunkt stabil und anziehend; ist mindestens Eigenwerte negativ im Realteil, dann ist er instabil. Je nach Dynamik des Systems werden die Fixpunkte - ob stabil oder

3. Theoretische Grundlagen

instabil - unterschiedlich Bezeichnet. Ein Fixpunkt wird mit Spirale bezeichnet, wenn die Eigenwerte komplex sind und mit Knoten, wenn alle Eigenwerte reell sind. Darüber hinaus gibt es noch einige weitere Typen von Fixpunkten an der Übergangsgrenze. Sind alle Eigenwerte rein imaginär, wird der Fixpunkt Zentrum genannt, weil die Trajektorien eine Ellipse um den Fixpunkt bilden[24].

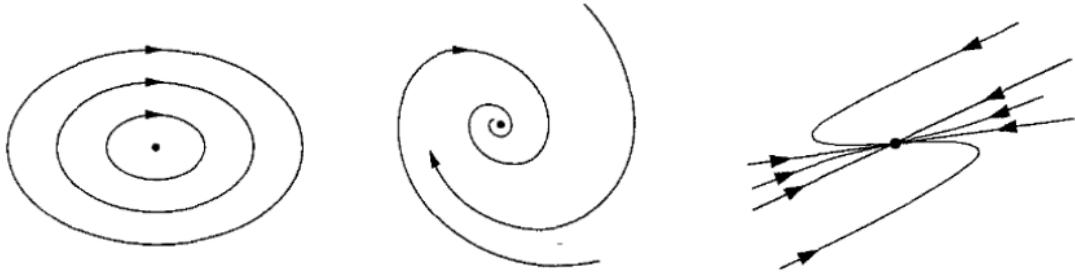


Abbildung 3: Beispiel einiger Typen von Fixpunkten: Bei einem Zentrum (links) ist der Ursprung ein Fixpunkt, alle anderen Lösungen bewegen sich auf Ellipsen um diesen herum. Bei einer Spirale (Mitte) bewegen sich die Lösungen je nach Stabilität spiralförmig zum Fixpunkt im Ursprung hin bzw. davon weg. Sind alle Eigenwerte reell, ist der Fixpunkt im Ursprung ein Knoten (rechts). (Abbildungen aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S.134 u. S. 136])

3.3. Lineare Stabilitätsanalyse

Für nichtlineare Systeme ist es hingegen schwieriger, die Stabilität zu bestimmen. Eine Möglichkeit besteht darin, das nichtlineare System an der Stelle des Fixpunktes durch ein lineares System anzunähern und dessen Stabilität wie in Abschnitt 3.2 über die Eigenwerte der Jacobi-Matrix zu bestimmen. Das Vorgehen wird nun für einen 2-dimensionalen Fall erläutert, ist jedoch auch auf höhere Dimensionen übertragbar. Man betrachte das System

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (13)$$

$$\dot{y} = g(x, y) \quad (14)$$

mit dem Fixpunkt (x^*, y^*) . Angenommen

$$\delta x = x - x^*, \delta y = y - y^* \quad (15)$$

sind die Komponenten einer kleinen Störung des Systems vom Fixpunkt weg. Um herauszufinden, ob die Störung mit der Zeit wächst oder kleiner wird, müssen die

Zeitableitungen von δx und δy gebildet werden:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}^* = \dot{x} && (\text{da } \dot{x}^* = 0 \text{ ist}) \\
 &= f(x^* + \delta x, y^* + \delta y) && (\text{durch Substitution}) \\
 &= f(x^*, y^*) + \delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2, \delta x \delta y) && (\text{durch Taylorentwicklung um } (x^*, y^*)) \\
 &= \delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2, \delta x \delta y) && (\text{da } f(x^*, y^*) = 0)
 \end{aligned}$$

Dabei kennzeichnet $\mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2, \delta x \delta y)$ sehr kleine Terme höherer Ordnungen. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass die partiellen Ableitungen jeweils am Fixpunkt (x^*, y^*) ausgewertet werden müssen und daher Zahlen darstellen und keine Funktionen. Analog erhält man

$$\delta \dot{y} = \delta x \frac{\partial g}{\partial x} + \delta y \frac{\partial g}{\partial y} + \mathcal{O}(\delta x^2, \delta y^2, \delta x \delta y).$$

Das heißt, die Störung $(\delta x, \delta y)$ entwickelt sich nach

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \text{höhere Terme.}$$

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(x^*, y^*)}$$

wird Jacobi-Matrix an der Stelle des Fixpunktes (x^*, y^*) genannt.

Vernachlässigt man die höheren Terme, erhält man ein linearisiertes System, dessen Stabilität wie in Abschnitt 3.2 analysiert werden kann.

Dies ist jedoch nicht in jedem Fall möglich, da die kleinen nichtlinearen Terme an den Übergangsgrenzen das exakte Verhalten in die eine oder andere Richtung kippen können. Insbesondere, wenn mindestens einer der Eigenwerte $\lambda = 0$ ist muss die Stabilität zusätzlich durch andere Methoden überprüft werden. An den Übergängen von einem Knoten zu einer Spirale lässt sich zwar die Stabilität bestimmen, jedoch nicht die spezifische Art des Fixpunktes [24].

3.4. Bifurkationen

Der Begriff Bifurkation beschreibt eine plötzliche, qualitative Zustandsänderung der Dynamik eines nichtlinearen Systems, unter der Variation eines Parameters[24]. Bei der Analyse dynamischer Systeme spielen Bifurkationsdiagramme eine wichtige Rolle. In diesem werden die stationären Lösungen eines Systems über einen der Systemparameter aufgetragen; da bei einer Bifurkation oft neue Zweige von

3. Theoretische Grundlagen

Lösungen entstehen, kann man die Bifurkationspunkte dann in einem Bifurkationsdiagramm erkennen. Einige typische Bifurkationen werden im folgenden kurz vorgestellt. Die Unterkapitel zu den einzelnen Bifurkationstypen orientieren sich jeweils an den korrespondierenden Kapiteln in S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24].

3.4.1. Sattel-Knoten-Bifurkation

Die Sattel-Knoten-Bifurkation ist ein grundlegender Mechanismus, durch den Fixpunkte entstehen und verschwinden. Dabei bewegen sich zwei Fixpunkte unter Variation eines Parameters aufeinander zu und löschen sich beim Aufeinandertreffen gegenseitig aus. Das prototypische Beispiel einer solchen Bifurkation ist durch das System

$$\dot{x} = r + x^2$$

gegeben.

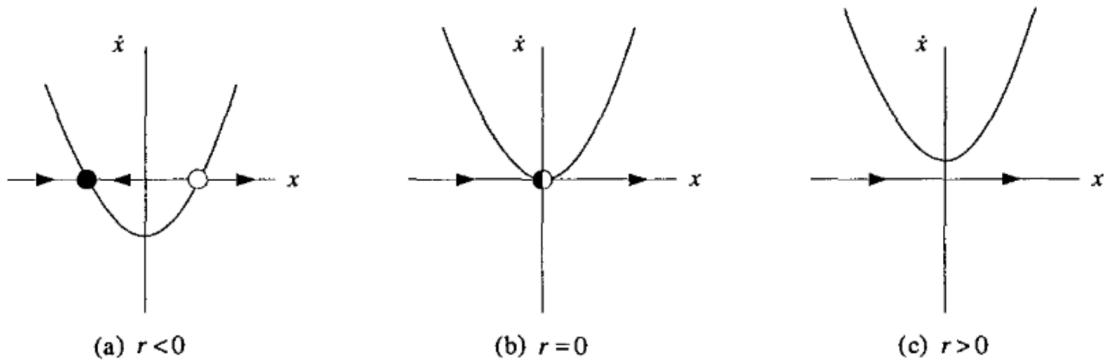


Abbildung 4: Sattel-Knoten Bifurkation des Systems $\dot{x} = r + x^2$ im Phasenraumporträt: Für negative r (a) gibt es zwei Fixpunkte, einer ist stabil (schwarzer Punkt), der andere instabil (weißer Punkt). Während r sich 0 nähert, bewegt sich die Parabel aufwärts, die Fixpunkte bewegen sich aufeinander zu und „verschmelzen“ bei $r = 0$ (b) zu einem einzigen halb stabilen Fixpunkt (halb ausgefüllter Punkt). Wird $r > 0$ (c), verschwindet auch dieser Fixpunkt. Man sagt, das System durchgeht bei $r = 0$ eine Bifurkation. (Abbildung aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S. 45])

Abbildung 5 zeigt das Bifurkationsdiagramm dieses Systems. Am Punkt der Bifurkation entstehen bzw. verschwinden zwei Lösungszweige. Sattel-Knoten-Bifurkationen gibt es auch in allen höheren Dimensionen[24].

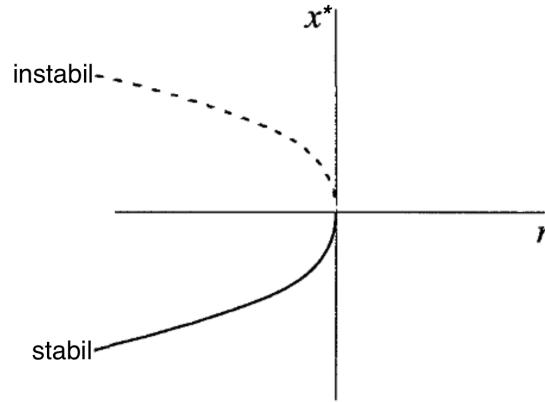


Abbildung 5: Bifurkationsdiagramm des Systems $\dot{x} = r + x^2$. Die stationären Lösungen x^* sind gegen den Systemparameter r aufgetragen. Stabile Fixpunkte sind durch die durchgezogene Linie und instabile Fixpunkte durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet. Geht r vom negativen gegen 0, nähern sich die Fixpunkte unterschiedlicher Stabilität einander an und verschwinden für $r > 0$. (Abbildung aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S. 46])

3.4.2. Pitchfork-Bifurkation

Die Pitchfork- oder auf Deutsch Gabel-Bifurkation tritt häufig bei physikalischen Problemen mit Symmetrien auf. Beispielweise haben viele Probleme eine räumliche Links-Rechts-Symmetrie, sodass Fixpunkte tendenziell in symmetrischen Paaren entstehen und verschwinden. Es gibt zwei Arten von Pitchfork-Bifurkationen, an dieser Stelle soll jedoch nur die superkritische Pitchfork-Bifurkation erläutert werden. Das einfachste Beispiel für diese bietet das System

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (16)$$

Bei diesem Bifurkationstyp zweigen unter der Variation eines Systemparameters r von einem stabilen Fixpunkt im Ursprung zwei neue, symmetrische und stabile Fixpunkte ab, während der ursprünglich stabile Fixpunkt im Ursprung instabil wird (Abb. 6 und 7). Auch die Pitchfork-Bifurkation gibt es in allen höheren Dimensionen [24].

3. Theoretische Grundlagen

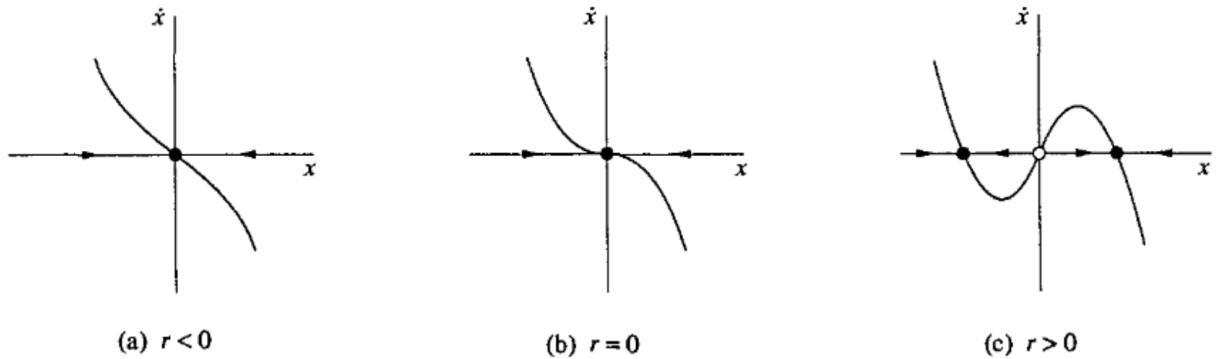


Abbildung 6: Superkritische Pitchfork-Bifurkation des Systems $\dot{x} = rx - x^3$ im Phasenraumporträt. Für $r < 0$ (a) existiert nur ein stabiler Fixpunkt im Ursprung. Bei $r = 0$ ist der Ursprung immernoch stabil, jedoch sehr viel weniger als zuvor. Für $r > 0$ (c) wird der Fixpunkt im Ursprung instabil und zwei neue stabile Fixpunkte bei $x^* = \pm\sqrt{r}$ sind entstanden. (Abbildung aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S. 56])

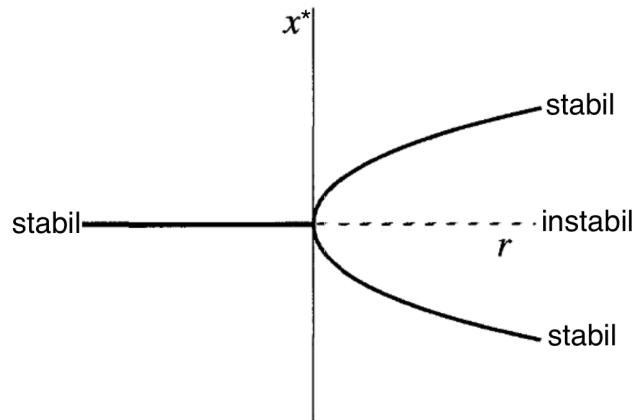


Abbildung 7: Superkritische Pitchfork-Bifurkation des Systems $\dot{x} = rx - x^3$ im Bifurkationsdiagramm. Stabile Fixpunkte sind durch die durchgezogene Linie und instabile Fixpunkte durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet. Ein stabiler Fixpunkt ändert am Bifurkationspunkt $r = 0$ seine Stabilität und es entstehen zwei neue stabile Fixpunkte. (Abbildung aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S. 56])

3.4.3. Hopf-Bifurkation

Die beiden vorherigen Bifurkationstypen treten schon für Systeme ab der ersten Dimension auf und haben Analogien in allen höheren Dimensionen. Hopf-Bifurkationen dagegen sind erst ab der zweiten Dimension möglich. Hierbei gibt es, wie auch schon bei der Pitchfork-Bifurkation, zwei Typen, von denen an dieser Stelle nur die superkritische Hopf-Bifurkation erläutert wird. Generell tritt eine Hopf-Bifurkation auf, wenn ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte der Jacobi-Matrix unter Variation eines Systemparameters die imaginäre Achse kreuzt. Das heißt, wenn ihr Realteil vom Negativen ins Positive übergeht.

Dabei geht eine stabile Spirale am Hopf-Bifurkationspunkt in eine instabile Spirale im Ursprung mit einem stabilen Grenzzyklus um den Ursprung über. Ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung ist das System

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2.\end{aligned}\tag{17}$$

Der Parameter μ bestimmt die Stabilität des Fixpunktes, ω ist die Frequenz infinitesimaler Oszillationen um diesen herum und b die Abhängigkeit der Oszillationsfrequenz von der Auslenkung.

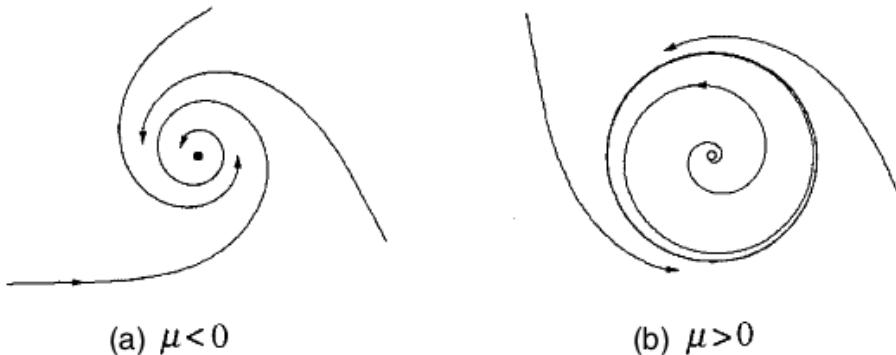


Abbildung 8: Superkritische Hopf-Bifurkation des Systems (17) im Phasenraumporträt. Für $\mu < 0$ (a) ist der Ursprung eine stabile Spirale, deren Rotationsrichtung vom Vorzeichen von ω abhängt. Bei $\mu = 0$ ist der Ursprung noch eine Spirale mit sehr schwacher Stabilität, eine lineare Stabilitätsanalyse würde an dieser Stelle fälschlicherweise ein Zentrum voraussagen. Für $\mu > 0$ gibt es einen Grenzzyklus bei $r = \sqrt{\mu}$, dem alle Trajektorien innerhalb und außerhalb dieses Zyklusses spiralförmig entgegenstreiben. (Abbildung aus S.H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos* [24, S. 250])

3. Theoretische Grundlagen

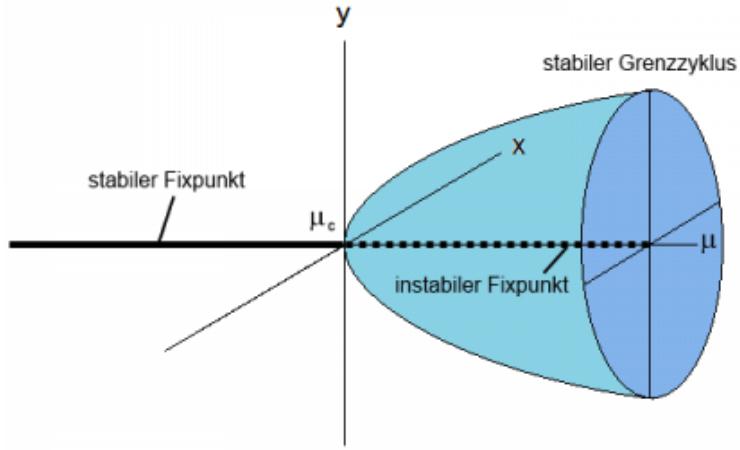


Abbildung 9: Superkritische Hopf-Bifurkation des Systems (17) im Bifurkationsdiagramm. Aus einem Fixpunkt im Ursprung entsteht am Hopfpunkt $\mu_c = 0$ ein instabiler Fixpunkt im Ursprung und ein stabiler Grenzyklus (blaue Flächen) in der $x - y$ -Ebene mit einem Radius $r = \sqrt{\mu}$. (Abbildung aus A. Pielher. *Bio-Physics wiki* [20])

3.5. Numerische Kontinuierung

Eine Methode zur Analyse nicht linearer Differentialgleichungen, die in dieser Arbeit mit Hilfe des Softwarepaketes *auto07p* [4] genutzt wird, ist die *numerische Kontinuierung*. Bei dieser wird eine stationäre Lösung unter Variation eines Parameters μ weiterverfolgt. Die grundlegende Idee soll nun kurz erläutert werden.

Man betrachte ein System

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = 0 \quad (18)$$

aus n nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, n Variablen \mathbf{x} und einem Parameter μ . Angenommen es gibt einen Parameterwert μ^0 , für den das System eine stationäre Lösung $\mathbf{x}^{*0} = (x_1^{*0}, x_2^{*0}, \dots, x_n^{*0})$ besitzt. Das heißt, (\mathbf{x}^{*0}, μ^0) erfüllt das Gleichungssystem (18).

