



# GEKOPPELTE COARSENING UND DEPINNING-ÜBERGÄNGE

BACHELORARBEIT  
zur Erlangung des akademischen Grades  
BACHELOR OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Physik  
Institut für Theoretische Physik

Betreuung:

*Prof. Dr. Uwe Thiele*

Eingereicht von:

*Christopher Henkel*

Münster, September 2016

Prüfer: Prof. Dr. Uwe Thiele

Zweitprüfer: Dr. Svetlana Gurevich

Christopher Henkel: *Gekoppelte Coarsening- und Depinning-Übergänge*,  
Bachelorarbeit, ©September 2016

*Christopher Henkel*

# GEKOPPELTE COARSENING- UND DEPINNING-ÜBERGÄNGE



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben. Zunächst bei Prof. Dr. Uwe Thiele für das aufrichtige Interesse an den Ergebnissen dieser Arbeit sowie für die Unterstützung bei Fragen und die Möglichkeit, die Bachelorarbeit in der Arbeitsgruppe schreiben zu dürfen. Weiterhin danke ich Dr. Svetlana Gurevich, die sich bereiterklärt hat, die Zweitkorrektur dieser Arbeit zu übernehmen. Besonderer Dank gilt meinem direkten Ansprechpartner Walter Tewes, der viele Stunden seiner Zeit geopfert hat um mir trotz eigener Beschäftigungen sehr geduldig und hilfsbereit bei allen Fragen und Problemstellungen zur Seite zu stehen. Außerdem danke ich ihm sowie Prof. Dr. Uwe Thiele, Marie Droßbach, Max Philip Holl und meiner Familie für das Probelesen und für Verbesserungsvorschläge. Abschließend möchte ich mich noch bei Tobias Schemmelmann, Dr. Johannes Lülff und Christian Barthel aus meinem Büro sowie bei Markus Wilczek bedanken, die mich bei computertechnischen Problemen immer sehr hilfsbereit unterstützt haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Grundlegende Gleichungen . . . . .	5
2.2. Wechselwirkung mit dem Substrat . . . . .	7
2.3. Langwellennäherung . . . . .	11
2.4. Die Dünnschichtgleichung . . . . .	11
2.5. Bifurkationen . . . . .	13
2.5.1. Saddle-Node Bifurkation . . . . .	15
2.5.2. Pitchfork Bifurkation . . . . .	17
2.5.3. Hopf Bifurkation . . . . .	20
2.6. Coarsening . . . . .	22
2.7. Depinning . . . . .	23
<b>3. Stationäre Lösungen der Dünnschichtgleichung</b>	<b>25</b>
3.1. Variation der Heterogenitätsstärke . . . . .	27
3.2. Variation der Triebkraft . . . . .	30
<b>4. Zeitsimulationen</b>	<b>35</b>
<b>5. Zwei-Parameter-Kontinuierung</b>	<b>39</b>
<b>6. Kontinuierung zeitperiodischer Lösungen</b>	<b>43</b>
<b>7. Fazit</b>	<b>47</b>
<b>A. Abbildungen</b>	<b>51</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>67</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.1. Große und kleine Tropfen auf einer glatten, festen Oberfläche. . . . .	1
1.2. Die vier grundlegenden Fälle von flachen Filmen und Tropfen auf festen Substraten . . . . .	3
2.1. Schema des eindimensionalen Höhenprofils eines Films. . . . .	6
2.2. Schema der Kontaktlinie eines Tropfens. . . . .	8
2.3. Schema der Tropfenprofile für verschiedene Benetzbarkeiten . . . . .	8
2.4. Verlauf des Derjaguin Druckes $\Pi(h)$ für verschiedene Benetzbarkeiten $b$ . . . . .	9
2.5. Schema der Kontaktregion zwischen Tropfen und Precursor . . . . .	10
2.6. Veranschaulichung von stabilen und instabilen Zuständen anhand des Beispiels einer Kugel . . . . .	14
2.7. Fixpunkte einer Saddle-Node Bifurkation bei verschiedenen Parameterwerten. . . . .	16
2.8. Typisches Saddle-Node Bifurkationsdiagramm. . . . .	16
2.9. Fixpunkte einer superkritischen Pitchfork Bifurkation bei verschiedenen Parameterwerten. . . . .	18
2.10. Typisches superkritisches Pitchfork Bifurkationsdiagramm. . . . .	18
2.11. Typisches subkritisches Pitchfork Bifurkationsdiagramm. . . . .	19
2.12. Typisches subkritisches Pitchfork Bifurkationsdiagramm mit Termen höherer Ordnung. . . . .	19
2.13. Schema der Oszillationen bei einer superkritischen Hopf Bifurkation . . . . .	20
2.14. Oszillationen einer Hopf Bifurkation im Phasenraum . . . . .	21
2.15. Fixpunkte einer Sniper Bifurkation bei verschiedenen Parameterwerten. . . . .	24
3.1. Bifurkationsdiagramm bei der Triebkraft $\vartheta = 0$ und variierteter Heterogenitätsstärke $\rho$ . . . . .	27
3.2. Höhenprofile der Anfangslösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	28
3.3. Vergleich der Bifurkationsdiagramme von HetDrop und HetDrive. . . . .	30

3.4.	Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke $\rho = 0,25$ und variierter Triebkraft $\vartheta$ . . . . .	31
3.5.	Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke $\rho = 0,65$ und variierter Triebkraft $\vartheta$ . . . . .	32
3.6.	Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke $\rho = 0,734$ und variierter Triebkraft $\vartheta$ . . . . .	32
3.7.	Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke $\rho = 0,90$ und variierter Triebkraft $\vartheta$ . . . . .	33
4.1.	Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL15. . . . .	36
4.2.	Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL21. . . . .	36
4.3.	Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL23 bei erhöhter Triebkraft. . . . .	37
4.4.	Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL27. . . . .	38
4.5.	Auf Stabilität untersuchtes Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke $\rho = 0,65$ und variierter Triebkraft $\vartheta$ . . . . .	38
5.1.	Phasendiagramm der Folds unter Kontinuierung der Parameter $\rho$ und $\vartheta$ . . . . .	40
5.2.	Stabile Bereiche der stationären 1n- bzw. 2n-Lösungen im Phasenraum . . . . .	41
6.1.	Vergleich der Bifurkationsdiagramme von HetDrop und IncFFTW. . . . .	44
6.2.	Vergleich der Bifurkationsdiagramme von HetDrive und IncFFTW. . . . .	44
6.3.	Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke $\rho = 0,65$ und variierter Triebkraft $\vartheta$ mit den Ästen der zeitperiodischen Lösungen. . . . .	45
A.1.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,25$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	51
A.2.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,47$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	51
A.3.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,57$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	52
A.4.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,65$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	52
A.5.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,734$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	52
A.6.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,90$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0$ . . . . .	53
A.7.	Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,25$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0,77 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	53

A.8. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,25$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 1,50 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	53
A.9. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,25$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 2,39 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	54
A.10. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,65$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 0,50 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	54
A.11. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,65$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 1,50 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	54
A.12. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,65$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 5,00 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	55
A.13. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,734$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 2,14 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	55
A.14. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,734$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 5,00 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	55
A.15. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,734$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 6,96 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	56
A.16. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,90$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 3,10 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	56
A.17. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,90$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 6,00 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	56
A.18. Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von $\rho = 0,90$ und einer Triebkraft von $\vartheta = 8,60 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	57
A.19. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL28. . . . .	57
A.20. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL15. . . . .	58
A.21. Vergleich der Zeitsimulation von DL15 mit der stationären Lösung DL17. . . . .	58
A.22. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL21. . . . .	59
A.23. Vergleich der Zeitsimulation von DL21 mit der stationären Lösung DL20. . . . .	59
A.24. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL23. . . . .	60
A.25. Vergleich der Zeitsimulation von DL23 mit einer stationären Lösung des 2n-Astes. . . . .	60
A.26. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung L22. . . . .	61
A.27. Vergleich der Zeitsimulation von L21 mit der stationären Lösung DL22. . . . .	61
A.28. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung L23. . . . .	62
A.29. Vergleich der Zeitsimulation von L23 mit der stationären Lösung DL22. . . . .	62
A.30. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL19. . . . .	63
A.31. Vergleich der Zeitsimulation von DL19 mit der stationären Lösung DL20. . . . .	63
A.32. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL24. . . . .	64

A.33. Vergleich der Zeitsimulation von DL24 mit der stationären Lösung DL26.	64
A.34. Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL25. . . . .	65
A.35. Vergleich der Zeitsimulation von DL25 mit der stationären Lösung DL26.	65

# 1. Einleitung

Flüssigkeiten sind eines der elementarsten Dinge, die uns im Alltag begegnen, und der Umgang mit ihnen ist jedem Menschen vertraut. Dennoch besitzen sie einen sehr wandlungsfähigen Charakter und sind daher nicht einfach zu beschreiben. Seit jeher ist es darum von großem Interesse, die Mechanismen hinter ihrem Verhalten zu verstehen. Die Beschreibung von Flüssigkeiten ist nun eines der umfangreichsten Themengebiete der nichtlinearen Physik und relevant für diverse Bereiche. So werden z.B. viele natürliche Prozesse maßgeblich durch das Verhalten von Flüssigkeiten beeinflusst. Ein besonders auffälliges Phänomen ist die Bildung von Tropfen oder flachen Filmen z.B. auf festen Oberflächen wie Blättern oder glatten Steinen. Solche Systeme werden vor allem durch die Eigenschaften der Oberflächen, Substrate genannt, bestimmt, auf denen die Tropfen sitzen [GW03, Kap. 1]. Sie zeichnen sich außerdem durch eine freie Oberfläche aus und können daher eine Vielfalt von Formen annehmen (siehe Abb. 1.1) [Köp11, Kap. 2.4.1].

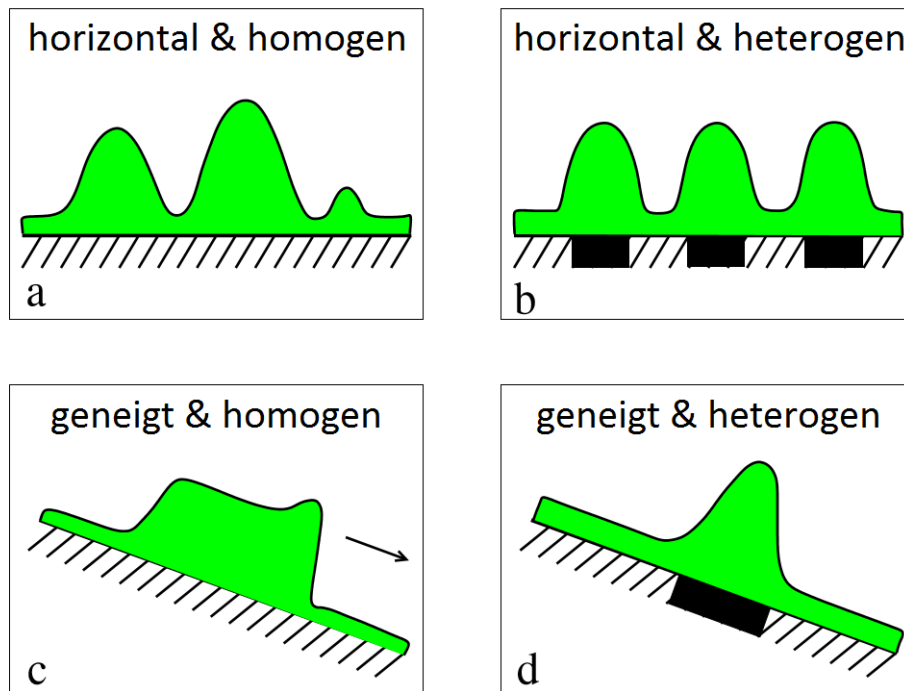


**Abbildung 1.1.:** Große und kleine Tropfen auf einer glatten, festen Oberfläche. Auf Grund der freien Oberfläche entstehen Vielfältige Formen unterschiedlicher Größen.[Bil16]

Die Benetzbarkeit eines Substrats beschreibt dabei wie gut sich eine Flüssigkeit auf ihm ansiedeln bzw. ausbreiten kann. So bilden sich Tropfen eher auf weniger benetzbaren Substraten, während sich auf mehr benetzbaren Substraten Filme bilden. Oberflächen, von denen Schmutz und Flüssigkeiten abperlen wie von einer Lotusblüte, sind in der Industrie von großem Interesse [Bar09, Kap. 1.3].

Allgemein wird bei Systemen mit Tropfen oder flachen Filmen auf festen Substraten zwischen vier grundlegenden Fällen unterschieden. So können die Substrate horizontal oder geneigt sein, sowie homogen oder heterogen im Bezug auf ihre Benetzbarkeit. Diese vier Fälle sind in Abbildung 1.2 dargestellt und unterscheiden sich in ihrer Symmetrie [Thi07, Kap. 1.2]. Ein System mit einem Tropfen oder Film auf einem horizontalen homogenen Substrat ist sowohl translations- als auch reflexionssymmetrisch (siehe Abb 1.2a). Das Verhalten verändert sich also selbst dann nicht, wenn man das System entlang des Substrats verschiebt, oder es an einer Ebene senkrecht zur Oberfläche spiegelt. Diese Symmetrien können jedoch gebrochen werden. Führt man z.B. eine Heterogenität in der Benetzbarkeit des Substrats ein, so macht es sehr wohl einen Unterschied, an welcher Stelle sich der Tropfen befindet, da sein Verhalten von der Benetzbarkeit beeinflusst wird (siehe Abb. 1.2b). Die Translationssymmetrie ist hier also gebrochen während die Reflexionssymmetrie erhalten bleibt. Führt man stattdessen nur eine Neigung ein, so ist die Position des Tropfens entlang des Substrats nicht von Bedeutung, da die aus der Neigung resultierende Triebkraft immer in die selbe Richtung zeigt. Spiegelt man das System hingegen, so zeigt diese Triebkraft genau in die entgegengesetzte Richtung (siehe Abb. 1.2c). Hier ist also die Translationssymmetrie erhalten während die Reflexionssymmetrie gebrochen wird. Im Falle eines geneigten heterogenen Substrats sind dementsprechend beide Symmetrien gebrochen (siehe Abb. 1.2d). Ziel dieser Arbeit ist es das Verhalten von Tropfen und flachen Filmen auf festen Substraten zu verstehen und zu beschreiben. Hierbei liegt der Fokus auf den Fällen b und d aus Abbildung 1.2. Unter Verwendung der Langwellennäherung und einiger Bedingungen an den Granzflächen sowie unter der Annahme inkompressibler Fluide können die Navier-Stokes Gleichungen vereinfacht und die Dünnschichtgleichung hergeleitet werden. Diese Gleichung bildet die Grundlage aller hier angestellten Berechnungen. Gesucht sind die stationären Lösungen dieser Gleichung unter Variation verschiedener Parameter. Insbesondere wurden die Bedingungen durch Variation der Heterogenitätsstärke in Form der Benetzbarkeit des Substrats sowie der Triebkraft in Form der Neigung des Substrats verändert und die *Coarsening*- und *Depinning*-Effekte untersucht. Mit Hilfe des Programmes „AUTO-07P“ können die stationären Lösungen der Dünnschichtgleichung ausgehend von verschiedenen periodischen Anfangszuständen

untersucht werden.



**Abbildung 1.2.:** Die vier grundlegenden Fälle von flachen Filmen und Tropfen auf festen Substraten. Verändert übernommen von [Thi07, Kap. 1.1].

In Kapitel 3 werden diese Lösungen in sogenannten Bifurkationsdiagrammen dargestellt und interpretiert. In Kapitel 4 werden weiterhin Zeitsimulationen der gefundenen Lösungen verwendet, aus deren Verlauf auf die Stabilitäten der entsprechenden Äste geschlossen werden kann. Dabei können außerdem zeitperiodische Lösungen von entpinnten Tropfen gefunden werden. Um die Bereiche abzugrenzen in denen bestimmte Lösungen stabil sind, werden in Kapitel 5 die Übergangspunkte der entsprechenden Lösungen im Phasenraum verfolgt. Um schlussendlich auch die zeitperiodischen entpinnten Lösungen in einem Bifurkationsdiagramm zu lokalisieren, werden in Kapitel 6 die entsprechenden Äste gesucht und berechnet. Kapitel 7 dient der Zusammenfassung der gefundenen Ergebnisse und verweist auf Probleme sowie auf weiterführende Vorgehensweisen.



## 2. Theoretische Grundlagen

Um die Ergebnisse ausreichend detailliert nachvollziehen und interpretieren zu können, sind theoretische und mathematische Grundkenntnisse notwendig. Die relevanten Aspekte werden im Folgenden erläutert.

### 2.1. Grundlegende Gleichungen

Die Grundlage für die Herleitung der Dünnschichtgleichung, welche wiederum die Grundlage aller hier angestellten Berechnungen ist, bilden die *Navier-Stokes Gleichungen* [Dav15, Kap. 2.1]. Sie beschreiben die Impulsbilanz innerhalb einer Flüssigkeit unter Berücksichtigung diverser Eigenschaften wie z.B. der Trägheit, der Reibung und der Viskosität. Unter der Annahme inkompressibler Fluide, insbesondere Flüssigkeiten mit konstanter Dichte  $\varrho = \text{const.}$ , vereinfachen sich die Navier-Stokes Gleichungen zu folgendem Ausdruck [Thi07, Kap. 2.2]:

$$\varrho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \underline{\tau} + \vec{f}. \quad (2.1)$$

Der Einfachheit halber werden hier zweidimensionale Systeme betrachtet. Dabei ist  $\varrho$  die Dichte des Fluids,  $\vec{f}$  die Volumenkraftdichte,  $\underline{\tau}$  der Spannungstensor und  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

eines Flüssigkeitselements mit den Komponenten  $u$  in x-Richtung und  $w$  in z-Richtung wie Abbildung 2.1 dargestellt. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt unter den soeben gemachten Annahmen weiterhin die *Inkompressibilitätsbedingung* [Thi07, Kap. 2.2]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.3)$$

Das Verhalten eines Films auf einem Substrat wird außerdem durch Bedingungen an den Grenzflächen bestimmt. Die sogenannte *no-slip Bedingung* besagt, dass es der Flüssigkeit an der Kontaktfläche zum Substrat nicht möglich ist sich zu bewegen [Thi07, Kap. 2.2]:

$$\vec{v} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0. \quad (2.4)$$

Die Änderung der Oberfläche  $h(x)$  mit der Zeit wird durch die *kinematische Randbedingung* beschrieben, die besagt, dass die Grenzfläche dem Fluss des Fluids folgt [Thi07, Kap. 2.2]:

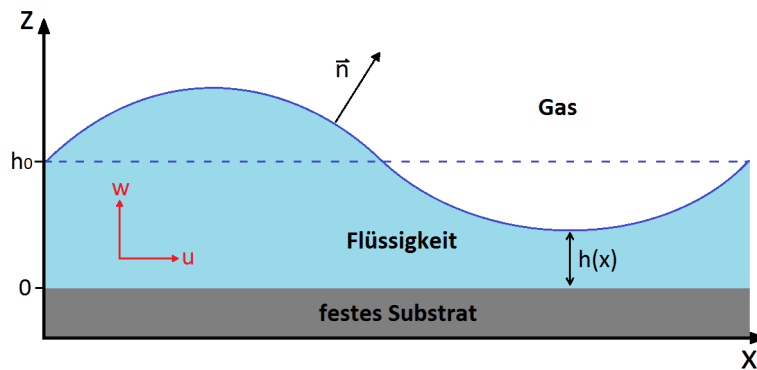
$$\partial_t h = w - u \partial_x h. \quad (2.5)$$

Weiterhin wird das Verhalten der Oberfläche durch das *Kräftegleichgewicht* bestimmt [Hon14, Kap. 9.1]:

$$\underline{\tau} \vec{n} = (\Pi + \gamma_{lg} \kappa) \vec{n}. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\underline{\tau}$  der Spannungstensor,  $\Pi$  der Derjaguin Druck, welcher in Kapitel 2.2 noch näher erläutert wird,  $\gamma_{lg}$  die Grenzflächenspannung zwischen Flüssigkeit und darüber liegendem Gas,  $\kappa$  die Krümmung der Oberfläche und  $\vec{n}$  der Normalvektor, der senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit steht (siehe Abb. 2.1):

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$



**Abbildung 2.1.:** Schema des eindimensionalen Höhenprofils  $h(x)$  eines Films, auf einem festen Substrat mit den Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $w$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung.  $h_0$  beschreibt dabei die durchschnittliche Höhe des Films und  $\vec{n}$  den Normalvektor der senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit steht.

## 2.2. Wechselwirkung mit dem Substrat

Die Theorie dieses Kapitels folgt der Strukturierung von [Thi07, Kap. 2.4]. Das Verhalten von Flüssigkeiten auf festen Substraten kann in der Hydrodynamik durch das Drei-Schichten-Modell beschrieben werden [Köp11, Kap. 2.1], welches von einem festen Substrat als Träger (1. Schicht) für eine Flüssigkeit (2. Schicht) und einem darüber liegende Gas (3. Schicht) entsprechend Abbildung 2.1 ausgeht. Das Schema eines solchen Systems ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Für einen statischen Tropfen mit  $\vec{v} = 0$  und unter Vernachlässigung der Volumenkräfte  $\vec{f} = 0$  vereinfacht sich Gleichung 2.1 zur *Bulk Gleichung*

$$-\nabla p = 0. \quad (2.8)$$

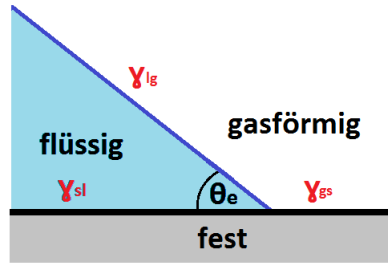
Daraus ergibt sich mit Hilfe der Randbedingung 2.6, welche unter den gegebenen Bedingungen eine konstante Krümmung  $\kappa$  der Oberfläche beschreibt, für das Profil eine sphärische Form bzw. ein flacher Film für sehr große Radien  $R$  [Thi07, Kap. 2.4]. Diese sphärischen Profile sind einem Druck ausgesetzt, der *Laplace Druck* genannt wird und proportional zum Kehrwert des Radius  $R$  ist [TKG<sup>+</sup>14a]:

$$p_L = \partial_{xx} h \approx \frac{1}{R}. \quad (2.9)$$

Bei nicht vollständig benetzbaren Substraten treten Kontaktlinien auf, an denen die freie Oberfläche der Flüssigkeit das Substrat berührt [Köp11, Kap. 2.1]. Die Energie solcher Systeme ergibt sich aus der Summe der Grenzflächenspannungen  $\gamma_{ij}$ . Weiterhin lässt sich aus dem Kräftegleichgewicht an der Grenzfläche eine Bedingung ableiten:

$$\cos(\theta_e) = \frac{\gamma_{gs} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}}. \quad (2.10)$$

Diese Gleichung, die von den verschiedenen Grenzflächenspannungen  $\gamma_{ij}$  ( $l = \text{liquid}$ ,  $s = \text{solid}$ ,  $g = \text{gas}$ ) und von dem Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_e$  zwischen Tropfen und Substrat abhängt, heißt *Young-Laplace Gesetz* und geht von topografisch und chemisch homogenen Substraten aus [Thi07, Kap. 2.4]. Die Kontaktlinie eines Tropfens mit dem Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_e$  ist schematisch in Abbildung 2.2 dargestellt. Das Young-Laplace Gesetz beschreibt den Gleichgewichtskontaktwinkel eines statischen Tropfens und somit die Benetzbarkeit des Substrats, auch als *wetting* bezeichnet.

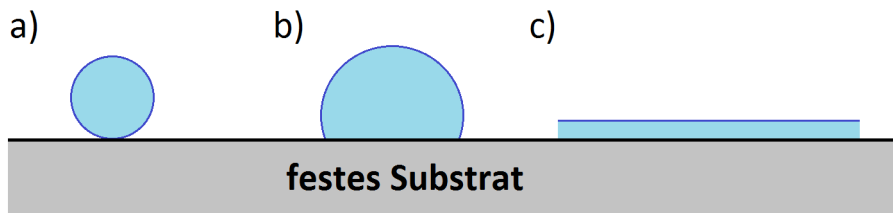


**Abbildung 2.2.:** Schema der Kontaktlinie eines Tropfens auf einem festen Substrat mit dem Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_e$ . Dabei beschreibt  $\gamma_{sl}$  die Grenzflächenspannung zwischen festem Substrat und Flüssigkeit,  $\gamma_{gs}$  die Grenzflächenspannung zwischen festem Substrat und Gas und  $\gamma_{lg}$  die Grenzflächenspannung zwischen Flüssigkeit und Gas.

Weiterhin kann Gleichung 2.10 durch Definition des *Ausbreitungskoeffizienten*  $S = \gamma_{gs} - \gamma_{sl} - \gamma_{lg}$  umgeformt werden zu

$$S = \gamma_{lg}(\cos(\theta_e) - 1). \quad (2.11)$$

Nun ergeben sich die Grenzfälle  $S = -2\gamma_{lg}$  für  $\theta_e = \pi$  und  $S = 0$  für  $\theta_e = 0$ . Der erste Fall beschreibt ein nicht benetzbares Substrat, auf dem der Tropfen sich nicht ausbreiten kann. Der zweite Fall beschreibt ein vollständig benetzbares Substrat auf dem sich die Flüssigkeit solange ausbreitet bis sie einen horizontalen Film bildet. Alle Fälle dazwischen beschreiben teilweise benetzbare Substrate [Köp11, Kap. 2.1]. Die entsprechenden Profile sind in Abbildung 2.3 dargestellt.

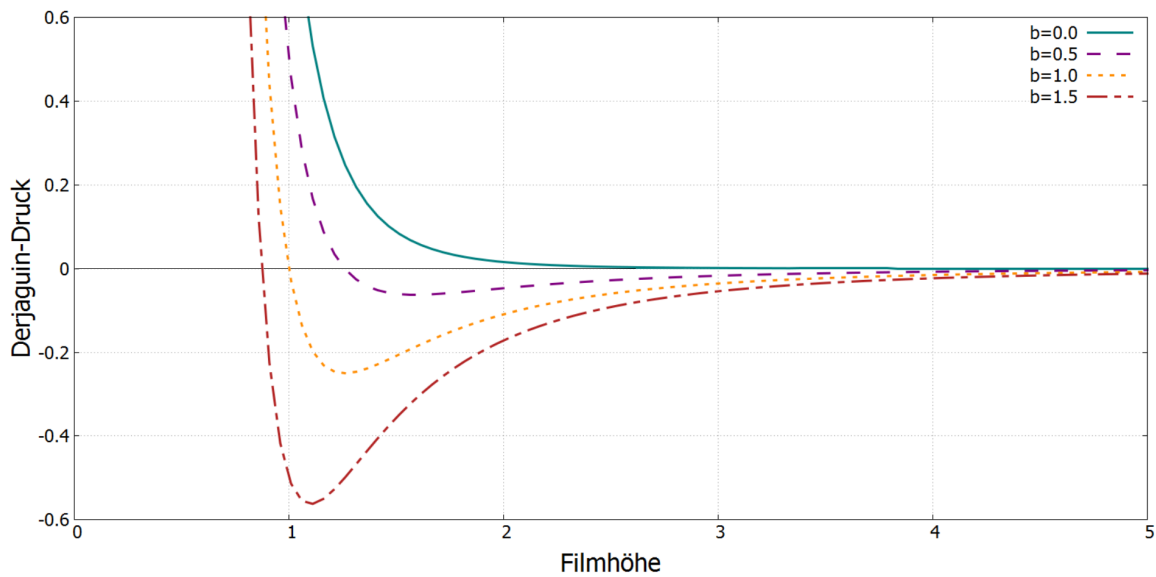


**Abbildung 2.3.:** Schema der Tropfenprofile für nicht benetzbare (a), teilweise benetzbare (b) und vollständig benetzbare (c) Substrate. Die Benetzbarkeit des Substrats bzw. die Ausdehnung des Tropfens kann mit Hilfe des Ausbreitungskoeffizienten  $S$  über den Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_e$  beschrieben werden. Dabei kann der Kontaktwinkel von  $\theta_e = 0$  für vollständig benetzbare Substrate bis  $\theta_e = \pi$  für nicht benetzbare Substrate variieren.

Bisher wurden nur statische Tropfen mit einem festen Gleichgewichtskontaktwinkel an der Kontaktlinie betrachtet. Als sehr viel problematischer erweist sich nun die Beschreibung rutschender oder sich ausbreitender Tropfen, da sich auf Grund der no-slip-Bedingung 2.4 die Kontaktlinie nicht verschieben kann. Auch die Beschreibung von

sehr dünnen Filmen ist nur bedingt möglich, da es zwischen den beiden Grenzflächen zu Wechselwirkungen kommt, die das Drei-Schichten-Modell nicht beschreibt [HS71, Kap. 1 u. 2][SS80, Kap. 1].

