



Numerische Untersuchung des Kuramoto-Modells auf verschiedenen Netzwerktopologien

Numerical investigation of the Kuramoto model on different
network topologies

Bachelorarbeit vorgelegt von

Florian Bruns

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Netzwerke	4
2.2	Beschreibung von Graphen	4
2.2.1	Adjazenzmatrix	4
2.2.2	Charakteristische Größen von Graphen	5
3	Netzwerke	7
3.1	Zufallsnetzwerk	7
3.2	Skalenfreies Netzwerk	8
3.3	Small World Netzwerk	9
3.4	Minimum-Distanz Netzwerk	10
4	Synchronisation und das Kuramoto-Modell	12
4.1	Synchronisation	12
4.2	Das Kuramoto-Modell	12
4.3	Der Mean-Field-Fall	12
5	Simulation des Kuramoto-Modells	14
5.1	Im Mean-Field-Fall	14
5.2	Das Kuramoto-Modell auf verschiedenen Netzwerktopologien	18
5.2.1	Zufallsnetzwerk	18
5.2.2	Skalenfreies Netzwerk	20
5.2.3	Minimum-Distanz Netzwerk	21
6	Zusammenfassung und Ausblick	23
A	Anhang	25
A.1	Runge-Kutta-Verfahren	25

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem physikalischen Phänomen der Synchronisation. Der Begriff Synchronisation kommt aus dem Griechischen und setzt sich zusammen aus „syn“ (zusammen) und „chronos“ (Zeit). Man definiert einen Synchronisationsvorgang als das Angleichen von bestimmten Vorgängen in endlicher Zeit. Im Alltag begegnen uns vielfältige Synchronisationserscheinungen, z.B. sorgt die Synchronisation von Neuronen im Hypothalamus des Gehirns von Säugetieren für ihren Tag-Nacht-Rhythmus [1] oder aber bei einem Konzert gleicht sich das anfängliche Einklatschen des Publikums nach kurzer Zeit zu einem großen Applaus an. Die Wechselwirkung (Kopplung) während eines Synchronisationsvorgangs zwischen den synchronisierenden Objekten kann auf vielfältige Weise vorliegen.

Ein wichtiger Fall der Kopplung ist der sogenannte Mean-Field-Fall, bei dem von einer Jeden-Mit-Jedem-Kopplung ausgegangen wird. In anderen Worten: Jedes Objekt, das am Synchronisationsvorgang teilnimmt, hat auf eine in der Gruppe einheitliche Weise Kontakt zu den anderen Teilnehmern. Wenn man einen Schwarm Glühwürmchen bei Nacht betrachtet, in dem jedes Insekt sich über Lichtsignale mit den anderen austauscht, und nach anfänglicher Unordnung alle im gleichen Takt blinken [7], wird deutlich, wie fundamental dieser Fall ist. Es gibt natürlich noch weitere Rahmenbedingungen für Synchronisationsvorgänge, die ebenfalls ein Bestandteil der Arbeit sind. Man kann vom Mean-Field-Fall zu Strukturen übergehen, in denen nicht alle Mitglieder einer Gruppe miteinander wechselwirken können. Dies führt auf bestimmte Netzwerktopologien zur Beschreibung der vorhandenen Verbindungen und den damit verbundenen Wechselwirkungen. Netzwerke sind neben der Synchronisation ein weiteres Thema. Es gibt eine Vielzahl an unterschiedlichen Typen mit jeweils charakteristischen Eigenschaften und man findet in vielen Bereichen Anwendungen der Netzwerktheorie. In den Sozialwissenschaften tauchen soziale Netzwerke auf, bei denen ihre Knotenpunkte Personen oder Organisationen sind und deren Verbindungen soziale Interaktionen darstellen. Auch das Internet ist ein globales Netzwerk bestehend aus HTML-Seiten und deren Verknüpfungen durch Hyperlinks [3].

Bevor man nun die Synchronisation auf unterschiedlichen Netzwerktopologien untersuchen möchte, benötigt man ein Modell, welches die Synchronisation von einer Population von synchronisationsfähigen Objekte beschreibt. Ein sehr einfaches Modell dafür ist das Kuramoto-Modell. Es wurde von dem japanischen Physiker Yoshiki Kuramoto 1975 entwickelt und wird heute noch häufig zur Beschreibung von biologischen und chemischen Prozessen angewendet [7]. Mithilfe dieses Modells ist es möglich, die Synchronisationsvorgänge in Netzwerken zu beschreiben und charakteristische Größen wie die kritische Kopplungsstärke (s. Kapitel 5.1) festzustellen.