Die Frage ist nun, ob es, wenn der Parameter eine kleine Änderung zu $\mu = \mu^0 + \Delta\mu$ erfährt, in der Nähe qualitativ ähnliche Lösungen $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{*0} + \Delta\mathbf{x})$ gibt.

Der Satz über implizite Funktionen sagt aus, dass diese Lösungen existieren, wenn alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix von \mathbf{f} an der Stelle (\mathbf{x}^{*0}, μ^0) ungleich Null sind. Dann existiert in der Nachbarschaft von (\mathbf{x}^{*0}, μ^0) eine lokale Funktion $\mathbf{x}^*(\mu)$ mit $\mathbf{x}^*(\mu^0) = \mathbf{x}^{*0}$, welche eindeutig ist [8]. Man nennt $\mathbf{x}^*(\mu)$ einen Lösungszweig. Wird einer der Eigenwerte Null, ist die Eindeutigkeit der Funktion nicht mehr gegeben, dies ist an Bifurkationspunkten der Fall, da hier neue Lösungszweige entstehen können.

Um einen Lösungszweig weiterzuverfolgen, wird zunächst ein bekannter Fixpunkt mit zugehörigem Parameter benötigt, von diesem ausgehend wird der Parameter-

wert kleinschrittig erhöht oder erniedrigt und bei jedem Schritt der neue Fixpunkt durch ein iteratives, sogenanntes *Rootfinding*-Verfahren wie z.B. der Newton-Methode approximiert[17]. Die Formel für das Newton-Verfahren lautet

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (D\mathbf{f}_0^{(k)})^{-1} \mathbf{f}_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

wobei $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ der approximierte Fixpunkt nach der k -ten Iteration der Methode ist, $\mathbf{f}_0^{(k)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}, \mu^0)$ und $(D\mathbf{f}_0^{(k)})^{-1}$ steht für die Inverse der Jacobi-Matrix an der Stelle $(\mathbf{x}^{(k)}, \mu^0)$.

Die Iteration wird bis zu einer bestimmten Zahl fortgesetzt oder gestoppt, sobald die approximierte Lösung nah genug an der Exakten liegt. Gleichzeitig werden die Eigenwerte der Jacobi-Matrix berechnet, um Bifurkationspunkte zu bestimmen und dann die Kontinuierung zu stoppen[8].

Zur Veranschaulichung hier nochmal die Formel der Newton-Methode im Eindimensionalen:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^{(k)})}}.$$

Geometrisch entspricht $(x^{(k+1)}, 0)$ dem Punkt, an dem die Tangente des Graphen f an der Stelle $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ die x-Achse schneidet (Abb. 10).

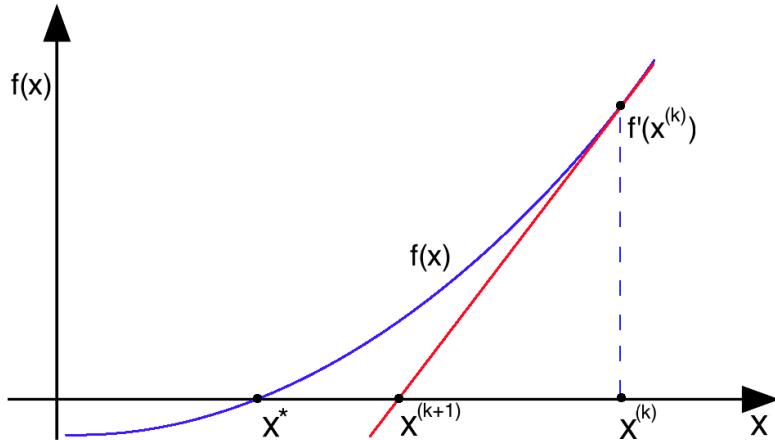


Abbildung 10: Graphische Darstellung einer Iteration der Newton-Methode. Ausgehend vom Punkt x^k wird mit Hilfe der Tangente (rote Linie) an der Stelle x^k des Graphen $f(x)$ (blaue Linie) eine bessere Approximation x^{k+1} für die Lösung x^* von $f(x) = 0$ bestimmt.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

Zunächst werden zum Einstieg einige niederdimensionale Fälle mit maximal drei Teilchen betrachtet. Dazu wurden die stationären Lösungen zu jedem Fall zunächst analytisch berechnet und graphisch mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung verglichen. Die Stabilität der Fixpunkte wurde mithilfe der linearen Stabilitätsanalyse bestimmt und das dynamische Verhalten zusätzlich in einer Zeitsimulation untersucht. Im nächsten Schritt wird dann ein höherdimensionaler Fall mit einem Schwarm aus 30 Beuteteilchen untersucht. Die Empfindlichkeit p des Jägers für Beute wird, wenn nicht anders vermerkt, auf $p = 3$ gesetzt.

4.1. System aus zwei Beuteteilchen

Der einfachste Fall ist ein System mit zwei Beuteteilchen. Da keine äußeren Kräfte wirken, wird die Bewegungsrichtung auf die Verbindungslinie beider Teilchen beschränkt. Dadurch kann das Koordinatensystem so gewählt werden, dass die Bewegung nur auf der x-Achse stattfindet. Dann wird (8) zu

$$\begin{aligned}\dot{x}_{B_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} - a \cdot d \right) \text{ mit } d = x_{B_1} - x_{B_2} \\ \dot{x}_{B_2} &= -\dot{x}_{B_1}.\end{aligned}\tag{20}$$

$\dot{x}_{B_1} = 0$ für die stationären Lösungen ergibt

$$\begin{aligned}1 - a \cdot d^{*2} &= 0 \\ \rightarrow d^* &= \pm \sqrt{\frac{1}{a}},\end{aligned}$$

wobei das Sternchen $*$ im weiteren Verlauf für eine stationäre Lösung steht. Der stationäre Abstand der beiden Teilchen in Abhängigkeit der Anziehung a zwischen den beiden Teilchen liegt also bei $|d^*(a)| = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Abbildung 11 zeigt das Verhalten des Systems in der Zeitsimulation. Die stationären Lösungen wurden in Abbildung 12 zum Vergleich zusammen mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung in einem Graphen aufgetragen. Die Lösungen unterscheiden sich so gering, dass nur eine Kurve zu erkennen ist. Im weiteren Verlauf werden Systeme behandelt, die nur in einem mitbewegten Bezugssystem stationäre Lösungen besitzen, z.B. wenn sich alle Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit in die selbe Richtung bewegen. Daher wird zur besseren Vergleichbarkeit ab sofort die Farbe Grün für Lösungen gewählt, die auch im Laborsystem stationär sind. Eine durchgezogene Linie steht dabei für stabile Lösungen, eine gestrichelte für instabile.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

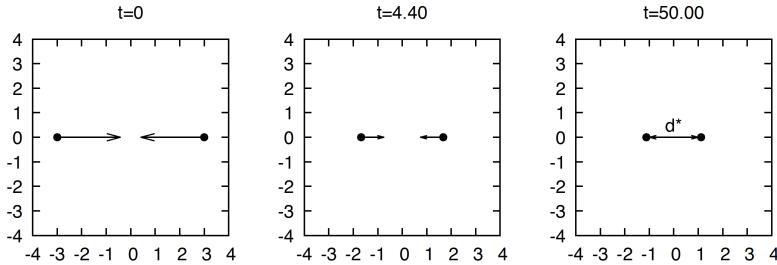


Abbildung 11: Verhalten des Systems (20) in der Zeitsimulation für $a = 0.2, b = c = 0$. Die Pfeile der ersten beiden Abbildungen entsprechen den Geschwindigkeits- bzw. Kraftvektoren der Teilchen. Die Länge der Vektoren ist proportional zur Geschwindigkeit. Von ihrem Ausgangspunkt ($t = 0$) bewegen sich die Teilchen zunächst schnell aufeinander zu. Die Anziehungskraft nimmt durch den sinkenden Abstand ab, während die Abstoßung größer wird ($t = 4.40$), sodass die Teilchen bei einem Gleichgewicht der Kräfte im Abstand d^* zum Stehen kommen ($t = 50.00$).

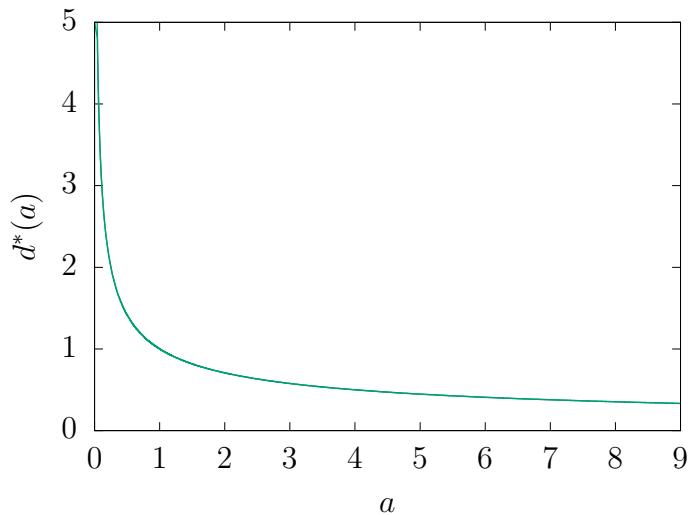


Abbildung 12: Bifurkationsdiagramm für das System (20). Aufgetragen ist der Stationäre Abstand $d^*(a)$ in Abhängigkeit der Anziehung a zwischen den Beute- teilchen. Die Lösungen sind stabil (durchgezogene Linie). Der Verlauf der stationären Lösung fällt für kleine a sehr steil ab und flacht ab $d^* = 1$ stark ab, da für $d^* < 1$ die kurzreichweite, abstoßende Kraft stark ansteigt.

Die Stabilität bei einer Störung $\delta d = d - d^*$ aus dem stationären Zustand wurde mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse ermittelt. Die Änderung dieser Störung mit der Zeit ist:

$$\begin{aligned}\delta \dot{d} &= \dot{d} = f(d) = f(d^* + \delta d) = 2\left(\frac{1}{d} - a \cdot d\right) \\ &\approx \frac{\partial f(d)}{\partial d}|_{d^*} \cdot \delta d = 2\left(\frac{-1}{d^{*2}} - a\right) \cdot \delta d = -4a \cdot \delta d.\end{aligned}$$

Das heißt für positive a sind die stationären Lösungen stabil. Dies ist plausibel, da die abstoßende Komponente der Kraft bei Annäherung der Teilchen schneller wächst und beim Entfernen schneller schrumpft als die anziehende Komponente.

4.2. Ein Beuteteilchen und ein Jäger

Der nächst einfachere Fall ist ein System mit einem Beuteteilchen und einem Jäger. Die Bewegung wird wieder nur auf der Verbindungsgeraden zwischen beiden Teilchen stattfinden. Da das Beuteteilchen eine abstoßende und das Jägerpartikel eine anziehende Kraft spürt, wird es keine stationäre Lösungen im Laborsystem geben, außer wenn sich die Teilchen in unendlicher Entfernung voneinander befinden, da alle wirkenden Kräfte mit größerem Abstand immer weiter abnehmen.

Es gibt jedoch den Fall, dass sich beide Teilchen bei einem bestimmten Abstand $|d|^* = |x_{B_1} - x_J|^*$ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit in dieselbe Richtung bewegen, sodass eine stationäre Lösung für d existiert. Die Bewegungsgleichungen lauten in diesem Fall

$$\dot{x}_{B_1} = b \frac{x_{B_1} - x_J}{|x_{B_1} - x_J|^2} \quad (21)$$

$$\dot{x}_J = c \frac{x_{B_1} - x_J}{|x_{B_1} - x_J|^p}$$

$$\text{und } |\dot{d}| = \frac{d}{dt} |x_{B_1} - x_J|. \quad (22)$$

Zur Erinnerung: b ist die Abstoßung der Beute vom Jäger und c kann als Stärke des Jägers interpretiert werden. Mit $\dot{d} = 0$ für die stationäre Lösung muss $\dot{x}_J = \dot{x}_{B_1}$ sein. Und somit

$$\begin{aligned}\frac{b \cdot d}{|d|^2} &= \frac{c \cdot d}{|d|^p} \\ \rightarrow \quad |d|^* &= \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{p-2}} \text{ mit } p \geq 3.\end{aligned} \quad (23)$$

Der stationäre Abstand $|d|^*$ nimmt mit steigender Jägerstärke bzw. sinkender Beutestärke zu. Für $p = 2$ existieren nur für $b = c$ stationäre Lösungen, dann sind jedoch alle (x_{B_1}, x_J) stationäre Lösungen.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

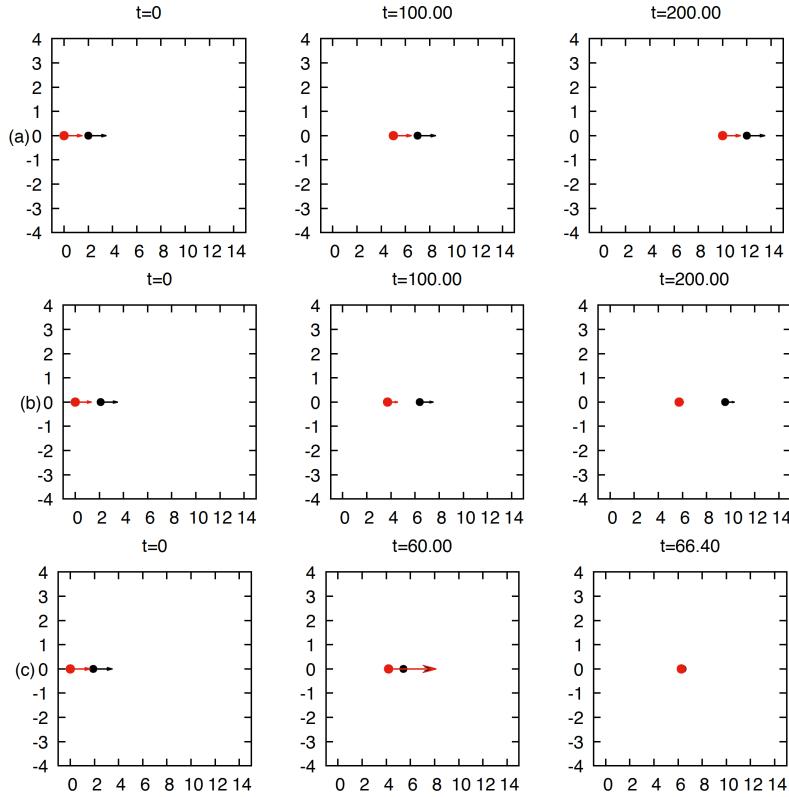


Abbildung 13: Zeitsimulation des Systems (21) für unterschiedliche Abstände d zwischen Jäger und Beute mit $a = 0, b = 0.1, c = 0.2$. Der rote Punkt repräsentiert den Jäger, der schwarze die Beute. Die Pfeile zeigen in die Bewegungsrichtung des jeweiligen Teilchens und sind proportional zur Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsvektoren wurden im letzten Bild zur Übersichtlichkeit entfernt. Im stationären Abstand d^* bewegen sich beide Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit in dieselbe Richtung (a). Ist der Abstand $d > d^*$, kann die Beute dem Jäger „entkommen“ und der Abstand wird immer größer (b). Ist $d < d^*$, „fängt“ der Jäger die Beute (c). Dann divergieren die Kräfte und es ist unklar, wie sich das System weiter verhält.

Die stationären Lösungen, in Abhängigkeit der Parameter b bzw. c , wurden wieder jeweils zusammen mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung in einem Graphen aufgetragen (Abb. 14). Um zu kennzeichnen, dass es sich nur im mitbewegten Bezugssystem um stationäre Zustände handelt, wurde die Farbe Violett für den Graphen gewählt. Zusätzlich wurde die Geschwindigkeit des Systems über den Parameter b bzw. c aufgetragen. Das Verhalten des Systems für einen stationären sowie für nicht stationären Abstände ist in Abb. 13 zu sehen.

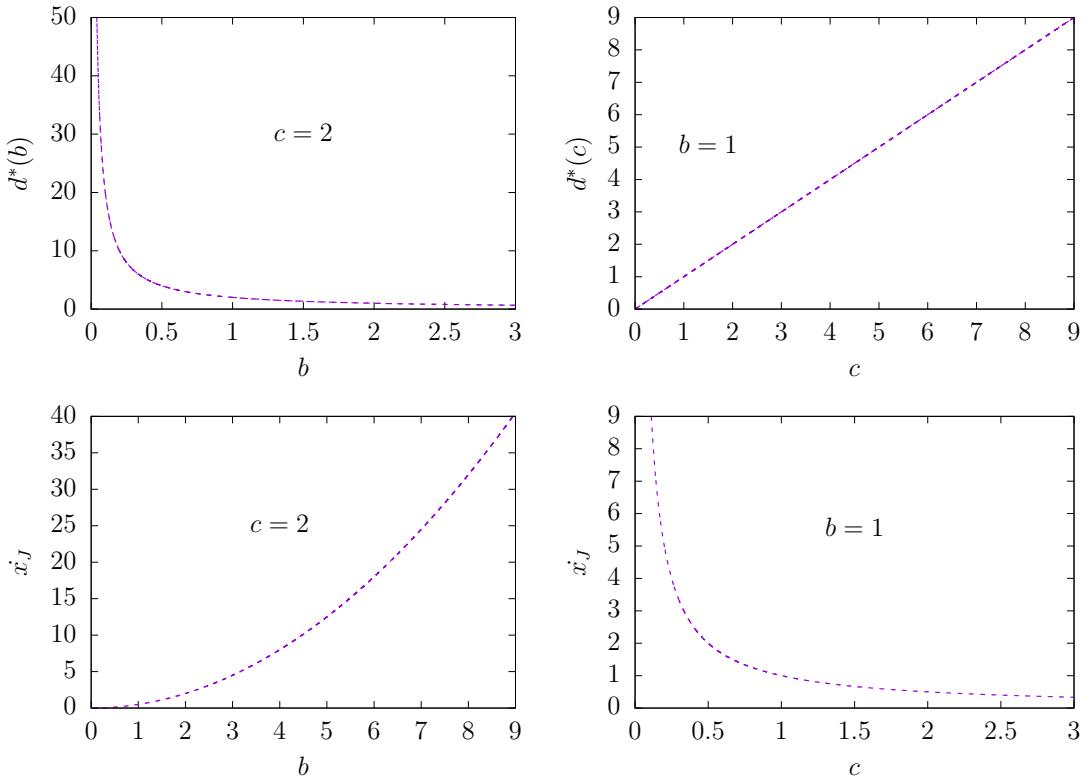


Abbildung 14: Bifurkationsdiagramme des Systems (21) für unterschiedliche Parameter b und c bei Festhalten des jeweils anderen Parameters (obere Zeile), sowie die korrespondierenden Geschwindigkeiten des Jägers im stationären Abstand d^* (untere Zeile). Die analytischen und numerischen Lösungen stimmen überein, sodass jeweils nur eine Kurve zu sehen ist.