Für einen flüssigen Film ergibt sich die gesamte Energie aus der Summe der Grenzflächenenergien  $\gamma_{sl}$  zwischen Substrat und Fluid und  $\gamma_{lg}$  zwischen Fluid und Gas. Für ein trockenes Substrat ohne Film ergibt sich die Energie allein aus der Grenzflächenspannung zwischen festem Substrat und Gas  $\gamma_{sg}$ . Dies gilt jedoch nur für hinreichend dicke Filme. Bei extrem dünnen Filmen kommt es zu weiteren Wechselwirkungen zwischen den Grenzflächen. Derjaguin und Mitarbeiter [Thi07, Kap. 2.4] fanden heraus, dass für solche Filme eine zusätzliche Energie  $f(h)$  existiert, welche von der Dicke  $h$  des Films abhängt und in einer anziehenden bzw. abstoßenden Kraft, auch *conjoining-* bzw. *disjoining Pressure* genannt, zwischen den beiden Grenzflächen des Films resultiert. Sie äußert sich in einem Druckterm  $\Pi = -\frac{df}{dh}$ , welcher als *Derjaguin Druck* bezeichnet wird und zusätzlich zum Laplace Druck berücksichtigt werden muss.

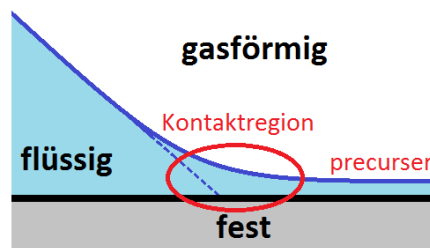


**Abbildung 2.4.:** Verlauf des Derjaguin Druckes  $\Pi(h)$  für verschiedene Benetzbarkeiten  $b$ . Gleichen sich die anziehenden und abstoßenden Drücke, auch *conjoining-* und *disjoining Pressure* genannt, aus, bildet sich ein stabiler Film mit der Höhe  $h_0$  der Nullstelle  $\Pi(h_0) = 0$  aus. Dieser Film wird *Precursor* genannt und repräsentiert ein Minimum der Energie  $f(h) = -\int \Pi(h)dh$ . Für Filme unterhalb dieser Höhe steigen die abstoßenden Drücke schnell gegen unendlich an. Für Filme oberhalb dieser Höhe tritt ein anziehender Druck auf, der mit zunehmender Höhe  $h$  gegen Null konvergiert.

Er wird von der langreichweitigen, anziehenden Van-der-Waals Wechselwirkung zwischen der Oberfläche des Substrats und der Oberfläche der Flüssigkeit sowie von kurzreichweitigen, abstoßenden Kräften hervorgerufen [Thi07, Kap. 2.4][GW03, Kap. 1]. In den folgenden Kapiteln wird immer ein Derjaguin Druck der Form

$$\Pi(h) = \frac{b}{h^3} - \frac{1}{h^6} \quad (2.12)$$

verwendet. Dabei ist  $b$  die Benetzbarkeit, die für den Fall eines heterogenen Substrats lateral variieren kann,  $\frac{1}{h^3}$  der langreichweitige conjoining Pressure und  $\frac{1}{h^6}$  der kurzreichweitige disjoining Pressure. In Abbildung 2.4 ist der Verlauf des Derjaguin Drucks für verschiedene Benetzbarkeiten  $b$  dargestellt. Die Gesamtenergie eines dünnen Films ist somit gegeben durch  $E = \gamma_{sl} + \gamma_{lg} - f(h)$  mit  $f(h) = -\int \Pi(h)dh$ . Betrachtet man den Verlauf von  $\Pi(h)$ , so fällt auf, dass der Derjaguin Druck für  $h \rightarrow \infty$  gegen  $\Pi(h) \rightarrow 0$  konvergiert und sich für Filme höherer Dicke also eine Energie von  $E = \gamma_{sl} + \gamma_{lg}$  ergibt, wie es zuvor schon beschrieben wurde. Für  $h \rightarrow 0$  hingegen divergiert  $\Pi(h) \rightarrow \infty$ . Der disjoining-pressure sorgt also dafür, dass nie eine Dicke von  $h = 0$  erreicht werden kann und das Substrat so immer mit einem dünnen Film bedeckt ist. Die Energie  $f(h)$  erreicht ihr Minimum, wenn der Derjaguin Druck  $\Pi(h_0) = 0$  ist, sich also conjoining- und disjoining Pressure genau ausgleichen [GW03, Kap. 1]. An dieser Stelle  $h_0$  bildet sich ein stabiler Film aus, der *Precursor* genannt wird und typischerweise die Höhe von einer Molekülschicht bis zu 10 nm besitzt [BEI<sup>+</sup>09]. Da die Kontaktlinie eines Tropfens nun nicht mehr die Oberfläche des Substrats berührt, sondern in den Precursor übergeht, ist sie von der no-slip Bedingung entbunden und kann sich bewegen. Dabei handelt es sich nicht um einen mathematischen Trick, um das Problem bequem zu lösen, sondern um ein reales physikalisches Phänomen [HI19]. Man spricht nunmehr von einer Kontaktregion, wie sie in Abbildung 2.5 dargestellt ist. Da sich der Derjaguin Druck nur auf Bereiche geringer Dicke auswirkt, werden bei Tropfen nur die Kontaktregionen von ihm beeinflusst.



**Abbildung 2.5.:** Schema der Kontaktregion zwischen Tropfen und dem Precursor. Der Kontaktwinkel wird weiterhin über eine gedachte Kontaktlinie bestimmt, die in der Abbildung gestrichelt dargestellt ist. Da die Tropfenoberfläche nun nicht mehr das feste Substrat berührt sondern in den Precursor übergeht, ist es dem Tropfen möglich sich zu bewegen.

## 2.3. Langwellennäherung

Mittels der *Langwellennäherung*, auch *lubrication approximation* genannt, kann die Navier-Stokes Gleichung weiter vereinfacht werden. Diese Näherung hat eine lange Geschichte, die z.B. von Oron [OB97] sehr ausführlich beschrieben wird. Sie besagt, dass die Ausdehnung  $L$  des Films sehr groß ist im Verhältnis zu dessen Dicke  $h$ :

$$L \gg h \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{L} = \epsilon \ll 1. \quad (2.13)$$

Somit können nun zwei neuen Skalen für die  $x$ - und  $z$ - Koordinaten eingeführt werden:

$$x = Lx' = \frac{h}{\epsilon}x', \quad z = hz'. \quad (2.14)$$

Die Gleichung kann nun in dem Kleinheitsparameter  $\epsilon$  entwickelt und durch Vernachlässigung höherer Ordnungen vereinfacht werden.

## 2.4. Die Dünnschichtgleichung

Aus den zuvor besprochenen Bedingungen kann nun die *Dünnschichtgleichung* hergeleitet werden [Thi07, Kap. 2.8]:

$$\partial_t h = -\partial_x \{Q(h)\partial_x [\partial_{xx} h - \partial_h f(h)] + \chi(h)\}, \quad (2.15)$$

$$\text{mit:} \quad \text{Mobilitätsfaktor:} \quad Q(h) = h^3, \quad (2.16)$$

$$\text{Triebkraft:} \quad \chi(h) = \vartheta \cdot Q(h), \quad (2.17)$$

$$\text{Laplace-Druck:} \quad p_L = \partial_{xx} h \approx \frac{1}{R}, \quad (2.18)$$

$$\text{Derjaguin Druck:} \quad \partial_h f(h) = -\Pi(h) = \frac{1}{h^3} \cdot \left[ 1 + \rho \sin \left( \frac{2\pi}{P} x \right) \right] - \frac{1}{h^6}. \quad (2.19)$$

Dabei ist  $\vartheta$  der Neigungswinkel des Substrats zur Äquipotentialebene der Gravitation bzw. allgemein die Triebkraft,  $R$  der Radius der Tropfenkuppe [TKG<sup>+</sup>14a],  $\rho$  die Heterogenitätsstärke und  $P$  die Periode der Heterogenität. Für die Form der Dünnschichtgleichung ohne Triebkraft  $\chi(h) = 0$  können einige Eigenschaften herausgestellt werden. Unter anderem wird im folgenden die Gradientenstruktur der Dünnschichtgleichung gezeigt. Der

Term in den eckigen Klammern in Gleichung 2.15 entspricht dabei dem Negativen eines verallgemeinerten chemischen Potentials oder Druckes  $\mu(x)$  und kann aus der Variation einer freien Energie  $F(h)$  hergeleitet werden kann:

$$F(h(x')) = \underbrace{\int_0^L \frac{1}{2} (\partial_{x'} h(x'))^2 dx'}_I + \underbrace{\int_0^L f(h, x') dx'}_{II}, \quad (2.20)$$

$$\mu(x) = \frac{\delta F(h(x'))}{\delta h(x)} = \frac{\delta I}{\delta h(x)} + \frac{\delta II}{\delta h(x)}. \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \text{I :} \quad \frac{\delta I}{\delta h(x)} &= \int_0^L \frac{\delta}{\delta h(x)} \frac{1}{2} (\partial_{x'} h(x'))^2 dx' \\ &= \int_0^L \partial_{x'} \underbrace{\frac{\delta h(x')}{\delta h(x)}}_{=\delta(x'-x)} \partial_{x'} h(x') dx' \\ &\stackrel{\text{part. Integ.}}{=} \underbrace{[\partial_{x'} h(x') \delta(x' - x)]_0^L}_{=0} - \int_0^L \partial_{x'x'} h(x') \delta(x' - x) dx' \\ &= -\partial_{xx} h(x) \quad \text{Laplace-Druck.} \\ \text{II :} \quad \frac{\delta II}{\delta h(x)} &= \int_0^L \frac{\delta}{\delta h(x)} f(h, x') dx' \\ &= \int_0^L \underbrace{\frac{\delta h(x')}{\delta h(x)}}_{=\delta(x'-x)} \cdot \partial_h f(h) dx' \\ &= \partial_h f(h, x) \quad \text{Derjaguin Druck.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \partial_h f(h) - \partial_{xx} h.$$

Weiterhin lässt sich zeigen, dass die Dünnschichtgleichung massenerhaltend ist, da für den Strom  $J$  gilt:

$$J = -Q(h) \cdot \partial_x \mu(x) \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \partial_t h = -\partial_x J. \quad (2.23)$$

Hiermit lässt sich die Integralbedingung der Massenerhaltung für ein periodisches System der Breite  $L$  herleiten:

$$\begin{aligned} \int_0^L \partial_t h \, dx &= - \int_0^L \partial_x J \, dx \\ &= J(0) - J(L) = 0 \\ \Rightarrow \int_0^L h \, dx &= \text{const..} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Betrachtet man außerdem die zeitliche Entwicklung der freien Energie  $F$ , so kommt man zu dem Schluss, dass sie als Folge der Gradientenstruktur mit der Zeit abnimmt:

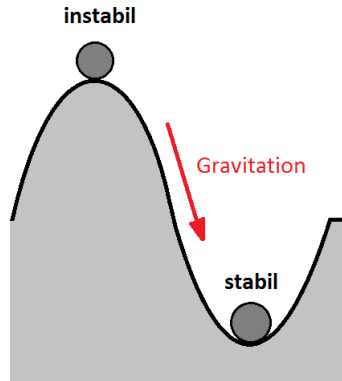
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(h) &= \int_0^L \frac{\delta F}{\delta h} \frac{dh}{dt} \, dx \\ &= \int_0^L \frac{\delta F}{\delta h} \cdot \partial_x \left( Q(h) \partial_x \frac{\delta F}{\delta h} \right) \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Integ.}}{=} - \int_0^L \underbrace{Q(h) \cdot \left( \partial_x \frac{\delta F}{\delta h} \right)^2}_{>0} \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Das System strebt also immer den Zustand geringster Energie an, es relaxiert [Thi10b, Kap. 1][Thi07, Kap. 2.8]. Hier kann die Triebkraft in die Gradientenstruktur mit einbezogen werden, dies ist jedoch nur in speziellen Fällen möglich.

## 2.5. Bifurkationen

Nichtlineare Systeme, wie z.B. solche die durch die Dünnschichtgleichung beschrieben werden, können in ihrer Dynamik stationäre Lösungen aufweisen. Diese stationären Punkte können sowohl stabil, als auch instabil sein und werden *Fixpunkte* genannt. Als Beispiel aus der Mechanik kann eine Kugel auf einem unebenen Untergrund betrachtet werden, gemäß Abbildung 2.6. Liegt sie auf der Kuppe eines Hügels, so ist sie möglicherweise stationär, aber bezüglich der Gravitation nicht stabil, da schon kleine Auslenkungen genügen, um sie ins Rollen zu bringen. Liegt die Kugel hingegen am tiefsten Punkt einer Mulde, so ist sie stationär und stabil, da sie bei kleinen Auslenkungen in die Ausgangslage zurück fällt. Die Dynamik eines solchen Systems kann sich unter Variation der beteiligten Parameter verändern. So können stationäre Punkte entstehen oder

verschwinden oder auch ihre Stabilität wechseln. Diese qualitativen Veränderungen in der Dynamik werden *Bifurkationen* genannt [Str14, Kap. 3.1].



**Abbildung 2.6.:** Veranschaulichung von stabilen und instabilen Zuständen anhand des Beispiels einer Kugel auf der Spitze eines Hügels bzw. im tiefsten Punkt einer Mulde. Die Kugel auf der Spitze ist dabei instabil, da schon kleine Auslenkungen genügen um sie ins Rollen zu bringen. Die Kugel in der Mulde hingegen ist stabil, da sie bei kleinen Auslenkungen in die Ausgangslage zurückfällt.

## Stabilitätsanalyse

Ein  $N$ -dimensionales System kann durch  $N$  Differenzialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(x_1, \dots, x_N). \quad (2.25)$$

Um ein solches System zu linearisieren, wird die Jakobi-Matrix

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{0,1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{0,N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_{0,1}} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_{0,N}} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

um eine Nullstelle  $\vec{x}_0$  aufgestellt. Nun kann eine lineare Gleichung aufgestellt werden [Str14, Kap. 6.3]

$$\dot{\vec{x}} = \underline{J}\vec{x} \quad \text{mit der Störung } \nu \text{ um den Fixpunkt } \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\nu}(t). \quad (2.27)$$

Diese Gleichung kann mit einem Ansatz der Form  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$  mit dem festen Vektor  $\vec{v}$  und der Wachstumsrate  $\lambda$  in ein Eigenwertproblem überführt werden:

$$\dot{\vec{x}} = \underline{J} \vec{x} \quad (2.28)$$

$$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} \underline{J} \vec{v} \quad (2.29)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \vec{v} = \underline{J} \vec{v}. \quad (2.30)$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  können über das charakteristische Polynom

$$\det(\underline{J} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbb{1}_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.31)$$

gefunden werden [Str14, Kap. 5.2]. Sind die Eigenwerte negativ, so handelt es sich um einen stabilen Punkt. Sind sie hingegen positiv, ist der Punkt instabil. Ein Punkt kann demnach seine Stabilität wechseln, wenn die Eigenwerte ihr Vorzeichen wechseln.

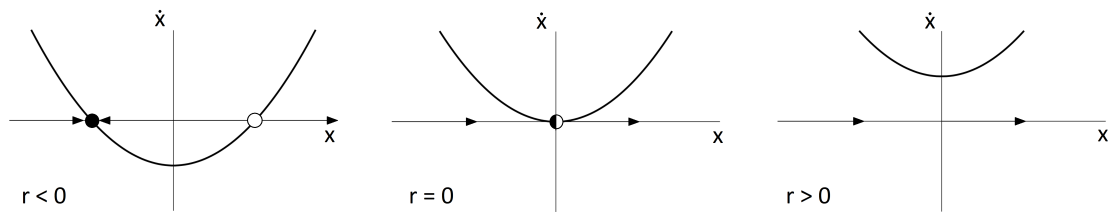
Im Folgenden werden die grundlegenden Bifurkationstypen vorgestellt, die in den Ergebnissen zu finden sind. Dabei werden zuerst die eindimensionalen Saddle-Node und Pitchfork Bifurkationen behandelt und anschließend die zweidimensionale Hopf Bifurkation.

### 2.5.1. Saddle-Node Bifurkation

Die sogenannte *Saddle-Node* Bifurkation (Sattel-Knoten Bifurkation) ist der bekannteste Fall, bei dem zwei Fixpunkte entstehen oder verschwinden können. Als Beispiel kann die Differenzialgleichung

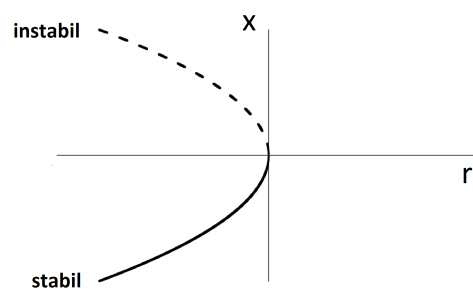
$$\dot{x} = x^2 + r \quad (2.32)$$

betrachtet werden.  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  bezeichnet dabei die Änderung des Ortes mit der Zeit. Die Polstellen der rechten Handseite der Gleichung markieren die stationären Punkte, da dort  $\dot{x} = 0$  gilt. Diese hängen jedoch von dem Parameter  $r$  ab [Str14, Kap. 3.1]. In der graphischen Darstellung von Gleichung 2.32 in Abbildung 2.7 ist zu sehen, dass die zwei Fixpunkte für zunehmende Parameterwerte  $r$  aufeinander zu laufen und bei  $r = 0$  miteinander zu Einem verschmelzen. Für Werte  $r > 0$  verschwindet dieser Fixpunkt.



**Abbildung 2.7.:** Fixpunkte einer Saddle-Node Bifurkation der Form  $\dot{x} = x^2 + r$  bei verschiedenen Parameterwerten  $r$ . Dabei markieren schwarze Punkte stabile, weiße Punkte instabile und halbe gefüllte Punkte metastabile Lösungen. Die Pfeile geben die Bewegungsrichtung an. Steigt der Wert des Parameters  $r$  an, bewegen sich die Fixpunkte aufeinander zu bis sie bei  $r = 0$  annihilieren.

Ist die entsprechende Kurve im Bereich links neben einem Fixpunkt positiv und im Bereich rechts neben dem Fixpunkt negativ definiert, so deutet dies auf eine Bewegung in positive  $x$ -Richtung im linken Bereich und auf eine Bewegung in negative  $x$ -Richtung im rechten Bereich hin. Das System bewegt sich also auf den Fixpunkt zu, somit ist dieser stabil. Ist das Gegenteil der Fall (links negativ und rechts positiv), so handelt es sich um einen instabilen Fixpunkt. Liegt die Kurve auf beiden Seiten im negativen oder positiven Bereich, so ist der Fixpunkt metastabil. Trägt man nun die  $x$ -Werte der Fixpunkte über den jeweiligen Parameter auf, so erhält man ein Bifurkationsdiagramm, in dem die Fixpunkte als Äste verfolgt werden können [Str14, Kap. 3.1]. Das Bifurkationsdiagramm für Gleichung 2.32 ist in Abbildung 2.8 dargestellt.



**Abbildung 2.8.:** Bifurkationsdiagramm einer Saddle-Node Bifurkation der Form  $\dot{x} = x^2 + r$  bei variiertem  $r$ . Die Äste der beiden Fixpunkte  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-r}$  aus Abbildung 2.7 laufen aufeinander zu und annihilieren bei  $r > 0$ .

Es ist zu erkennen, dass die beiden Äste in Abbildung 2.8 sich immer weiter annähern, bis sie sich treffen und annihilieren. Der Punkt an dem sie sich Treffen wird Bifurkationspunkt oder Fold genannt. Um einen Fixpunkt auf seine Stabilität hin zu untersuchen, kann eine Störung in die Gleichung eingebracht und das Verhalten des Systems untersucht werden. Für einen definierten Wert des Parameters  $r = -r_0 < 0$  können die

Fixpunkte  $x_{1,2}$  gefunden werden:

$$\begin{aligned} 0 &= x_{1,2}^2 - r_0 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \pm\sqrt{r_0}. \end{aligned}$$

Bringt man nun eine kleine Störung  $0 < |\epsilon| < 1$  um einen Fixpunkt ein  $x = x_{1,2} \pm \epsilon$  und verwendet diesen Ausdruck in Gleichung 2.32, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\pm\sqrt{r_0} \pm \epsilon)^2 - r_0 \\ &= \pm\epsilon\sqrt{r_0} + \epsilon^2. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon$  sehr klein ist, können die höheren Ordnungen vernachlässigt werden. Die resultierende lineare Gleichung kann anschließend gelöst werden. Je nachdem, welcher der folgenden Fälle auftritt, ist der Punkt stabil, instabil oder metastabil:

$$\dot{x} > 0 \text{ für } \epsilon < 0 \text{ und } \dot{x} < 0 \text{ für } \epsilon > 0 \Rightarrow \text{stabil}, \quad (2.33)$$

$$\dot{x} > 0 \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } \dot{x} < 0 \text{ für } \epsilon < 0 \Rightarrow \text{instabil}, \quad (2.34)$$

$$\dot{x} > 0 \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } \dot{x} > 0 \text{ für } \epsilon < 0 \Rightarrow \text{metastabil}, \quad (2.35)$$

$$\dot{x} < 0 \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } \dot{x} < 0 \text{ für } \epsilon < 0 \Rightarrow \text{metastabil}. \quad (2.36)$$

## 2.5.2. Pitchfork Bifurkation

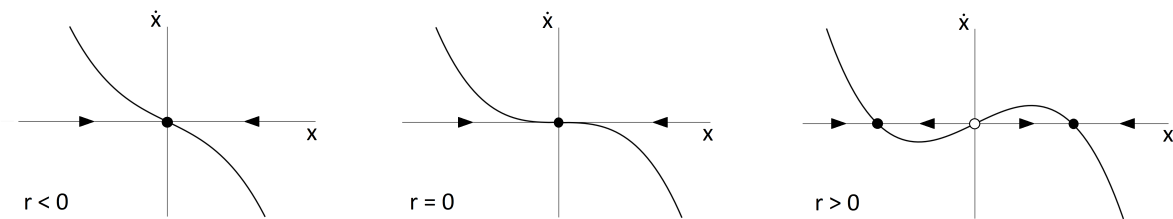
Eine weitere Form ist die *Pitchfork* Bifurkation (Heugabel Bifurkation). Sie wird zur Beschreibung von symmetrischen Systemen verwendet, bei denen Fixpunkte paarweise auftreten. Hierbei werden zwei verschiedene Typen unterschieden.

### Superkritische Pitchfork Bifurkation

Eine *superkritische* Pitchfork Bifurkation kann z.B. durch ein System der Form

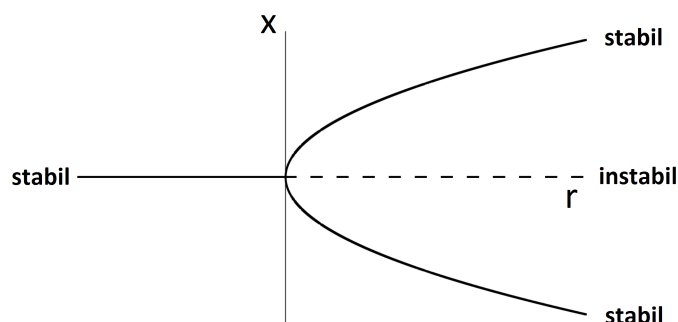
$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (2.37)$$

gegeben sein. Diese Gleichung ist invariant bezüglich der Vertauschung  $x \rightarrow -x$  und weist daher eine links-rechts-Symmetrie auf. Der kubische Term realisiert eine stabilisierende Kraft, welche das System zu dem Punkt  $x = 0$  zieht [Str14, Kap. 3.4]. Die Fixpunkte für verschiedene Werte des Parameters  $r$  sind in Abbildung 2.9 dargestellt.



**Abbildung 2.9.:** Fixpunkte einer superkritischen Pitchfork Bifurkation der Form  $\dot{x} = rx - x^3$  bei verschiedenen Parameterwerten  $r$ . Dabei markieren schwarze Punkte stabile und weiße Punkte instabile Lösungen. Die Pfeile geben die Bewegungsrichtung an. Bei zunehmendem Wert des Parameters  $r$  wird der Fixpunkt im Ursprung immer weniger stabil bis er bei  $r > 0$  instabil wird und zwei weitere stabile Fixpunkte an den Stellen  $x_{1,2} = \pm\sqrt{r}$  entstehen.

Für den Parameterwert  $r < 0$  existiert nur ein stabiler Fixpunkt. Wird er jedoch weiter erhöht und erreicht einen Wert  $r > 0$ , so wird der Fixpunkt im Ursprung instabil und es entstehen zwei neue stabile Fixpunkte an den Stellen  $x_{1,2} = \pm\sqrt{r}$  [Str14, Kap. 3.4]. Das zugehörige Bifurkationsdiagramm ist in Abbildung 2.10 dargestellt.



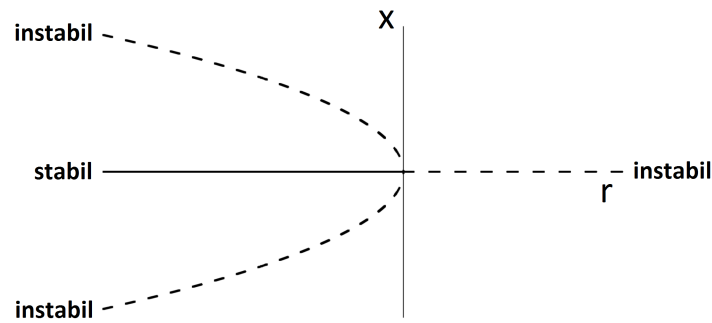
**Abbildung 2.10.:** Bifurkationsdiagramm einer superkritischen Pitchfork Bifurkation der Form  $\dot{x} = rx - x^3$  bei variiertem  $r$ . Bei  $r < 0$  existiert zunächst nur ein stabiler Fixpunkt. Bei  $r > 0$  wird der Ast instabil und es entstehen zwei neue stabile Äste entsprechend der Fixpunkte  $x_{1,2} = \pm\sqrt{r}$  aus Abbildung 2.9.

### Subkritische Pitchfork Bifurkation

Wirkt der kubische Term, anders als bei der superkritischen Pitchfork Bifurkation, destabilisierend, so handelt es sich um eine *subkritische* Pitchfork Bifurkation

$$\dot{x} = rx + x^3. \quad (2.38)$$

Das Bifurkationsdiagramm für diesen Fall ist in Abbildung 2.11 dargestellt.

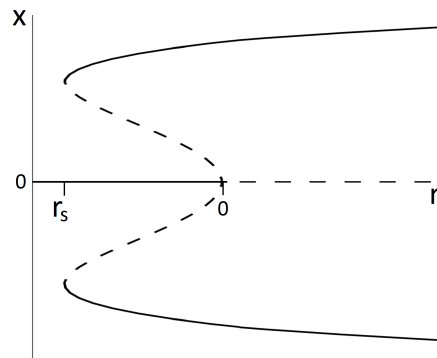


**Abbildung 2.11.:** Bifurkationsdiagramm einer subkritischen Pitchfork Bifurkation der Form  $\dot{x} = rx + x^3$  bei variiertem  $r$ . Bei  $r < 0$  existieren ein stabiler und zwei instabile Äste entsprechend der Fixpunkte  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-r}$ . Bei  $r > 0$  annihilieren die beiden instabilen Äste, während der zuvor stabile Ast instabil wird. Im Bereich  $r > 0$  divergieren alle Lösungen.

Die beiden von Null verschiedenen Fixpunkte  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-r}$  sind nun instabil und existieren nur unterhalb der Bifurkation für  $r < 0$ . Da für  $r > 0$  kein stabiler Ast mehr existiert, divergieren die Lösungen in diesem Bereich. In realen physikalischen Systemen werden solche Fälle durch Terme höherer Ordnung wieder stabilisiert. Ein solches System kann z.B. durch

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \quad (2.39)$$

gegeben sein. Das entsprechende Bifurkationsdiagramm ist in Abbildung 2.12 dargestellt. Für kleine Werte von  $x$  entspricht der Verlauf dem in Abbildung 2.11. Nimmt  $x$  jedoch zu, so dominiert der  $x^5$  Term gegenüber dem  $x^3$  Term und stabilisiert den Ast in einem Fold bei  $r = r_s$ .