Außer den drei in der Literatur schon häufig behandelten Netzwerktypen, das Zufallsnetzwerk, das skalenfreie Netzwerk und das Small-World Netzwerk, wird noch ein weiteres Netzwerk, das Minimum-Distanz Netzwerk, betrachtet, da Untersuchungen in [4] gezeigt haben, dass dieser neu eingeführt Typ dem amerikanischen Stromnetzwerk IEEE-300 im Gegensatz zu den anderen ähnelt. Dies ist interessant, weil es aufgrund des Ausbaus der erneuerbaren Energien in Deutschland von hoher Bedeutung ist, die Stromnetze sinnvoll auszubauen, was durch eine gute Netz-Simulation unterstützt werden könnte.

Im ersten Teil werden die vier verschiedenen Netzwerktypen vorgestellt, ihre Eigenschaften kurz erläutert und ihre Erzeugung implementiert. Unter den Netzwerkarten ist eine besonders für die Beschreibung von realen Stromnetzen geeignet, das Minimum-Distanz Netzwerk, da dessen Parameter einem in der Realität genutzten Stromnetzwerk stark ähneln. Mit dieser Einleitung wird die Grundlage für die nachfolgenden Arbeitsschritte gelegt.

Der zweite Abschnitt führt das Phänomen der Synchronisation in Netzwerken und somit das Kuramoto-Modell ein, das die Wechselwirkungen und Synchronisationsvorgänge in einem Netzwerk aus Oszillatoren beschreibt. Es werden Grundlagen zur Beschreibung von Synchronisationsvorgängen gelegt und der Mean-Field-Fall kurz erläutert.

Schließlich wird in Kapitel 5 das Kuramoto-Modell auf die Netzwerke angewendet, um die zeitliche Entwicklung von Synchronisation unter verschiedenen Randbedingungen zu untersuchen. Außerdem wird noch eine fundamentale Eigenschaft von realen Stromnetzen berücksichtigt, die bei der vorherigen Betrachtung der Netzwerke ausgeklammert wurde.

2 Theorie

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Begriffe der Netzwerktheorie eingeführt. Mit diesem Grundwissen lassen sich in den weiteren nachfolgenden Kapiteln die Eigenschaften von verschiedenen Netzwerktypen verstehen.

2.1 Netzwerke

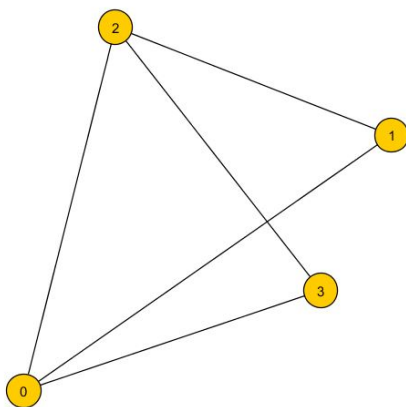
Ein Netzwerk ist ein Graph $G(V, E)$, der durch seine Kanten V und seine Knoten E festgelegt ist. Die Knoten $u, v \in V$ können durch Kanten $e = (u, v) \in E$ verbunden sein. Man unterscheidet, ob ein Graph gerichtet oder ungerichtet ist. Bei einem gerichteten Graphen wird die Reihenfolge von Anfangs- und Endknoten berücksichtigt. Im Gegensatz zum ungerichteten Graphen, bei dem die Anordnung von Anfangs- und Endknoten ungeordnet ist und man demnach keine festgelegte Kantenorientierung vorfindet. Es können außerdem gewichtete Graphen definiert werden, deren Kanten jeweils komplexe oder reelle Zahlen zugeordnet sind, um die Kanten unterschiedlich zu gewichten.

2.2 Beschreibung von Graphen

Die wichtigsten charakteristischen Größen zur Beschreibung von Graphen werden in diesem Kapitel erläutert.