Wie weiter unten gezeigt wird, ist immer mindestens ein Eigenwert der Jacobi-Matrix für die Störung δd positiv, sodass alle Lösungen instabil sind. Das liegt daran, dass die Geschwindigkeit des Jägers bei Verkleinerung des Abstandes mit einer Potenz in $\frac{1}{d}$ schneller zunimmt und bei Vergrößerung des Abstandes schneller abnimmt als die Geschwindigkeit der Beute. Das Verhalten des Systems nach einer Störung wird in Abbildung 13 gezeigt. Hält man die Stärke c des Jägers fest, sinkt der stationäre Abstand proportional zu $\frac{1}{\sqrt{b}}$, dadurch nimmt die Geschwindigkeit des Systems für steigende b zu, da sie proportional zu $\frac{1}{d^2}$ ist. Wird b festgehalten und c erhöht, zeigt sich ein linearer Zusammenhang zum stationären Abstand, die Geschwindigkeit fällt daher proportional zu $\frac{1}{c^2}$ ab.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

Für die zeitliche Änderung der Störung $\delta d = d - d^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\delta d) &= \dot{d} = f(d) = \frac{d}{d^2} \left(\frac{b \cdot d}{d^2} - \frac{c \cdot d}{d^p} \right) = \frac{b}{d} - \frac{c}{d^{p-1}} \\
 &\approx \frac{\partial}{\partial d} f(d)|_{d^*} \cdot \delta d = \left(\frac{c(p-1)}{d^{*p}} - \frac{b}{d^{*2}} \right) \cdot \delta d \\
 \text{Einsetzen von } d^*: &= \left(\frac{c(p-1) \cdot b^{\frac{p}{p-2}}}{c^{\frac{p}{p-2}}} - \frac{b \cdot b^{\frac{2}{p-2}}}{c^{\frac{2}{p-2}}} \right) \cdot \delta d \\
 &= \left(\frac{(p-2) \cdot b^{\frac{p}{p-2}}}{c^{\frac{2}{p-2}}} \right) \cdot \delta d \text{ mit } p \geq 3. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Eine stationäre Lösung ist stabil, wenn kleine Störungen δd aus dem stationären Zustand mit der Zeit kleiner werden, oder im Falle von Lyapunov-Stabilität, wenn die Trajektorie in der Nähe der stationären Lösung bleibt. Dafür darf die Änderung der Störung mit der Zeit nicht positiv werden. Da dies jedoch in dem untersuchten System für $p \geq 3$ und positiven b, c der Fall ist, sind die Lösungen für $p \geq 3$ instabil. Ist $p = 2$, dann sind die stationären Lösungen, wenn sie existieren, Lyapunov-stabil, da für diesen Fall immer $\dot{x}_{B_1} = \dot{x}_J$ ist. Das heißt weder wachsen Störungen, noch werden sie kleiner.

4.3. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen auf der Linie

Als nächste Erweiterung wird ein zweites Beuteteilchen mit in Betracht gezogen. Zunächst soll die Bewegung der Teilchen auf eine Raumdimension beschränkt werden. Da nur Abstände zwischen den Teilchen in die Gleichungen eingehen, ist das System translationssymmetrisch. Daher kann der Jäger in den Ursprung eines mit \dot{x}_J mitbewegten Koordinatensystems O' gesetzt werden ($x'_J = 0$). Dann werden Gl.(8) und (9) zu

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{B_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x'_{B_1} - x'_{B_2}}{|x'_{B_1} - x'_{B_2}|^2} - a(x'_{B_1} - x'_{B_2}) \right) + b \frac{x'_{B_1}}{|x'_{B_1}|^2} \\
 \dot{x}_{B_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x'_{B_2} - x'_{B_1}}{|x'_{B_1} - x'_{B_2}|^2} - a(x'_{B_2} - x'_{B_1}) \right) + b \frac{x'_{B_2}}{|x'_{B_2}|^2} \\
 \dot{x}_J &= \frac{c}{2} \left(\frac{x'_{B_1}}{|x'_{B_1}|^p} + \frac{x'_{B_2}}{|x'_{B_2}|^p} \right). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Der stationäre Fall ist $\dot{x}_{B_1} = \dot{x}_{B_2} = \dot{x}_J$, dafür wurden keine Lösungen ungleich Null gefunden. Das heißt, es gibt keine Konfiguration, bei der sich alle Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit in einem stationären Abstand in dieselbe Richtung bewegen. Der einzige mögliche Fall wäre, wenn sich beide Beuteteilchen auf derselben Stelle befinden. Dieser wurde nicht genauer untersucht, da die Kräfte dabei divergieren und er physikalisch nicht relevant ist.

4.3. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen auf der Linie

Für $\dot{x}_{B_1} = \dot{x}_{B_2} = \dot{x}_J = 0$ gibt es jedoch eine Lösung, mit $\dot{x}_J = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{x_{B_1}^*}{|x_{B_1}^*|^p} + \frac{x_{B_2}^*}{|x_{B_2}^*|^p} &= 0 \\ \rightarrow x_{B_1}^* &= -x_{B_2}^*. \end{aligned} \quad (26)$$

$\dot{x}_{B_1} = 0$ und Einsetzen von (26) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{x_{B_1}^*}{|2x_{B_1}^*|^2} - x_{B_1}^* a + \frac{bx_{B_1}^*}{|x_{B_1}^*|^2} &= 0 \\ \rightarrow x_{B_1}^* &= \pm \sqrt{\frac{b + 1/4}{a}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Das System ist stationär, wenn sich der Jäger genau in der Mitte der beiden Beuteteilchen befindet und diese einen von b und a abhängigen Abstand $d^* = |x_{B_1}^* - x_J^*|$ vom Jägerteilchen haben. Das Verhalten des Systems in der Zeitsimulation für unterschiedliche Anfangsbedingungen ist in Abbildung 15 zu sehen.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

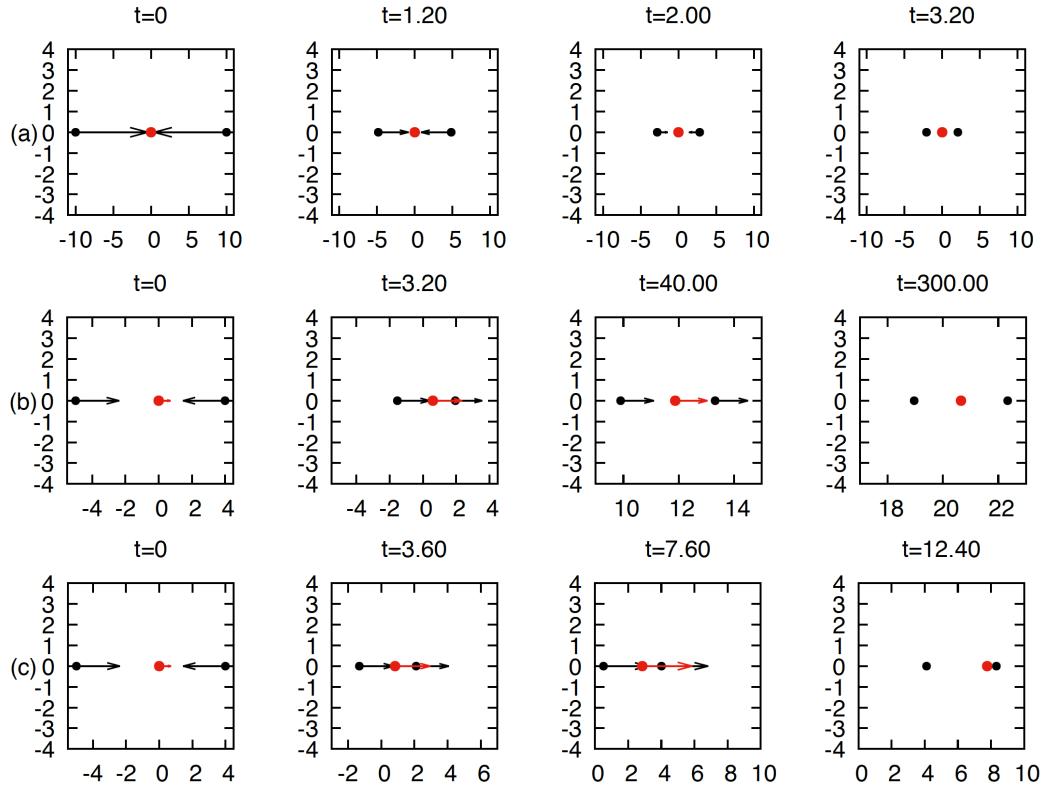


Abbildung 15: Zeitsimulation des Systems (25) für unterschiedliche b mit $a = 1$ und $c = 1.5\sqrt{2}$. Die Geschwindigkeitsvektoren wurden im letzten Bild von (c) zur besseren Übersichtlichkeit entfernt. Haben beide Beuteteilchen zu Beginn denselben Abstand zum Jäger (a), bewegen sich beide mit gleicher Geschwindigkeit auf diesen zu, bis sie im stationären Abstand $d^* = |x_{B_1}^*|$ vom Jäger zum Stehen kommen. Die Werte von b und c haben in diesem Fall keine Auswirkung auf das qualitative Verhalten, solange sie positiv sind. Wie weiter unten gezeigt wird, durchgeht das System bei $b = 2.54$ eine Bifurkation, deshalb gibt es für asymmetrische Anfangspositionen zwei Fälle. Für $b = 2.6 > 2.54$ (b) sind die stationären Lösungen stabil: Beide Beuteteilchen bewegen sich zu Beginn auf den Jäger zu ($t = 0$), ab einem bestimmten Abstand kehrt sich die Bewegungsrichtung des Beuteteilchens, das dem Jäger am nächsten ist, um ($t = 3.20$) und das System bewegt sich zusammen in eine Richtung, wobei sich der Abstand zwischen „verfolgtem“ Teilchen und Jäger vergrößert, während sich dieser für das andere Beuteteilchen verringert ($t = 40.00$), bis das System im stationären Abstand zum Stehen kommt und in diesem Zustand bleibt ($t = 300$). Für $b < 2.54 = b_B$ (c) sind die stationären Lösungen instabil: Das anfängliche Verhalten des Systems ist ähnlich wie im in (b), mit dem Unterschied, dass das Beuteteilchen vom Jäger „eingeholt“ wird ($t = 12.40$). Das heißt Jäger und Beute befinden sich ab einem Punkt auf derselben Stelle. Wie sich das System dann weiter verhält, ist unklar, da die Kräfte divergieren. Für symmetrische Anfangsbedingungen geht das System jedoch, wie in der linearen Stabilitätsanalyse gezeigt wird, für alle positiven Werte von b , wie in Zeile eins, in einen stationären Zustand über.

4.3. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen auf der Linie

Die stationären Lösungen sind in Abbildung 16 dargestellt, dabei wurden wie bisher zum Vergleich die analytischen Lösungen zusammen mit denen der numerischen Kontinuierung in einem Graphen aufgetragen.

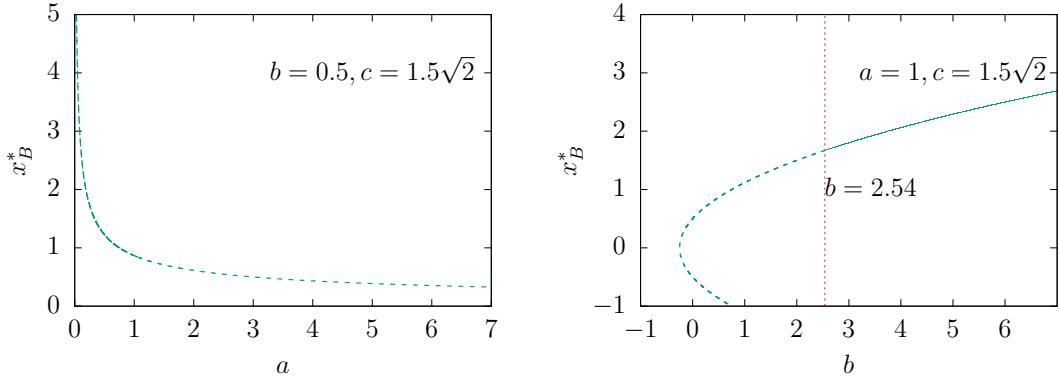


Abbildung 16: Stationäre Lösungen für die Position der Beute x_B bei $x_J = 0$ für das System (25) unter Variation von a bzw. b , die Werte der jeweils anderen Parameter sind wie angegeben. Gestrichelte Linien stehen für instabile, durchgezogene für stabile Lösungen. Die rote, gestrichelte Linie im rechten Bild markiert den Übergang von instabilen zu stabilen Lösungen bei $b = 2.54$, wie weiter unten berechnet wird. Für $b > 2.54$ ist die Geschwindigkeit des „verfolgten“ Beuteteilchens bei einer kleinen Störung, wie in Abbildung 15 (b) besprochen, größer als die des Jägers, sodass sich der Abstand zwischen beiden vergrößert, bis sich das System wieder im stationären Zustand befindet. In der Zeitsimulation hat sich gezeigt, dass für kleiner werdende Werte von b die maximale Größe der Störung, für die das System wieder in den stationären Zustand zurückkehrt, sinkt. Ab $b < 2.54$ wird die Geschwindigkeit des Jägers auch bei sehr kleinen Störungen wie in Abbildung 15 (c) größer als die des gejagten Teilchens und der Abstand zwischen Beute und Jäger wird immer kleiner, bis beide Teilchen auf derselben Stelle sind.

Der stationäre Abstand $d^*(a) = |x_B^*(a)|$ für feste (b, c) ist wie in Abschnitt 4.1 proportional zu $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Das liegt daran, dass die zusätzliche abstoßende Komponente des Jägers dieselbe Form hat wie die Abstoßung zwischen den Beuteteilchen. Für steigende b nimmt $d^*(b)$ hingegen langsam zu, wobei bei $b_B = 2.54$ eine Bifurkation stattfindet, bei der jedoch keine neuen Lösungszweige entstehen. Die Form des zweiten Bifurkationsdiagramms erweckt den Eindruck, dass bei $b = -0.25$ eine Pitchfork-Bifurkation stattfinden könnte. Dazu müsste an dieser Stelle einer der Eigenwerte der Jacobi-Matrix sein Vorzeichen ändern.

Mit den Störungen $\delta x_{B_1} = x_{B_1} - x_{B_1}^*$, $\delta x_{B_2} = x_{B_2} - x_{B_2}^*$ und $\delta x_J = x_J - x_J^*$ ergibt sich für die Jacobi-Matrix an der Stelle $x_{B_1}^*, x_{B_2}^*, x_J^*$

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_{B_1}} & \frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_{B_2}} & \frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_J} \\ \frac{\partial \dot{x}_{B_2}}{\partial x_{B_1}} & \frac{\partial \dot{x}_{B_2}}{\partial x_{B_2}} & \frac{\partial \dot{x}_{B_2}}{\partial x_J} \\ \frac{\partial \dot{x}_J}{\partial x_{B_1}} & \frac{\partial \dot{x}_J}{\partial x_{B_2}} & \frac{\partial \dot{x}_J}{\partial x_J} \end{pmatrix} \Big|_{x_{B_1}^*, x_{B_2}^*, x_J^*} \quad (28)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x_{B_1}^{*2}} + a \right) - \frac{b}{x_{B_1}^{*2}} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x_{B_1}^{*2}} + a \right) & \frac{b}{x_{B_1}^{*2}} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x_{B_1}^{*2}} + a \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x_{B_1}^{*2}} + a \right) - \frac{b}{x_{B_1}^{*2}} & \frac{b}{x_{B_1}^{*2}} \\ \frac{c}{2} \frac{1-p}{|x_{B_1}|^{*p}} & \frac{c}{2} \frac{1-p}{|x_{B_1}|^{*p}} & -c \frac{1-p}{|x_{B_1}|^{*p}} \end{pmatrix} \quad (29)$$

und damit für die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{|x_B^*|^{(2-p)} c(p-1) - b}{x_B^{*2}}, \lambda_3 = -a - 1 \quad (30)$$

Bei $p = 3$ ist λ_2 negativ, wenn $b > \frac{2c}{|x_B^*|}$, bzw. $c < \frac{b}{4} \sqrt{\frac{4b+1}{a}}$, dann ist die Lösung stabil. Mit den in Abbildung 15 verwendeten Parameterwerten $a = 1$ und $c = 1.5\sqrt{2}$ wird λ_2 damit negativ, wenn $b > 2.54$ ist. Für $p = 4$ muss $b > \frac{3c}{x_B^{*2}}$, bzw. $c < \frac{b(4b+1)}{12a}$ sein, damit die stationären Lösungen stabil sind. Obwohl die stationären Lösungen des Systems unabhängig von c sind, ist die Stabilität dieser Lösungen von diesem Parameter abhängig.

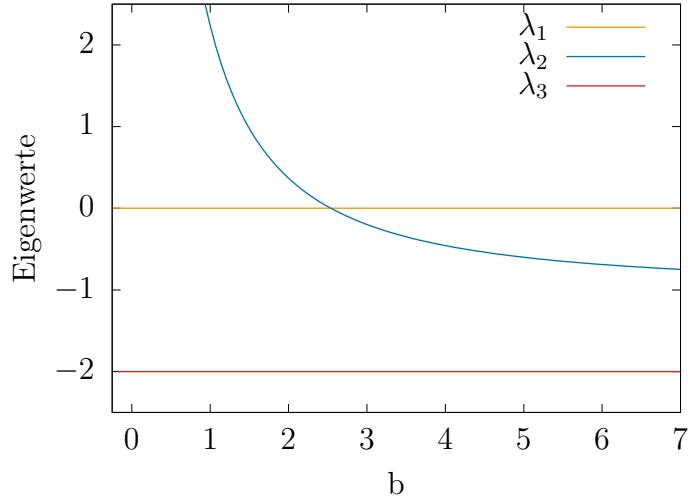


Abbildung 17: Eigenwerte λ_1 bis λ_3 der Jacobi-Matrix (29) an der Stelle der stationären Lösung für $a = 1$ und $c = 1.5\sqrt{2}$. λ_1 ist konstant 0, λ_3 ist $-a - 1$ und λ_2 geht für $\lim_{b \rightarrow -0.25}$ gegen ∞ . Bei $b = 2.54$ wird λ_2 negativ, d.h. die stationären Lösungen werden stabil.

4.4. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen in der Ebene

λ_1 ist immer Null, da das System Translationssymmetrisch ist und eine Störung δx_J der Jägerposition auch durch die Störungen $\delta x_{B_1}, \delta x_{B_2}$ ausgedrückt werden kann. Dadurch sind die Spalten der Jacobi-Matrix linear abhängig und diese besitzt nicht ihren vollen Rang. Für $\lim_{x_B^* \rightarrow 0}$ geht λ_2 gegen ∞ und λ_3 ist immer $-a - 1$. Das heißt, keiner der Eigenwerte ändert bei $b = -0.25$ sein Vorzeichen und es scheint keine Bifurkation zu geben.

Die in Abb. 16 dargestellten Stabilitäten beziehen sich auch auf Störungen, die nicht symmetrisch sind. Gegenüber einer symmetrischen Störung ($\delta x_1 = -\delta x_2$) der beiden Beuteteilchen sind die Lösungen jedoch immer stabil, da der Jäger zu jeder Zeit von beiden Seiten die gleiche Kraft spürt und seine Position beibehält.

Die Änderung der Störung des Teilchens x_{B_1} ist $\delta \dot{x}_{B_1} = \frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_{B_1}} \delta x_1 + \frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_{B_2}} \delta x_{B_2}$ (δx_J ist 0, wenn nur symmetrische Störungen zugelassen werden). Wegen $\delta \dot{x}_{B_1} = -\delta \dot{x}_{B_2}$ ist das System also stabil gegenüber symmetrischen Störungen, wenn für positive δx_{B_1} $\delta \dot{x}_{B_1}$ negativ wird und umgekehrt:

$$\dot{\delta x_1} = \delta x_{B_1} \left(\frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_{B_1}} \Big|_{x_{B_1}^*, x_{B_2}^*} - \frac{\partial \dot{x}_{B_1}}{\partial x_{B_2}} \Big|_{x_{B_1}^*, x_{B_2}^*} \right) = -2a\delta x_{B_1}. \quad (31)$$

Das heißt, für positive a ist das System immer stabil gegenüber symmetrischen Störungen und es verhält sich für alle b so wie in 15 (a).