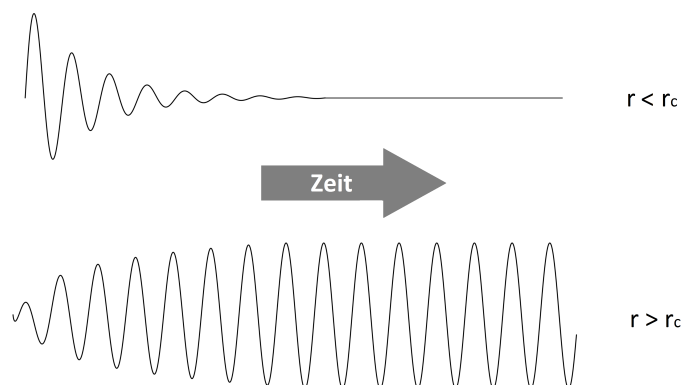
**Abbildung 2.12.:** Bifurkationsdiagramm einer subkritischen Pitchfork Bifurkation der Form  $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$  bei variiertem  $r$ . Ab der Stelle  $r = r_s$  dominiert der  $x^5$  Term gegenüber dem  $x^3$  Term und stabilisiert den Ast in einem Fold bei  $r = r_s$ . Der instabile Ast geht dann in einen stabilen Ast über.

### 2.5.3. Hopf Bifurkation

Um nun beispielsweise das Verhalten eines zweidimensionalen Systems unter Variation eines Parameters  $r$  zu untersuchen, müssen die beiden komplexen Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ermittelt werden. Liegen die Realteile beider Eigenwerte im negativen Bereich  $\text{Re}(\lambda) < 0$  so ist der Punkt stabil. Ein solcher Punkt kann destabilisiert werden, wenn der Realteil einer der beiden Eigenwerte in den positiven Bereich übergeht. Sind die Eigenwerte in diesem Fall beide reell  $\text{Im}(\lambda_1) = \text{Im}(\lambda_2) = 0$ , handelt es sich um eine der bisher behandelten Bifurkationen. Besitzen sie hingegen einen Imaginärteil  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ , so sind sie komplex konjugiert zueinander  $\text{Im}(\lambda_1) = -\text{Im}(\lambda_2)$  und es liegt eine *Hopf* Bifurkation vor. Auch hier werden zwei Fälle unterschieden.

#### Superkritische Hopf Bifurkation

Hängen die Eigenwerte eines stabilen Punktes von einem Parameter  $r$  ab, so kann er ab einem kritischen Wert  $r = r_c$  das Vorzeichen wechseln und der Punkt wird destabilisiert  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . Handelt es sich anschließend um eine sinusförmige Oszillation mit fester Amplitude um den vorherigen stationären Zustand, so spricht man von einer *superkritischen* Hopf Bifurkation [Str14, Kap. 8.2]. Die Oszillationen eines solchen Systems für  $r < r_c$  bzw.  $r > r_c$  sind in Abbildung 2.13 schematisch dargestellt. Liegt der Parameterwert unterhalb des kritischen Wertes  $r < r_c$ , ist die Wachstumsrate negativ und das System stabilisiert sich in einem Punkt. Liegt der Wert darüber  $r > r_c$ , wird die Wachstumsrate positiv und der Punkt instabil. In diesem Fall beginnt das System um den Punkt zu schwingen, bis es eine *Sättigungsamplitude* erreicht hat.



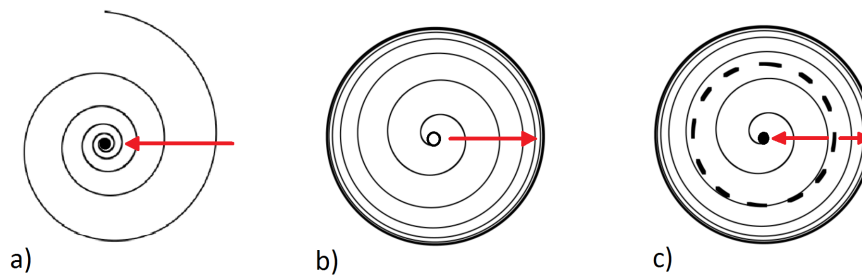
**Abbildung 2.13.:** Schema der Oszillationen bei einer superkritischen Hopf Bifurkation. Liegt der Parameter unter dem kritischen Wert  $r < r_c$ , ist die Wachstumsrate negativ und das System stabilisiert sich in einem Punkt (oben). Liegt er darüber  $r > r_c$ , ist die Wachstumsrate positiv und der Punkt wird instabil (unten). Eine superkritische Hopf Bifurkation liegt vor, wenn das System im instabilen Zustand mit einer festen, kleinen Amplitude um die vorherige Lösung oszilliert.

Ein Beispiel für eine superkritische Hopf Bifurkation bildet das System

$$\dot{\rho} = r\rho - \rho^3, \quad (2.40)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + b\rho^2. \quad (2.41)$$

Dabei ist  $r$  der Kontrollparameter, der die Stabilität des Fixpunktes bestimmt,  $\omega$  die Frequenz der Oszillationen und  $b$  die Abhängigkeit der Frequenz von der Amplitude. Der Einfachheit halber werden dabei Polarkoordinaten verwendet. Im Phasenraum werden gedämpfte oder ansteigende Oszillationen wie in Abbildung 2.14 als Spiralen dargestellt.



**Abbildung 2.14.:** Schema der Oszillationen einer Hopf Bifurkation. Der Radius der Kurve entspricht dabei der Amplitude der Oszillation. Die Abbildungen a) und b) zeigen die beiden Fälle der Oszillation bei einer superkritischen Hopf Bifurkation der Form  $\dot{\rho} = r\rho - \rho^3$  und  $\dot{\varphi} = \omega + b\rho^2$  für die Parameterwerte  $r < r_c$  und  $r > r_c$ . Im ersten Fall wird die Amplitude der Oszillation gedämpft bis das System in der stabilen Lösung im Ursprung endet. Im zweiten Fall wird der Punkt im Ursprung instabil und die Amplitude der Oszillation steigt bis zu einem festen Wert an. Diese stabile Oszillation entspricht einem Ring im Phasenraum und wird auch Grenzyklus genannt. Abbildung c) zeigt den Fall der Oszillation einer subkritischen Hopf Bifurkation der Form  $\dot{\rho} = r\rho + \rho^3 - \rho^5$  und  $\dot{\varphi} = \omega + b\rho^2$  für den Parameterwert  $r < 0$ . Hier existieren zwei verschiedene stabile Lösungen, eine stationäre im Ursprung und eine oszillierende bei einer festen Amplitude. Dazwischen existiert eine weitere instabile oszillierende Lösung (gestrichelter Kreis) deren Amplitude mit zunehmendem Parameterwert  $r$  abnimmt.

Für  $r < 0$  ergibt sich eine nach innen gerichtete Spirale die auf den stabilen Fixpunkt im Ursprung  $\rho = 0$  zuläuft (siehe Abb. 2.14 a). Nimmt der Parameter einen Wert  $r > 0$  an, so wird der Fixpunkt im Ursprung instabil und die Spirale verläuft von ihm weg bis hin zu einem stabilen Ring mit einem Radius  $\rho = \sqrt{r}$  (siehe Abb. 2.14 b). Der Radius des Rings, der auch *Grenzyklus* genannt wird, entspricht dabei der Sättigungsamplitude der Schwingung. Überführt man das System in kartesische Koordinaten, so können aus der Jakobi-Matrix die Eigenwerte

$$\lambda = r \pm i\omega \quad (2.42)$$

berechnet werden [Str14, Kap. 8.2]. Das Vorzeichen des Realteils des Eigenwertes und somit die Stabilität des Punktes hängt allein vom Parameter  $r$  ab.

### Subkritische Hopf Bifurkation

Die subkritischen Hopf Bifurkation kann analog zur subkritischen Pitchfork Bifurkation behandelt werden

$$\dot{\rho} = r\rho + \rho^3 - \rho^5, \quad (2.43)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + b\rho^2. \quad (2.44)$$

Das System wird zunächst von dem kubischen  $\rho^3$  Term destabilisiert. Für höhere Werte von  $\rho$  dominiert jedoch der  $\rho^5$  Term, wodurch das System wieder stabilisiert wird. Für Parameterwerte  $r < 0$  existieren zwei Stabile Lösungen: eine stationäre Lösung im Ursprung und eine oszillierende Lösung bei fester Amplitude bzw. ein Ring mit festem Radius im Phasenraum. Zwischen diesen beiden Lösungen existiert eine instabile oszillierende Lösung, deren Amplitude mit ansteigendem  $r$  kleiner wird bzw. nimmt der Radius des Rings im Phasenraum ab (siehe Abb. 2.14 c). Bei  $r = 0$  erreicht ihre Amplitude den Wert Null. Die instabile, oszillierende Lösung geht dann in die stabile, stationäre Lösung im Ursprung über, welche daraufhin instabil wird. Dieser Fall wird als *subkritische* Hopf Bifurkation bezeichnet [Str14, Kap. 8.2]. Nimmt der Parameterwert  $r < 0$  weiterhin ab, so nimmt der Radius des instabilen Rings zu, bis er mit dem stabilen äußeren Ring annihiliert.

## 2.6. Coarsening

Unter dem Begriff *Coarsening* ist allgemein die Vergrößerung eines Systems zu verstehen. Dieses Phänomen ist in der Natur häufig zu beobachten und reicht von Vorgängen wie der Entstehung von Sternen aus vielen kleinen Staubpartikeln, über die Bildung von Tropfen in einem Dampf, bis hin zur Separation von Wasser und Öltropfen in einem Salatdressing. Auch bei den hier betrachteten Film- und Tropfen-Systemen findet Coarsening statt. Da der Laplace-Druck zum Kehrwert des Tropfenradius  $R$  proportional ist [TKG<sup>+</sup>14a], sind kleine Tropfen größeren Drücken ausgesetzt als große. In Folge der Relaxation verschwindet ein kleinerer Tropfen zugunsten des Volumens eines größeren Tropfens. Hierbei wird zwischen zwei Mechanismen unterschieden. So kann zum einen die Masse des kleineren Tropfens durch den Precursor in den Größeren flie-

ßen, sodass das Volumen ausgetauscht wird. Zum anderen können sich beide Tropfen auch aufeinander zu bewegen und so miteinander verschmelzen. Die dafür verantwortliche Kraft resultiert aus nichtlinearen diffusiven Strömen im Precursor sowie aus einer gegenseitigen Anziehung der Tropfenkanten selbst [GW03, Kap. 1 u. 2].

## 2.7. Depinning

Befindet sich das System unter dem Einfluss äußerer Gradienten, können weitere Effekte auftreten. Diese Gradienten können z.B. durch die Gravitationskraft oder die Heterogenität der Benetzbarkeit eines Substrats gegeben sein. Innerhalb eines solchen Systems bewegt sich ein Tropfen immer in Richtung der stärksten Kraft [TK06]. So bewegt sich ein Tropfen auf einem homogenen, geneigten Substrat unter Einfluss der Gravitation immer bergab oder auf einem heterogenen, horizontalen Substrat immer in Richtung der am besten benetzbaren Bereiche. Treten nun mehrere Gradienten auf, so kann es passieren, dass diese einander entgegen wirken. Ein Tropfen, der sich auf einem heterogenen Substrat befindet, wird sich zunächst auf einem Gebiet besserer Benetzbarkeit ansiedeln. Wird dieses Substrat nun aber geneigt, so zieht die Gravitation den Tropfen bergab und somit zwangsläufig in Richtung eines weniger benetzbaren Gebiets. Das Verhalten des Tropfens hängt nun von der Stärke der Gradienten ab. Ist der Einfluss der Gravitation zu gering, so bleibt der Tropfen an dem weniger benetzbaren Gebiet hängen, er *pinnt*. Überwiegt jedoch die Gravitation gegenüber der pinnenden Kraft des Benetzbarkeitsgradienten, so rutscht der Tropfen über den weniger benetzbaren Bereich, er *entpinnt*. Diese entpinnenden Kräfte werden Triebkräfte genannt. Unter dem Begriff *Depinning* versteht man somit das Überwiegen der Triebkräfte gegenüber den pinnenden Kräften. Das einfachste Beispiel kann durch die *Adler Gleichung* beschrieben werden [Adl46]:

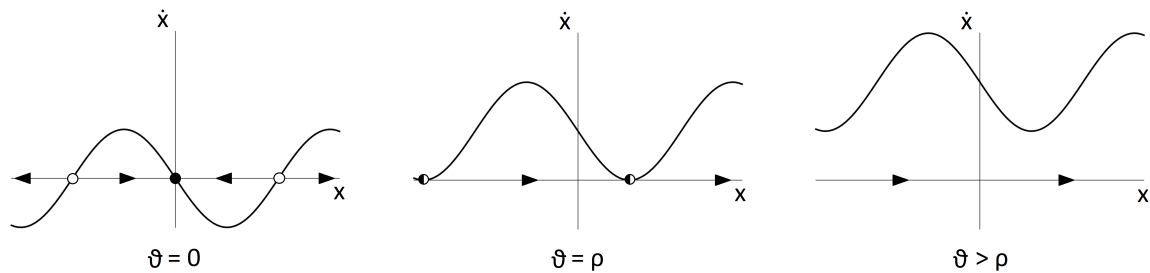
$$\dot{x} = \vartheta - \rho \sin(x). \quad (2.45)$$

Anhand des Kugel-Beispiels aus Kapitel 1.5.1 kann dieses System veranschaulicht werden. Zu diesem Zweck wird die Gleichung 2.45 umgeschrieben zu

$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx} \quad (2.46)$$

mit  $V = -\vartheta x - \rho \cos(x)$ . Die Gleichung beschreibt ein überdämpftes, cosinusförmiges Potential der Amplitude  $\rho$ , das um  $\vartheta$  gekippt ist. Dabei ist  $x$  die Position der Kugel.

Eine stationäre Lösung stellt sich dann ein wenn  $\dot{x} = 0$  ist. Für den Fall  $\vartheta < \rho$ , bewegt sich die Kugel in Richtung eines lokalen Minimums des Potentials, an dem  $\vartheta = \rho \sin(x)$  erfüllt ist, und verbleibt dort im stabilen Gleichgewicht. Wird das Potential jedoch weiter geneigt, bis  $\vartheta > \rho$  eintritt, so handelt es sich bei der Position der Kugel nicht mehr um ein Minimum und sie fängt an, entlang des Potentials herunter zu rollen. Die Periode dieser Bewegung divergiert mit  $T = (\vartheta - \rho)^{-\frac{1}{2}}$  [TK06, Kap. 1]. Für den Grenzfall  $\vartheta = \rho$  liegt ein Kriechfall vor, bei dem die Kugel dem nächsten lokalen Maximum des Potentials entgegen rollt. In diesem Fall divergiert die Periodendauer  $T \rightarrow \infty$ . Alle drei Fälle sind in Abbildung 2.15 dargestellt. Diese Art der Bifurkation wird auch als *saddle-node-infinite-period bifurcation*, kurz *Sniper Bifurkation* bezeichnet [TK06, Kap. 1]. Dieses Beispiel kann auf das Verhalten von Tropfen oder dünnen Filmen auf geneigten, heterogenen Substraten übertragen werden.



**Abbildung 2.15.:** Fixpunkte einer Sniper Bifurkation der Form  $\dot{x} = \vartheta - \rho \sin(x)$  bei verschiedenen Parameterwerten  $\vartheta$ . Dabei markieren schwarze Punkte stabile, weiße Punkte instabile und halbgelb gefüllte Punkte metastabile Lösungen. Die Pfeile geben die Bewegungsrichtung an. Stabile und instabile Punkte entstehen und verschwinden periodisch in Saddle-node Bifurkationen unter Variation des Parameters  $\vartheta$ .

### 3. Stationäre Lösungen der Dünnschichtgleichung

Gesucht sind nun die stationären Lösungen der Dünnschichtgleichung unter Variation der Heterogenitätsstärke  $\rho$  und der Triebkraft  $\vartheta$ . Eine Lösung ist dann stationär, wenn  $\partial_t h = 0$  gilt. Mit Hilfe des Programms „AUTO-07P“ [DOB<sup>+</sup>12] können diese Lösungen ermittelt werden. Zu diesem Zweck muss die Dünnschichtgleichung jedoch zunächst vereinfacht werden [TKGW15]. Gleichung 2.15 kann zunächst integriert werden und man erhält

$$0 = Q(h)\partial_x[\partial_{xx}h - \partial_h f(h, x)] + \chi(h) + C_0. \quad (3.1)$$

$C_0$  ist dabei der allgemeine Fluss und für stationäre Lösungen konstant. Nun werden die Größen  $\xi = \frac{x}{L}$ ,  $u_1 = h(x) - h_0$ ,  $u_2 = \frac{dh}{dx}$ ,  $u_3 = \frac{d^2h}{dx^2}$  und  $u_4 = x$  eingeführt, um Gleichung 3.1 in vier gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung im Intervall  $[0, 1]$  zu überführen:

$$\frac{d}{d\xi}u_1 = Lu_2, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{d\xi}u_2 = Lu_3, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{d\xi}u_3 = L \left[ u_2 \partial_{u_1 u_1} f(u_1 + h_0, x) + \partial_{u_1 x} f(u_1 + h_0, x) - \vartheta + \frac{C_0}{Q(u_1 + h_0)} \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{d\xi}u_4 = L. \quad (3.5)$$

Diese können nun mit den periodischen Randbedingungen im Intervall  $[0, 1]$

$$u_1(0) = u_1(1), \quad (3.6)$$

$$u_2(0) = u_2(1), \quad (3.7)$$

$$u_3(0) = u_3(1), \quad (3.8)$$

$$u_4(0) = 0 \quad (3.9)$$

und der Integralbedingung für Massenerhaltung

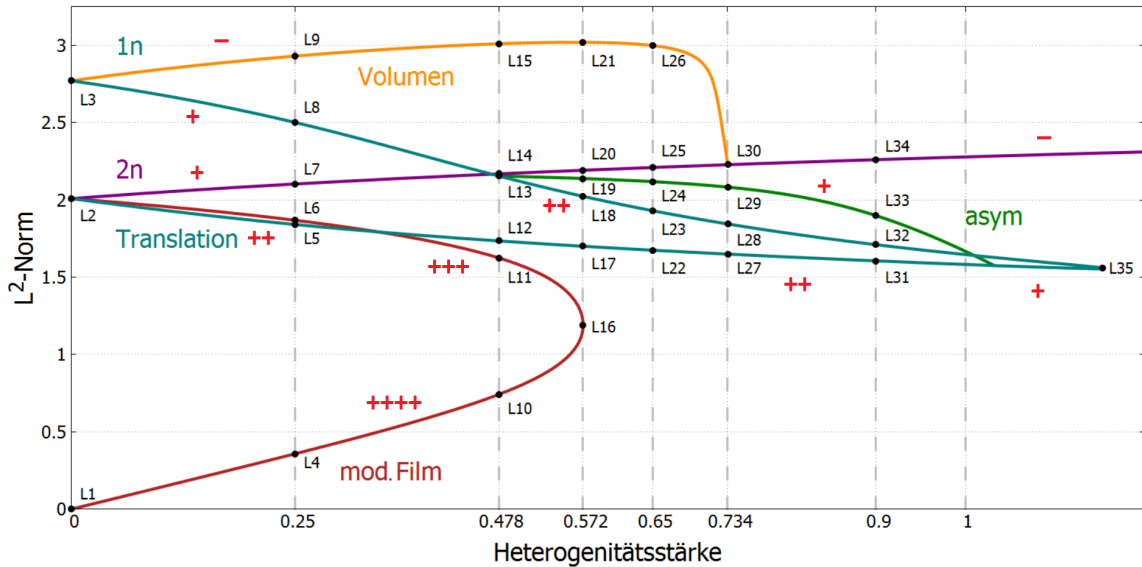
$$\int_0^1 u_1 \, d\xi = 0 \quad (3.10)$$

von „AUTO-07P“ gelöst werden. Der Parameter  $L$  bezeichnet dabei die physikalische Breite des Systems und muss mindestens den kritischen Wert von  $L_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{-\partial_{hh}f(h_0)}}$  betragen um verschiedene, stationäre Anfangslösungen garantieren zu können. Ist diese Bedingung erfüllt, können sich aus einem flachen Film Tropfen formen [Thi10b, Kap. 2]. Dieser Prozess wird *Entnetzung* oder auch *Dewetting* genannt [GW03, Kap. 1]. Nun kann dem Programm ein Parameter übergeben werden, der variiert werden soll. Von einer Anfangslösung aus werden dann die stationären Lösungen für den jeweiligen Wert dieses Parameters ermittelt. Es ergibt sich ein Bifurkationsdiagramm, in dem die  $L^2$ -Norm der Lösungen über den jeweiligen variierten Parameter aufgetragen wird. Die  $L^2$ -Norm entspricht dabei dem integrierten Betragsquadrat des Höhenprofils [Thi10a, Kap. 2]:

$$L^2\text{-Norm} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L (h(x) - h_0)^2 \, dx}. \quad (3.11)$$

### 3.1. Variation der Heterogenitätsstärke

Zur Berechnung der stationären Lösungen unter Variation der Heterogenitätsstärke  $\rho$  im Derjaguin-Term (Gleichung 2.19) bei einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$  wird der Code „HetDrop“ verwendet [TKG<sup>+</sup>14b]. Das Bifurkationsdiagramm ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

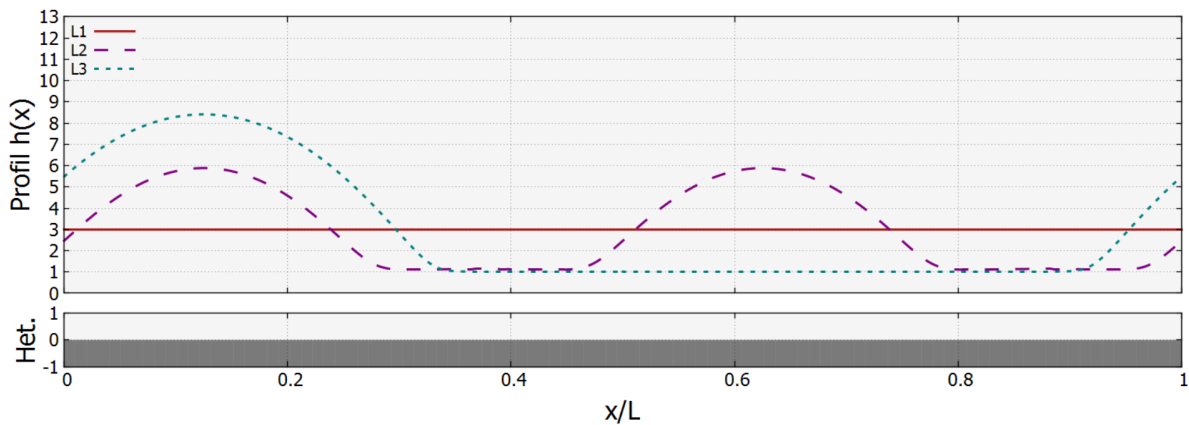


**Abbildung 3.1.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnschichtgleichung auf einem heterogenen Substrat der Triebkraft  $\vartheta = 0$  und variiert Heterogenitätsstärke  $\rho$ . Aus den drei Anfangslösungen (siehe Abb. 3.2) entspringen mehrere Äste. Dabei enthält der *Volumen*-Ast die Lösungen, die beim Coarsening per Volumenaustausch entstehen, der *2n*-Ast die Lösungen mit zwei gleich großen Tropfen, der *Translation*-Ast die Lösungen, die beim Coarsening per Translation der Tropfen entstehen, der *mod. Film*-Ast modulierte Filme und der *asym*-Ast asymmetrische, instabile Zwischenformen. Der Translation- und mod. Film-Ast verschwinden in Saddle-Node Bifurkationen (siehe Kap. 2.5.1). Der Volumen-Ast verschwindet in einer superkritischen Pitchfork Bifurkation im 2n-Ast, welcher daraufhin als einziger verbleibender Ast stabil bestehen bleibt (siehe Kap. 2.5.2). Der asym-Ast verbindet die beiden zweige des Translation-Astes in einer Pitchfork Bifurkation. Die hypothetischen Stabilitäten der Äste sind mit Plus-Zeichen für instabil und Minus-Zeichen für stabil markiert.

Hier wird die  $L^2$ -Norm der Lösungen über  $\rho$  aufgetragen. Es ergeben sich verschiedene Äste, die in unterschiedlichen Farben markiert und beschriftet sind. Der gelbe *Volumen*-Ast enthält die Lösungen mit dem maximalen Wert der  $L^2$ -Norm, also einen voluminösen Tropfen (auch als *1n* benannt). Es handelt sich dabei um die Lösungen, die durch Coarsening per Volumenaustausch durch den Precursor zustande kommen. Der violette *2n*-Ast enthält Profile mit zwei gleichgroßen Tropfen. In dem dunkelroten *mod. Film*-Ast sind modulierte Filmprofile enthalten. Die blauen *Translation*-Äste enthalten jene Lösungen, die durch translationsbedingte Coarsening-Prozesse entstehen. Dabei kann es sich zum einen um zwei gleich große Tropfen handeln, die direkt über dem we-

niger benetzbaren Bereich miteinander verschmelzen. Zum anderen kann es sich auch um einen einzigen großen Tropfen handeln, welcher genau auf dem weniger benetzbaren Bereich sitzt (siehe Abb. A.4). Ersterer entspringt in einer transkritischen Bifurkation aus dem Volumen-Ast. Für negative  $\rho$  tauschen diese beiden Äste ihre Stabilitäten, da dann auch die Positionen der mehr und weniger benetzbaren Bereiche vertauscht sind. Der grüne *asym*-Ast enthält instabile, asymmetrische Zwischenformen und wird daher als instabil angenommen. Die hypothetischen Stabilitäten sind mit Plus-Zeichen für instabil und Minus-Zeichen für stabil in Abbildung 3.1 markiert. Die Höhenprofile der in dem Bifurkationsdiagramm mit Punkten, auch *Labels* genannt, markierten stationären Lösungen befinden sich in der Abbildung 3.2 und den Abbildungen A.1 bis A.6 im Anhang.

Verfolgt man die Äste im Bifurkationsdiagramm, so ist zu erkennen, dass sie alle aus drei Anfangslösungen entspringen. So kann die 2n-Lösung sowohl über den mod. Film-Ast mit den Lösungen der modulierten Filme und über den Translation-Ast mit der 1n-Lösung verknüpft sein als auch als eigenständiger Ast bestehen bleiben. In Abbildung 3.2 sind die drei Startlösungen für  $\rho = 0$  dargestellt. Der graue, untere Teil des Diagramms beschreibt dabei die Benetzbarkeit des Substrats an der jeweiligen Stelle. Dabei werden weniger benetzbare Bereiche mit positiven Ausschlägen und mehr benetzbare Bereiche mit negativen Ausschlägen veranschaulicht (besser zu erkennen in Abbildung A.6).



**Abbildung 3.2.:** Höhenprofile der fixen Anfangslösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ . L1 entspricht einem flachen Film, L2 einer Lösung mit zwei gleich großen Tropfen und L3 einer Lösung mit einem einzigen voluminösen Tropfen. Aus diesen drei Lösungen entspringen alle weiteren Ergebnisse.

Der Verlauf des mod. Film-Astes zeigt, dass diese Lösungen ab einer Heterogenitätsstärke

von  $\rho = 0,572$  in einer Saddle-Node Bifurkation verschwinden (siehe Kap. 2.5.1), da die Bildung von Tropfenformen durch die Heterogenität vermutlich begünstigt wird. Bei einer höheren Heterogenitätsstärke würde eine Lösung mit einem flachen Film per Dewetting ein Tropfenprofil bilden.