2.2.1 Adjazenzmatrix

Man kann Graphen $G(V, E)$ ohne Mehrfachkanten mithilfe von quadratischen $n \times n$ -Matrixen beschreiben. Eine Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen $G(V, E)$ mit n Knoten ist eine $n \times n$ -Matrix, die die Anzahl der Verbindungen zwischen den Knoten im Graphen angibt (s. Abbildung 1). Wenn in der i -ten Zeile und j -ten Spalte eine 1 steht, bedeutet das, dass der i -te Knoten mit dem j -ten Knoten verbunden ist. Steht eine 0 an der Stelle a_{ij} besteht keine Verbindung in Form einer Kante zwischen den Knoten. Knoten sollen nicht mit sich selbst verbunden sein, weshalb auf der Diagonalen einer Adjazenzmatrix nur Nullen stehen. Die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen ist symmetrisch und enthält nur Einsen und Nullen. Bei einem gerichteten Graphen hingegen wird eine vorhandene gerichtete Kante von A nach B damit beschrieben, dass die Einträge nicht symmetrisch sind, sondern nur für den Knoten A an der Stelle a_{AB} das entsprechende Kantengewicht eingetragen wird.



$$A(G) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 1: Links: Ein ungerichteter, ungewichteter Graph G mit vier Knoten und fünf Kanten. Rechts: Die dazugehörige Adjazenzmatrix $A(G)$.

2.2.2 Charakteristische Größen von Graphen

Es gibt verschiedene Messgrößen, um einen Graphen zu charakterisieren [4]. Im Folgenden geht man von einem Graphen G mit n Knoten und seiner Adjazenzmatrix $A(G)$ aus.

- Der Knotengrad k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gibt die Anzahl der Verbindungen eines Knotens i mit anderen Knoten j im Graphen an. Er lässt sich durch

$$k_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (1)$$

berechnen. Man summiert also über die Einträge der zum Knoten i gehörigen i -ten Matrixzeile.

- Der durchschnittliche Knotengrad eines Graphen $\langle k \rangle$ ist die Mittelung über alle Knotengrade k_i im Graphen, er beträgt

$$\langle k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i. \quad (2)$$

- Man definiert den lokalen Clusterungskoeffizienten c_i eines Knotens i in einem ungerichteten Graphen als

$$c_i = \frac{e_i}{(k_i(k_i - 1))/2}, \quad (3)$$

wobei e_i die Anzahl der Kanten zwischen den Knoten in dem Cluster ist, das aus dem Knoten i und seinen nächsten Nachbarn N_i besteht. Der Faktor $(k_i(k_i - 1))/2$ gibt die maximal mögliche Gesamtanzahl an Verbindungen zwischen den Knoten im Cluster an. Im gerichteten Fall würde die Zwei im Nenner wegfallen, da im Vergleich zum ungerichteten Fall doppelt so viele Kanten im Cluster möglich wären. Der lokale Clusterungskoeffizient beschreibt somit das Verhältnis zwischen den tatsächlich vorhandenen Kanten zwischen den Knoten und den theoretisch maximal möglichen Kanten. Für die tatsächliche Kantenanzahl e_i gilt

$$e_i = \sum_{\forall j, k \in \{N_i \cap i\}} \frac{a_{jk}}{2}. \quad (4)$$

- Der globale Clusterungskoeffizient

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \quad (5)$$

ist der Mittelwert aller lokalen Clusterungskoeffizienten c_i . Mit seiner Hilfe lässt sich ein Maß für die Cliquesbildung bzw. Transitivität in einem Graphen definieren und man kann eine Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass zwei Nachbarn von einem Knoten i ebenfalls miteinander verbunden sind. Man spricht von einer Clique, wenn alle nächsten Nachbarn eines Knotens paarweise miteinander verbunden sind. Dies kann man sich im Alltag als eine Gruppe von Freunden vorstellen, bei der jeder jeden kennt. Ein Beispiel für $C = 1$ ist ein Dreieck bei dem alle Knoten miteinander verbunden sind und es damit 3 Kanten gibt, womit ein Graph aus einer perfekten Clique vorliegt.

- Man definiert zwei weitere Größen, um Aussagen über die Distanzen im Graphen machen zu können. Sei D eine Matrix in der die Außerdiagonalelemente d_{ij} die kürzeste Anzahl von Knoten angeben, die man benötigt, um vom Knoten i bis zum Knoten j zu gelangen. Dann ist der Durchmesser d_{\max} des Netzwerks, der maximale Abstand zwischen zwei Knoten im gesamten Graphen, wie folgt definiert

$$d_{\max} = \max_{i,j} d_{ij} \quad (6)$$

und die charakteristische Weglänge L ist der Mittelwert von allen d_{ij}

$$L = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\forall i,j:i \neq j} d_{ij}. \quad (7)$$

Hierbei berechnet man zuerst die mittleren Abstände eines jeden Knoten u zu den jeweils anderen $(n-1)$ Knoten und anschließend wird der Mittelwert dieser Größe über alle n Knoten ermittelt.