4.4. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen in der Ebene

Nun sollen für den im vorherigen Abschnitt diskutierten Fall zusätzlich Bewegungen in y-Richtung zugelassen werden.

Mit $\mathbf{x}_{B_i} = \begin{pmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}_J = \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix}$ lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{B_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_{B_2}}{|\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_{B_2}|^2} - a(\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_{B_2}) \right) + b \frac{\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_J|^2} \\ \dot{\mathbf{x}}_{B_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_{B_1}}{|\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_{B_1}|^2} - a(\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_{B_1}) \right) + b \frac{\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_J|^2} \\ \dot{\mathbf{x}}_J &= \frac{c}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_1} - \mathbf{x}_J|^p} + \frac{\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_{B_2} - \mathbf{x}_J|^p} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

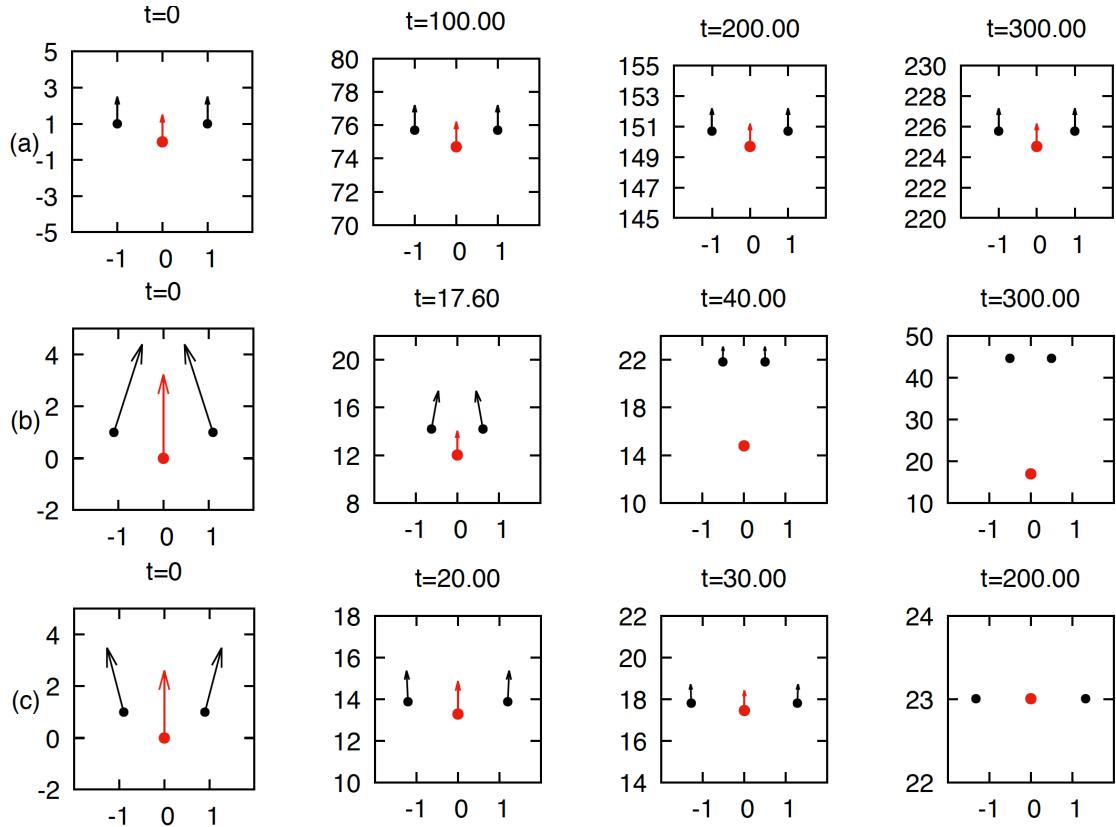


Abbildung 18: Verhalten des Systems (32) für unterschiedliche Anfangsbedingungen in der Zeitsimulation. Die Teilchen befinden sich jeweils zu Beginn auf einer Kreisbahn um den Jäger. Die Parameterwerte sind $a = 1, b = 1.5, c = 1.5\sqrt{2}$. In (a) befinden sich alle Teilchen im stationären Abstand voneinander. Das System bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in y-Richtung, ohne dass sich die Abstände ändern. Bei (b) wurde der Abstand zwischen Beute und Jäger etwas größer gewählt, dadurch ist die Geschwindigkeit der Beuteteilchen größer als die des Jägers und sie „entkommen“, während sie sich bis auf einen bestimmten Abstand aneinander annähern. Ist der Abstand zwischen Beute und Jäger zu Beginn geringer als im stationären Zustand (c), dann ist die Geschwindigkeit des Jägers größer als die der Beute. Während die Beuteteilchen leicht auseinander gehen, nimmt der Abstand zwischen Schwerpunkt der Beuteteilchen und Jäger ab, bis der Jäger sich genau zwischen der Beute befindet und das System stationär ist. Dabei ist das System in den in Abschnitt 4.3 diskutierten Fall auf der Linie übergegangen, sodass der stationäre Abstand d^* zwischen Beute und Jäger $d^* = \sqrt{\frac{b+0.25}{a}}$ ist.

Dieses System hat sechs Freiheitsgrade. Um die analytische Betrachtung zu vereinfachen, werden diese zunächst durch Zwangsbedingungen und Betrachtung von Symmetrien reduziert. Zunächst wird die Bedingung eingeführt, dass sich

4.4. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen in der Ebene

beide Beuteteilchen auf einer Kreisbahn um den Jäger befinden:

$$(x_{B_1} - x_J)^2 + (y_{B_1} - y_J)^2 = (x_{B_2} - x_J)^2 + (y_{B_2} - y_J)^2. \quad (33)$$

Damit wird durch die Symmetrie das Jäger teilchen vom Schwerpunkt der beiden Beuteteilchen angezogen, sodass es wie auch schon in Abschnitt 4.2 den Fall geben wird, bei dem sich alle Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit in dieselbe Richtung fortbewegen. Das heißt, dieser Fall ließe sich auch auf den Fall mit einem Jäger und einem Schwerpunkt-Beuteteilchen reduzieren. Hier sollen jedoch beide Beuteteilchen mit betrachtet werden. Abbildung 18 zeigt das Verhalten des Systems in der Zeitsimulation für unterschiedliche Anfangsbedingungen.

Wegen der Translationssymmetrie des Systems kann der Jäger in den Ursprung des Koordinatensystems gesetzt werden: $x_J = y_J = 0$. Des Weiteren ist das System rotationssymmetrisch, sodass das Koordinatensystem so gewählt werden kann, dass die Bewegung des Jägers nur in Richtung der y-Achse stattfindet ($\dot{x}_J = 0$). Durch Einsetzen von (33) in $\dot{x}_J = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{x_{B_1}}{|x_{B_1}|^3} &= -\frac{x_{B_2}}{|x_{B_2}|^3} \\ \rightarrow x_{B_1} &= -x_{B_2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Einsetzen in (33) gibt

$$\begin{aligned} x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2 &= x_{B_2}^2 + y_{B_2}^2 \\ \rightarrow x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2 &= x_{B_1}^2 + y_{B_2}^2 \\ \rightarrow y_{B_1} &= \pm y_{B_2}, \end{aligned} \quad (35)$$

wobei $y_{B_1} = -y_{B_2}$ dem bereits untersuchten Fall aller Teilchen auf einer Linie entspricht. Damit wurden die Freiheitsgrade des Systems von sechs auf zwei reduziert. Um den Fall zu untersuchen, bei dem alle Teilchen eine Konstante Geschwindigkeit haben, werden die stationären Lösungen im mit \dot{y}_J mitbewegten Bezugssystem O'

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

gesucht und $y_{B_1} = y_{B_2}$ gewählt. Damit haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\begin{aligned}
\dot{x'}_{B_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x'_{B_1}}{|2x'_{B_1}|^2} - a(2x'_{B_1}) \right) + b \frac{x'_{B_1}}{|x'_{B_1}|^2 + |y'_{B_1}|^2} \\
\dot{x'}_{B_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2x'_{B_1}}{|2x'_{B_1}|^2} - a(-2x'_{B_1}) \right) + b \frac{-x'_{B_1}}{|x'_{B_1}|^2 + |y'_{B_1}|^2} \\
\dot{y'}_{B_1} &= \dot{y}_{B_1} - \dot{y}_J = b \frac{y'_{B_1}}{|x'_{B_1}|^2 + |y'_{B_1}|^2} - c \left(\frac{y'_{B_1}}{\sqrt{|x'_{B_1}|^2 + |y'_{B_1}|^2}^p} \right) \\
\dot{y'}_{B_2} &= \dot{y}_{B_2} - \dot{y}_J = b \frac{y'_{B_1}}{|x'_{B_1}|^2 + |y'_{B_1}|^2} - c \left(\frac{y'_{B_1}}{\sqrt{|x'_{B_1}|^2 + |y'_{B_1}|^2}^p} \right) \\
\dot{x'}_J &= 0 \\
\dot{y'}_J &= \dot{y}_J - \dot{y}_J = 0
\end{aligned} \tag{36}$$

mit $x'_{B_1} = x_{B_1}$ und $y'_{B_1} = y_{B_1} - y_J$

Das heißt $\dot{y'}_{B_1} = \dot{y'}_{B_2}$ und $\dot{x'}_{B_1} = -\dot{x'}_{B_2}$. Dadurch ergeben sich implizit die stationären Lösungen zu

$$\begin{aligned}
\dot{x'}_{B_1} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\rightarrow \frac{1}{4x'^*_{B_1}} - ax'^*_{B_1} &= -b \cdot \left(\frac{x'^*_{B_1}}{x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1}} \right) \\
\rightarrow b &= -\frac{\left(\frac{1}{4x'^*_{B_1}} - ax'^*_{B_1} \right)}{\left(\frac{x'^*_{B_1}}{x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1}} \right)} = \frac{(4ax'^*_{B_1} - 1)(x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1})}{4x'^*_{B_1}^2}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\text{und } \dot{y'}_{B_1} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\rightarrow \frac{b \cdot y'^*_{B_1}}{x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1}} &= \frac{c \cdot y'^*_{B_1}}{\sqrt{x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1}}^p} \\
\rightarrow c &= \frac{b \cdot \sqrt{x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1}}^p}{x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1}} = b \cdot (x'^*_{B_1} + y'^*_{B_1})^{\frac{p-2}{2}}.
\end{aligned} \tag{38}$$

4.4. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen in der Ebene

Diese lassen sich auflösen zu

$$\text{aus (38): } x'_{B_1}^* = \pm \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{p-2}} - y'^*_{B_1}{}^2} \quad (39)$$

$$\text{aus (37): } y'^*_{B_1} = \pm \sqrt{\frac{x'^*_{B_1}{}^2(4b - 4ax'^*_{B_1}{}^2 + 1)}{4ax'^*_{B_1}{}^2 - 1}} \quad (40)$$

$$\text{(40) in (39): } x'_{B_1}^* = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a - b\left(\frac{c}{b}\right)^{-\frac{2}{p-2}}}} \quad (41)$$

$$\rightarrow y'^*_{B_1} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{p-2}} \cdot \frac{4a\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{p-2}} - 4b - 1}{a\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{p-2}} - b}}. \quad (42)$$

Bzw. mit $p = 3$

$$x'_{B_1}^* = \pm \frac{c}{2\sqrt{ac^2 - b^3}} \quad (43)$$

$$y'^*_{B_1} = \pm \frac{c}{2b} \sqrt{\frac{4ac^2 - b^2(4b + 1)}{ac^2 - b^3}}. \quad (44)$$

Die Abbildungen 19 bis 22 zeigen die x - und y -Position der Beuteteilchen für stationäre Zustände, wenn $x_J = y_J = 0$ ist, sowie die Geschwindigkeiten des mitbewegten Bezugssystems bei Variation unterschiedlicher Parameter. Die analytischen Lösungen wurden wieder zusammen mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung in einem Graphen aufgetragen.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

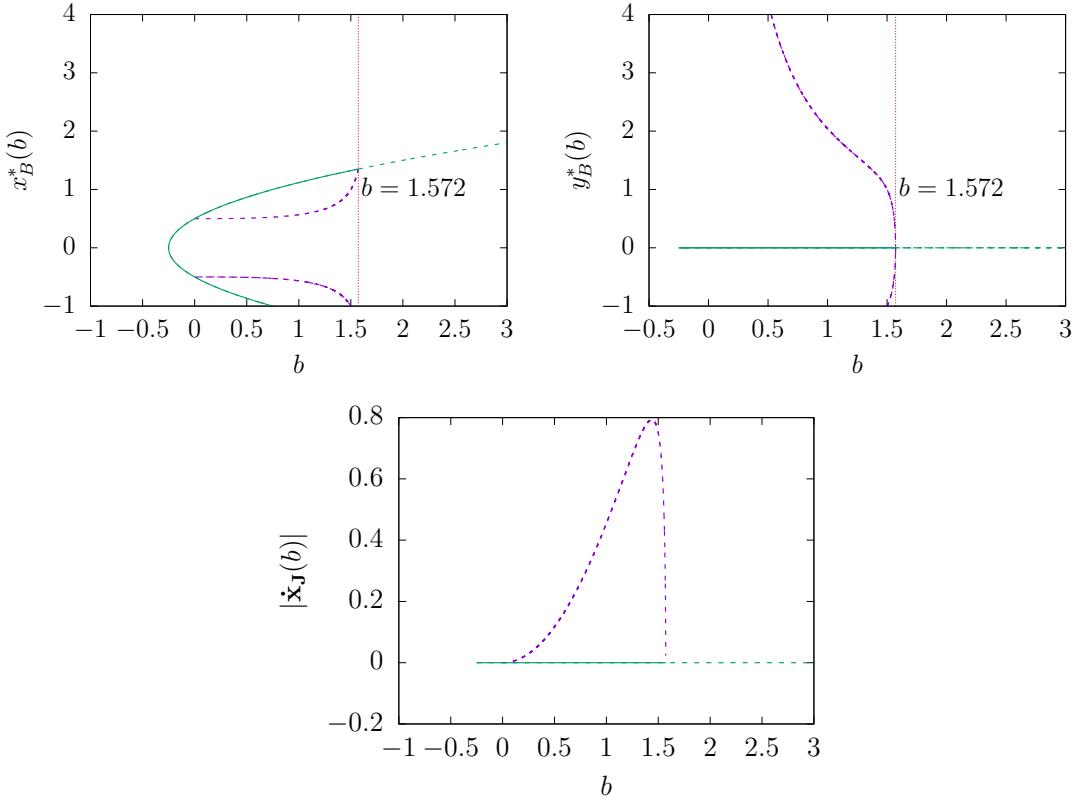


Abbildung 19: Stationäre Lösungen für die Position eines der Beuteteilchen aus dem System (36) (obere Zeile) sowie die Geschwindigkeit des mitbewegten Bezugssystems (untere Zeile) in Abhängigkeit von b . Alle Koordinaten im mitbewegten Bezugssystem, welches bei $\dot{x}_J = 0$ mit dem Laborsystem übereinstimmt. Die Werte der anderen Parameter sind $a = 1, c = 1.5\sqrt{2}$. Zur Erinnerung: a repräsentiert die Anziehung unter den Beuteteilchen, b ist die Abstoßung der Beute vom Jäger und c kann als Stärke des Jägers interpretiert werden. Die violetten Kurven repräsentieren Lösungen, für die sich das System mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, die grünen Linien stehen für Lösungen im Laborsystem. Da die Zwangsbedingung (33) eingeführt wurde und daher $x_{B_1} = -x_{B_2}$ und $y_{B_1} = y_{B_2}$ ist, beziehen sich die eingezeichneten Stabilitäten auf symmetrische Störungen $\delta x_{B_1} = -\delta x_{B_2}$ und $\delta y_{B_1} = \delta y_{B_2}$. Die roten, vertikalen Linien kennzeichnen Punkte, an denen ein neuer Lösungszweig entsteht. Analytische Lösungen stimmen mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung überein, sodass nur zwei Lösungskurven zu sehen sind.

Für dieses System gibt es zwei Lösungszweige, wobei der Grüne den bereits behandelten Grenzfall darstellt, bei dem sich alle Teilchen auf einer Linie befinden. Dieser hat erwartungsgemäß auch die selbe Form, die Stabilität unterscheidet sich jedoch durch die zusätzlich mögliche Bewegungsrichtung von der des Falles auf der Linie. Weiter unten wird die Stabilität der stationären Lösungen für sym-

metrische Störungen $\delta x_{B_1} = -\delta x_{B_2}, \delta y_{B_1} = \delta y_{B_2}$ und für allgemeine Störungen $\delta x_{B_1}, \delta x_{B_2}, \delta y_{B_1}, \delta y_{B_2}$ mithilfe der linearen Stabilitätsanalyse bestimmt. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix bei allgemeinen und symmetrischen Störungen sind für Lösungen in der Ebene und auf der Linie in Abbildung 20 über b aufgetragen. Hier sieht man, dass für die Lösungen auf der Linie, bei symmetrischen Störungen der Eigenwert λ_2 für $b = -0.25$ den Wert Null annimmt. Dies deutet darauf hin, dass, anders als wie im vorherigen Fall auf der Linie bei dem nur Bewegungen auf der Linie zugelassen waren an dieser Stelle noch weitere Lösungen abzweigen könnten, die aufgrund der divergierenden Kräfte nicht gefunden wurden. Da dieser Fall jedoch physikalisch nicht relevant ist, wird hier nicht weiter untersucht, ob tatsächlich noch weitere Lösungen existieren.

Es stellt sich heraus, dass die Lösungen auf der Linie bei den in Abbildung 19 gewählten Parameterwerten für $b < 1.572$ stabil gegenüber symmetrischen Störungen sind, dieser Wert wurde numerisch bestimmt. Für Anfangsbedingungen auf der Linie verhält sich das System dann bei einer symmetrischen Störung, wie in 15 (a). Für Anfangsbedingungen in der Ebene verhält es sich dafür wie in 18 (c). Für allgemeine Störungen sind die Lösungen in der Ebene sowie die Lösungen auf der Linie instabil. Das Verhalten für unterschiedliche allgemeine Störungen ist in Abbildung 23 zu sehen.

Die Lösungen in der Ebene existieren bei den in Abbildung 19 gewählten Parameterwerten nur für $0 < b \leq 1.572$. Dies lässt sich folgendermaßen erklären: Für $b \leq 0$ kann keine konstante Bewegung mehr stattfinden, da die Beute nicht mehr vom Jäger abgestoßen wird. Wird b größer, so muss der Abstand (im weiteren Verlauf ist, soweit nicht anders vermerkt, mit Abstand der Abstand im stationären Zustand gemeint) zwischen Schwerpunkt der Beute und dem Jäger abnehmen, damit die Bewegungsgeschwindigkeiten gleich bleiben. Hierdurch wird jedoch die vom Jäger ausgehende Abstoßung größer, die die Beuteteilchen auseinander treibt, sodass also der y -Abstand zum Jäger immer kleiner und der x -Abstand immer größer wird. Das heißt, für größere b nähert sich die Beute der x-Achse an, bis alle Teilchen bei $b = 1.572$ auf einer Linie sind.