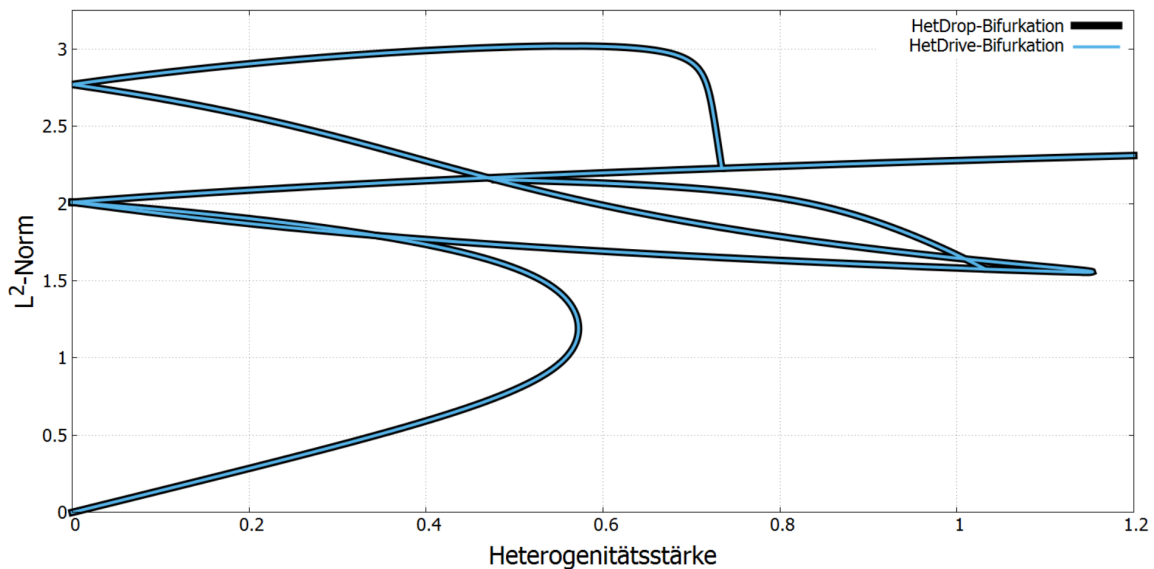
Wie bereits erwähnt, sind große Tropfen bezüglich des Laplace-Drucks stabiler als kleine. Dennoch verschwindet der Volumen-Ast bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,734$  und geht in den 2n-Ast über. Der Coarsening-Prozess, durch den die Lösungen des Volumen-Astes entstehen, wird bei höheren Heterogenitätsstärken  $\rho$  unterdrückt, da die weniger benetzbaren Bereiche dann so stark ausgeprägt sind, dass eine Volumenzunahme des großen Tropfens und damit die Verschiebung der Kontaktregionen hin zu eben diesen Bereichen unterdrückt wird. In diesem Fall kann ein weiterer kleiner Tropfen in einem benachbarten, besser benetzbaren Bereich entstehen (siehe Abb. A.4). Da diese Lösung nicht symmetrisch ist, existieren zwei Volumen-Äste. Einer mit den Lösungen entsprechend L26 in Abbildung A.4 und einer, in dessen Lösungen die Positionen der Tropfen vertauscht sind. Da beide Lösungen jedoch die selbe  $L^2$ -Norm besitzen, liegen die jeweiligen Äste im Bifurkationsdiagramm genau übereinander. Es handelt sich hierbei um eine superkritische Pitchfork Bifurkation (siehe Kap. 2.5.2). Nimmt die Heterogenitätsstärke weiter zu, so kann dieser Coarsening-Prozess umgekehrt werden, sodass aus einem großen Tropfen zwei kleine entstehen. Dieser Prozess wird auch als *Splitting* bezeichnet. Aus diesem Grund ist für sehr hohe Heterogenitätsstärken  $\rho$  der 2n-Ast der einzige, der nicht verschwindet, da eine Lösung mit zwei gleich großen Tropfen die beste Variante bietet, möglichst viel Masse auf die mehr benetzbaren Bereiche zu verteilen und dabei die Kontaktregionen der Tropfen möglichst wenig in Richtung der weniger benetzbaren Bereiche zu verschieben.

Auch die Translation-Äste verschwinden in einer Saddle-Node Bifurkation (siehe Kap. 2.5.1) bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 1,153$ . Die Lösungen dieser Äste zeichnen sich durch ihre Symmetrie aus. Bei der Lösung mit zwei gleich großen Tropfen die über dem weniger benetzbaren Bereich verschmelzen, steht die Kraft, welche die beiden Tropfen aufeinander zu treibt (siehe Kap. 2.6), mit der abstoßenden Kraft des weniger benetzbaren Bereichs im Gleichgewicht. Bei dem einzelnen größeren Tropfen, welcher direkt auf dem weniger benetzbaren Bereich sitzt werden die Kontaktregionen auf beiden Seiten gleich stark von diesem Bereich weg verschoben sodass der Tropfen in die Länge gezogen wird. Nimmt die Heterogenitätsstärke zu, so werden diese Gleichgewichte instabiler und verschwinden schließlich.

Der asym-Ast entspringt aus den Translation-Ästen und verbindet diese. Da die Lösungen des asym-Astes, wie gesagt, asymmetrisch sind, handelt es sich auch hier um eine Pitchfork Bifurkation (siehe Kap. 2.5.2).

## 3.2. Variation der Triebkraft

Da für die Variation der Triebkraft der Code „HetDrive“ verwendet wird [TKGW15], muss das Bifurkationsdiagramm für die Variation von  $\rho$  zunächst reproduziert werden. Um zu überprüfen, ob sich die beiden Diagramme entsprechen, werden sie in Abbildung 3.3 übereinander gelegt.



**Abbildung 3.3.:** Vergleich der Bifurkationsdiagramme der Dünnschichtgleichung auf einem heterogenen Substrat bei der Triebkraft  $\vartheta = 0$  und variierter Heterogenitätsstärke  $\rho$ . Produziert mit den Codes HetDrop und HetDrive. Da die Diagramme direkt übereinander liegen, scheinen sich die Ergebnisse und die  $L^2$ -Norm zu entsprechen.

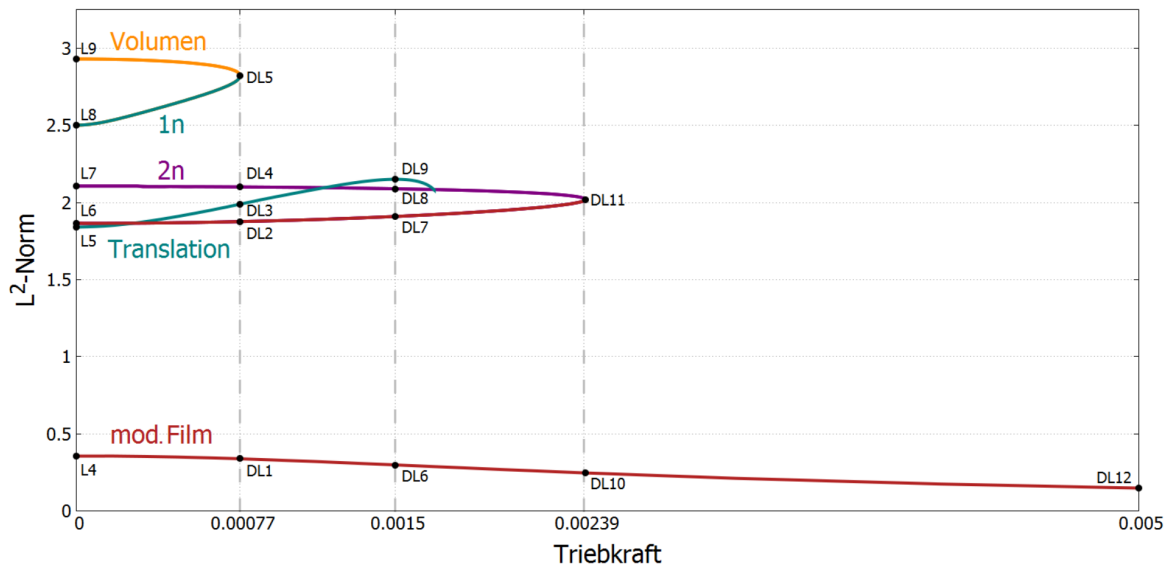
Da die Diagramme sich decken, scheinen die gewählten Normen einander zu entsprechen. Als Startpunkte können nun die mit Labels markierten Lösungen aus Abbildung 3.1 verwendet werden. Die Bifurkationsdiagramme für die Variation der Triebkraft  $\vartheta$  bei den festen Werten der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,25$ ,  $\rho = 0,65$ ,  $\rho = 0,734$  und  $\rho = 0,90$  sind in den Abbildungen 3.4 bis 3.7 dargestellt. Die Lösungen der entsprechenden Labels befinden sich in den Abbildungen A.7 bis A.18 im Anhang.

In Abbildung 3.4 ist zu erkennen, dass bis auf den unteren mod. Film-Ast alle Äste zusammenlaufen und verschwinden. Ein modulierter Film scheint für größere Triebkräfte

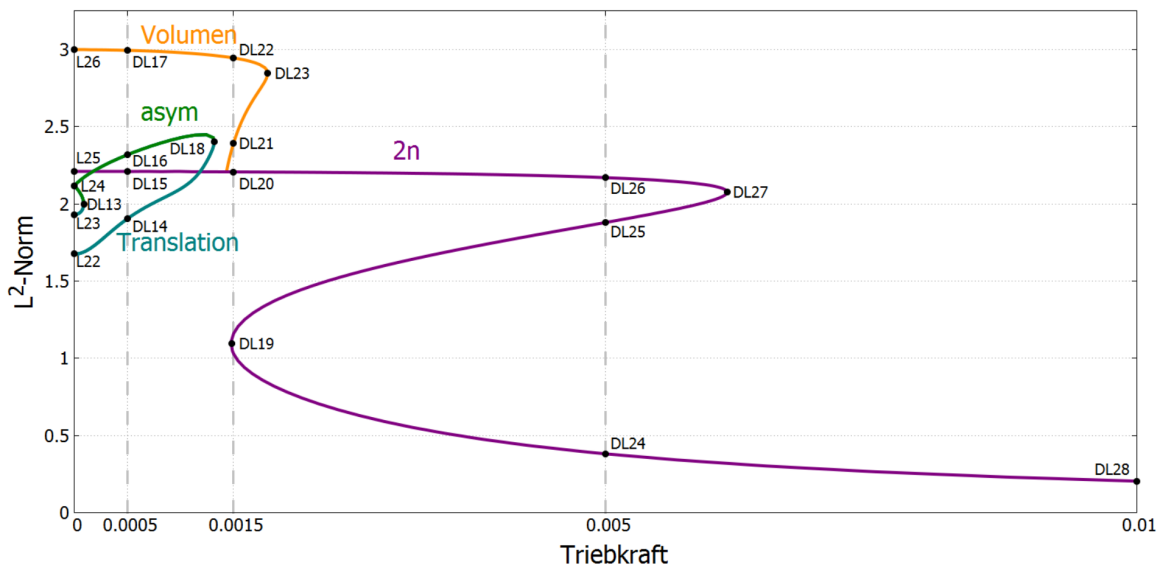
also die einzige Möglichkeit für stationäre Lösungen zu sein. Für größere Heterogenitätsstärken geht dieser Ast in einer Saddle-Node Bifurkation (siehe Kap. 2.5.1) in den 2n-Ast über. Die Punkte L4 und L6 in Abbildung 3.4 bewegen sich mit zunehmender Heterogenität aufeinander zu, wie in dem mod. Film-Ast in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,572$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$  treffen sich die beiden Punkte in einem Fold. In den Abbildungen 3.5 bis 3.7 taucht der mod. Film jedoch trotz höherer Heterogenitätsstärke in einem gewissen Abstand zur  $\vartheta = 0$ -Achse als Unterast des 2n-Astes wieder auf. Es können also durch Erhöhung der Triebkraft auch wieder Äste entstehen, die unter dem Einfluss höherer Heterogenitätsstärke verschwunden waren.

Die Form des 2n-Astes bleibt in den Abbildungen 3.5 bis 3.7 weitgehend erhalten. Die Folds der Saddle-Node Bifurkationen (siehe Kap. 2.5.1), in denen diese Äste zunächst enden, verschieben sich mit zunehmender Heterogenitätsstärke in Richtung höherer Triebkraft. Dies weist auf eine Proportionalität hin. Dieses Verhalten ist dadurch zu erklären, dass eine hohe Heterogenitätsstärke die Bildung zweier gleichgroßer Tropfen begünstigt und diese stärker pinnt.

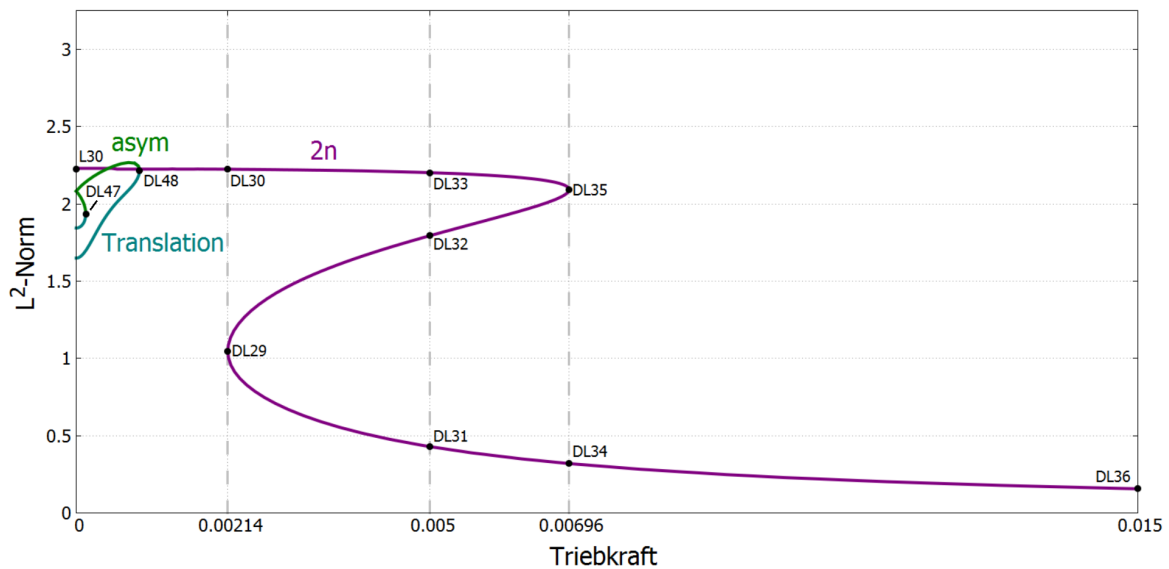
Auch die instabilen asym- und Translation-Äste weisen ein ähnliches Verhalten auf. Da es sich bei diesen Ästen allerdings um die instabilsten Äste handelt, annihilieren sie, anders als die 2n-Äste, schneller mit zunehmender Heterogenitätsstärke.



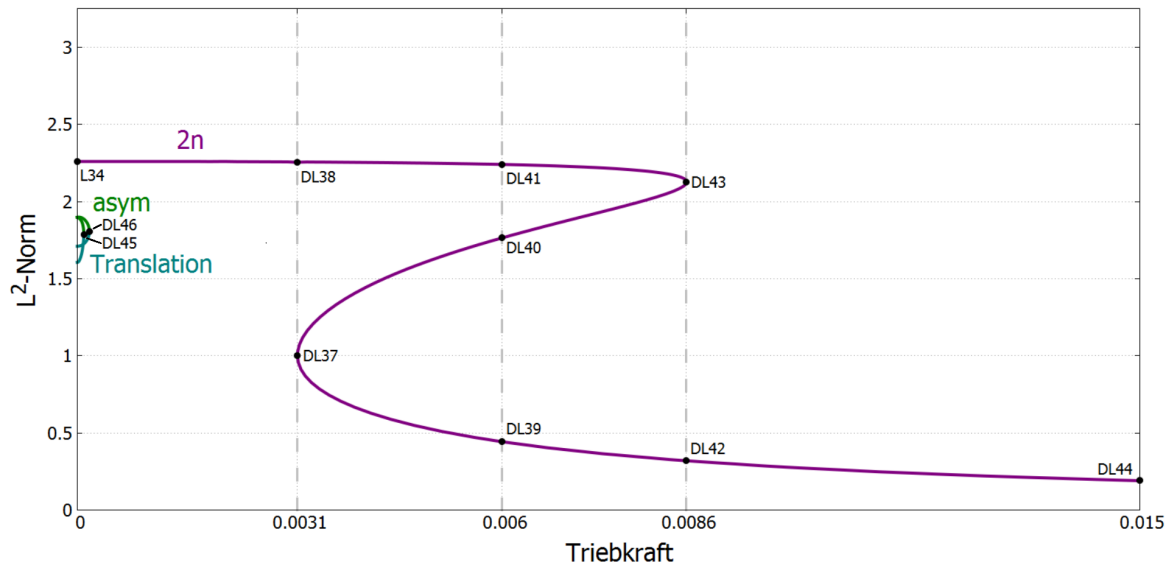
**Abbildung 3.4.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnschichtgleichung auf einem heterogenen, geneigten Substrat bei der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,25$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$ . Bis auf den mod. Film-Ast verschwinden alle Äste schnell bei erhöhter Triebkraft  $\vartheta$ . Flache Filme bieten dementsprechend die einzige Möglichkeit auf stationäre Lösungen für höhere Triebkräfte bei geringer Heterogenitätsstärke.



**Abbildung 3.5.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnschichtgleichung auf einem periodisch heterogenen, geneigten Substrat bei der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,65$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$ . Der Volumen-Ast bildet in einer subkritischen Pitchfork Bifurkation den Fold DL23 aus. Der 2n-Ast verschwindet bei DL27 in einer Saddle-node Bifurkation mit einem Ausläufer des mod. Film-Astes, welcher bei DL19 in einer Saddle-node Bifurkation aus dem Nichts entsteht. Der zweite Ast dieser Bifurkation läuft wie bereits erwähnt weiter und beinhaltet modulierte Filme als Lösungen. Der Translation- und asym-Ast annihilieren schnell in zwei Saddle-Node Bifurkationen aufgrund ihrer hohen Instabilität.



**Abbildung 3.6.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnschichtgleichung auf einem periodisch heterogenen, geneigten Substrat bei der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,734$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$ . 2n-, Translation- und asym-Ast weisen ähnliche Formen wie in Abbildung 3.5 auf. Auf Grund des stärkeren Pinnings bei höheren Heterogenitätsstärken verschwindet der 2n-Ast erst bei höheren Heterogenitätsstärken in einer Saddle-Node Bifurkation im Punkt DL35. Der Translation- und asym-Ast verschwinden hingegen schneller aufgrund ihrer Instabilität.



**Abbildung 3.7.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnfilmgleichung auf einem periodisch heterogenen, geneigten Substrat bei der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,90$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$ . 2n-, Translation- und asym-Ast weisen ähnliche Formen wie in Abbildung 3.6 auf. Auf Grund des stärkeren Pinnings bei höheren Heterogenitätsstärken verschwindet der 2n-Ast erst bei höheren Heterogenitätsstärken in einer Saddle-Node Bifurkation im Punkt DL43. Der Translation- und asym-Ast verschwinden hingegen schneller aufgrund ihrer Instabilität.

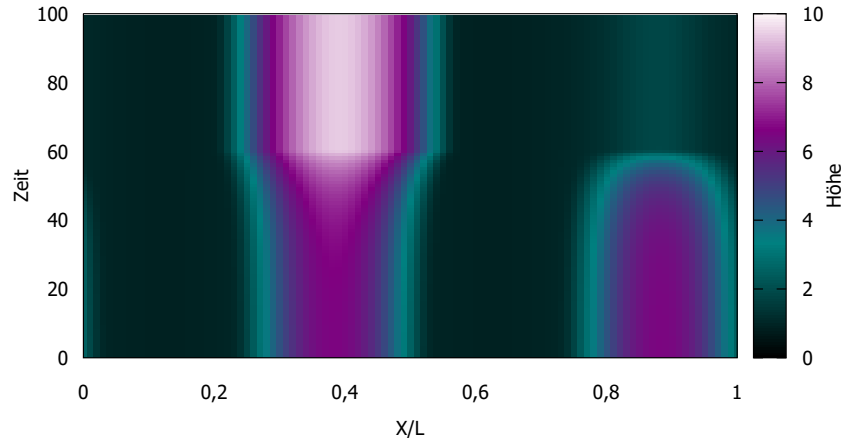
In Abbildung 3.5 ist für den Volumen-Ast ein ähnlicher Verlauf wie in Abbildung 3.1 zu erkennen, allerdings mit einer kleinen Abweichung in Form eines Folds bei DL23. Infolgedessen bildet sich im Bereich zwischen Fold und Abzweigungspunkt ein Unterast aus. Aus der superkritischen Pitchfork Bifurkation ist nun eine subkritische Pitchfork Bifurkation geworden (siehe Kap. 2.5.2). Da der Volumen-Ast noch vor dem 2n-Ast verschwindet obwohl er bezüglich der Heterogenitätsstärke als der stabilere angenommen wird, liegt die Vermutung nahe, dass die durch erhöhte Triebkraft verursachten Strömungen im Precursor Coarsening-Prozesse unterdrücken. Die Höhenprofile der Labels DL19, DL20 und der beiden Volumen-Äste DL21 bzw. DL22 sind in Abbildung A.11 dargestellt. Über die Stabilität der Äste können vorerst nur Vermutungen angestellt werden. Die gefundenen Folds weisen außerdem auf einen Übergang zum Depinning hin, wie es schon in anderen Bifurkationsdiagrammen entdeckt wurde [Thi10a, Kap. 3.2 Abb. 6].



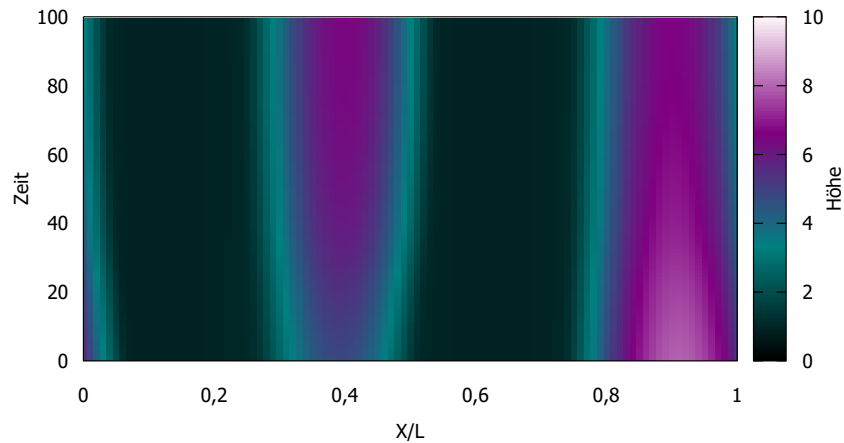
## 4. Zeitsimulationen

Die Äste in den gefundenen Bifurkationsdiagrammen (siehe Abb. 3.1 bis 3.7) markieren die stationären Lösungen der Dünnfilmgleichung unter Variation der Parameter  $\rho$  und  $\vartheta$ . Es bleibt nun weiterhin zu klären, ob diese Lösungen stabil sind oder nicht. Um die zeitliche Entwicklung eines Höhenprofils zu reproduzieren, werden Zeitsimulationen verwendet. Endet die Simulation in einem stationären Zustand, so kann dieser mit der Lösung eines entsprechenden Astes verglichen werden. Stimmen die Profile überein, so kann der Ast dessen Lösung dem Profil am Ende der Zeitsimulation entspricht, als stabil angenommen werden. Da der asym- und Translation-Ast ohnehin als instabil angenommen werden und auch nicht weiter von Interesse sind, werden die Untersuchungen auf den Volumen- und 2n-Ast beschränkt.

Die Stabilitätsanalyse mittels Zeitsimulationen wurde hier nur auf das Bifurkationsdiagramm bei der Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  und variierter Triebkraft angewendet (siehe Abb. 3.5). Zunächst wurden die Labels DL15, DL17, DL20, DL21, DL22 und DL23 überprüft. Da davon ausgegangen werden kann, dass der Volumen-Ast gegenüber dem 2n-Ast der Stabilere ist, wird bei einer Triebkraft von  $\vartheta = 0,0005$  ein Coarsening von DL15 zu DL17 erwartet. Diese Vermutung wird durch die Zeitsimulation, dargestellt in dem Raum-Zeit-Diagramm in Abbildung 4.1 bzw. A.20 (im Anhang), und den Profilvergleich in Abbildung A.21 bestätigt (im Anhang). Der 2n-Ast ist in diesem Bereich also instabil, während der Volumen-Ast stabil ist. Die Zeitsimulation der Lösung DL21 endet hingegen in einem Profil, das dem von DL20 entspricht (siehe Abb. 4.2 bzw. A.22 u. A.23 im Anhang). Der 2n-Ast scheint ab dem Abzweigungspunkt also stabil zu sein, während der abzweigende Volumen-Ast instabil ist. Auch DL23 endet in einem Profil, das eindeutig dem 2n-Ast zugeordnet werden kann (siehe Abb. A.24 u. A.25).

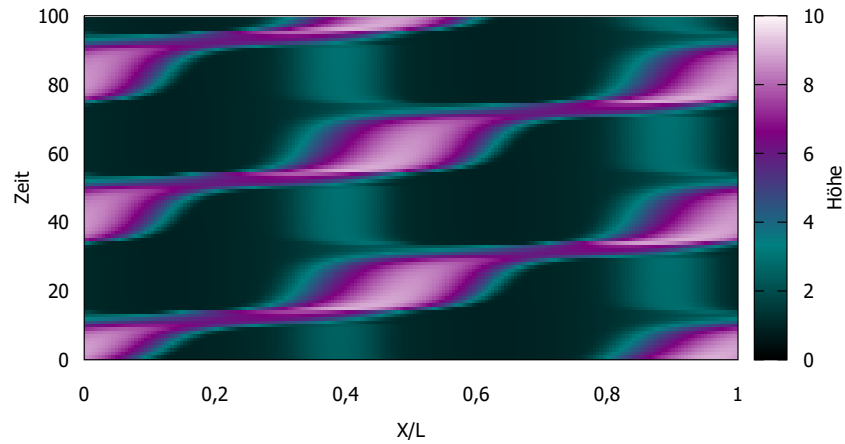


**Abbildung 4.1.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL15. Die beiden Tropfen coarsen zu einem. Das resultierende Profil entspricht DL17. Der Volumen-Ast wird in dem entsprechenden Bereich als stabil und der 2n-Ast als instabil angenommen.



**Abbildung 4.2.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL21. Es bildet sich ein Profil mit zwei Tropfen entsprechend DL20 aus. Der 2n-Ast wird in dem entsprechenden Bereich als stabil und der Volumen-Ast als instabil angenommen.

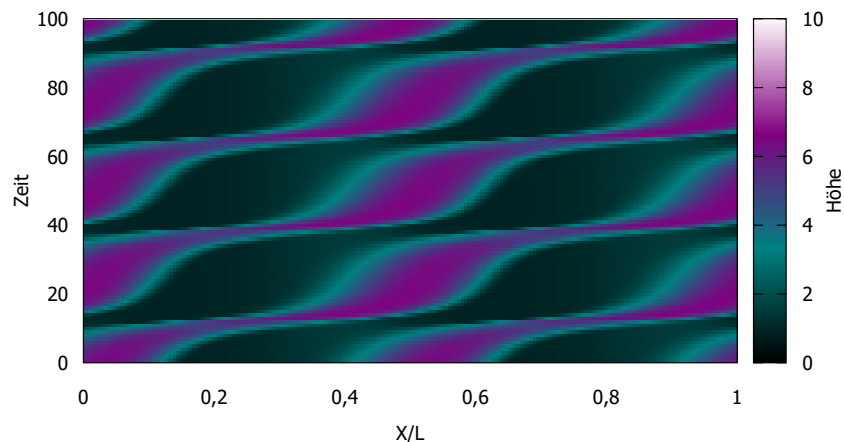
Erhöht man allerdings die Triebkraft auf  $\vartheta = 0,003$ , so geht DL23 zu einer entpinnten Lösung über, wie es der Fold zunächst vermuten ließ (siehe Abb. 4.3). Der Tropfen rutscht dem nächsten weniger benetzbaren Bereich entgegen und wird dort etwas abgebremst. Dabei verändert sich seine Form stetig, was in einer Oszillation der  $L^2$ -Norm resultiert. Es handelt sich hierbei um eine superkritische Hopf Bifurkation (siehe Kap. 1.5.3). Die Lösung DL22 bleibt hingegen zeitlich konstant und kann daher ebenfalls als stabil angenommen werden.



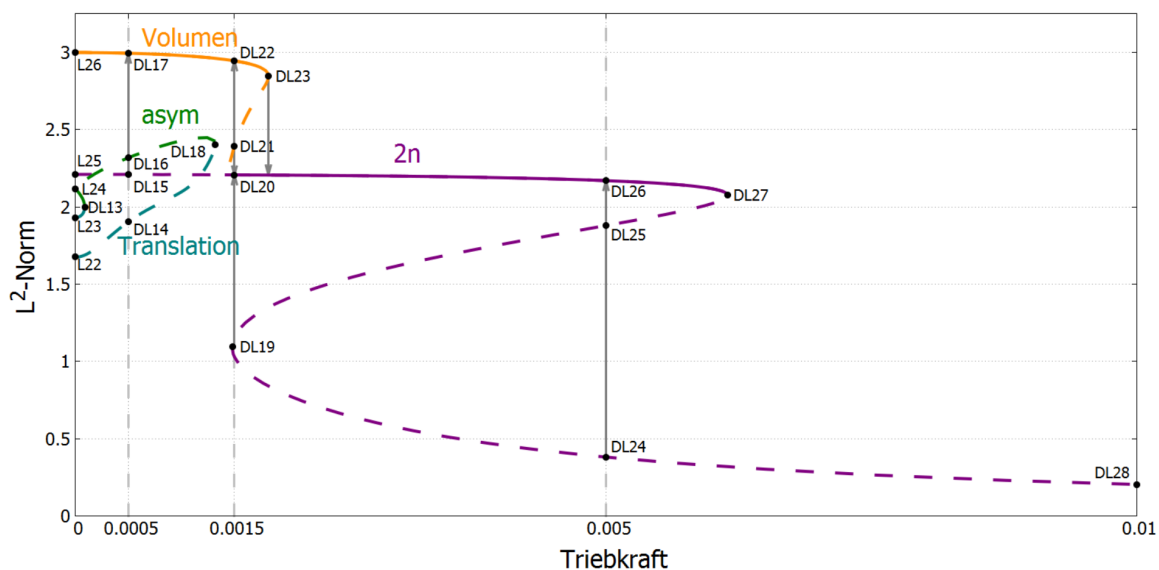
**Abbildung 4.3.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL23 bei erhöhter Triebkraft. Der Tropfen entpinnt unter Einfluss der Triebkraft. An den weniger benetzbaren Stellen wird er abgebremst und hinterlässt bei der Überquerung einen kleineren Tropfen. Der Fold DL23 wird daher als Startpunkt der entpinnten Lösungen mit einem großen Tropfen angenommen.