Für kleine b befindet sich die Beute in Abbildung 19 im stationären Zustand noch nah aneinander und weit entfernt vom Jäger. Steigt b , nimmt der Abstand zum Jäger sehr schnell ab, während der Abstand zwischen den Beuteteilchen nur langsam größer wird. Dadurch wird die Geschwindigkeit des Jägers zunächst größer, da die Beute näher kommt und der Jäger noch „fokussiert“ ist. Mit Fokussierung ist im weiteren Verlauf gemeint, ob ein großer oder geringer Anteil der auf den Jäger wirkenden Kräfte in Bewegungsrichtung zeigt. Dabei ist die Fokussierung am größten, wenn sich beide Beuteteilchen auf einem Punkt befinden und am geringsten, wenn sie sich rechts und links auf einer Linie mit dem Jäger befinden. Sieht man sich die Ableitungen von x_{B_1} und y_{B_1} an, zeigt sich, dass die Rate, mit der der Abstand zwischen den Beuteteilchen größer wird, steigt, während die Rate, mit der der y -Abstand zwischen Beute und Jäger kleiner wird, sinkt. Ab einem bestimmten Punkt vergrößert sich der Abstand zwischen den Beuteteilchen

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

so schnell, dass die Fokussierung des Jägers und damit auch seine Geschwindigkeit wieder stark abnimmt.

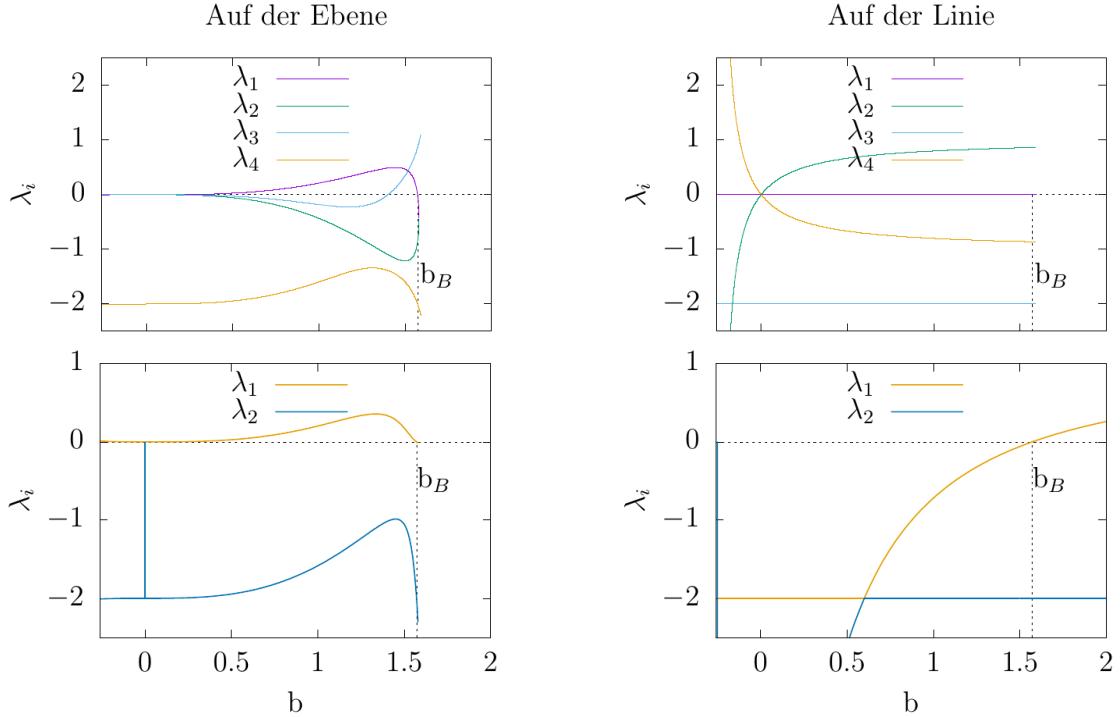


Abbildung 20: Eigenwerte der Jacobi-Matrix für allgemeine Störungen $\delta x_{B_1}, \delta x_{B_2}, \delta y_{B_1}, \delta y_{B_2}$ (obere Zeile) und für symmetrische Störungen $\delta x_{B_1} = -\delta x_{B_2}, \delta y_{B_1} = \delta y_{B_2}$ (untere Zeile) in Abhängigkeit von b . Die Werte der anderen Parameter sind wie in Abbildung 19: $a = 1, c = 1.5\sqrt{2}$. In der linken Spalte wurden die Eigenwerte für stationäre Lösungen in der Ebene ausgewertet und in der rechten Spalte für stationäre Lösungen auf der Linie. Für die Lösungen auf der Ebene ist immer mindestens ein Eigenwert positiv, daher sind diese Lösungen immer instabil. Für Lösungen auf der Linie ist, für allgemeine Störungen, ebenfalls immer ein Eigenwert positiv. Für symmetrische Störungen jedoch sind bei $b < b_B \approx 1.572$ alle Eigenwerte negativ, das heißt, Lösungen auf der Linie sind in diesem Wertebereich stabil gegenüber symmetrischen Störungen. λ_2 wird für Lösungen auf der Linie und symmetrische Störungen bei $b = -0.25$ Null. Dies deutet darauf hin, dass an dieser Stelle noch ein weiterer Lösungsast abzweigt. Dieser wurde hier jedoch aufgrund der divergierenden Kräfte und da er physikalisch nicht relevant ist, nicht näher untersucht.

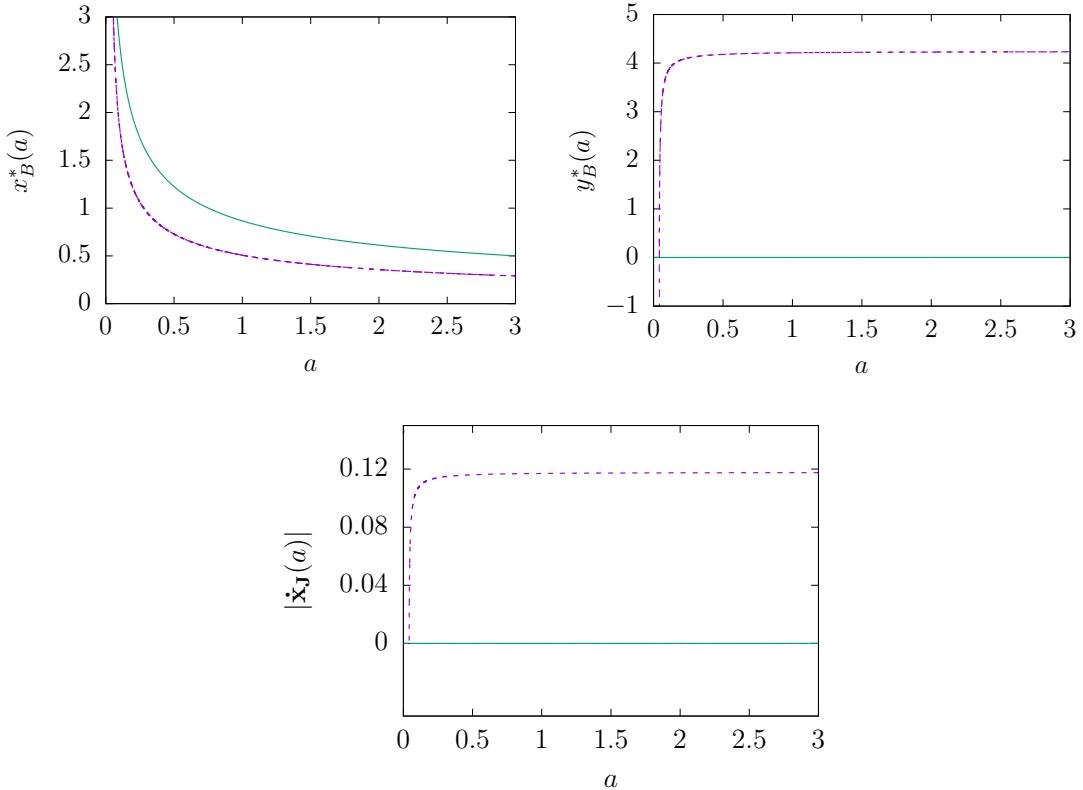


Abbildung 21: Stationäre Lösungen für die Position eines der Beuteteilchen aus dem System (36) (obere Zeile) sowie die Geschwindigkeit des mitbewegten Bezugssystems (untere Zeile) in Abhängigkeit von a . Die Werte der anderen Parameter sind $b = 0.5, c = 1.5\sqrt{2}$. Die Farben der Linien haben dieselbe Bedeutung wie bisher. Analytische Lösungen stimmen mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung überein, sodass nur zwei Lösungszweige zu sehen sind.

Wird a variiert (Abb. 21), ist der stationäre Abstand zwischen den Beuteteilchen in der Ebene etwas geringer als für den Fall auf der Linie, sinkt ansonsten jedoch in ähnlicher Weise. Durch die zusätzliche Entfernung in y -Richtung vom Jäger wird die abstoßende Komponente durch den Jäger im Vergleich zum Fall auf der Linie etwas abgeschwächt, wodurch die Beute einen geringeren Abstand voneinander einnehmen kann. Dagegen steigt der stationäre y -Abstand zwischen Beute und Jäger zunächst sehr steil an und strebt dann sehr schnell einem Grenzwert entgegen. Durch die starke Abnahme des Abstandes zwischen den Beuteteilchen zu Beginn wird die Fokussierung des Jägers stärker, sodass sich der Abstand zwischen diesem und dem Schwerpunkt der Beute erhöhen muss, damit das System stationär bleibt. Haben dann die Beuteteilchen nur noch einen geringen Abstand zueinander, hat eine weitere Annäherung keine große Auswirkung mehr auf die Fokussierung des Jägers, sodass der Abstand zum Schwerpunkt nicht weiter steigt. Mit der Geschwindigkeit des Jägers bei konstanter Bewegung verhält

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

es sich ähnlich, da sie proportional zu y_{B_1} ist: Weil b, c konstant sind und wegen $\dot{y}_J = \dot{y}_{B_1} \rightarrow \frac{cy_{B_1}}{\sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2}} = \frac{by_{B_1}}{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2} \rightarrow b = \frac{c}{\sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2}}$, muss der radiale Abstand zwischen Beute und Jäger $r = \sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2}$ auch konstant sein. Also hängt die Geschwindigkeit des Jägers nur von y_{B_1} ab und ist hierzu proportional.

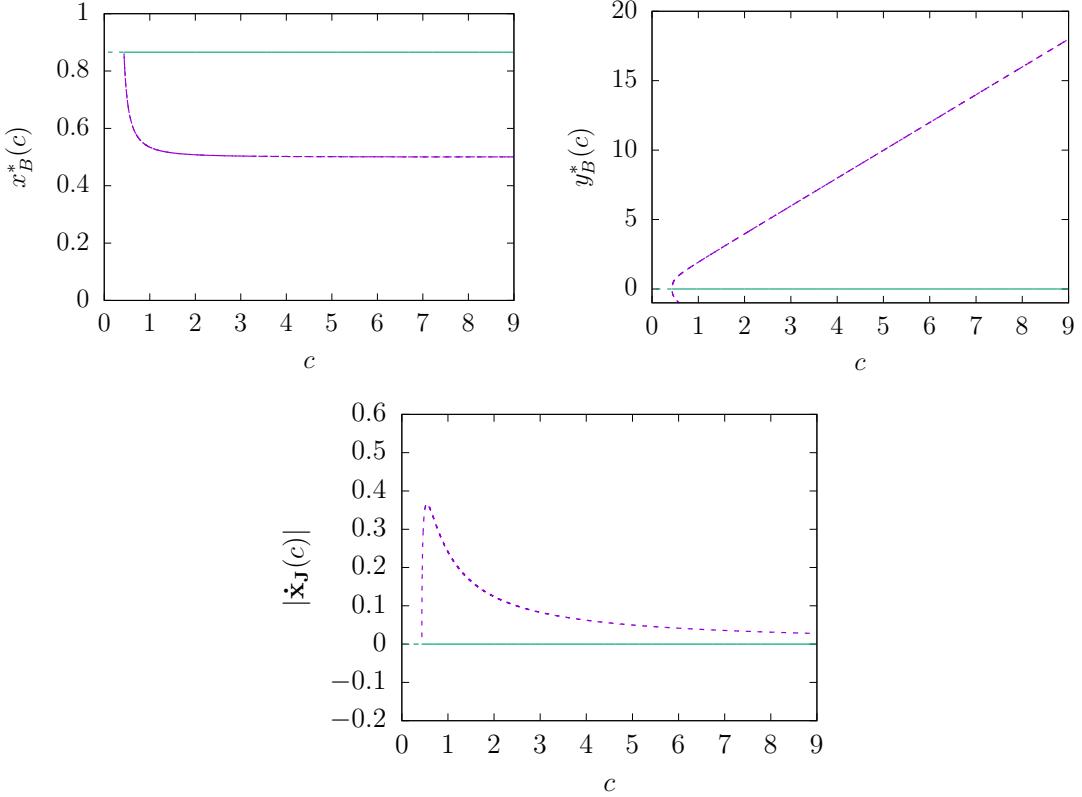


Abbildung 22: Stationäre Lösungen für die Position eines der Beuteteilchen aus dem System (36) (obere Zeile) sowie die Geschwindigkeit des mitbewegten Bezugssystems (untere Zeile) in Abhängigkeit von a . Die Werte der anderen Parameter sind $a = 1, b = 0.5$. Analytische Lösungen stimmen mit den Lösungen der numerischen Kontinuierung überein, sodass nur zwei Lösungskurven zu sehen sind.

Werden a und b konstant gehalten und c vergrößert (Abb. 22), muss sich der Abstand zwischen Jäger und Schwerpunkt vergrößern (der Abstand zwischen den Beuteteilchen kann nicht größer werden, da a und b konstant sind), damit die Geschwindigkeiten von Beute und Jäger gleich bleiben. Durch den erhöhten Abstand vom Jäger nimmt die von diesem ausgehende, die Beute auseinander treibende Kraft stark ab, sodass der Abstand zwischen diesen sinkt und einen Grenzwert erreicht, an dem nur noch die zwischen den Beuteteilchen wirkenden Kräfte Auswirkung auf ihren Abstand voneinander haben. Der Grenzwert ist dann wie in

Abschnitt 4.1 : $d = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Die Geschwindigkeit des Jägers steigt für größer werdende c fast instantan auf einen Maximalwert an und fällt dann proportional zu $\frac{1}{c}$ ab: Der radiale Abstand r zwischen Beute und Jäger nimmt wegen $b = \frac{c}{r}$ proportional zu c zu, die Geschwindigkeit des Jägers ist $\dot{x}_J = \frac{c \cdot y_J}{r^3}$. Für kleine c ist $r < 1$ und y_{B_1} nimmt noch sehr stark zu, sodass die Geschwindigkeit steigt. Wird c größer, geht die Zunahme von y_{B_1} jedoch ins Lineare über und der radiale Abstand r wird größer als 1, sodass die Geschwindigkeit wieder sinkt.

Die Jacobi-Matrix an der Stelle $x'_{B_1}^*, y'_{B_1}^*$ mit $y'_{B_1}^* \neq 0$ (Lösungen in der Ebene) für die Störungen $\delta x'_{B_1} = x'_{B_1} - x'_{B_1}^*$ und $\delta y'_{B_1} = y'_{B_1} - y'_{B_1}^*$ bei $p = 3$ ist

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_{B_1}}{\partial x'_{B_1}} & \frac{\partial x'_{B_1}}{\partial y'_{B_1}} \\ \frac{\partial y'_{B_1}}{\partial x'_{B_1}} & \frac{\partial y'_{B_1}}{\partial y'_{B_1}} \end{pmatrix} \Big|_{x'_{B_1}^*, y'_{B_1}^*} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4x'^{*2}_{B_1}} - a + \frac{b}{x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1}} - \frac{2bx'^{*2}_{B_1}}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^2} & -\frac{2bx'_{B_1} y'_{B_1}^*}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^2} \\ -\frac{2bx'^*_{B_1} y'^*_{B_1}}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^2} + \frac{3cy'^*_{B_1} x'^*_{B_1}}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^{5/2}} & \frac{b}{x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1}} - \frac{2by'^{*2}_{B_1}}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^2} - \frac{c}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^{3/2}} + \frac{3cy'^{*2}_{B_1}}{(x'^{*2}_{B_1} + y'^{*2}_{B_1})^{5/2}} \end{pmatrix} \quad (45)
 \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte sehr große Terme ergeben, an denen das Stabilitätsverhalten nicht mehr abzulesen ist, wurden diese in dem Programm Maple [14] für alle Parameterkombinationen a, b und c im Wertebereich von 0 bis 4 in 0.01 Schritten berechnet. Dabei wurden keine negativen Eigenwertpaare gefunden, für die die stationären Lösungen jeweils reell sind. Die stationären Lösungen in der Ebene sind also in diesem Parameterbereich nicht stabil.

Wertet man die Determinante für Lösungen auf einer Linie ($y'_{B_1} = 0, x'_{B_1} = \sqrt{\frac{b+0.25}{a}}$) aus, so zeigt sich, dass diese mit $a = 1$ und $c = 1.5\sqrt{2}$ für $b < 1.57$ stabil gegenüber symmetrischen Störungen $\delta x'_{B_1} = -\delta x'_{B_2}; \delta y'_{B_1} = \delta y'_{B_2}$ sind. Um herauszufinden, ob in diesem System die Lösungen auf der Linie auch für nicht symmetrische Störungen stabil sind, ist die Jacobi-Matrix für die allgemeine Störung $\delta x_{B_1}, \delta x_{B_2}, \delta y_{B_1}, \delta y_{B_2}$ an der Stelle der Lösungen für den Fall auf der Linie $(x'_{B_1}^*, x'_{B_2}^*, y'_{B_1}^*, y'_{B_2}^*)$ auszuwerten:

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}'_{B_1}}{\partial x'_{B_1}} \frac{\partial \dot{x}'_{B_1}}{\partial x'_{B_2}} \frac{\partial \dot{x}'_{B_1}}{\partial y'_{B_1}} \frac{\partial \dot{x}'_{B_1}}{\partial y'_{B_2}} \\ \frac{\partial \dot{x}'_{B_2}}{\partial x'_{B_1}} \frac{\partial \dot{x}'_{B_2}}{\partial x'_{B_2}} \frac{\partial \dot{x}'_{B_2}}{\partial y'_{B_1}} \frac{\partial \dot{x}'_{B_2}}{\partial y'_{B_2}} \\ \frac{\partial \dot{y}'_{B_1}}{\partial x'_{B_1}} \frac{\partial \dot{y}'_{B_1}}{\partial x'_{B_2}} \frac{\partial \dot{y}'_{B_1}}{\partial y'_{B_1}} \frac{\partial \dot{y}'_{B_1}}{\partial y'_{B_2}} \\ \frac{\partial \dot{y}'_{B_2}}{\partial x'_{B_1}} \frac{\partial \dot{y}'_{B_2}}{\partial x'_{B_2}} \frac{\partial \dot{y}'_{B_2}}{\partial y'_{B_1}} \frac{\partial \dot{y}'_{B_2}}{\partial y'_{B_2}} \end{pmatrix} \Big|_{x'^*_1, x'^*_2, y'^*_1, y'^*_2} \\
& = \begin{pmatrix} \frac{-a(1/8+b)}{b+0.25} - \frac{a}{2} & \frac{a/8}{b+0.25} + \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ \frac{a/8}{b+0.25} + \frac{a}{2} & \frac{-a(1/8+b)}{b+0.25} - \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(1/8+b)}{b+0.25} - \frac{a}{2} & \frac{-a/8}{b+0.25} + \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-a/8}{b+0.25} + \frac{a}{2} & \frac{-a(1/8+b)}{b+0.25} - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad (46)
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \frac{4ab}{4b+1}$; $\lambda_3 = -2a$; $\lambda_4 = -\frac{4ab}{4b+1}$, somit sind auch die Lösungen auf der Linie instabil gegenüber asymmetrischen Störungen. Das Verhalten des Systems für unterschiedliche asymmetrische Störungen $\delta \mathbf{x}_{B_1} \neq \delta \mathbf{x}_{B_2}$ wurde in der Zeitsimulation untersucht und ist in Abbildung 23 dargestellt.