Desweiteren wird der zeitliche Verlauf der Lösungen L22 und L23 aus Abbildung 3.1 bei einer Triebkraft von  $\vartheta = 0,0015$  und einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  untersucht. Beide Lösungen konvergierten zu DL22, was dessen Stabilität unterstreicht (siehe Abb. A.26 bis A.29).

Es werden weiterhin die zeitlichen Verläufe der Lösungen DL19, DL24, DL25, DL26, DL27 und DL28 untersucht. Die Lösung DL19 konvergiert zur Lösung DL20, welche bereits als stabil identifiziert wurde (siehe Abb. A.30 u. A.31). Die Lösungen DL26 und DL27 werden zunächst ebenfalls als stabil angenommen. Es ist also eine Konvergenz der Lösungen DL24 und DL25 zu DL26 zu erwarten, was durch die Raum-Zeit-Diagramme bestätigt wird (siehe Abb. A.32 bis A.35). Der Teil des 2n-Astes unterhalb von DL27 scheint also instabil zu sein. Da die stationären 2n-Lösungen im Fold DL27 enden, wird angenommen, dass er die Stelle markiert, ab dem diese Lösungen entpinnen. Auch diese Annahme entspricht dem Ergebnis der Zeitsimulation (siehe Abb. 4.4). Da es sich auch bei DL28 vermutlich um eine instabile Lösung handelt, allerdings keine weitere stabile Lösung existiert, wird ein Depinning erwartet. Die Zeitsimulation (siehe Abb. A.19) bestätigt auch diese Annahme. Die so ermittelten Stabilitäten der Äste sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Dabei entsprechen die durchgezogenen Linien stabilen und die gestrichelten Linien instabilen Lösungen. Die Pfeile markieren die zeitlichen Verläufe der Lösungen, Depinning ausgenommen.



**Abbildung 4.4.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL27. Die beiden Tropfen entpinnen synchron unter Einfluss der Triebkraft und werden an den weniger benetzbaren Stellen abgebremst. Der Fold DL27 wird daher als Startpunkt der entpinnten Lösungen mit zwei gleich großen Tropfen angenommen.



**Abbildung 4.5.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnfilmgleichung auf einem periodisch heterogenen, geneigten Substrat bei der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,65$  und variiertener Triebkraft  $\vartheta$ . Die stabilen Äste sind mit durchgezogenen, die instabilen Äste mit gestrichelten Linien markiert. Der Volumen-Ast ist oberhalb des Folds DL23 stabil und unterhalb instabil (siehe Kap. 1.5.3). An dem Bifurkationspunkt dieses Astes ändert der 2n-Ast seine Stabilität von instabil zu stabil. Beide Ausläufer des mod. Film-Astes sind instabil, ebenso die Translation- und asym-Äste.

## 5. Zwei-Parameter-Kontinuierung

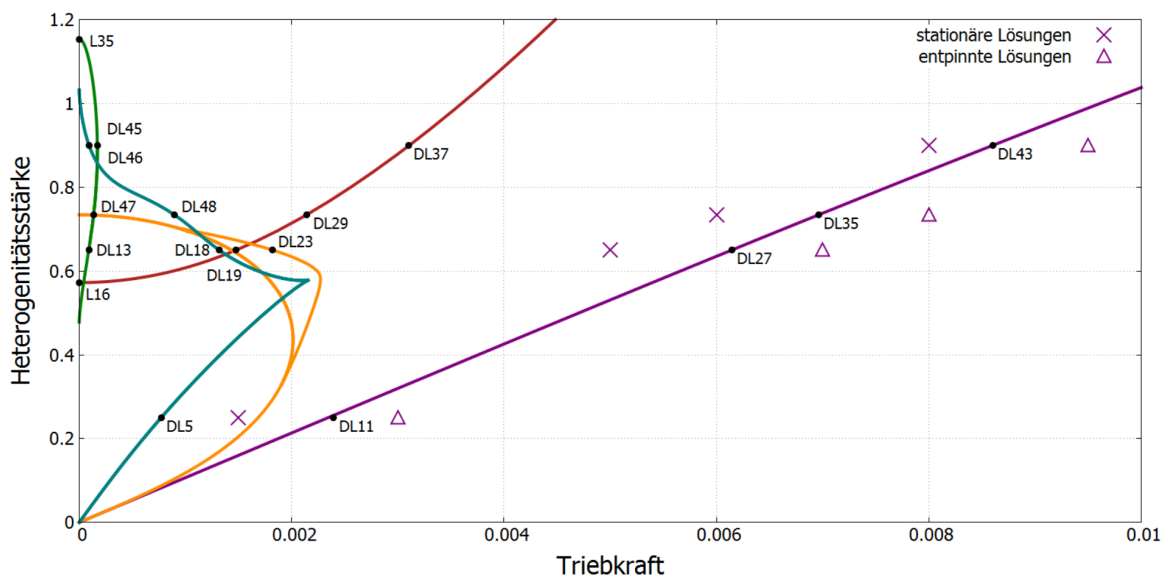
Die zwei-Parameter-Kontinuierung ist eine weitere Anwendung des Programms „AUTO-07P“, bei der ein Fold oder ein Abzweigungspunkt über zwei Parameter variiert und im Phasendiagramm dargestellt wird. Zunächst werden die Folds L16, DL13, DL18, DL23 und DL27 unter Variation der Heterogenitätsstärke  $\rho$  und der Triebkraft  $\vartheta$  untersucht. Das resultierende Phasendiagramm ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Hier werden zusätzlich alle Folds aus den Abbildungen 3.1 bis 3.7 als Punkte eingetragen. Da alle Punkte auf den gefundenen Ästen liegen, wird das Diagramm als vollständig angenommen.

Der Verlauf der oberen Folds der 2n-Äste (violett) im Phasendiagramm ist linear und entspricht damit der in Kapitel 3.2 beobachteten Proportionalität von  $\rho$  und  $\vartheta$  in diesem Punkt. Es ist zu vermuten, dass diese Linie den Übergang zum Depinning markiert. Die 2n-Lösungen auf der linken Seite sollten somit stationär und die auf der rechten Seite entpinnt sein. Um diese Annahme zu überprüfen, werden die jeweiligen Lösungen bei verschiedenen  $\rho$  auf beiden Seiten der Linie, d.h. bei erhöhten und verringerten Triebkräften  $\vartheta$ , auf ihren zeitlichen Verlauf hin untersucht. Die Kreuze stehen für stationäre und die Dreiecke für entpinnte Lösungen. In allen Fällen entsprechen die Ergebnisse den Erwartungen. Der rechte Ausläufer der gelben Linie sollte indessen die selbe Funktion bezüglich der Volumen-Lösungen erfüllen.

Es fällt auf, dass auf dem Hauptast dieser gelben Linie keine Folds markiert sind. Allein auf dem kleinen Unterast ist der Fold DL23 zu finden. Die Verfolgung des Hauptastes bei festem  $\rho = 0,65$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$  resultiert in dem Volumen-Ast aus Abbildung 3.5. Die Position des Startpunktes entspricht dabei etwa der des Bifurkationspunktes, an dem der Volumen-Ast in den 2n-Ast übergeht. Da es sich bei diesem Ast um eine subkritische Pitchfork Bifurkation handelt (siehe Kap. 2.5.2), stellt der Bifurkationspunkt gleichzeitig einen Fold dar (siehe Abb. 2.12). Der zweite Ast, der an diesem Punkt entspringen müsste, besitzt die selbe Norm wie der gefundene Volumen-Ast in Abbildung 3.5 und deckt sich daher mit diesem. An den Punkten im Phasendiagramm,

an denen die beiden gelben Linien zusammen laufen, geht die subkritische Pitchfork Bifurkation unter Variation der Parameter in eine superkritische Pitchfork Bifurkation über und der obere Fold verschwindet (siehe Kap. 2.5.2). Der fortlaufende Ast der gelben Linie markiert daher den Übergang vom coarsening per Volumenaustausch zum Splitting eines großen Tropfens zu zwei kleinen (Kap. 2.2).

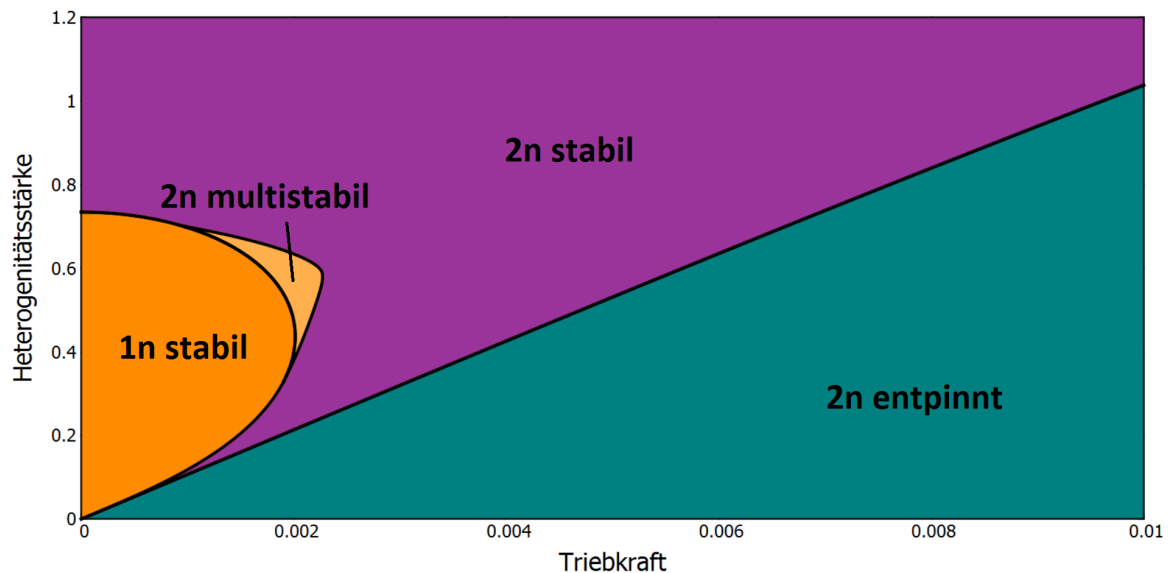
Für den unteren Folds des 2n-Unterastes ergibt sich im Phasenraum ein parabelförmiger Verlauf. Die Linie schneidet die  $\vartheta = 0$ -Achse an dem Punkt L16, welcher dem Fold des mod. Film-Astes in Abbildung 3.1 entspricht. Somit hat sich auch die Vermutung einer Verschmelzung des 2n-Astes mit dem mod. Film-Ast aus Kapitel 3.2 bestätigt.



**Abbildung 5.1.:** Phasendiagramm der Folds unter Variation der Parameter  $\rho$  und  $\vartheta$ . Der Verlauf der oberen Folds des 2n-Astes zeigt eine lineare Proportionalität zwischen  $\rho$  und  $\vartheta$ . Die Linie, die sich daraus ergibt, scheint das Depinning der Lösungen mit zwei gleich großen Tropfen zu markieren. Diese Vermutung wird durch die Zeitsimulationen bestärkt, die bei höheren Triebkräften (rechts von der Linie) entpinnte Lösungen (Dreiecke) und bei niedrigeren Triebkräften (links von der Linie) stationäre Lösungen (Kreuze) ergibt. Die zwei gelben Linien beschreiben den Verlauf der Folds in einer Pitchfork Bifurkation des Volumen-Astes. Der rechte Ausläufer beschreibt dabei den Verlauf des oberen Folds DL23 aus Abbildung 3.5 und existiert nur, solange die Pitchfork Bifurkation subkritisch ist. Der linke fortlaufende Ast markiert dabei den unteren Fold, welcher dem Bifurkationspunkt entspricht, an dem der Volumen-Ast in den 2n-Ast übergeht. Die rote Linie verbindet die unteren Folds der 2n-Unteräste aus den Abbildungen 3.5 bis 3.7 mit dem Fold L16 aus Abbildung 3.1. Der mod. Film-Ast scheint über diese Folds also mit 2n-Ast verbunden zu sein und kann auch bei höheren Heterogenitätsstärken durch die Triebkraft wieder hervorgerufen werden.

Um die Bereiche, in denen die 1n- bzw. 2n-Lösungen stabil sind, klarer abzutrennen, wurden die durch die entsprechenden Äste eingegrenzten Flächen in Abbildung 5.2 eingefärbt. Dabei entspricht die Gelb gefärbte 1n-Fläche dem Bereich, in dem eine Lösung mit einem großen Tropfen entsprechend den Lösungen des Volumen-Astes stabil ist. Die

angrenzende, kleinere, gelbe Fläche beschreibt den Bereich, in dem die Pitchfork Bifurkation des Volumen-Astes subkritisch ist. Dort existieren zwei verschiedene Lösungen von denen eine instabil und eine stabil ist (siehe Kap. 2.5.2 u. 4). Der Bereich in dem die  $2n$ -Lösungen stabil sind ist violett gefärbt und geht an einer linearen Grenzfläche in den Bereich entpinnter, zeitperiodischer  $2n$ -Lösungen über.



**Abbildung 5.2.:** Stabile Bereiche der stationären  $1n$ - bzw.  $2n$ -Lösungen im Phasenraum. Die große gelbe Fläche markiert den Bereich, in dem die  $1n$ -Lösungen entsprechend den Lösungen des Volumen-Astes stabil sind, die violetten Fläche den, in dem die  $2n$ -Lösungen entsprechend dem  $2n$ -Ast stabil sind. An die große gelbe Fläche schließt eine kleinere an, welche multistabile Lösungen des Volumen-Astes markiert (siehe Kap. 2.5.2 u. 4). Indessen geht der Bereich der stabilen  $2n$ -Lösungen direkt in den grünen Bereich der entpinnten zeitperiodischen  $2n$ -Lösungen über.



## 6. Kontinuierung zeitperiodischer Lösungen

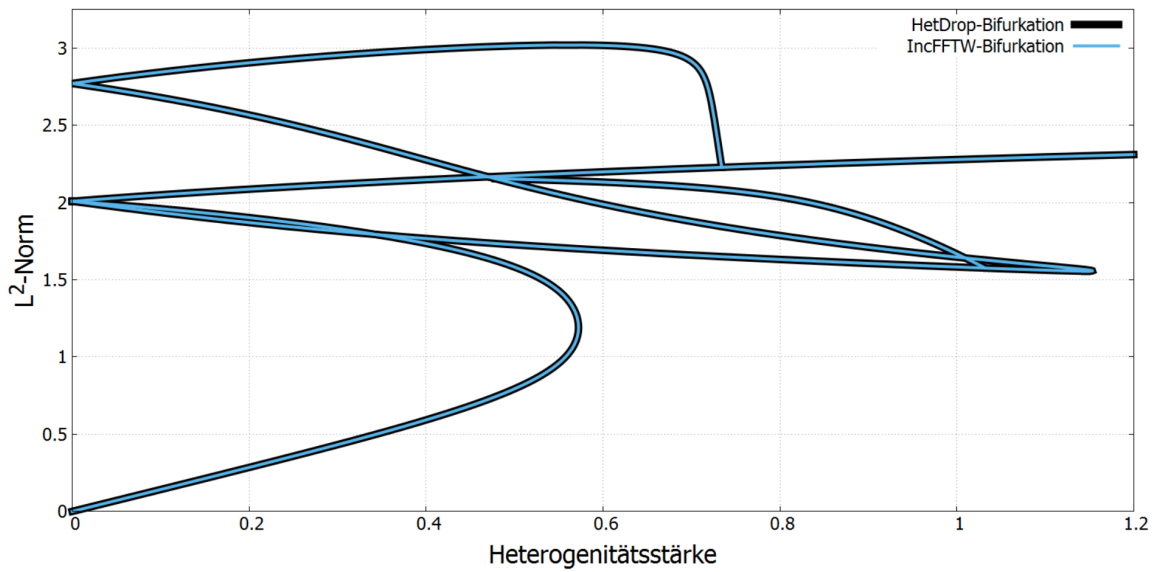
In den vorangegangenen Kapiteln werden die Folds als Übergangspunkte von stationären zu entpinnten Lösungen angenommen. Um diese entpinnten Lösungen in den Bifurkationsdiagrammen zu lokalisieren, wird der Code „IncFFTW“ verwendet, der einer auf dieses Problem angepassten Form des „RotFFTW“ Codes entspricht [TKGW16]. Anders als bei den zuvor verwendeten Codes „HetDrop“ und „HetDrive“ wird die Dünnfilmgleichung hier nicht in gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung überführt und als Randwertproblem behandelt, sondern stattdessen diskretisiert und in den Fourierraum transformiert:

$$\hat{u}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j \cdot e^{-\frac{2\pi i k j}{N}}. \quad (6.1)$$

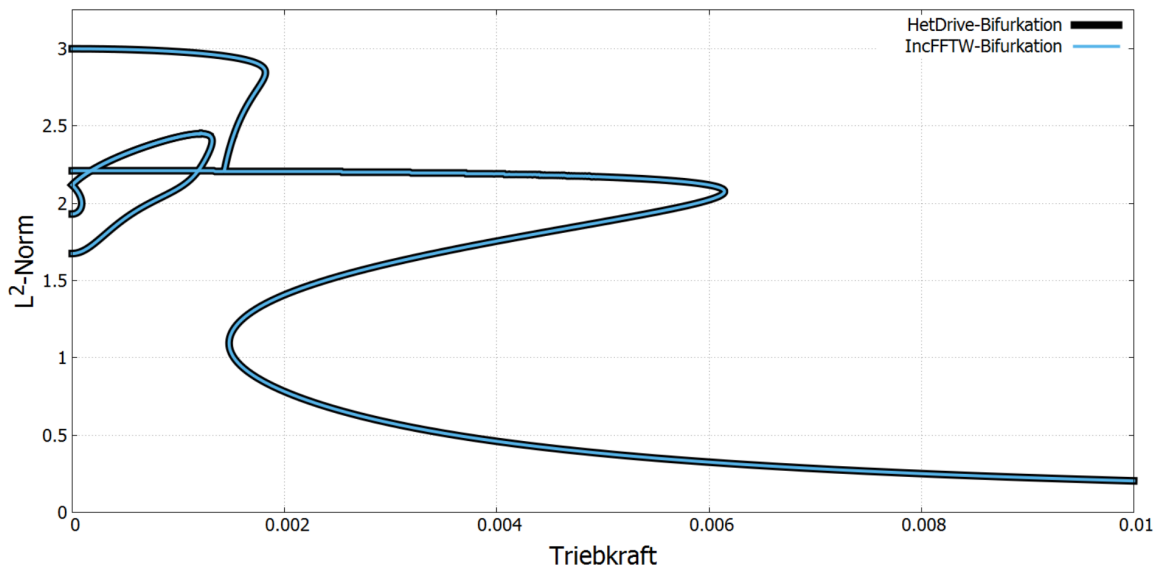
Für die diskreten Werte ergeben sich jeweils zeitabhängige Differenzialgleichungen, die im Ortsraum miteinander verknüpft sind. Die auftretenden Ableitungen sind im Fourierraum durch

$$\frac{d^n}{dx^n} h_j(x, t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{2\pi i k}{N} \right)^n \cdot \hat{u}(k) e^{\frac{2\pi i K j}{N}} \quad (6.2)$$

gegeben [TKGW16] und können so bequem gelöst werden. Auf diese Weise werden die Terme abgeleitet und anschließend zurück in den Realraum transformiert. So können alle Ableitungen in der Dünnfilmgleichung von innen nach außen gelöst werden. Das Programm „AUTO-07P“ ist dann in der Lage, die zeitperiodischen Lösungen der einzelnen Differenzialgleichungen zu ermitteln. Da hier der Code „IncFFTW“ verwendet wird, muss zunächst gezeigt werden, dass sich diese Lösungen mit den bereits Ermittelten decken. Zu diesem Zweck wurden die Bifurkationsdiagramme entsprechend den Abbildungen 3.1 und 3.5 mit dem neuen Code reproduziert und verglichen (siehe Abb. 6.1 und 6.2).



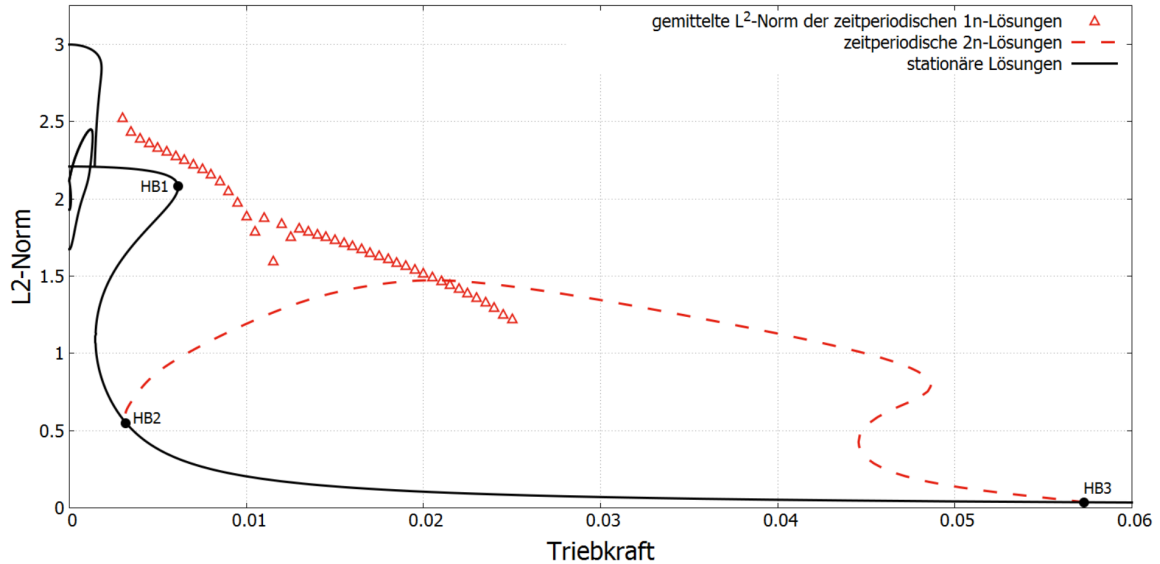
**Abbildung 6.1.:** Vergleich der Bifurkationsdiagramme der Dünnschichtgleichung auf einem heterogenen Substrat bei der Triebkraft  $\vartheta = 0$  und variierter Heterogenitätsstärke  $\rho$ . Produziert mit den Codes „HetDrop“ und „IncFFTW“. Da die Diagramme direkt übereinander liegen, scheinen sich die Ergebnisse und die  $L^2$ -Norm zu entsprechen.



**Abbildung 6.2.:** Vergleich der Bifurkationsdiagramme der Dünnschichtgleichung auf einem heterogenen Substrat bei der Heterogenitätsstärke  $\rho = 0,65$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$ . Produziert mit den Codes „HetDrive“ und „IncFFTW“. Da die Diagramme direkt übereinander liegen, scheinen sich die Ergebnisse und die  $L^2$ -Norm zu entsprechen.

Da die Diagramme sich decken, scheinen die gewählten Normen einander zu entsprechen. Bei der Reproduktion des Bifurkationsdiagramms mit variierter Triebkraft werden außerdem Hopf Bifurkationen detektiert (siehe Kap. 2.5.3). An diesen Bifurkations-

punkten (HB) zweigen die Äste der zeitperiodischen Lösungen ab. Diese Äste wurden nun mit dem Code „IncFFTW“ berechnet und in Abbildung 6.3 dargestellt.



**Abbildung 6.3.:** Bifurkationsdiagramm der Dünnfilmgleichung bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  und variierter Triebkraft  $\vartheta$ . Zusätzlich ist in rot gestrichelt der Ast der zeitperiodischen Lösungen mit zwei rutschenden Tropfen dargestellt, der durch Kontinuierung gefunden wurde. Dieser Ast scheint außerdem instabil zu sein, da z.B. die Zeitsimulation von DL24 in einem stationären Profil entsprechend DL26 endet statt zu entpinnen. Der an HB1 entspringende Ast wird als Hopf Bifurkation mit instabilem Grenzzyklus angenommen, dessen Periode divergiert, sobald er sich einer instabilen Lösung des 2n-Astes zwischen den Punkten DL19 und DL27 nähert. Der Ast der entpinnten Lösungen mit einem großen Tropfen konnte mangels weiterer Hopf Bifurkationen nicht lokalisiert werden. Allerdings wird sein Verlauf anhand der gemittelten  $L^2$ -Norm aus den entsprechenden Zeitsimulationen abgeschätzt. Die ersten Ergebnisse dieser Mittelung sind als Dreiecke in dem Diagramm eingetragen. Da der Verlauf dieser Punkte den Ast der zeitperiodischen 2n-Lösungen schneidet, ist sein Ursprung unklar.

Der beim ersten Bifurkationspunkt (HB1) in Richtung kleinerer  $\vartheta$  entspringende Ast wird von dem Programm „AUTO-07P“ berechnet und weist eine divergierende Periode  $T_{HB}$  auf sobald er sich einer instabilen Lösung des 2n-Astes zwischen DL19 und DL27 nähert. Die zeitperiodischen Lösungen auf diesem Ast scheinen instabil zu sein, da sie in Zeitsimulationen nicht gefunden werden. Der Endpunkt mit divergierender Periode ist vermutlich eine globale homokline Bifurkation[Str14, Kap. 8.4].

Der im Punkt HB2 entspringende Ast hingegen wird durch das Kontinuierungsverfahren vollständig lokalisiert und ist direkt mit dem Punkt HB3 verbunden. Hierbei handelt es sich um die Lösungen mit zwei gleichgroßen entpinnten Tropfen, wie z.B. in Abbildung 4.4. Dieses Ergebnis entspricht jedoch nicht der bisher verfolgten Annahme, dass der obere Fold der Ursprung dieser entpinnten Lösungen ist. Da sich der Fold

DL27 bezüglich der Triebkraft allerdings in der Nähe von HB2 befindet, sind die bisherigen Ergebnisse mit dieser These vereinbar. Dies ist dadurch begründet, dass diese Analysemethoden nur den Bereich der Heterogenitätsstärke und Triebkraft begrenzen, in dem sich der Ursprung dieses Astes befinden muss. Die Möglichkeit, dass ein anderer darunter liegender Punkt für die Entstehung dieses Astes verantwortlich sein könnte, wurde daher zunächst nicht in Betracht gezogen. Diese Erkenntnis verursacht weiterhin das Problem, dass die Stabilitäten der Äste nicht klar erkennbar sind. Da ein Ast für gewöhnlich an einer Hopf Bifurkation seine Stabilität ändert, müsste der Bereich rechts von HB2 stabil sein, da der Bereich links davon instabil ist (siehe Kap. 2.5.3). Die Zeitsimulation zeigt allerdings, dass die Lösung DL24 in diesem Bereich instabil ist und in einem stationären Profil entsprechend DL26 endet anstatt zu entpinnen. Der Ast der zeitperiodischen  $2n$ -Lösungen wird daher als instabil angenommen. Die Stabilitäten der Äste in diesem Bereich bleiben also weiterhin zu ermitteln.

Der Ast für die entpinnten  $1n$ -Lösungen mit einem großen Tropfen, entsprechend Abbildung 4.3, kann hingegen nicht lokalisiert werden, da keine weiteren Hopf Bifurkationen detektiert werden. Allerdings kann sein Verlauf durch Berechnung der Mittelwerte der  $L^2$ -Norm aus den Zeitsimulationen angenähert werden. Die ersten Ergebnisse sind als Dreiecke in Abbildung 6.3 eingetragen. Über den Ursprung des Astes können weiterhin nur Spekulationen angestellt werden. Der Verlauf der Punkte nähert sich mit zunehmender Triebkraft  $\vartheta$  dem Ast der zeitperiodischen  $2n$ -Lösungen an und kreuzt diesen. Die Vermutung der Ast der zeitperiodischen  $2n$ -Lösungen könnte den Ursprung der zeitperiodischen  $1n$ -Lösungen bergen ist daher ebenfalls auszuschließen. Allerdings ist der Fehlerbalken dieser Punkte zum Teil sehr groß. So wurde der Mittelwert der Norm z.B. nur über einige teils chaotische Perioden gemittelt anstatt über ideal-periodische Bereiche. Die weitere Untersuchung dieses Astes enthält das Potential für weitere Arbeiten.