4.4. 1 Jäger und 2 Beuteteilchen in der Ebene

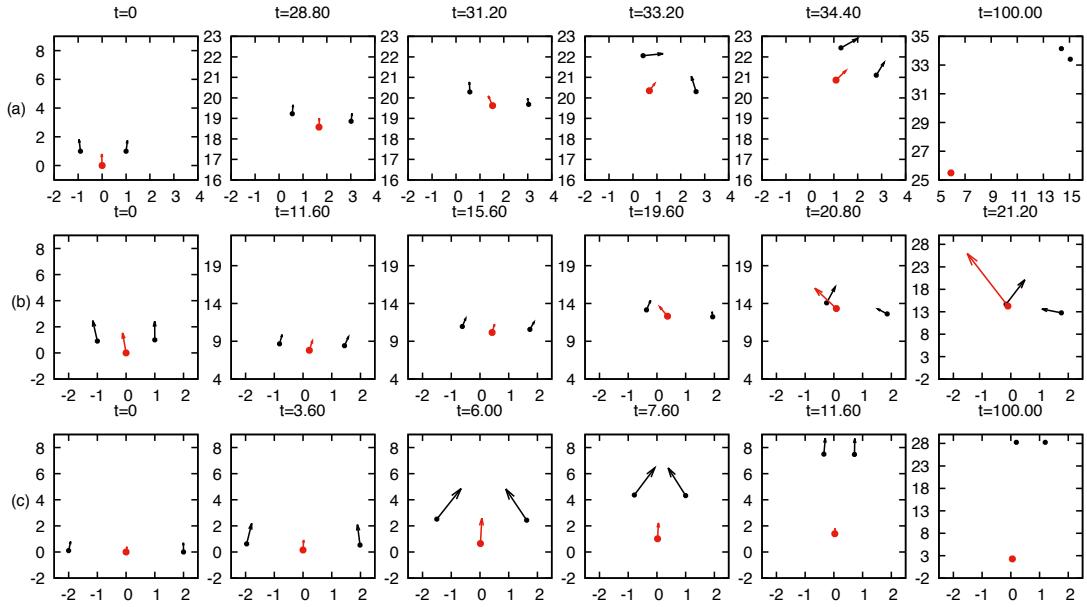


Abbildung 23: Verhalten des Systems 32 bei asymmetrischen Störungen aus dem stationären Zustand. Die Parameterwerte in (a) und (b) sind $a = 1, c = 1.5\sqrt{2}$, $b = 1.5$ und in (c) ist $b = 3.75$. Wie bereits gezeigt, sind die stationären Lösungen für alle b instabil. In (a) wurde das linke Teilchen um 0.1 in x-Richtung näher an den Jäger gesetzt als im stationären Zustand auf der Ebene. Während sich das linke Teilchen und Jäger zunächst nach links oben bewegen ($t = 0$), bewegt sich das rechte Teilchen etwas langsamer nach rechts oben. Irgendwann kehrt sich auch die Richtung der beiden anderen Teilchen um und diese bewegen sich ebenfalls nach rechts oben ($t = 28.00$), während das linke Teilchen langsam um den Jäger auf die rechte Seite wandert ($t = 31.20 - t = 34.40$). Die Geschwindigkeit des Jägers ist geringer als die der beiden Teilchen, sodass sich diese immer weiter vom Jäger entfernen ($t = 100$). In (b) wurde das linke Teilchen in y-Richtung um 0.1 näher an den Jäger gesetzt als im stationären Zustand auf der Ebene. Das anfängliche Verhalten ist ähnlich wie in (a) ($t = 0 - t = 19.60$), mit dem Unterschied, dass das linke Beuteteilchen beim Umrunden des Jägers zu nah an diesen heran kommt ($t = 20.80$) und der Jäger das Teilchen beim $t = 21.20$ „einholt“. Dabei divergieren die Kräfte, weshalb das weitere Verhalten unklar ist. In (c) wurde das linke Teilchen aus der stationären Lösung auf der Linie um 0.1 in y-Richtung vom Jäger weg versetzt. Alle Teilchen bewegen sich nach oben rechts $t = 0$. Dabei ist die Geschwindigkeit der Beute größer als die des Jägers und der Abstand in y-Richtung nimmt zu. Durch den größeren Abstand vom Jäger in y-Richtung nähern sich die Beuteteilchen aufgrund der langreichweiten Anziehung bis auf den in Abschnitt 4.1 berechneten stationären Abstand $d^* = \frac{1}{\sqrt{a}}$ aneinander an ($t = 3.60 - t = 7.60$), während der Abstand vom Jäger immer größer wird ($t = 11.60 - t = 100$)

4.5. 1 Jäger und 30 Beuteteilchen

Abschließend wird ein System aus einem Jäger und 30 Beuteteilchen untersucht. Aufgrund der Dimension des Systems wurden die Lösungen für stationäre Zustände nur noch mit Hilfe der numerischen Kontinuierung bestimmt. Ergänzend wurden diese durch Zeitsimulationen überprüft. Die Stabilität der einzelnen Lösungszweige sowie die für die numerische Kontinuierung benötigte stationäre Startlösung wurde ebenfalls mit Hilfe von Zeitsimulationen bestimmt. Abbildung 24 zeigt die stationären Lösungen für eine Jägerstärke $c = 2$ und eine Anziehung zwischen den Beuteteilchen $a = 1$.

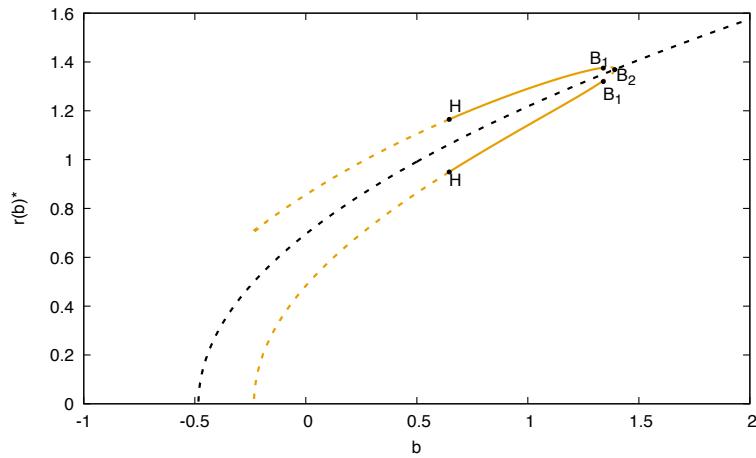


Abbildung 24: Bifurkationsdiagramm für ein System aus einem Jäger und 30 Beuteteilchen, bei $c = 2$ und $a = 1$. Aufgetragen ist der stationäre, absolute Abstand r^* eines Beuteteilchens zum Jäger, in Abhängigkeit der Abstoßung b der Beute vom Jäger. Die Lösungszweige wurden mit Hilfe der numerischen Kontinuierung bestimmt, die Stabilitäten über Zeitsimulationen. Die schwarze Kurve kennzeichnet Lösungen, für die sich alle Teilchen gleichmäßig verteilt auf derselben Kreisbahn um den Jäger befinden. Die gelben Kurven kennzeichnen Lösungen, für die die Teilchen einen Doppelkreis um den Jäger bilden, dabei befinden sich diese abwechselnd wie in Abbildung 25 (4. Zeile $t = 0$) im Abstand r_1^* (oberste Kurve) und r_2^* (unterste Kurve) vom Jäger. Bei $b_{B_2} \approx 1.39$ findet eine Bifurkation statt (durch das „B“ gekennzeichnet) und es entstehen zwei neue, zunächst instabile, Lösungszweige. Eine weitere Bifurkation findet bei $b_{B_1} \approx 1.34$ statt, hier werden die neu entstandenen Lösungszweige stabil. Bei $b_H \approx 0.646$ durchgeht das System eine Hopf-Bifurkation (durch „H“ gekennzeichnet) und beginnt zu schwingen (vgl. Abb. 25 4. Zeile).

Das dynamische Verhalten für unterschiedliche Werte von b ist in Abbildung 25 zu sehen.

4.5. 1 Jäger und 30 Beuteteilchen

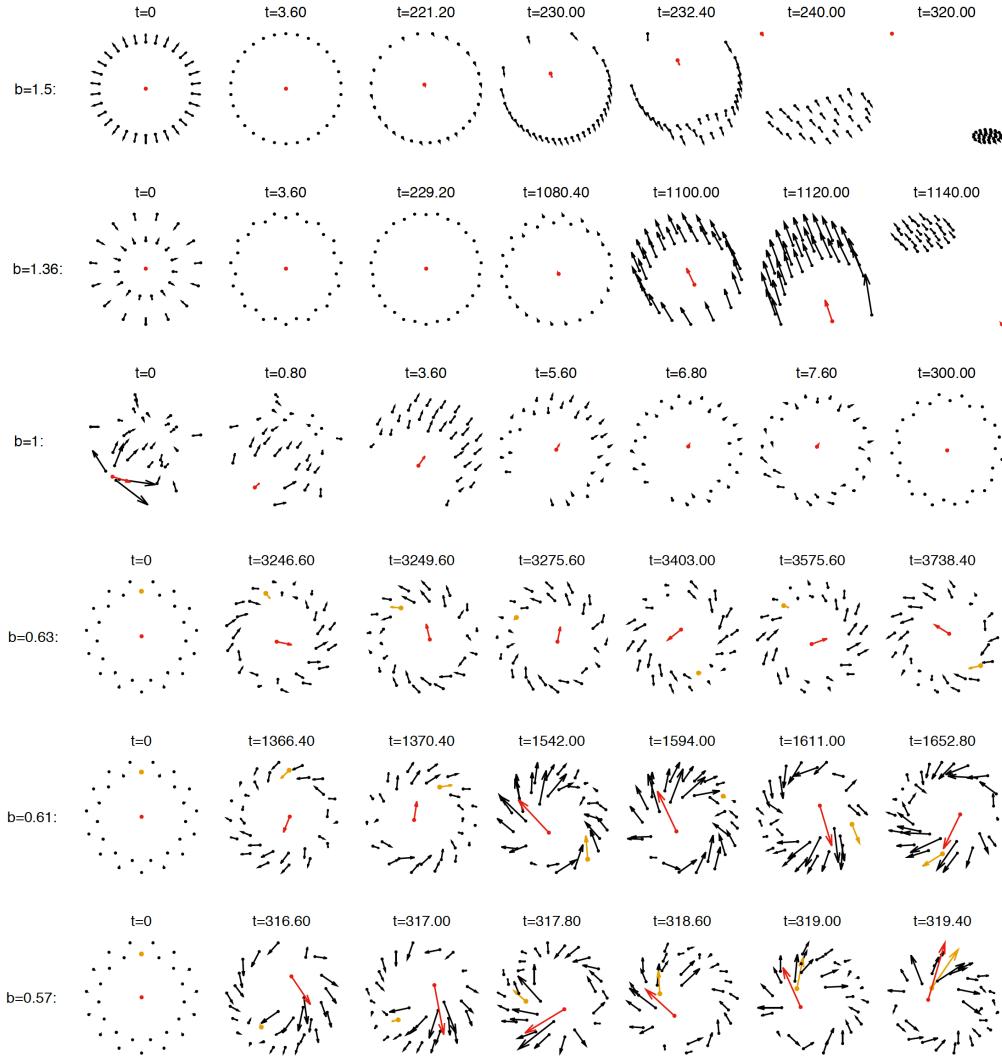


Abbildung 25: Verhalten des Systems mit einem Jäger und 30 Beuteteilchen für unterschiedliche b . Die Parameter sind $a = 1$, $c = 2$. Die Bifurkationswerte für b wurden durch Zeitsimulationen bestimmt und sind $b_{B_1} \approx 1.34$, $b_{B_2} \approx 1.39$ und $b_H \approx 0.646$. Die Vektoren sind proportional zur Geschwindigkeit des jeweiligen Teilchens. In der ersten Zeile wurden die Teilchen zu Beginn auf einen Kreis um den Jäger mit kleinerem Radius, als im stationären Zustand gesetzt. In Zeile zwei starten die Teilchen gleichmäßig verteilt auf zwei unterschiedlich großen Kreisen um den Jäger. Die Anfangsbedingungen für Zeile drei sind zufällig gewählt und in den letzten drei Zeilen starten die Teilchen im stationären Zustand auf einem Doppelkreis. In den letzten drei Zeilen wurde ein Beuteteilchen gelb markiert, um seine Bewegung nachzuverfolgen. Für $b > b_{B_1}$ (erste Zeile) entkommt der Schwarm vollkommen, für $b_{B_1} < b < b_{B_2}$ (zweite Zeile) kann sich ein instabiler Doppelkreis um den Jäger bilden, bevor der Schwarm ebenfalls entkommt. Ist $b_H < b < b_{B_1}$ (dritte Zeile), holt der Jäger den Schwarm ein, ist jedoch nicht fokussiert genug, sodass der Schwarm einen stabilen Doppelring um diesen bildet. Ist b leicht unter b_H (vierte Zeile), oszilliert der Jäger im Kreis, während die Beute ebenfalls langsam um diesen herum wandert, jedoch noch im ursprünglichen Teil des Doppelkreises bleibt. Für noch niedrigere b werden die Schwingungen komplexer, Teilchen aus dem inneren Kreis gehen in den äußeren Kreis über und anders herum (sechste Zeile). In der siebten Zeile ist $b < b_e \approx 0.570$, der Jäger holt die Beute ein und es sind keine periodischen Bewegungen mehr zu beobachten. Da hierbei die Kräfte divergieren, wurde die Simulation abgebrochen und das weitere Verhalten ist unklar.

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

Die stationären Lösungen, für die sich alle Teilchen im selben Abstand r^* vom Jäger befinden (schwarze Kurve), sind für den untersuchten Parameterbereich und Teilchenanzahl immer instabil. Abhängig von b zeigt das System bei einer Störung aus diesem Zustand unterschiedliche Dynamiken. Oberhalb von b_{B_1} gelingt es der Beute, dem Jäger zu „entkommen“. Obwohl für $b_{B_1} < b < b_{B_2}$ bereits zwei neue Lösungszweige existieren, wachsen Störungen so schnell an, dass in der Zeitsimulation, mit stationären Anfangsbedingungen auf einem Kreis, vor der „Flucht“ der Beute kein Übergang in den instabilen Doppelkreis zu beobachten ist. Startet das System in diesem Parameterbereich jedoch mit den Beuteteilchen auf einem nicht stationären Doppelkreis, so ändert sich vor der „Flucht“ zunächst der Radius der beiden Kreise bis zum stationären Zustand (Abb.25 2. Zeile). Die stationäre Lösung scheint in diesem Bereich also gegenüber symmetrischen Störungen $\delta r_1 = \delta r_2 = \dots = \delta r_{30}$ stabil zu sein. Für $b_H < b < b_{B_1}$ geht der instabile Kreis nach einiger Zeit in einen stabilen Doppelkreis über. Der Doppelkreis bildet sich, da der Gleichgewichtsabstand zwischen zwei benachbarten Beuteteilchen bei niedrigeren b so gering wird, dass die kurzreichweitige, abstoßende Komponente die Beuteteilchen bei einer Störung auseinander drückt.

Wird b weiter gesenkt, durchgeht das System bei $b_H \approx 0.646$ eine Hopf-Bifurkation und beginnt zu schwingen. Die Schwingungen werden für kleinere b immer komplexer und gehen dann ins chaotische Verhalten über, bevor der Jäger die Beute bei $b_e \approx 0.570$ „fängt“ (Abb. 25 letzte Zeile). Die Simulation wurde an dieser Stelle abgebrochen, da dabei die Kräfte divergieren.

Um das Schwingungsverhalten genauer zu untersuchen, wurden für unterschiedliche $b < b_H$ die x-Positionen des Jägers, der absolute Abstand vom Ursprung sowie die x-Positionen und absoluten Abstände der Beuteteilchen vom Jäger über die Zeit aufgetragen (siehe Anhang A). Dabei zeigt sich, dass schon ab $b = 1.34$ Schwingungen mit Amplituden in der Größenordnung $10^{-13} - 10^{-11}$ auftreten (A.1). Diese lassen sich jedoch wahrscheinlich durch numerisches Rauschen erklären, weshalb angenommen werden kann, dass dafür keine Hopf-Bifurkation verantwortlich ist. Zur Vollständigkeit wurden die Frequenzen dieser Schwingungen dennoch ebenfalls bestimmt.

Für bestimmte Werte von b sind die Auslenkungen des Jägers nicht immer gleich (vgl. 28), sondern das periodische Verhalten ändert sich, wobei sich die Periode bei Variation von b zunächst vervielfacht und der Prozess sich anschließend wieder umkehrt (vgl. A.5). Für die in Abbildung 26 bestimmten Frequenzen wurden jedoch immer die Frequenzen einer Links-Rechts Bewegung des Jägers berücksichtigt, die hier ab sofort als *Hauptschwingung* bezeichnet werden sollen.

Periodenverdopplung ist einer der typischen Wege eines nichtlinearen Systems ins Chaos[3]. Dabei verdoppelt sich die Dauer der periodischen Bewegung eines Systems unter der Variation eines Systemparameters wieder und wieder. Dies wird auch als *period doubling cascade* bezeichnet. Zusätzlich zur Periode verdoppelt sich dabei auch die Größe der Auslenkung der periodischen Bewegung [24]. Dies lässt

sich auch bei dem hier untersuchten System z.B. in Abbildung 27 bei $b = 0.63$ beobachten. Untypisch ist jedoch die in A.5 beobachtete, anschließende Umkehr der Periodenverdopplung. Die Gründe für dieses Verhalten müssen noch genauer untersucht werden. In der Literatur werden jedoch dynamische Systeme erwähnt, in denen sich dieser Prozess in der Nähe bestimmter Parameterwerte unter Variation des Systemparameters sogar unendlich oft umkehrt[3]. In ökologischen Modellen fungiert diese Umkehrung möglicherweise als Kontrolle für den Übergang ins Chaos und kann diesen unter Umständen sogar verhindern[23].