## 7. Fazit

In den vorangegangenen Kapiteln wurde mittels verschiedener Codes für das Programm „AUTO-07P“ das Verhalten von Tropfen und flachen Filmen auf festen Substraten ausgehend von der Dünnschichtgleichung (14) untersucht. Dazu wurden in Kapitel 3.1 zunächst die stationären Lösungen unter Variation der Heterogenitätsstärke  $\rho$  in einem Bifurkationsdiagramm dargestellt (siehe Abb. 3.1). Dabei stellte sich heraus, dass der Coarsening-Prozess per Volumenaustausch durch den Precursor bei erhöhter Heterogenitätsstärke zum Erliegen kommt und der Volumen-Ast in einer superkritischen Pitchfork Bifurkation in den 2n-Ast verschwindet. Letzterer bleibt von diesem Punkt aus als einziger stabiler Ast bestehen.

Ausgehend von diesem Diagramm wurden in Kapitel 3.2 weiterhin bei ausgewählten Heterogenitätsstärken die stationären Lösungen unter Variation der Triebkraft  $\vartheta$  gesucht. Auch diese wurden in Bifurkationsdiagrammen dargestellt (siehe Abb. 3.4 bis 3.7). Dabei stellte sich ein modulierter Film für sehr hohe Triebkräfte als die einzig verbleibende stationäre Lösung heraus. Aus Abbildung 3.5 konnte weiterhin gefolgert werden, dass der Coarsening-Prozess per Volumenaustausch auch durch erhöhte Triebkräfte unterdrückt werden kann, da der Volumen-Ast bei erhöhter Triebkraft in einer subkritischen Pitchfork Bifurkation im 2n-Ast endet. Dabei entsteht ein weiterer Unterast des Volumen-Astes, welcher zwei unterschiedlich große Tropfen enthält. Der 2n-Ast bleibt von diesem Bifurkationspunkt aus zunächst stabil bestehen, bis er in einer Saddle-Node Bifurkation endet. Der Unterast, der an dieser Bifurkation ebenfalls beteiligt ist, verbindet den 2n-Ast in einer weiteren Saddle-Node Bifurkation mit dem mod. Film-Ast, welcher zuvor verschwunden war. Diese Form bleibt auch für höhere Heterogenitätsstärken bestehen, wobei sich die Folds mit zunehmender Heterogenitätsstärke in Richtung höherer Triebkräfte verschieben. Es wurde zunächst vermutet, dass der obere Fold des 2n-Astes das Depinning der entsprechenden Lösungen markiert.

Um die Stabilitäten der Äste in Abbildung 3.5 zu klären, wurden in Kapitel 4 Zeitsimulationen durchgeführt. Die Profile am Ende der Simulationen wurden mit den

Lösungen entsprechender Äste verglichen. Der Ast des Startprofils wurde als instabil und der Ast des Endprofils als stabil angenommen, sofern sie nicht identisch waren. Die resultierenden Stabilitäten wurden in Abbildung 4.5 dargestellt. Außerdem wurden zeitperiodische Lösungen gefunden, welche auf die Folds als Übergangspunkte von stationären zu entpinnten Lösungen hinwiesen.

Um die Bereiche zu identifizieren, in denen eine bestimmte Lösung stabil ist, wurde in Kapitel 5 die Entwicklung der Folds unter Variation der beiden Parameter  $\rho$  und  $\vartheta$  im Phasenraum verfolgt (siehe Abb. 5.1). Die Vermutung, dass der obere Fold des 2n-Astes das Depinning der entsprechenden Lösungen markiert, wurde mittels Zeitsimulationen überprüft. Die stationären Ergebnisse wurden dann mit Kreuzen und die entpinnten Lösungen mit Dreiecken in das Phasenraumdiagramm in Abbildung 5.1 eingetragen. Die von den jeweiligen Linien eingegrenzten Flächen markierten also die Bereiche, in denen die jeweilige Lösung stabil ist. In Abbildung 5.2 wurden die vier aussagekräftigsten Bereiche für die stabilen 1n-Lösungen, die multistabilen Volumen-Lösungen, die stabilen 2n-Lösungen und entpinnten 2n-Lösungen farbig dargestellt. Der kleinere Ausläufer des 1n-Bereichs beschreibt dabei den Bereich, in dem der Volumen-Ast in einer subkritischen Pitchfork Bifurkation endet und somit noch einen instabilen Unterast enthält.

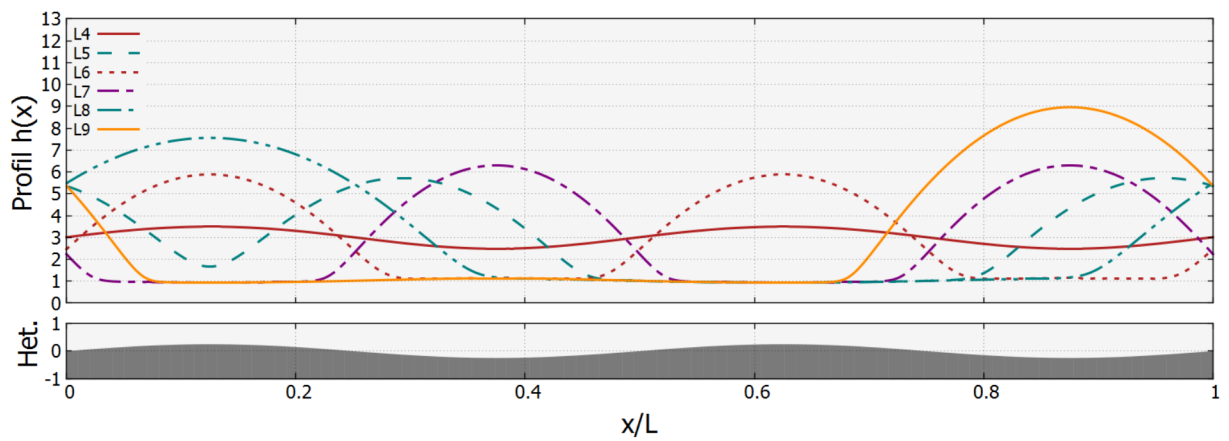
Um die in Kapitel 4 gefundenen zeitperiodischen Lösungen in dem Bifurkationsdiagramm (siehe Abb. 3.5) zu lokalisieren, wurde in Kapitel 6 ein weiterer Code verwendet, welcher in der Lage ist, die Äste solcher Lösungen zu verfolgen. In Abbildung 6.3 wurden drei Hopf Bifurkationen detektiert. Bei dem ersten Bifurkationspunkt (HB1) handelt es sich um eine Art der Hopf Bifurkation mit instabilem Grenzzyklus. Der Ast entspringt in Richtung geringerer Triebkraft und seine Periode divergiert sobald er auf den instabilen 2n-Unterast trifft. Der an HB2 entspringende Ast hingegen endet in HB3 und enthält die zeitperiodischen Lösungen mit zwei gleich großen entpinnten Tropfen. Damit wurde die Annahme über den oberen Fold des 2n-Astes als Ursprung dieser Lösungen widerlegt. Die Zeitsimulation der Lösung DL24 ergab außerdem, dass der Ast der zeitperiodischen 2n-Lösungen als instabil angenommen werden kann, eben so wie der 2n-Unterast der stationären Lösung modulierter Filme selbst. Der Ast der zeitperiodischen Lösungen mit einem großen entpinnten Tropfen entsprechend Abbildung 4.3 konnte hingegen nicht gefunden werden. Um den Verlauf dieses Astes abzuschätzen wurden die Normen der entsprechenden Zeitsimulationen gemittelt und als Dreiecke in das Bifurkationsdiagramm eingetragen. Der Verlauf dieser Punkte nähert sich mit zunehmender Triebkraft dem Ast der zeitperiodischen 2n-Lösungen an und kreuzt ihn.

Über den Ursprung dieses Astes kann bisher nur spekuliert werden. Allerdings ist der Fehlerbalken dieser Punkte sehr groß, da die Mittelung der Norm nicht immer über ideal-periodische Bereiche erfolgte, sondern auch teils auch über chaotische Perioden.

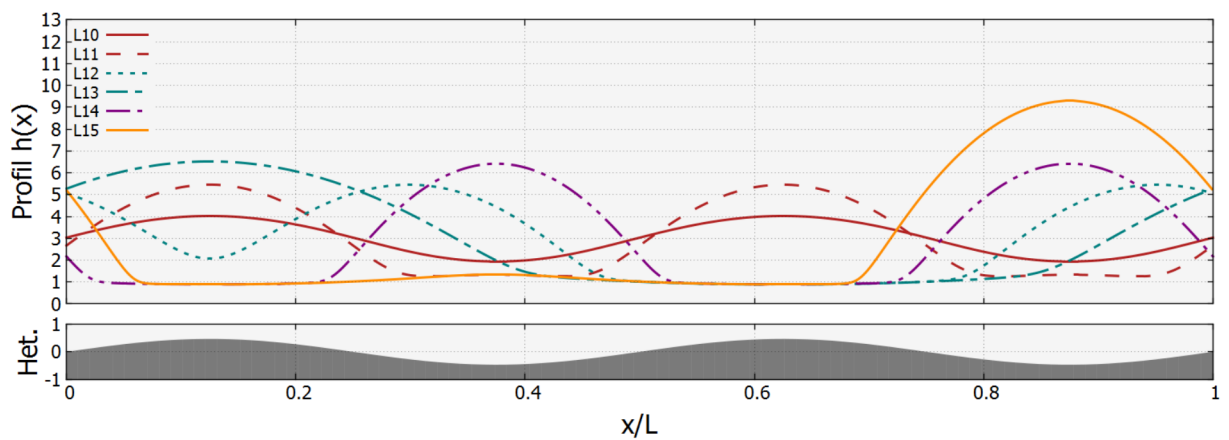
Insgesamt geben die gefundenen Bifurkationsdiagramme eine gute Übersicht über das Verhalten von Tropfen und Filmen auf festen Substraten bei verschiedenen Parameterwerten der Heterogenitätsstärke  $\rho$  und der Triebkraft  $\vartheta$ . Dank der Zeitsimulationen konnten auch die Stabilitäten einiger Bereiche und die möglichen Funktionen der Folds behandelt werden. Dies ermöglichte es weiterhin, in dem Phasenraumdiagramm die Bereiche zu lokalisieren, in denen die entsprechenden Lösungen stabil sind. Die Ergebnisse aus Kapitel 6 sind dagegen weniger eindeutig. Über den Verlauf des Astes der zeitperiodischen Volumen-Lösungen sowie über die Stabilitäten der Äste in diesem Bereich können nur Vermutungen angestellt werden. In einer weiteren Arbeit könnten diese Fragen mittels verbesserter Methoden zur Detektion von Hopf Bifurkationen oder zur Mittelung der  $L^2$ -Norm geklärt werden. Weiterhin könnte der Verlauf der zeitperiodischen Äste unter Variation der Heterogenitätsstärke untersucht werden.



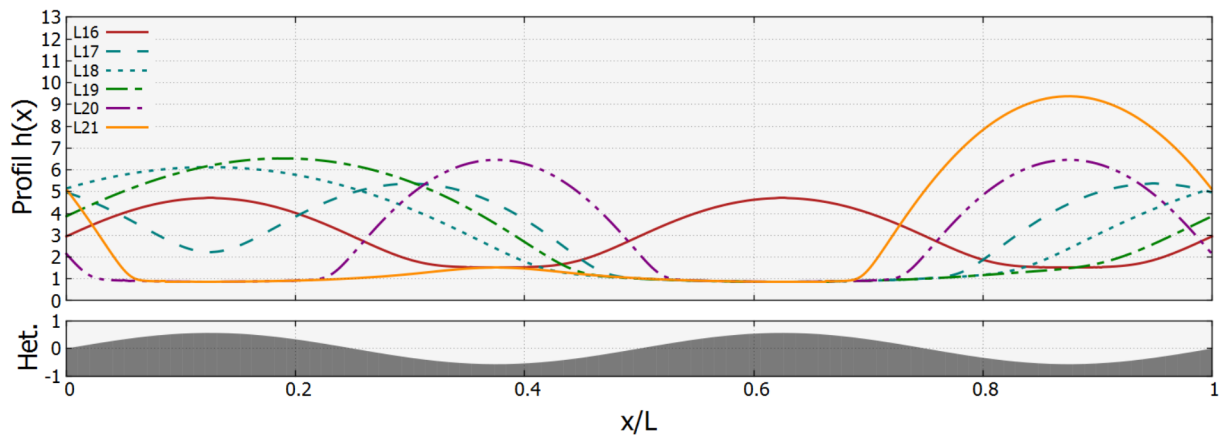
## A. Abbildungen



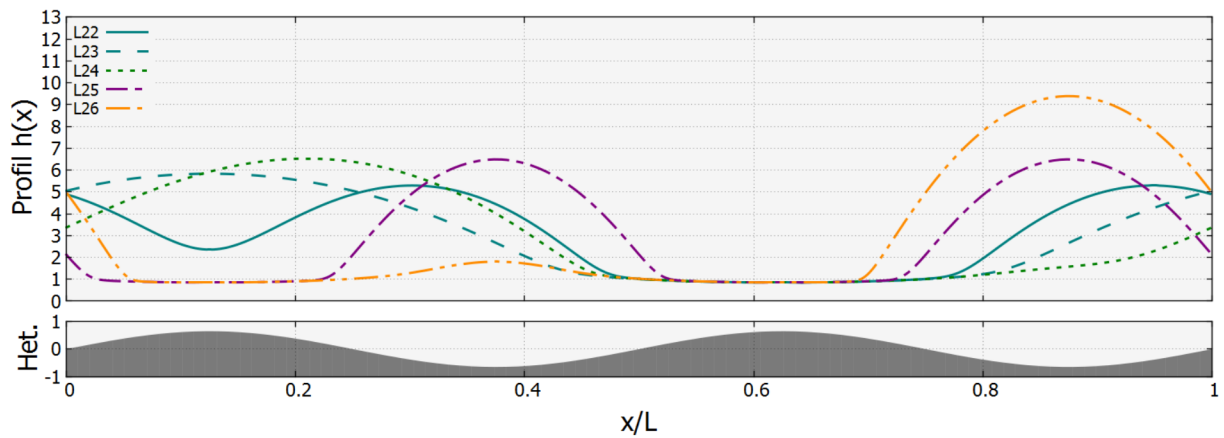
**Abbildung A.1.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,25$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ .



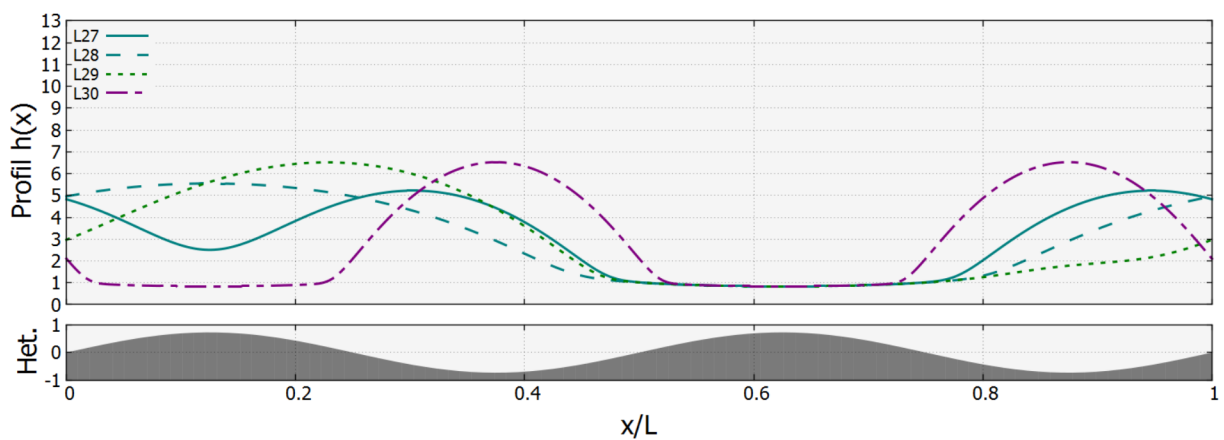
**Abbildung A.2.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,47$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ .



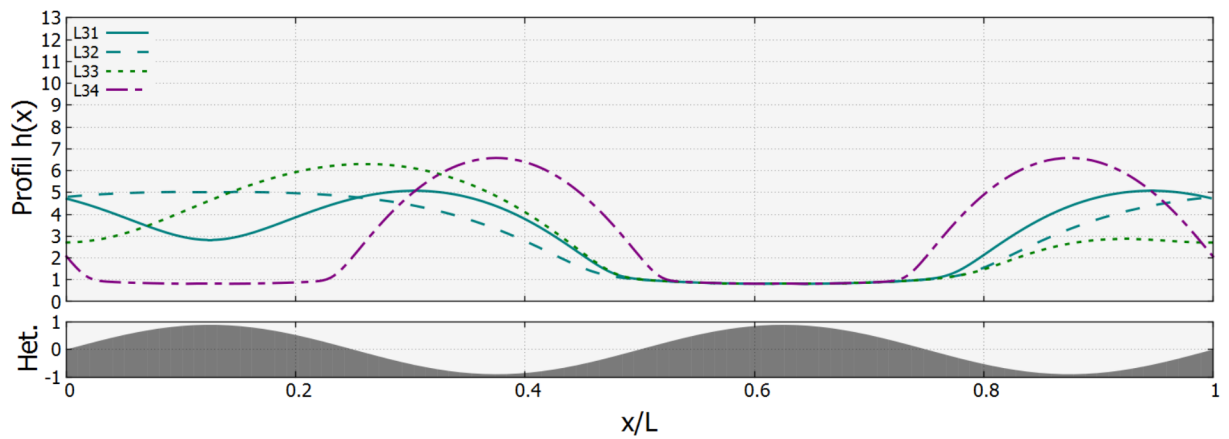
**Abbildung A.3.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,57$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ .



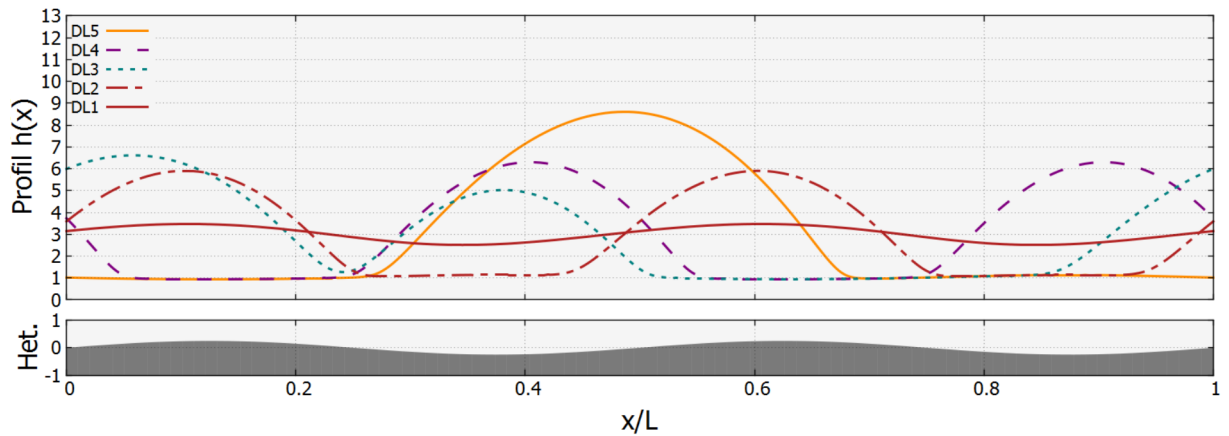
**Abbildung A.4.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ .



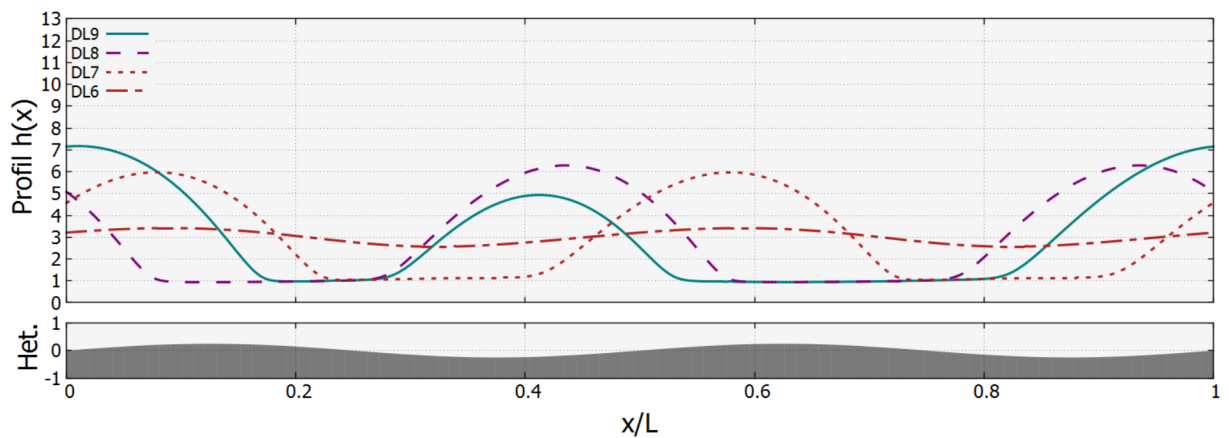
**Abbildung A.5.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,734$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ .



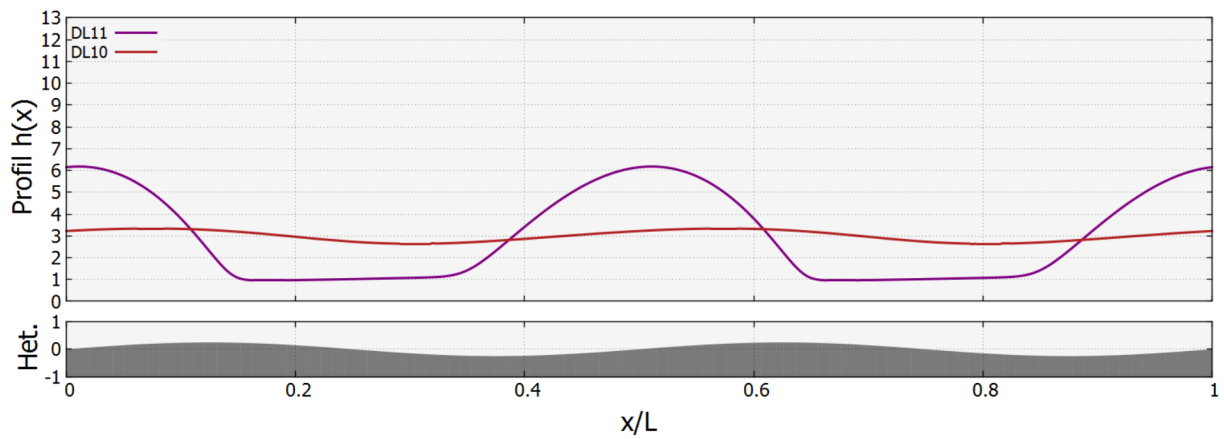
**Abbildung A.6.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,90$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0$ .



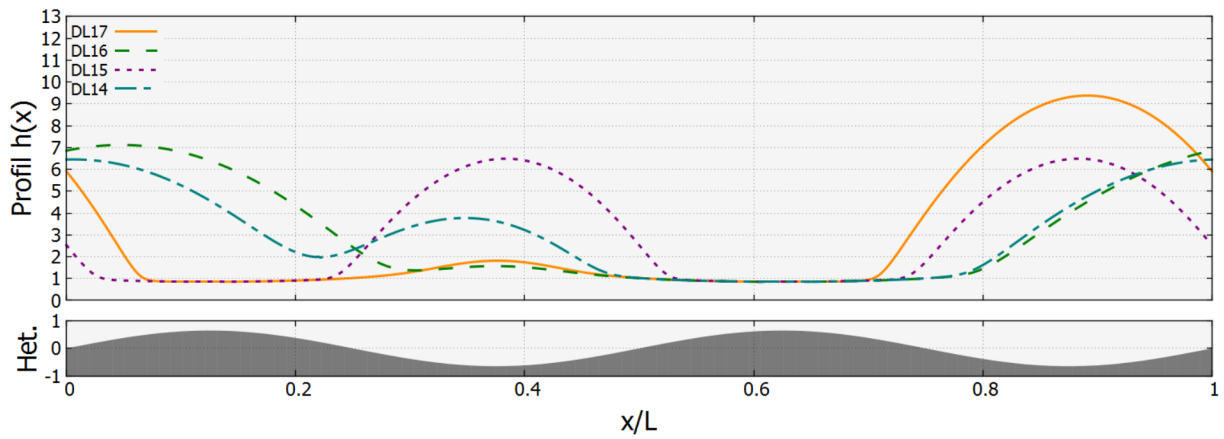
**Abbildung A.7.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,25$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0,77 \cdot 10^{-3}$ .



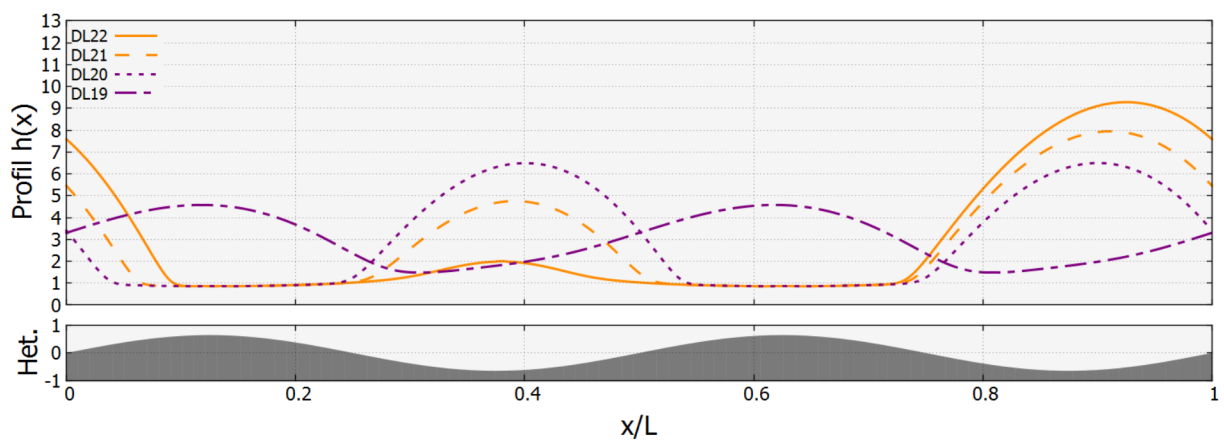
**Abbildung A.8.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,25$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 1,50 \cdot 10^{-3}$ .



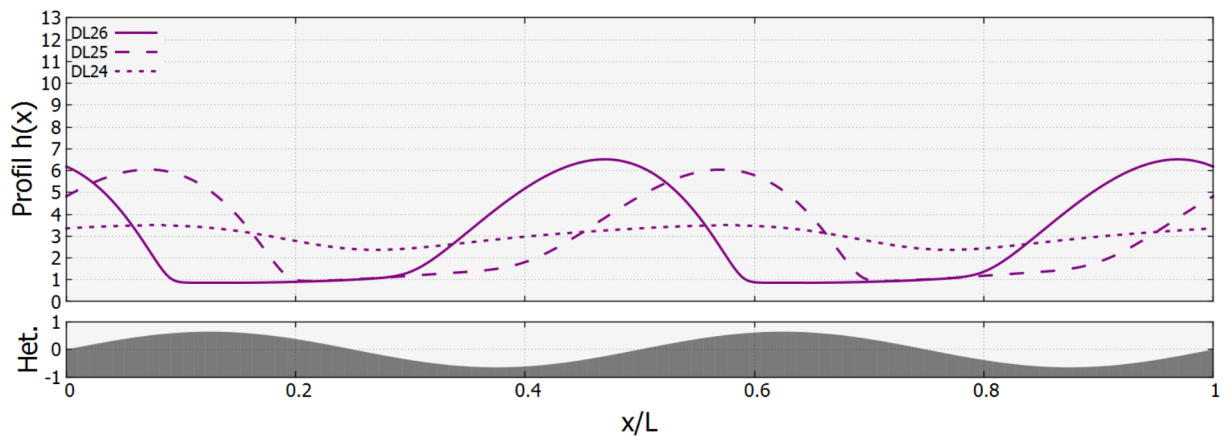
**Abbildung A.9.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,25$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 2,39 \cdot 10^{-3}$ .



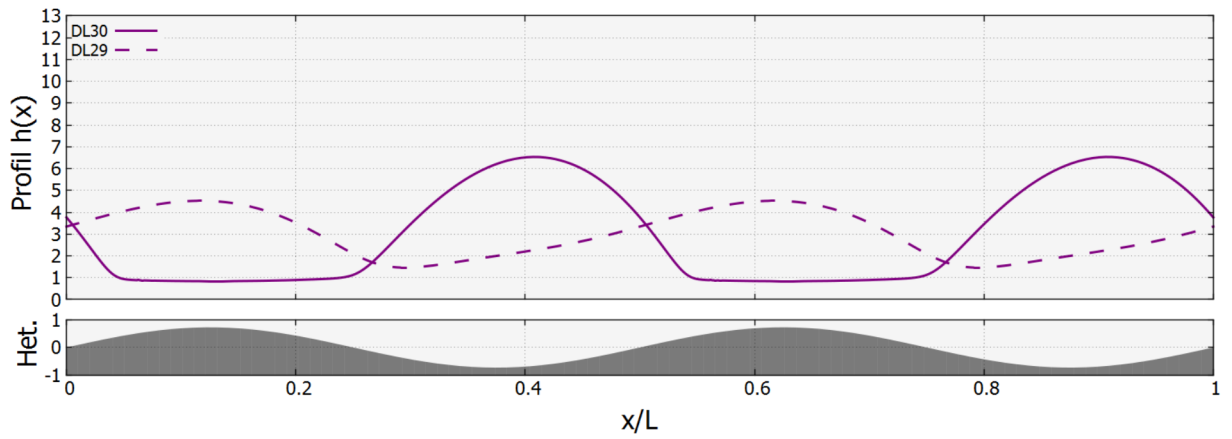
**Abbildung A.10.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 0,50 \cdot 10^{-3}$ .



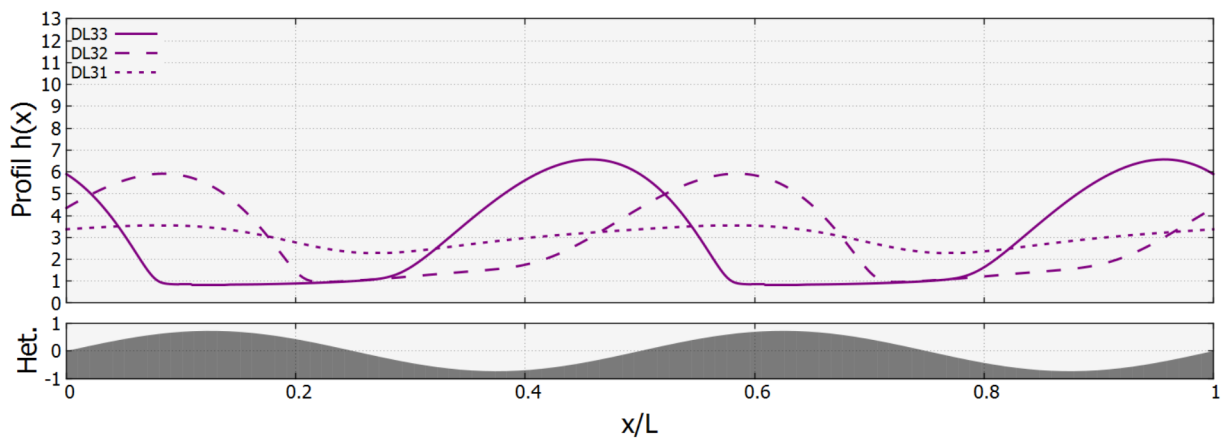
**Abbildung A.11.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 1,50 \cdot 10^{-3}$ .



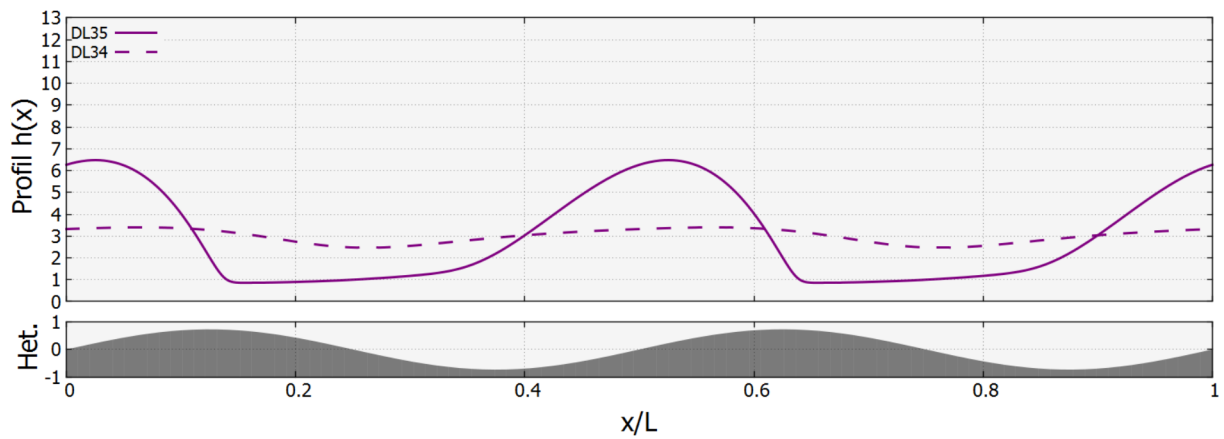
**Abbildung A.12.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,65$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 5,00 \cdot 10^{-3}$ .



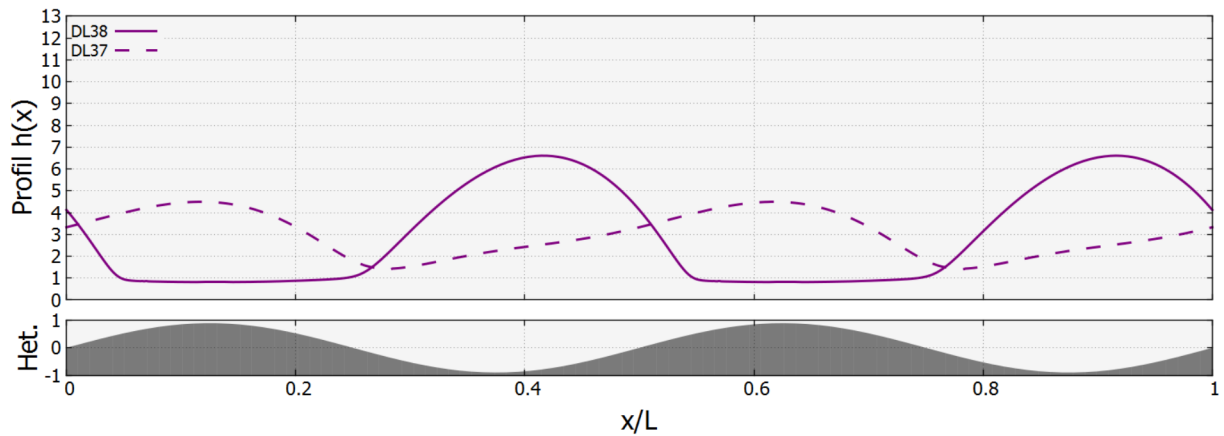
**Abbildung A.13.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,734$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 2,14 \cdot 10^{-3}$ .



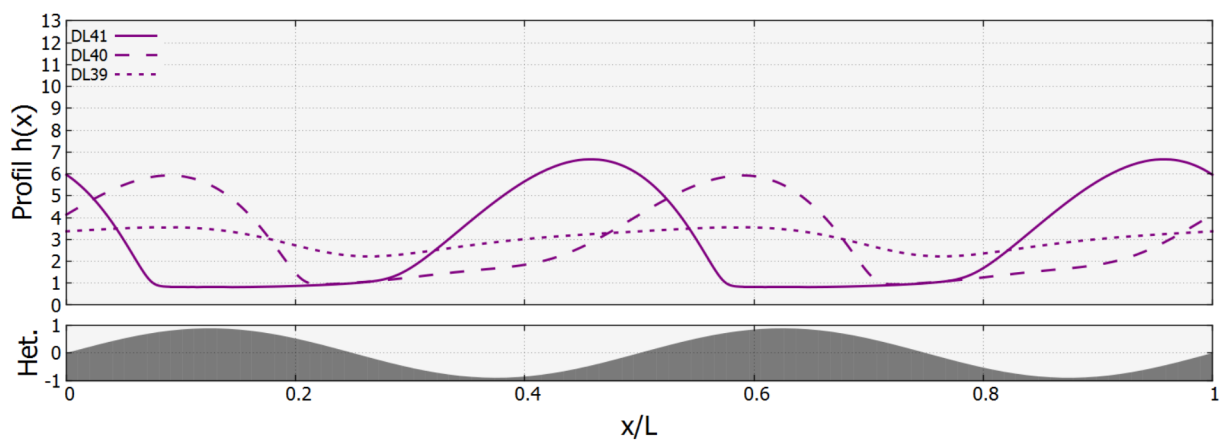
**Abbildung A.14.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,734$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 5,00 \cdot 10^{-3}$ .



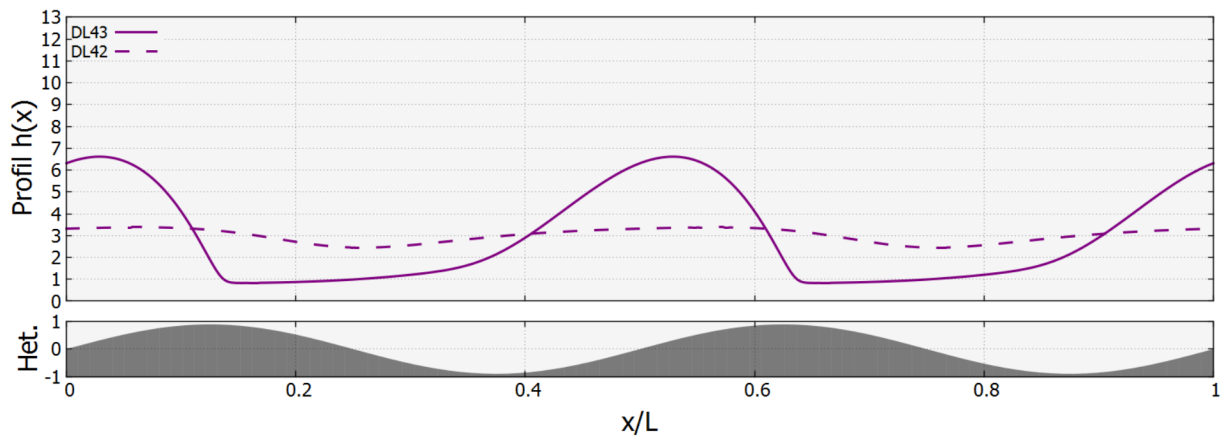
**Abbildung A.15.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,734$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 6,96 \cdot 10^{-3}$ .



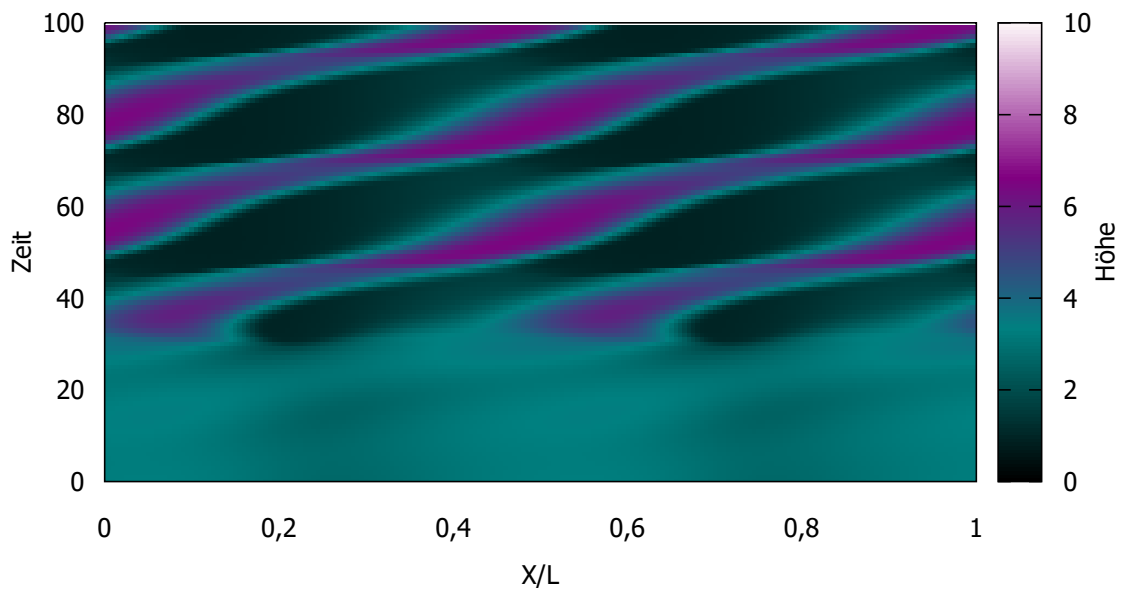
**Abbildung A.16.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,90$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 3,10 \cdot 10^{-3}$ .



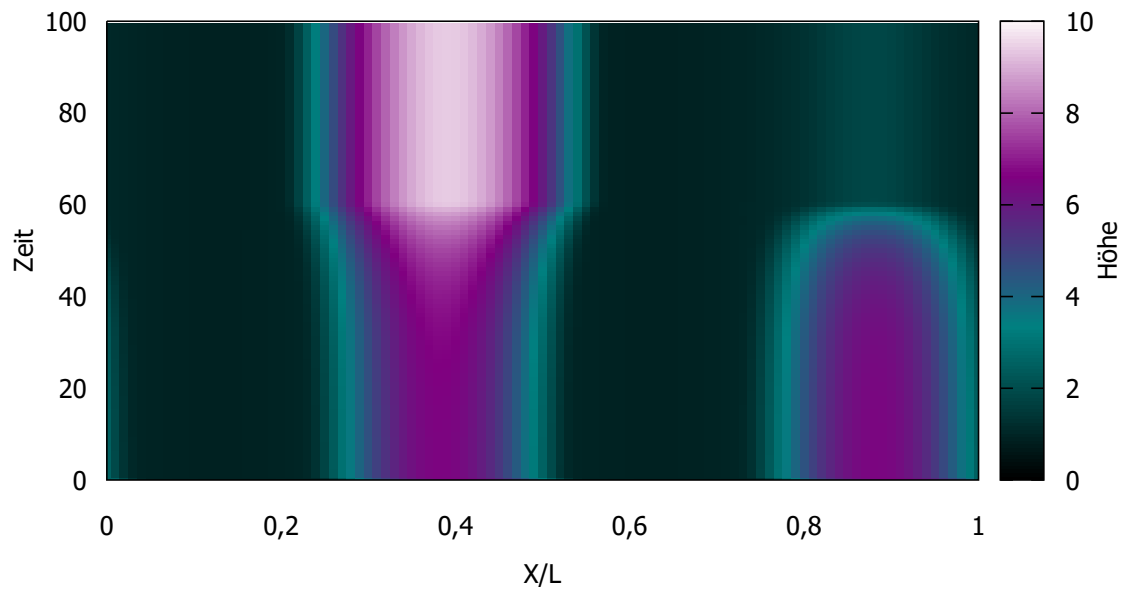
**Abbildung A.17.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0.90$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 6.00 \cdot 10^{-3}$ .



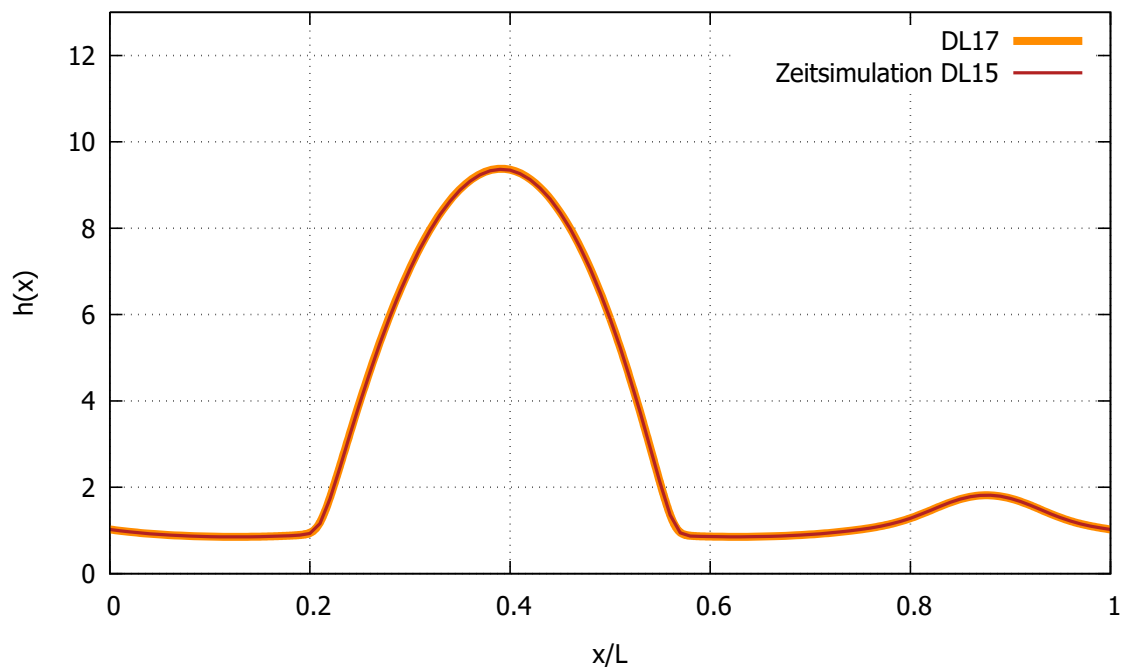
**Abbildung A.18.:** Höhenprofile der stationären Lösungen bei einer Heterogenitätsstärke von  $\rho = 0,90$  und einer Triebkraft von  $\vartheta = 8,60 \cdot 10^{-3}$ .



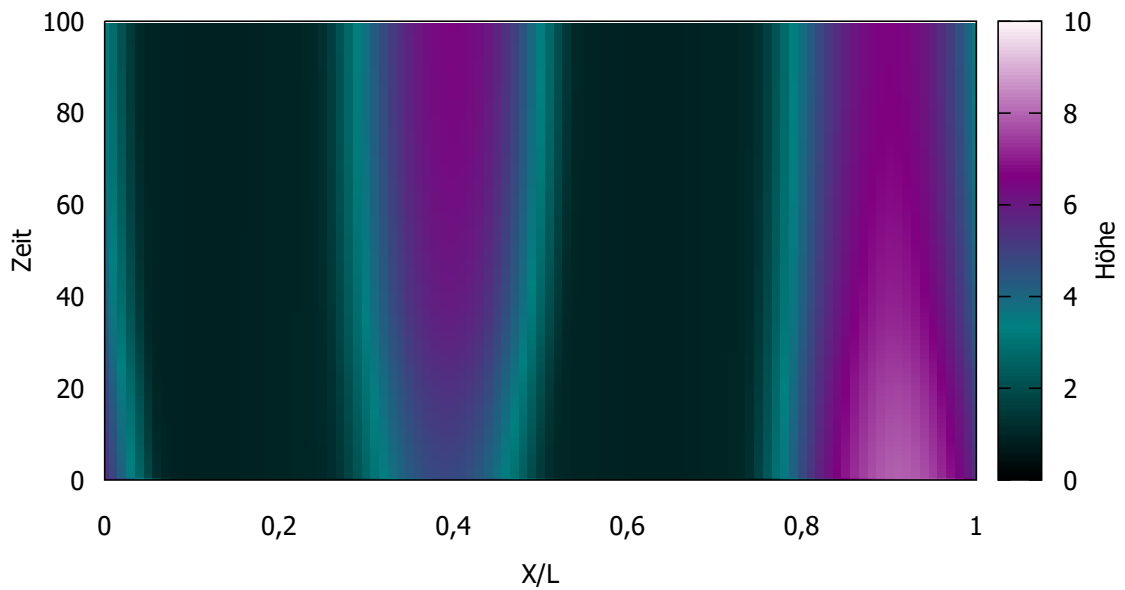
**Abbildung A.19.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL28. Aus dem modulierten Film bilden sich zwei Tropfen welche dann unter Einfluss der Triebkraft depinnen. Der  $2n$ -Ast wird in diesem Bereich als instabil angenommen.



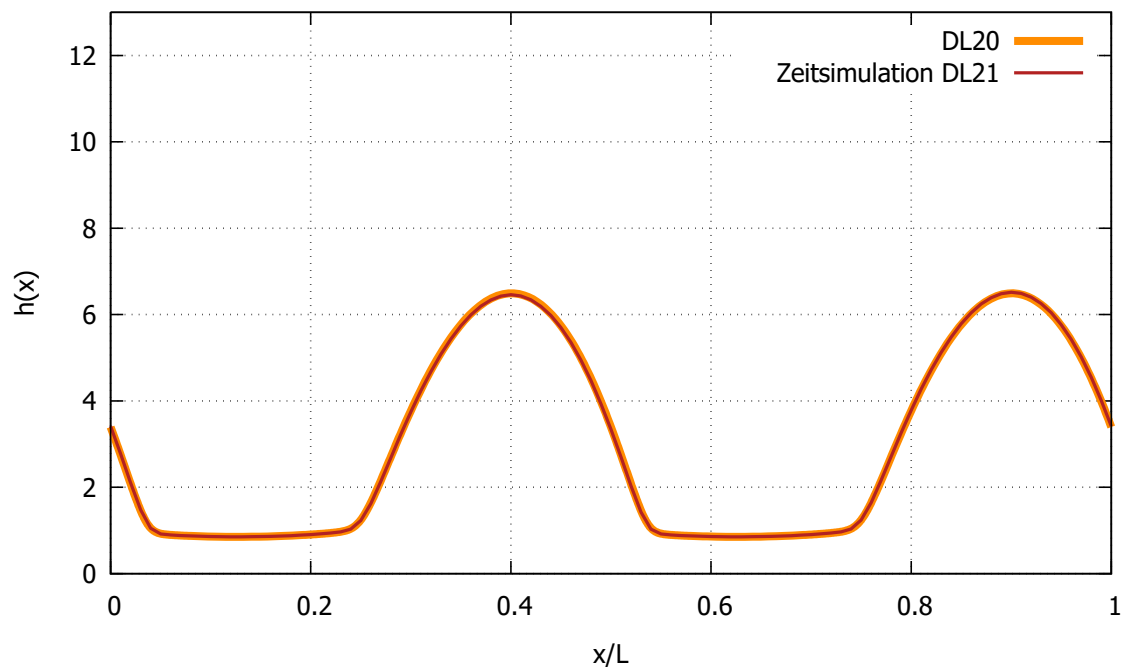
**Abbildung A.20.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL15. Die beiden Tropfen coarsen zu einem. Das resultierende Profil entspricht DL17. Der Volumen-Ast wird in dem entsprechenden Bereich als stabil und der 2n-Ast als instabil angenommen.



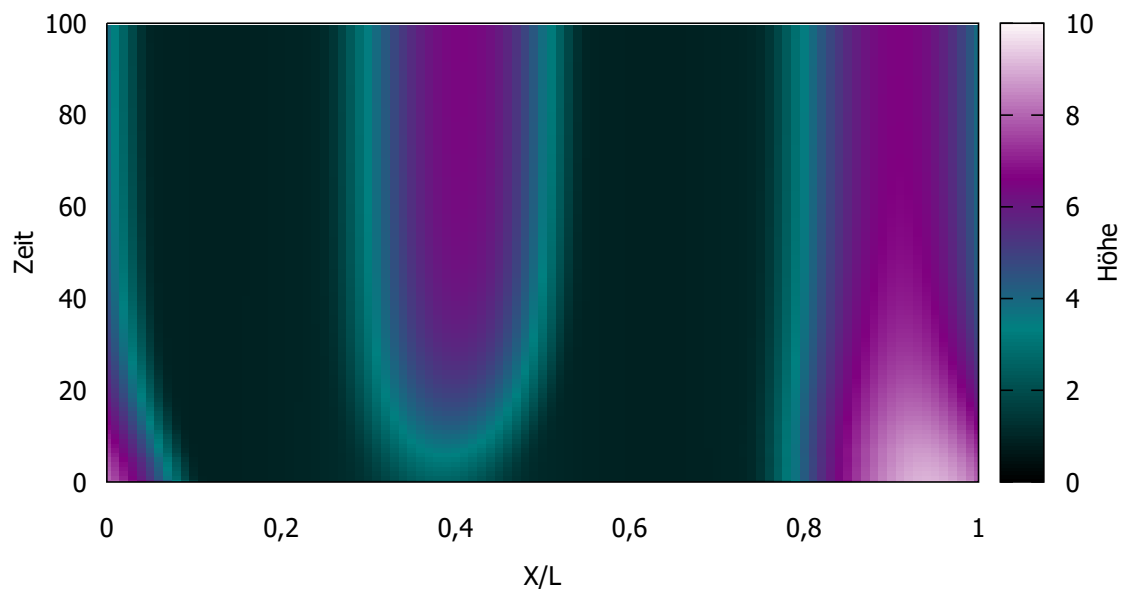
**Abbildung A.21.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von DL15 mit der stationären Lösung DL17. Da sich die Profile entsprechen wird der Volumen-Ast in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



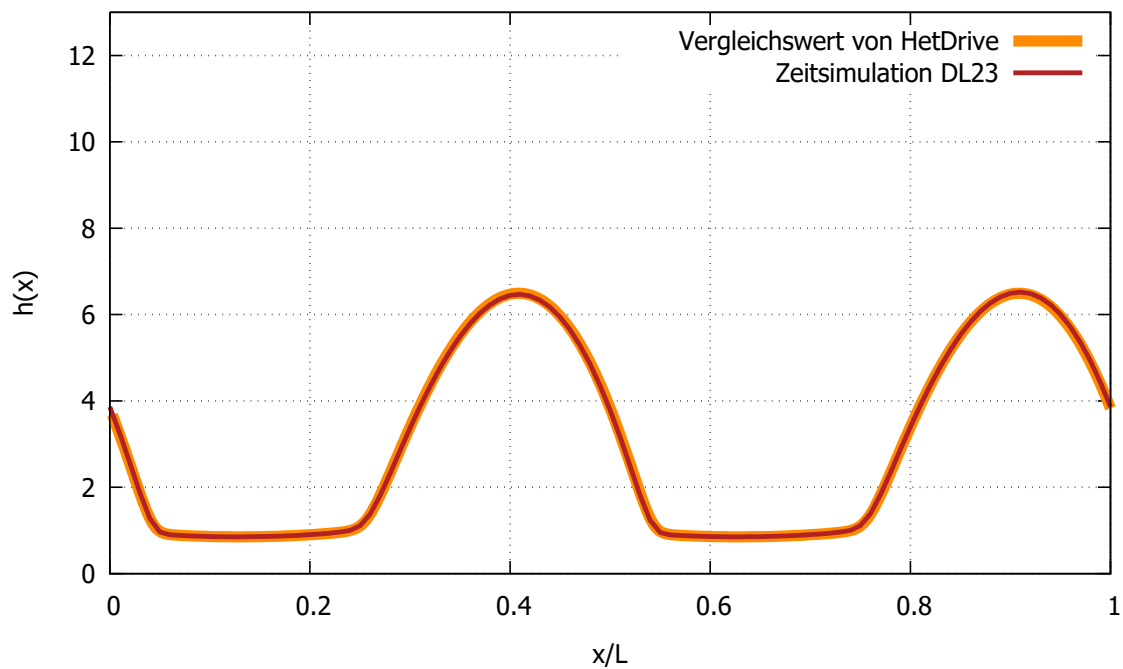
**Abbildung A.22.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL21. Es bildet sich ein Profil mit zwei Tropfen entsprechend DL20 aus. Der 2n-Ast wird in dem entsprechenden Bereich als stabil und der Volumen-Ast als instabil angenommen.