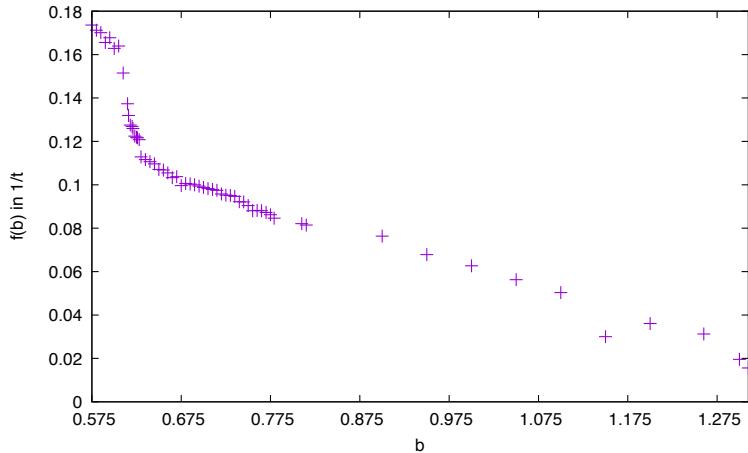


Abbildung 26: Frequenzverlauf der Hauptschwingungen des Jägers in x-Richtung. Es wurde jeweils über die Periode von 10 Schwingungen aus der Zeitsimulation gemittelt. Geht man von hohen zu niedrigen b -Werten, steigt die Frequenz zunächst langsam an. Bei $b = 1.15$ sinkt diese wieder für einen kurzen Intervall. Der Grund dafür ist unbekannt. Ab $b = 0.630$ gibt es einen starken Anstieg. Dies ist auch etwa der Bereich, ab dem die Schwingungen beginnen komplexer zu werden und wie in Abbildung 27 zu sehen, gibt es hier einen starken Anstieg der maximalen Auslenkung des absoluten Teilchenabstands vom Jäger, der mit der bereits angesprochenen Periodenverdopplung zusammenhängt. Von $b = 0.605$ bis $b = 0.575$ geht die Steigung der Frequenz wieder etwas zurück.

Bis $b = 0.646$ bleiben die beobachteten Schwingungsamplituden des Jägers in x-Richtung im 10^{-12} Bereich, dann gibt es jedoch einen plötzlichen Anstieg auf fast 0.25, während der absolute Abstand des Jägers vom Ursprung noch nahezu konstant bleibt (A.2). Der Jäger beginnt sich in einem nahezu perfekten Kreis um den Ursprung des Koordinatensystems zu bewegen. Die Beuteteilchen beginnen ab diesem Wert ebenfalls, langsam um den Jäger zu wandern (A.4). Für noch niedrigere b werden die Bewegungen komplexer: Die Schwingungen des Jägers in eine Raumrichtung haben nun nicht immer die gleiche Amplitude, sondern diese variiert periodisch mit der Zeit. Dies trifft auch für die absolute Auslenkung vom Koordinatenursprung zu, (A.2). Das bedeutet, der Jäger bewegt sich nicht mehr auf einem perfekten Kreis, sondern auf einer Ellipse, welche mit der Zeit

4. Analyse des minimalen Jäger-Schwarm-Modells

periodisch ihre Form ändert. Wird b noch weiter gesenkt, beginnen bei $b = 0.62$ die Teilchen im inneren Teil des Doppelkreises ihre Position mit denen im äußeren Teil zu tauschen (Abb. 25 vorletzte Zeile). Dadurch löst sich die Struktur des Doppelkreises immer weiter auf und das periodische Verhalten wird noch komplexer, bis bei $b = 0.610$ ein chaotisches Verhalten zu beobachten ist (A.2 letzter Graph). In Abbildung 27 wurden die maximalen und minimalen absoluten Abstände der Beute vom Jäger für $b < b_H$ aufgetragen. Dabei ist zu erkennen, dass für kleiner werdende b die Auslenkung um die stationäre Lösung sehr langsam steigt. Bei $b = 0.63$ gibt es für einen kurzen Intervall einen starken Anstieg, der kurz danach wieder stark abflacht. Der starke Anstieg der Auslenkung fällt mit dem in Abbildung 26 beobachteten starken Anstieg der Frequenz der Hauptschwingung, sowie mit der in A.5 beobachteten Periodenverdopplung zusammen. Bei $b = 0.62$ gibt es nochmal einen größeren Anstieg, welcher wiederum mit der Umkehrung der Periodenverdopplung zusammenfällt. Dieser Übergang ins Chaos muss noch genauer untersucht werden, um die Gründe für dieses Verhalten zu verstehen.

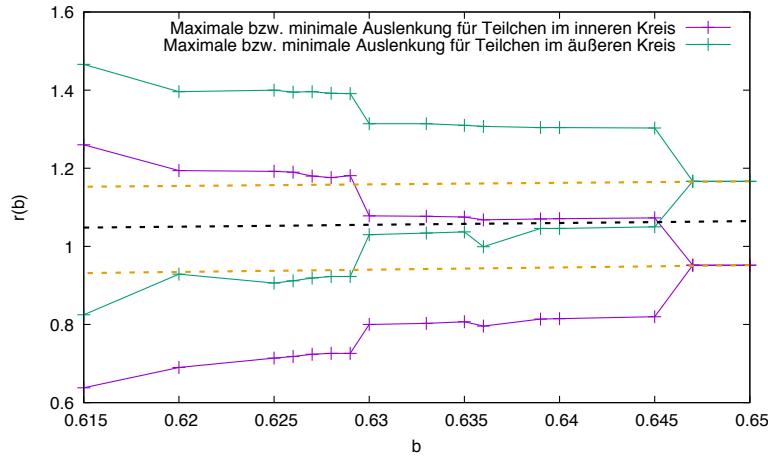


Abbildung 27: Maximale und minimale absolute Abstände der Beute vom Jäger für $b < b_H$. Der grüne Zweig kennzeichnet die Abstände für Beute, die sich im äußeren Teil des Doppelkreises befindet, der violette Zweig kennzeichnet Abstände für Beute, die sich im inneren Teil des Doppelkreises befindet. Die gelben und schwarzen Kurven sind die stationären Lösungen. Die maximalen und minimalen Auslenkungen des jeweiligen Hopf-Zweigs befinden sich symmetrisch um eine der Lösungen des Doppelkreises. Nach dem Hopf-Punkt steigt bzw. fällt der Abstand zunächst schnell, bleibt dann nahezu konstant und steigt bzw. fällt noch einmal bei $b = 0.630$ stärker an bzw. ab, um danach wieder langsamer zu steigen bzw. fallen. Die starke Änderung bei $b = 0.630$ hängt mit der Periodenverdopplung auf dem Weg ins Chaos zusammen, welche sich jedoch bei $b = 0.62$, wo es nochmal einen stärkeren Anstieg der Auslenkung gibt, wieder umkehrt.

5. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das von Chen und Kolokolnikov vorgeschlagene *minimal model of predator-swarm interactions* [2] auf Übergänge im Swarmingverhalten unter der Variation eines Systemparameters untersucht. Dazu wurden für unterschiedliche Fälle analytisch sowie mit Hilfe numerischer Kontinuierung die stationären Lösungen des betrachteten Systems berechnet und in einem Bifurkationsdiagramm aufgetragen. Die Stabilität der stationären Lösungen wurde mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse bestimmt. Zusätzlich wurden Zeitsimulationen des jeweils betrachteten Falls für unterschiedliche Parameterwerte und Anfangsbedingungen untersucht, um Übergänge in der Dynamik qualitativ zu untersuchen.

Zunächst wurde in Kapitel 1 ein kurzer Überblick über Swarming und aktive Materie gegeben. Dabei wurden unterschiedliche Systeme angesprochen, die Schwarmverhalten zeigen, und Anwendungsgebiete aufgezeigt, die aus der Erforschung dieser Systeme profitieren.

In Kapitel 2 wurde das zu untersuchende *minimal model of predator-swarm interactions* eingeführt und die unterschiedlichen Terme der Gleichungen erläutert. Als nächstes wurden dann in Kapitel 3 einige theoretische Grundlagen, Begriffe und Methode erläutert, die für die Untersuchung der hier betrachteten Systeme von Bedeutung sind.

Zunächst wurde die graphische Analyse eines nichtlinearen Systems erläutert und motiviert, der Begriff des Fixpunktes wurde eingeführt und eine Definition seiner Stabilität gegeben. Im Anschluss wurde die Bestimmung der Stabilität eines Fixpunktes für lineare Systeme erläutert und mit Hilfe der *linearen Stabilitätsanalyse* auf nichtlineare Systeme erweitert. Der Begriff der Bifurkation wurde eingeführt und einige typische Typen von Bifurkationen vorgestellt. Abschließend wurde das Verfahren der numerischen Kontinuierung erläutert.

In Kapitel 4 wurde das *minimal model of predator-swarm interactions* für verschiedene Fälle untersucht. Im Fall eines Systems aus lediglich zwei Beuteteilchen wurden für alle positiven a stabile, stationäre Abstände $d^*(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$ gefunden, wobei a die Anziehung zwischen den Beuteteilchen ist. Für ein Beuteteilchen und einen Jäger wurden lediglich in einem mitbewegten Bezugssystem O' stationäre Abstände $d^* = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ für $p \geq 3$ gefunden, wobei p die Empfindlichkeit des Jägers für in der Nähe befindliche Beute, b die Abstoßung der Beute vom Jäger und c die Stärke des Jägers ist. Diese stationären Lösungen sind für alle positiven Parameterwerte (b, c) instabil. Für $p = 2$ existieren nur Lösungen, wenn $b = c$ ist. Dann sind jedoch auch alle Lösungen stationär und Lyapunov-stabil.

Weiterhin wurde der Fall für zwei Beuteteilchen und einem Jäger auf einer Linie untersucht. Hierfür wurden nur stationäre Lösungen gefunden, für die sich der Jäger genau in der Mitte beider Beuteteilchen befindet. Dabei beträgt der stationäre Abstand der Beute vom Jäger jeweils $x_{B_i}^* = \sqrt{\frac{b+0.25}{a}}$. Diese Lösungen sind gegenüber symmetrischen Störungen ($\delta x_{B_1} = -\delta x_{B_2}$) für positive a immer sta-

5. Zusammenfassung

bil. Für allgemeine Störungen $(\delta x_{B_1}, \delta x_{B_2}, \delta x_J)$ sind sie nur unter der Bedingung $c < \frac{b}{4} \sqrt{\frac{4b+1}{a}}$ stabil. Für instabile Lösungen können die Beuteteilchen bei einer Störung entweder „entkommen“, oder eines der Teilchen wird vom Jäger „gefangen“.

Anschließend wurde der Fall mit zwei Beuteteilchen und einem Jäger auf die Ebene erweitert. Hier wurden stationäre Lösungen im Laborsystem gefunden, die denen des Falles auf der Linie entsprechen und stationäre Lösungen im mitbewegten Bezugssystem O' . Die stationären Lösungen auf der Linie sind für symmetrische Störungen $(\delta x_{B_1} = -\delta x_{B_2}, \delta y_{B_1} = \delta y_{B_2})$ mit $a = 1, c = 1.5\sqrt{2}$ für $b < 1.572$ stabil. Da die Eigenwerte sehr große Terme ergeben, konnte hier keine allgemeine Bedingung für die Stabilität gegeben werden. Für die Lösungen im mitbewegten Bezugssystem mit $\dot{x}_J \neq 0$ befinden sich die Beuteteilchen auf einer Kreisbahn um den Jäger. Befindet sich der Jäger im Koordinatenursprung, sind die stationären Lösungen auf der Ebene mit $p = 3$:

$$\begin{aligned} -x'_{B_2}^* = x'_{B_1}^* &= \pm \frac{c}{2\sqrt{ac^2 - b^3}} \\ y'_{B_2}^* = y'_{B_1}^* &= \pm \frac{c}{2b} \sqrt{\frac{4ac^2 - b^2(4b+1)}{ac^2 - b^3}}. \end{aligned}$$

Diese existieren nur für bestimmte Parameterwerte und sind instabil, sodass das System bei einer Störung entweder in den Fall auf der Linie übergeht, die Beute „flieht“, oder der Jäger eines der Teilchen „fängt“.

Abschließend wurde ein System mit einem Jäger und 30 Beuteteilchen für $a = 1$ und $c = 2$ untersucht. Hierbei wurde aufgrund der hohen Dimension des Systems auf eine analytische Betrachtung verzichtet und die stationären Lösungen durch numerische Kontinuierung bestimmt. Die Stabilität der bestimmten Lösungäste und das Verhalten für bestimmte Parameterwerte wurden in Zeitsimulationen untersucht. Es wurde ein für alle betrachteten Werte von b instabiler Lösungszweig gefunden, für den sich alle Beuteteilchen, gleichmäßig auf einen Kreis verteilt, im stationären Abstand $r(b)^*$ vom Jäger befinden. Für $b > b_{B_2} \approx 1.39$ gelingt es allen Teilchen, nach einer Störung aus diesem Zustand vor dem Jäger zu „fliehen“. Wird b gesenkt, gibt es bei $b = b_{B_2}$ eine Bifurkation, bei der zwei neue Lösungszweige entstehen. Für diese Lösungen sind die Beuteteilchen gleichmäßig auf zwei unterschiedlich große Kreise mit Radius r_1^* und r_2^* um den Jäger verteilt. Diese sind zunächst instabil und werden bei weiterer Senkung von b bei $b = b_{B_1} \approx 1.34$ stabil.

Für $b_{B_1} < b < b_{B_2}$ geht der einfache Kreis jedoch bei einer Störung nicht erst in den Doppelkreis über, sondern die Teilchen „fliehen“ immernoch direkt. Nur wenn die Teilchen bereits auf zwei unterschiedlich großen Kreisen starten, geht das System vorher in den stationären Zustand im Doppelkreis über. Für $b < b_{B_1}$ sind die stationären Lösungen auf dem Doppelkreis stabil, sodass das System auch bei zufälligen Anfangsbedingungen in diesen Zustand übergeht, solange der Jäger

nicht zu weit von der Beute entfernt startet. Wird b noch weiter gesenkt, fängt das System bei $b = b_H \approx 0.646$ an zu schwingen. Dabei bewegt sich der Jäger zunächst in einem nahezu perfekten Kreis um den Ursprung, welcher bei weiterer Senkung von b in eine sich ändernde Ellipse übergeht. Dabei werden die periodischen Bewegungen zunehmend komplexer, bis keine Periode mehr zu beobachten ist.

Auf dem Weg in das chaotische Verhalten ist eine Periodenvervielfachung zu beobachten, die sich dann jedoch wieder umkehrt. Dieses Verhalten bedarf jedoch noch weiterer Untersuchungen. Bei $b = b_e \approx 0.570$ gelingt es dem Jäger schließlich, ein Beuteteilchen „einzuholen“. Das Verhalten nach dem „Einholen“ wurde aufgrund von divergierenden Kräften nicht weiter untersucht.

Im Hinblick auf weitere Forschung wäre es interessant zu untersuchen, ab wie vielen Beuteteilchen sich ein stationärer Doppelkreis bilden kann und ob es für noch höhere Teilchenzahlen analog stationäre Lösungen für drei oder mehr unterschiedlich große Kreise gibt, oder ob sich die Teilchen ab einer bestimmten Anzahl keinem bestimmten Kreis mehr zuordnen lassen. Es wäre außerdem, wie schon in der Einleitung erwähnt, wichtig, die theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit mit dem Verhalten entsprechender Schwärme in der Umwelt experimentell zu vergleichen. Die Umkehrung der Periodenvervielfachung auf dem Weg ins Chaos könnte noch genauer untersucht werden und, wie häufig diese Umkehrung auftritt. Auch wenn dies nicht physikalisch relevant ist, könnte zur Vollständigkeit ebenfalls noch genauer untersucht werden, ob für den Fall mit zwei Beuteteilchen und einem Jäger doch noch weitere stationäre Lösungen $x_{B_1} = x_{B_2} = 0$ existieren.

Literatur

- [1] R. Bouffanais. *Design and control of swarm dynamics*. Springer, 2016.
- [2] Y. Chen and T. Kolokolnikov. A minimal model of predator–swarm interactions. *Journal of The Royal Society Interface*, 11(94):20131208, 2014.
- [3] S. P. Dawson, C. Grebogi, J. A. Yorke, I. Kan, and H. Koçak. Antimonotonicity: inevitable reversals of period-doubling cascades. *Physics Letters A*, 162(3):249–254, 1992.
- [4] E. J. Doedel, T. F. Fairgrieve, B. Sandstede, A. R. Champneys, Y. A. Kuznetsov, and X. Wang. Auto-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. 2007.
- [5] C. Dombrowski, L. Cisneros, S. Chatkaew, R. E. Goldstein, and J. O. Kessler. Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. *Physical Review Letters*, 93(9):098103, 2004.
- [6] R. Frank and A. Frank. Nacht im etosha nationalpark. Zugriff am 2.08.2016 unter:<http://taruk.com/berichte/kaoko-caprivi/>.
- [7] N. Franks, A. Wilby, B. W. Silverman, and C. Tofts. Self-organizing nest construction in ants: sophisticated building by blind bulldozing. *Animal behaviour*, 44:357–375, 1992.
- [8] A. Gimenez, V. Chausse, and A. Meseguer. Numerical continuation in classical mechanics and thermodynamics. *European Journal of Physics*, 36(1):015015, 2014.
- [9] B. Heinrich. Keeping a cool head: honeybee thermoregulation. *Science*, 205(4412):1269–1271, 1979.
- [10] A. Ivlev, J. Bartnick, M. Heinen, C.-R. Du, V. Nosenko, and H. Löwen. Statistical mechanics where newton’s third law is broken. *Physical Review X*, 5(1):011035, 2015.
- [11] R. Kemkemer, D. Kling, D. Kaufmann, and H. Gruler. Elastic properties of nematoid arrangements formed by amoeboid cells. *The European Physical Journal E*, 1(2-3):215–225, 2000.
- [12] C. Koszka. Das cytoskelett. *Chemie in unserer Zeit*, 20(1):19–26, 1986.
- [13] S. M. Manson. Simplifying complexity: a review of complexity theory. *Geoforum*, 32(3):405–414, 2001.
- [14] V. Maple. Waterloo maple software. *University of Waterloo, Version*, 5, 1994.

- [15] M. Marchetti, J. Joanny, S. Ramaswamy, T. Liverpool, J. Prost, M. Rao, and R. A. Simha. Hydrodynamics of soft active matter. *Reviews of Modern Physics*, 85(3):1143, 2013.
- [16] P. Miller. The genius of swarms. *National Geographic*, July 2007.
- [17] A. d. Niet. Step-size control and corrector methods in numerical continuation of ocean circulation and fill-reducing orderings in multilevel ilu methods. *Department of Mathematics, University of Groningen, Groningen*, 2002.
- [18] J. K. Parrish and L. Edelstein-Keshet. Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation. *Science*, 284(5411):99–101, 1999.
- [19] B. Penzhorn. A long-term study of social organisation and behaviour of cape mountain zebras equus zebra zebra. *Zeitschrift für Tierpsychologie*, 64(2):97–146, 1984.
- [20] A. Piehler. Bio-physics wiki. <http://www.biophysics.at/wiki/images/thumb/Hopf.png/600px-Hopf.png>.
- [21] T. J. Pitcher and C. J. Wyche. Predator-avoidance behaviours of sand-eel schools: why schools seldom split. In *Predators and prey in fishes*, pages 193–204. Springer, 1983.
- [22] P. P. Post. Penguins and blizzards. Zugriff am 2.08.2016 unter:<https://penguinplacepost.wordpress.com/2014/01/09/penguin-huddle-more-like-penguin-gridlock/>.
- [23] L. Stone. Period-doubling reversals and chaos in simple ecological models. *Nature*, 365(6447):617–620, 1993.
- [24] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press, 2014.
- [25] T. Surrey, F. Nédélec, S. Leibler, and E. Karsenti. Physical properties determining self-organization of motors and microtubules. *Science*, 292(5519):1167–1171, 2001.
- [26] Tapeto. Wandbild: Hai im fischienschwarm. Zugriff am 2.08.2016 unter:<https://www.tapeto.com/documents/image/82/8254/47-337-predator-0.jpg>.
- [27] A. Waters, F. Blanchette, and A. D. Kim. Modeling huddling penguins. *PloS one*, 7(11):e50277, 2012.