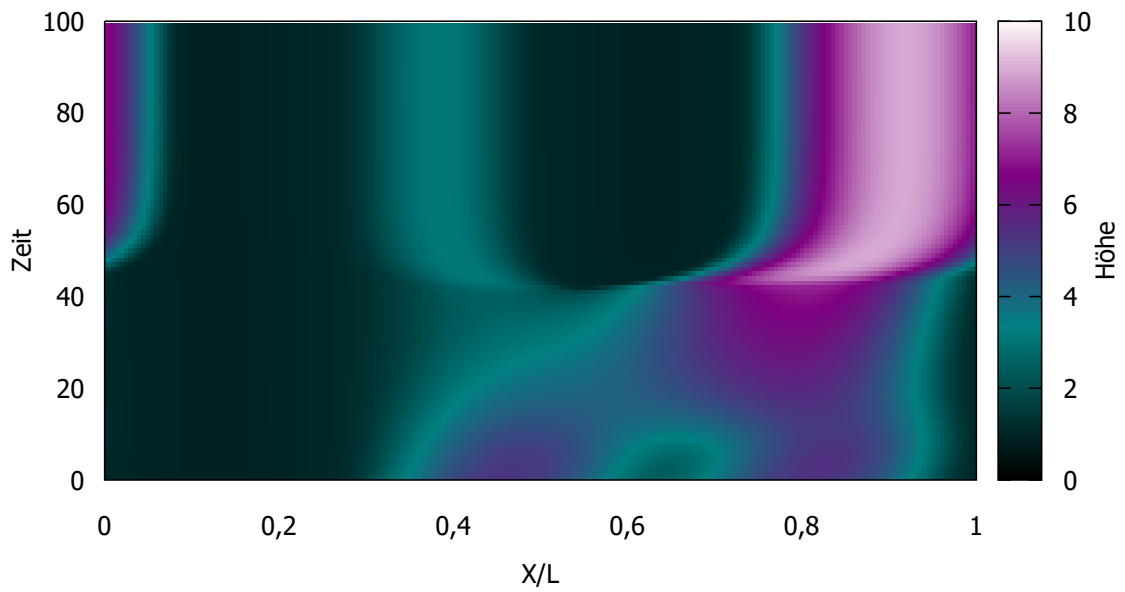
**Abbildung A.23.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von DL21 mit der stationären Lösung DL20. Da sich die Profile entsprechen wird der 2n-Ast in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



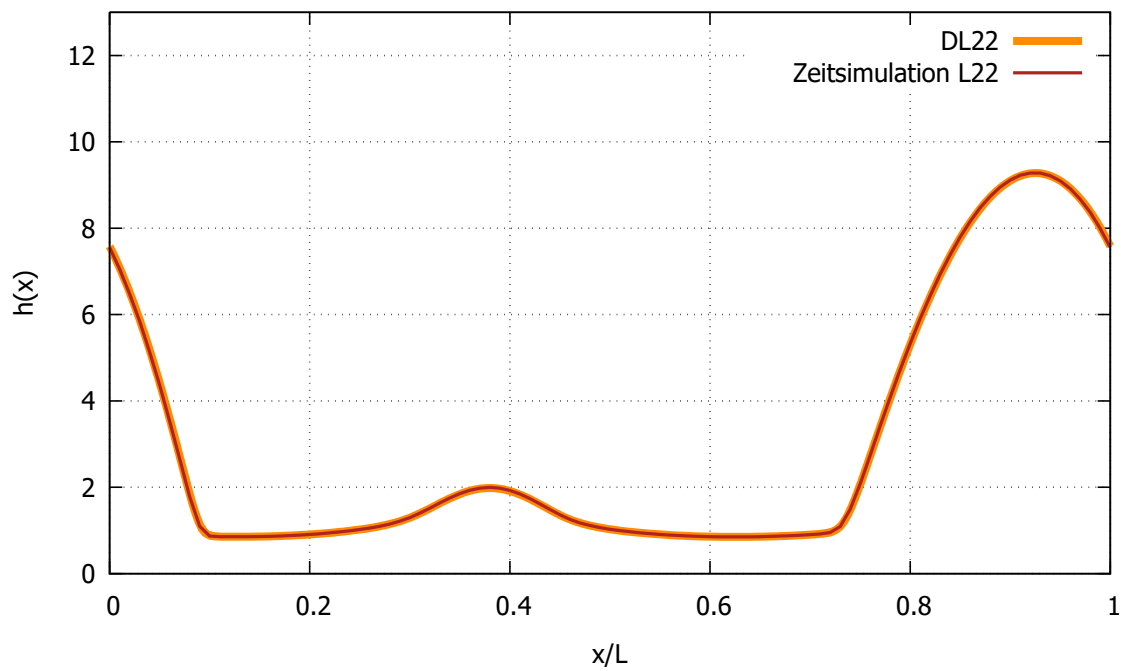
**Abbildung A.24.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL23. Der große Tropfen spaltet in zwei kleinere Tropfen auf. Das Profil kann dem 2n-Ast zugeordnet werden kann. Dieser wird daher in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



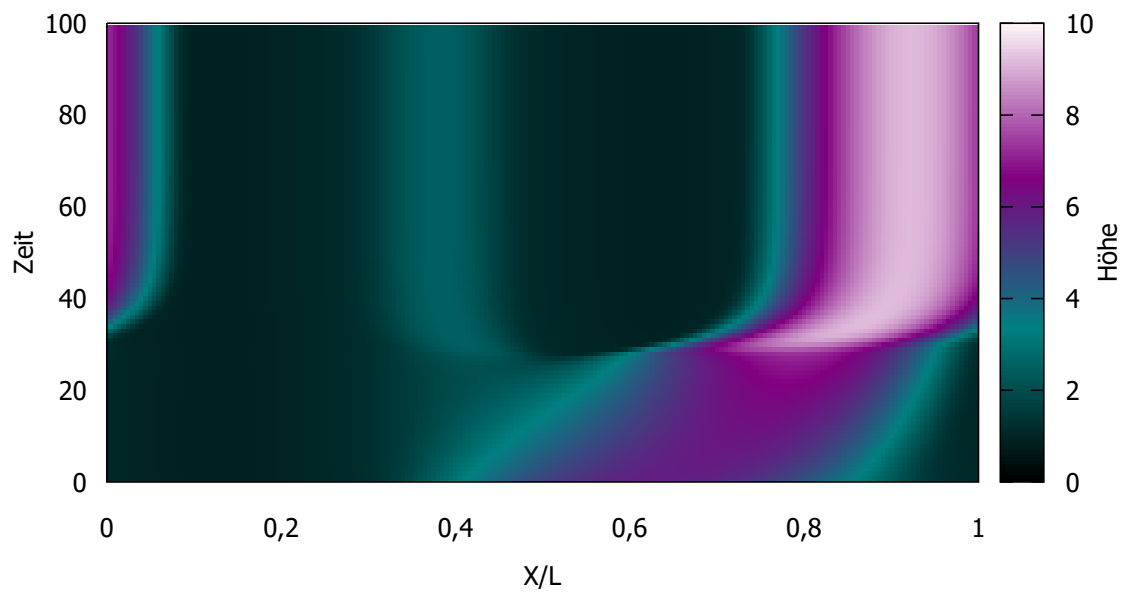
**Abbildung A.25.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von DL21 mit einer stationären Lösung des 2n-Astes bei der selben Triebkraft. Da sich die Profile entsprechen wird der 2n-Ast in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



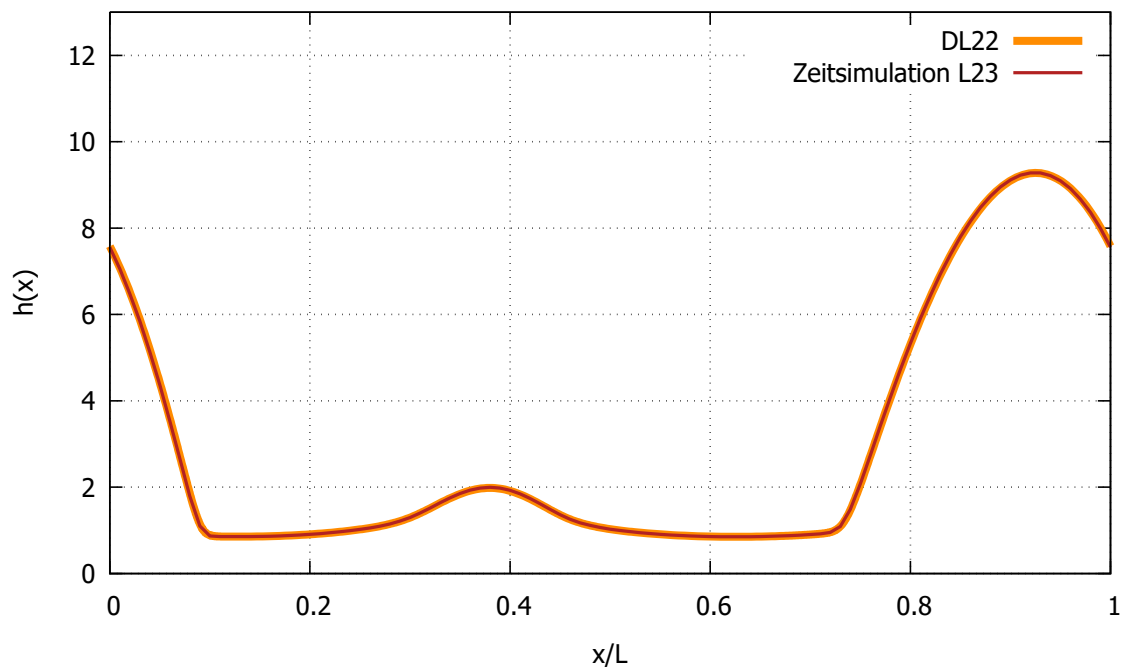
**Abbildung A.26.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung L22. Die beiden Tropfen coarsen zu einem und enden in einem Profil das DL22 entspricht. Der Volumen-Ast wird in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



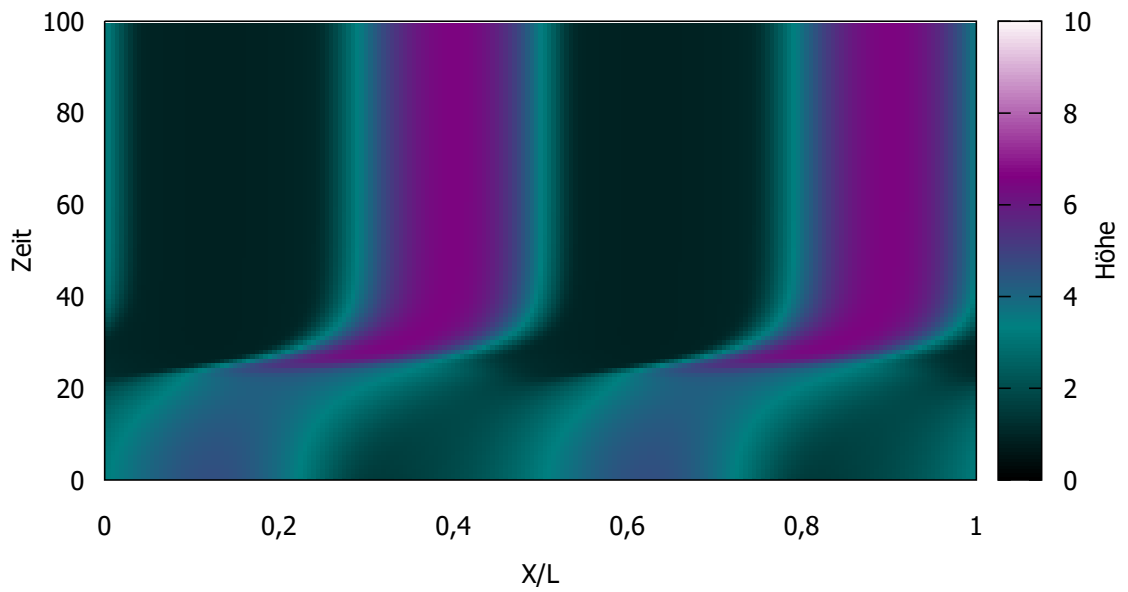
**Abbildung A.27.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von L22 mit der stationären Lösung DL22. Da sich die Profile entsprechen wird der Volumen-Ast in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



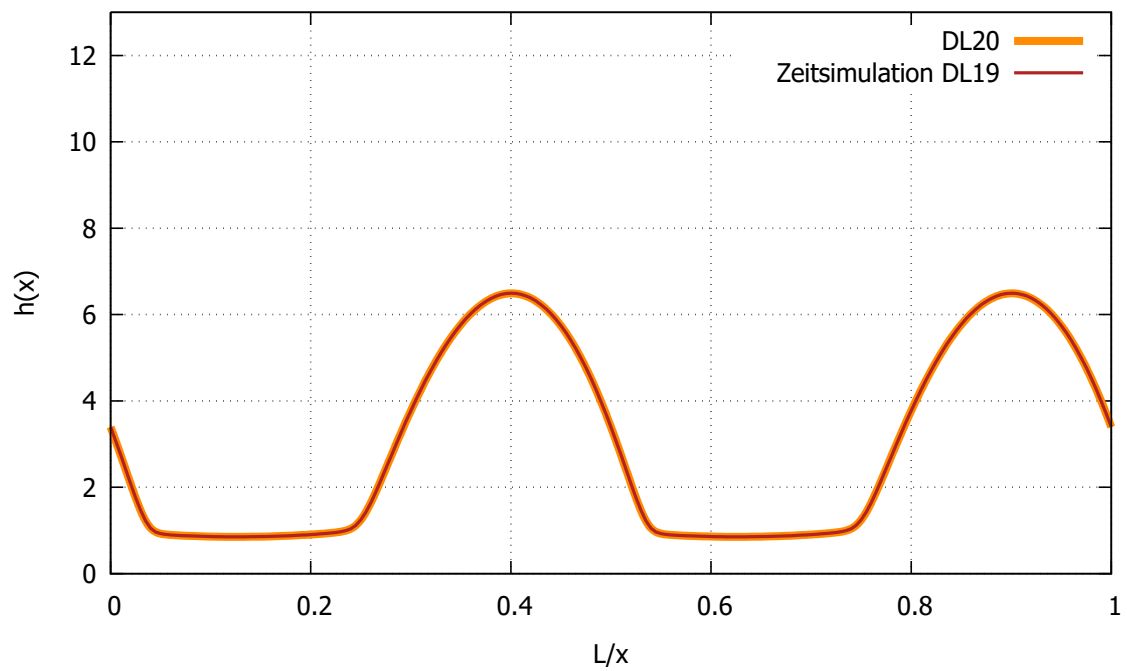
**Abbildung A.28.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung L23. Der Tropfen rutscht in ein Minimum der Heterogenität und pinnen dort in einem Profil entsprechend DL22. Der Volumen-Ast wird in dem entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



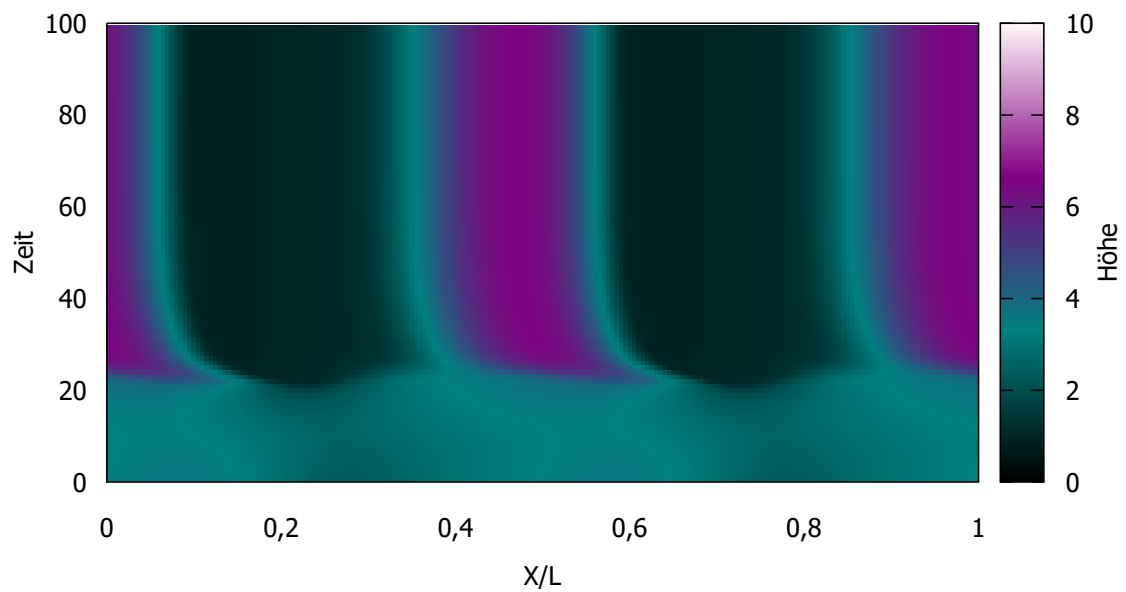
**Abbildung A.29.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von L23 mit der stationären Lösung DL22. Der Volumen-Ast wird im entsprechenden Bereich als stabil angenommen.



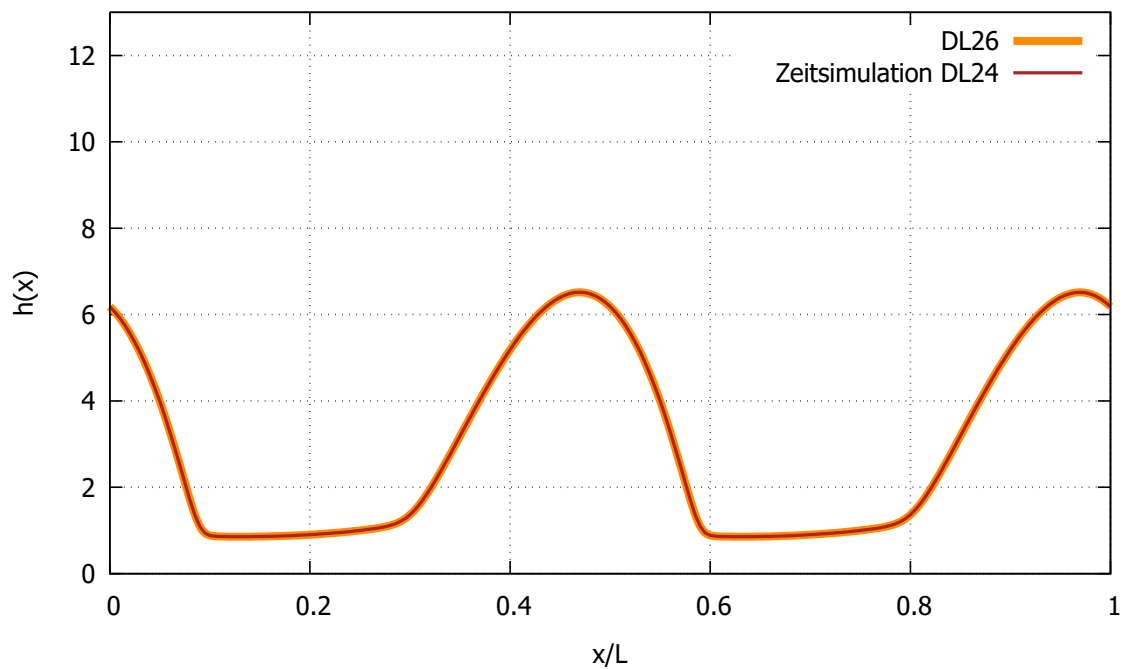
**Abbildung A.30.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL19. Das Profil konvergiert zu DL20. Der 2n-Ast wird DL19 als instabil und bei DL20 als stabil angenommen.



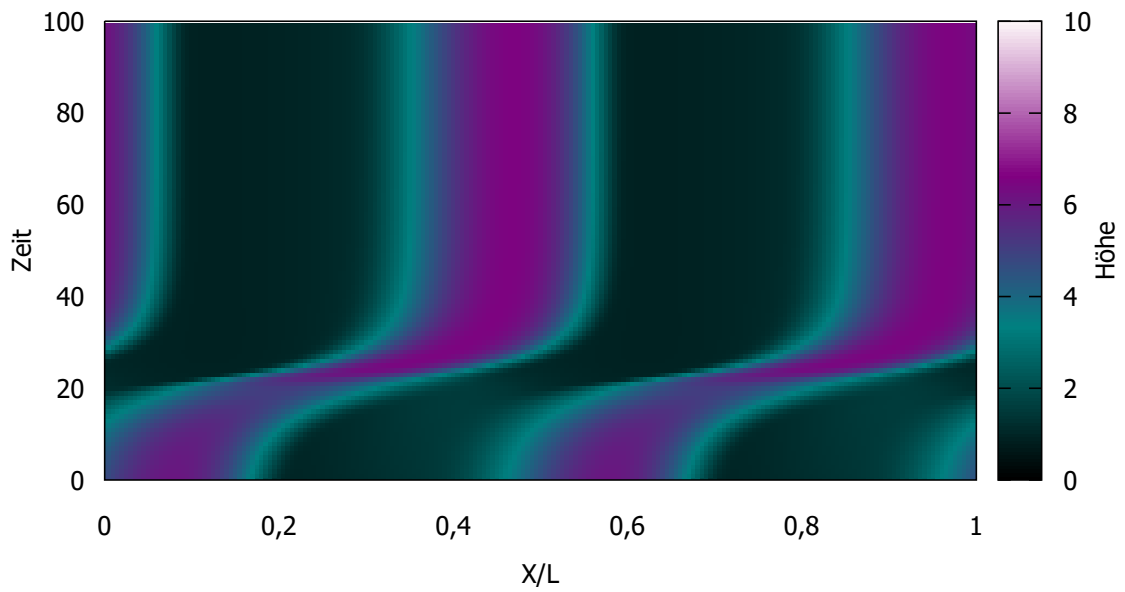
**Abbildung A.31.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von DL19 mit der stationären Lösung DL20. Da sich die Profile entsprechen wird der 2n-Ast bei DL19 als instabil und bei DL20 als stabil angenommen.



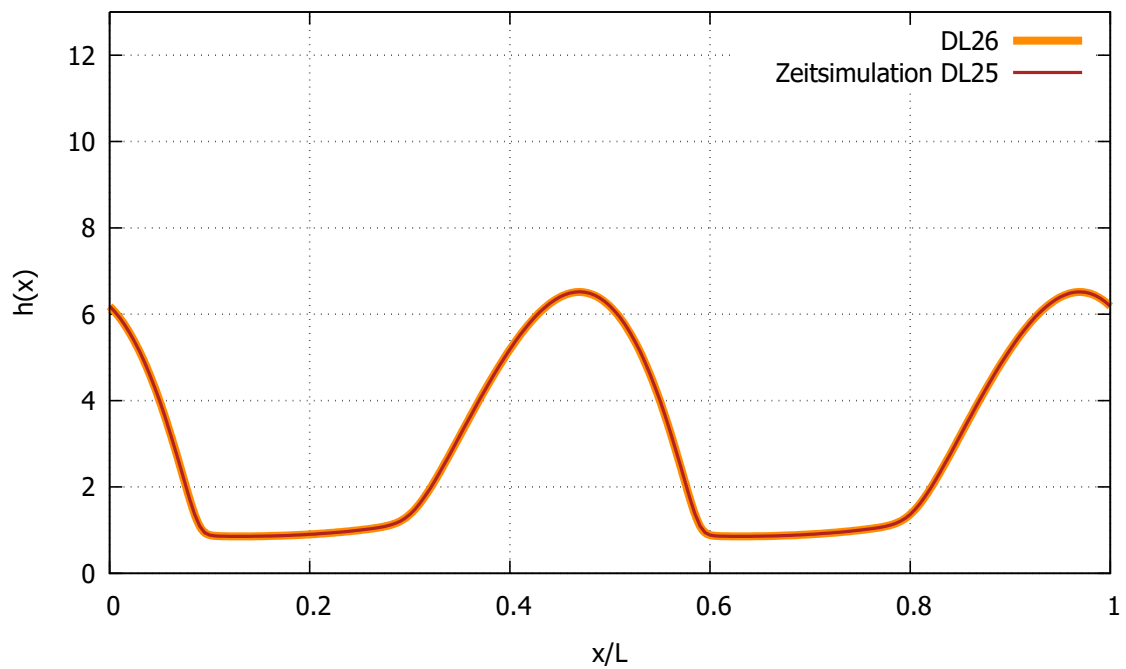
**Abbildung A.32.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL24. Das Profil konvergiert zu DL26. Der 2n-Ast wird bei DL24 als instabil und bei DL26 als stabil angenommen.



**Abbildung A.33.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von DL24 mit der stationären Lösung DL26. Da sich die Profile entsprechen wird der 2n-Ast bei DL24 als instabil und bei DL26 als stabil angenommen.



**Abbildung A.34.:** Raum-Zeit-Diagramm der Lösung DL25. Das Profil konvergiert zu DL26. Der 2n-Ast wird bei DL25 als instabil und bei DL26 als stabil angenommen.



**Abbildung A.35.:** Vergleich der Endlösung der Zeitsimulation von DL25 mit der stationären Lösung DL26. Da sich die Profile entsprechen wird der 2n-Ast DL25 als instabil und bei DL26 als stabil angenommen.



# Literaturverzeichnis

- [Adl46] R. Adler. A study of locking phenomena in oscillators. *Proceedings of the IRE*, 34(6):351–357, 1946. 23
- [Bar09] W. Barthlott. Der Lotus-Effekt: Selbstreinigende technische Oberflächen nach dem Vorbild der Natur. *Faszination Lebenswissenschaften*, 2009. 2
- [BEI<sup>+</sup>09] D. Bonn, J. Eggers, J. Indekeu, J. Meunier, and E. Rolley. Wetting and spreading. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):739–805, 2009. 10
- [Bil16] Bild: Tropfen. gefunden unter. [http://www.spohndesign.de/download/wallpapers/Tropfen\\_1024x768.jpg](http://www.spohndesign.de/download/wallpapers/Tropfen_1024x768.jpg), Stand 14.9.2016. 1
- [Dav15] P. A. Davidson. *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, 2015. 5
- [DOB<sup>+</sup>12] E. J. Doedel, B. E. Oldeman, A. R. C. Bristol, F. D. Milano, T. F. Toronto, Y. K. Utrecht, and R. P. Pasadena. AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations. (January), 2012. 25
- [GW03] K. B. Glasner and T. P. Witelski. Coarsening dynamics of dewetting films. *Physical Review*, 67:016302, 2003. 1, 10, 23, 26
- [HI19] W. B. Hardy. III. The spreading of fluids on glass. *Philosophical Magazine Series 6*, 38(223):49–55, 1919. 10
- [Hon14] C. Honisch. *Analysis of Complex Systems: From Stochastic Time Series to Pattern Formation in Microscopic Fluidic Films*. PhD thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2014. 6
- [HS71] C. Huh and L. E. Scriven. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *Journal of Colloid and Interface Science*, 35(1):85–101, 1971. 9

- [Köp11] M. H. Köpf. *On the dynamics of surfactant covered thin liquid films and the formation of stripe patterns in Langmuir-Blodgett transfer*. PhD thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011. 1, 7, 8
- [OB97] A. Oron and S. G. Bankoff. Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 69(3):931–980, 1997. 11
- [SS80] W. J. Silliman and L. E. Scriven. Separating how near a static contact line: Slip at a wall and shape of a free surface. *Journal of Computational Physics*, 34(3):287–313, 1980. 9
- [Str14] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press, 2014. 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 45
- [Thi07] U. Thiele. Structure formation in thin liquid films. In *Thin films of soft matter*, pages 25–93. Springer, 2007. 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13
- [Thi10a] U. Thiele. On the depinning of a drop of partially wetting liquid on a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 671:121–136, 2010. 26, 33
- [Thi10b] U. Thiele. Thin film evolution equations from (evaporating) dewetting liquid layers to epitaxial growth. *Journal of Physics. Condensed matter*, 22(8):84019, 2010. 13, 26
- [TK06] U. Thiele and E. Knobloch. Driven drops on heterogeneous substrates: Onset of sliding motion. *Physical Review Letters*, 97(20):1–4, 2006. 23, 24
- [TKG<sup>+</sup>14a] U. Thiele, O. Kamps, S. Gurevich, C. Schelte, and F. Ehebrecht. Münsteranian Torturials on Nonlinear Science: DROP: Steady drop and film states on a horizontal homogeneous substrate. 2014. 7, 11, 22
- [TKG<sup>+</sup>14b] U. Thiele, O. Kamps, S. Gurevich, C. Schelte, and F. Ehebrecht. Münsteranian Torturials on Nonlinear Science: HETDROP: Steady states of a thin film equation for a liquid layer or drop on a horizontal heterogeneous substrate. 2014. 27
- [TKGW15] U. Thiele, O. Kamps, S. Gurevich, and M. Wenske. Münsteranian Torturials on Nonlinear Science: HETDRIV: Steady drops on a heterogeneous substrate under lateral driving. 2015. 25, 30
- [TKGW16] U. Thiele, O. Kamps, S. Gurevich, and M. Wenske. Münsteranian Tortu-

rials on Nonlinear Science Continuation ROTFFTW : calculating the time developement of a film of partially wetting liquid on a rotating cylinder. 2016. 43



## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Christopher Henkel*, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Gekoppelte Coarsening- und Depinning-Übergänge* selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Außerdem versichere ich, dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken, auch elektronischen Medien, dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Münster, 20. September 2016

---

Christopher Henkel

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 20. September 2016

---

Christopher Henkel