A. Graphen für das Schwingungsverhalten des Systems mit einem Jäger und 30 Beuteteilchen

A. Graphen für das Schwingungsverhalten des Systems mit einem Jäger und 30 Beuteteilchen

A.1. Schwingungsverhalten des Jägers in x-Richtung bei unterschiedlichen b

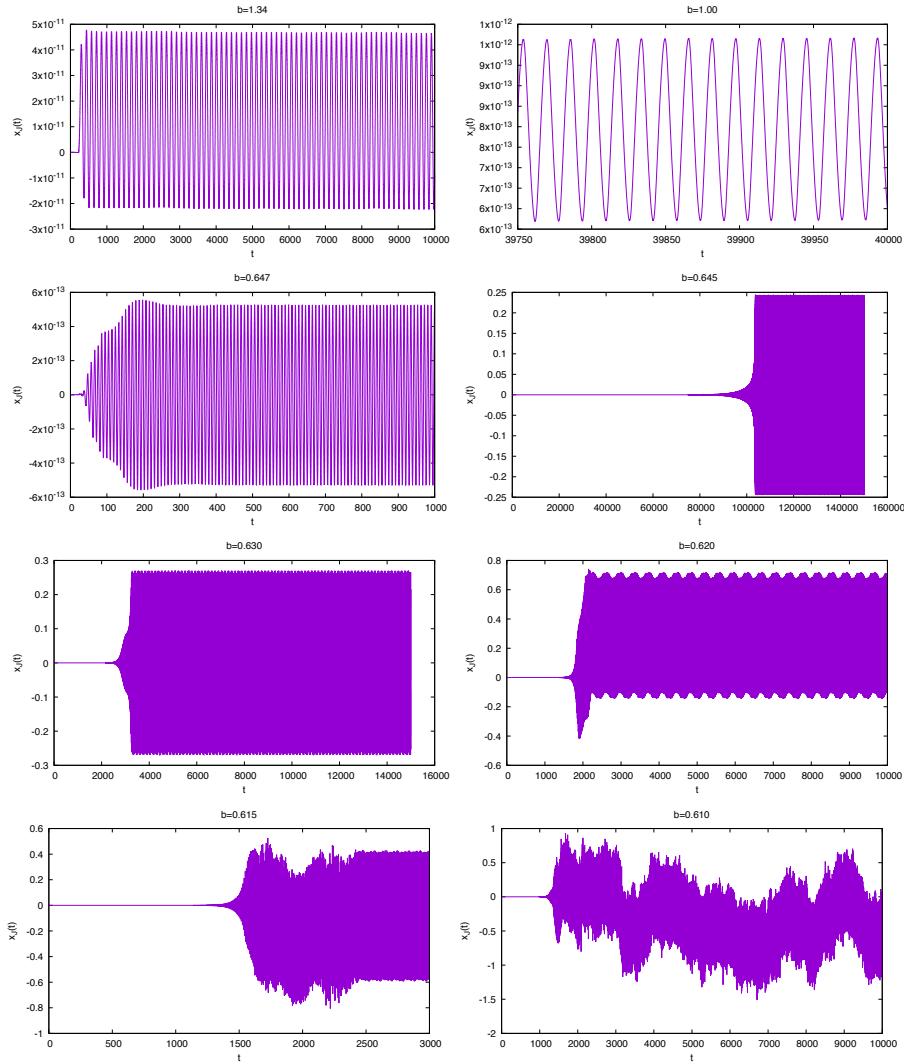


Abbildung 28: Schwingungsverlauf des Jägers in x-Richtung für unterschiedliche b . Bis $b = 0.646$ bleiben die Amplituden im Bereich von maximal 10^{-11} . Dann nehmen sie mit sinkendem b zu. Die Schwingungen sind zunächst einfach, werden dann immer komplexer, bis kein periodisches Verhalten mehr zu beobachten ist. Der zweite Graph mit $b = 1.00$ zeigt die auch für stabile, stationäre Zustände beobachteten Schwingungen.

A.2. Absoluter Abstand des Jägers zum Koordinatenursprung bei unterschiedlichen b .

A.2. Absoluter Abstand des Jägers zum Koordinatenursprung bei unterschiedlichen b .

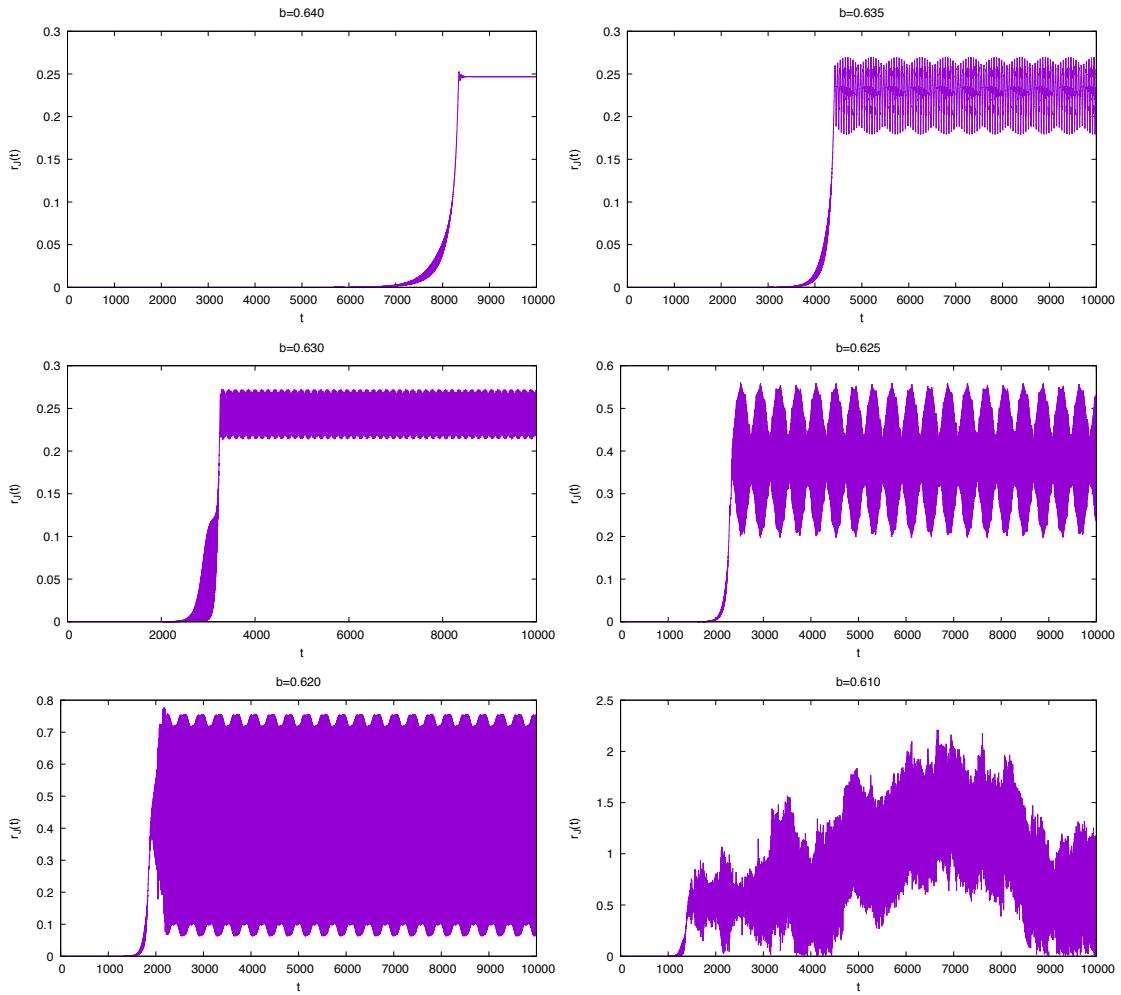


Abbildung 29: Änderung des absoluten Abstands des Jägers zum Ursprung mit der Zeit. Zunächst bleibt der Abstand konstant, der Jäger bewegt sich auf einem nahezu perfekten Kreis um den Ursprung. Für niedrigere b bewegt sich der Jäger auf einer Ellipse um den Ursprung, deren Form sich periodisch mit der Zeit ändert. Die Größe der Ellipse nimmt für sinkende b zu. Für sehr niedrige b geht die Bewegung des Jägers ins Chaotische über.

A. Graphen für das Schwingungsverhalten des Systems mit einem Jäger und 30 Beuteteilchen

A.3. Absoluter Abstand vom Jäger der Teilchen im inneren und äußeren Kreis für unterschiedliche b

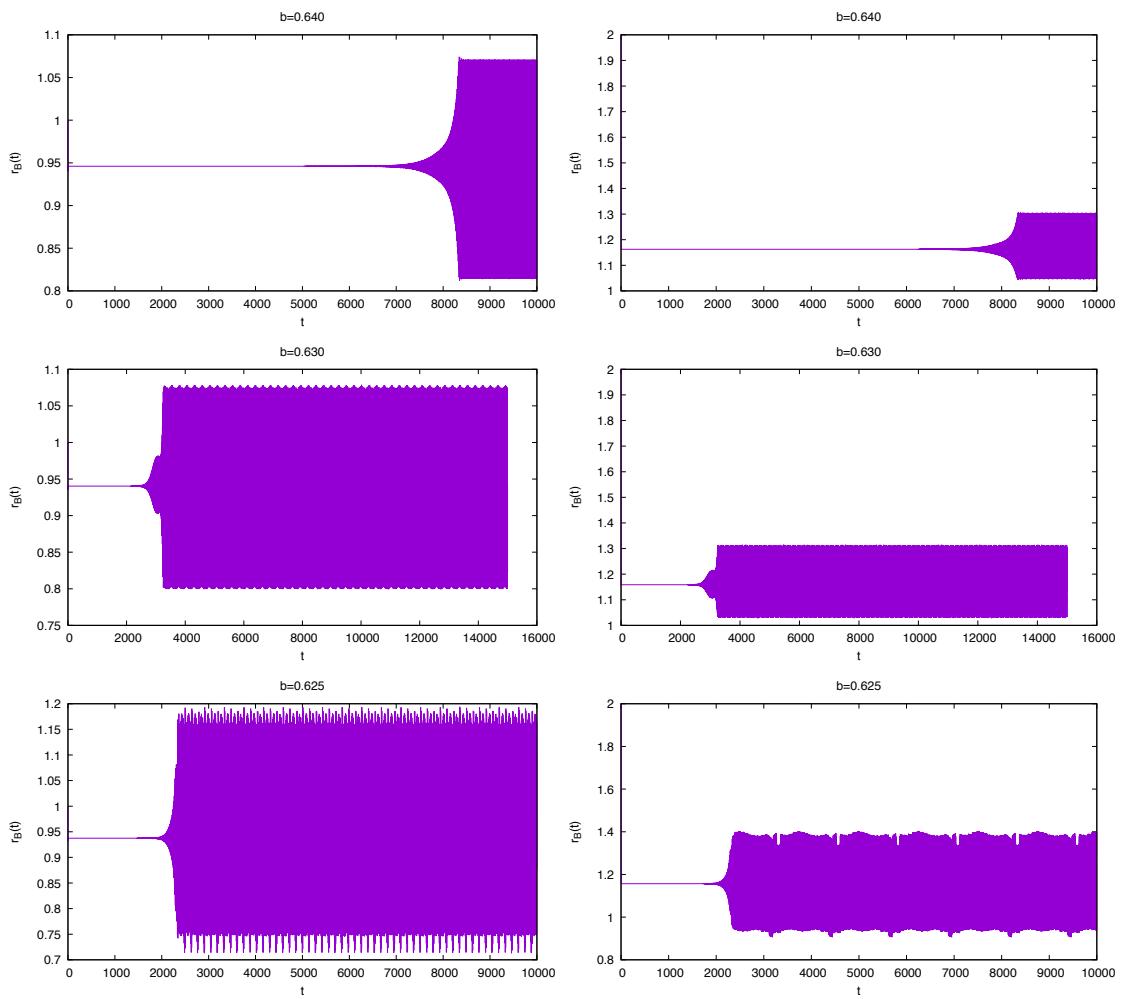


Abbildung 30: Absoluter Abstand der Beuteteilchen im inneren Kreis (linke Spalte) und äußeren Kreis (rechte Spalte) vom Jäger für unterschiedliche b mit der Zeit. Die Amplitude der Schwingung um den stationären Abstand nimmt für sinkende b zu.

A.4. Bewegungsverlauf eines Beuteteilchens bei unterschiedlichen b

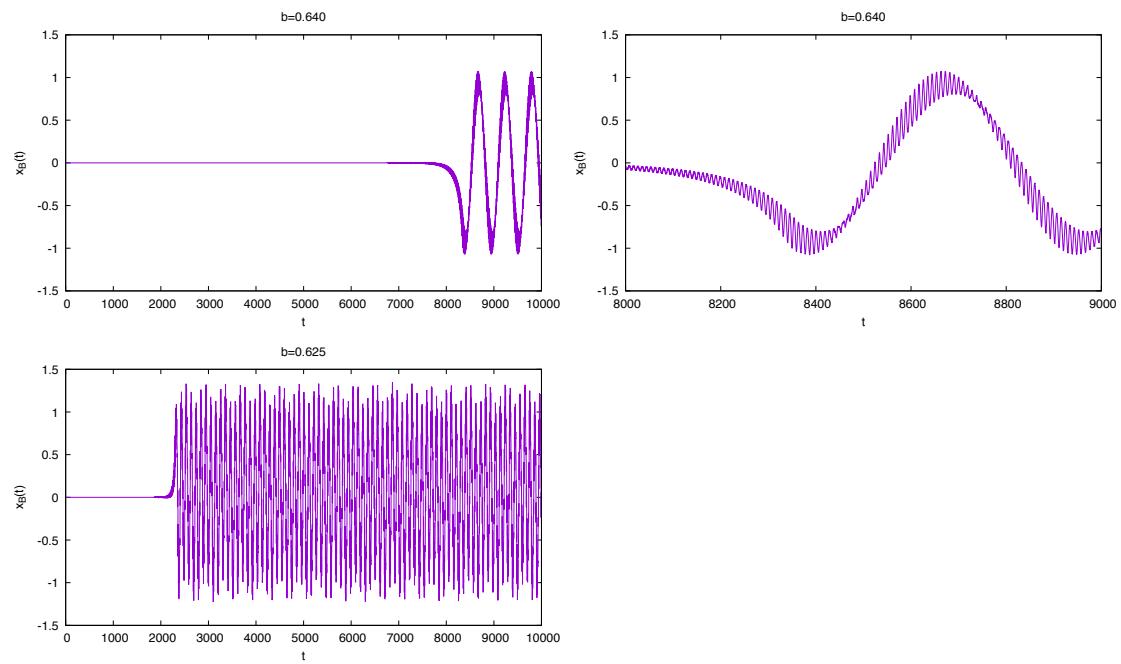


Abbildung 31: Verlauf der x-Position eines Beuteteilchens über die Zeit. Das Beuteteilchen bewegt sich periodisch mit der Zeit um den Jäger herum, während es zusätzlich kleinere Schwingungen gibt

A.5. Periodenänderung auf dem Weg ins chaotische Verhalten

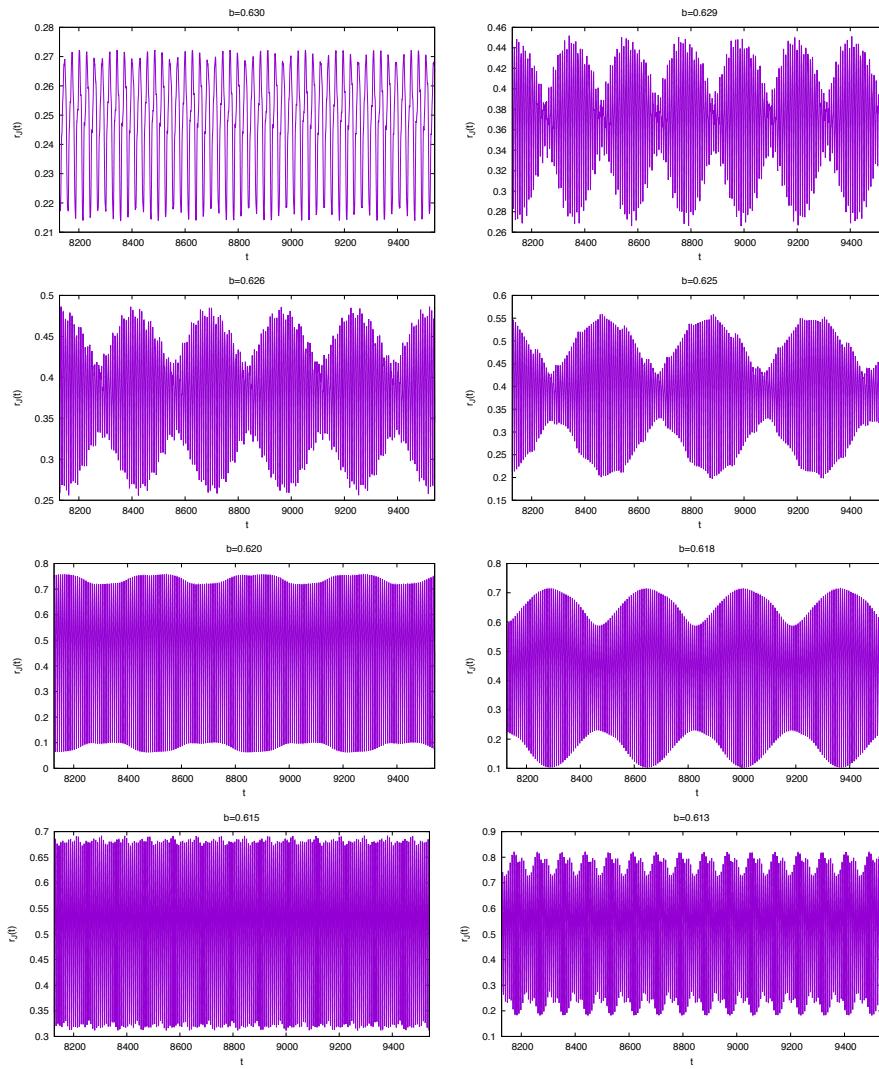


Abbildung 32: Änderung des absoluten Abstandes des Jägers zum Ursprung mit der Zeit für unterschiedliche b . Alle Graphen wurden jeweils für den gleichen Zeitintervall aufgetragen, um die Änderung der Periode zu veranschaulichen. Bei $b = 0.630$ sind die einzelnen Auslenkungen des Jägers vom Ursprung noch sehr ähnlich, es ist jedoch bereits eine komplexere Periode zu erkennen. Während der Unterschied zwischen den einzelnen Auslenkungen immer größer wird, wächst zunächst auch die Dauer der periodischen Bewegung an. Bei $b = 0.626$ hat sich die Periode im Vergleich zu $b = 0.630$ fast verdoppelt und wächst für $b = 0.625$ noch weiter an. Wird b weiter gesenkt, scheint sich der Prozess der Periodenvervielfachung wieder umzukehren.

B. Erklärung zur Bachelorarbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel "Swarming-übergänge in diskreten Modellen" selbstständig verfasst habe und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, den 19. September 2016