3 Netzwerke

Dieser Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Implementierung¹ von verschiedenen Netzwerktypen. Es werden ein Zufallsnetzwerk, ein skalenfreies Netzwerk, ein Small World Netzwerk sowie ein Minimum-Distanz-Netzwerk betrachtet. Damit werden die Grundlagen für die nachfolgenden Teile der Arbeit gelegt, in denen das später behandelte Kuramoto-Modell auf diesen verschiedenen Netzwerktopologien untersucht wird.

3.1 Zufallsnetzwerk

Als erstes wird ein Zufallsnetzwerk erzeugt. Ein Zufallsnetzwerk ist ein Netzwerk bei dem man eine feste Anzahl von anfangs isolierten Knoten n vorgibt und sie mit der Verbindungswahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ über Kanten m nacheinander miteinander verbindet. Die maximale Anzahl von Kanten in einem Zufallsnetzwerk ist $m_{max} = n(n - 1)/2$, wobei die erwartete Kantenzahl $m_{exp} = p(n(n - 1)/2)$ beträgt und der mittlere Knotengrad $\langle k \rangle \approx np$ ist. Erdős und Rény beschäftigten sich mit diesem Modell und fanden heraus, dass nahezu jeder Graph über einem bestimmten Wert von p eine bestimmte Eigenschaft Q besitzt, die unter diesem spezifischen p nicht vorhanden ist, und somit ein Phasenübergang vorliegt. Diese Eigenschaft, die nach diesem Phasenübergang auftritt, kann z.B. ein stark erhöhter Clusteringskoeffizient im Netzwerk sein. In anderen Worten: „Viele wichtige Eigenschaften von Zufallsgraphen tauchen ziemlich plötzlich auf.“ [2].

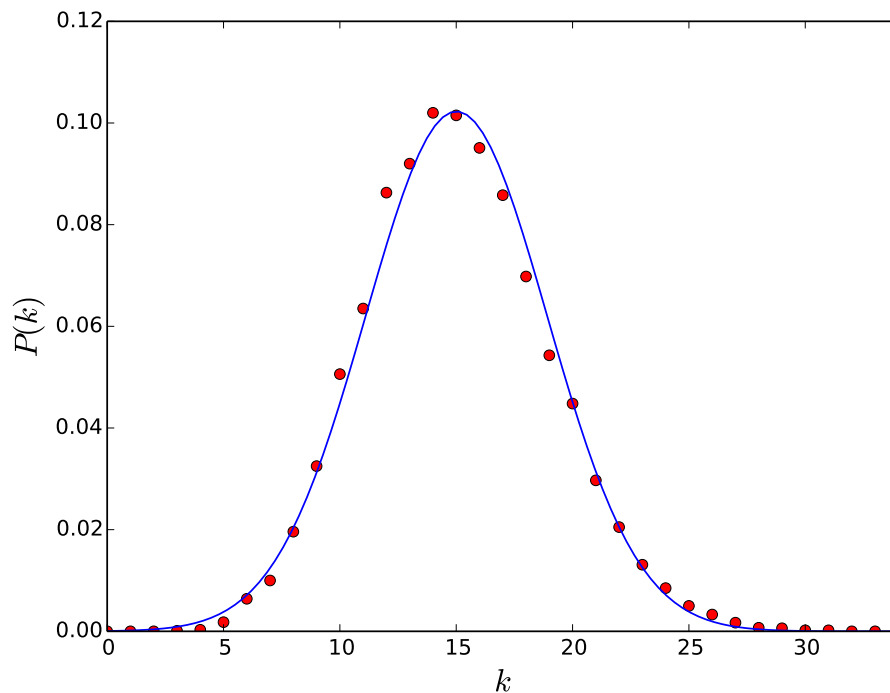


Abbildung 2: Die Knotengradwahrscheinlichkeit $P(k)$ eines Zufallsnetzwerks mit $p = 0,0015$ und $n = 10000$ sowie eine Poissonverteilung.

Das Netzwerk wird mithilfe einer Adjazenzmatrix A dargestellt, wobei jeder Eintrag a_{ij} zufällig nacheinander mit 1 oder 0 symmetrisch gefüllt wird. Hierbei steht eine 0 für keine Verbindung zwischen zwei Knoten und eine 1 für eine vorhandene Verbindung. Es werden die Knotengrade der einzelnen Knoten ausgerechnet, indem die Werte in den jeweiligen Spalten i für einen Knoten i

¹Mithilfe der Programmiersprache Python 2.7

in der Adjazentmatrix aufsummiert werden. Anschließend wird die Knotengradwahrscheinlichkeit berechnet $P(k) = n_k/n$. Man bestimmt die Anzahl der Knoten n_k mit einem bestimmten Knotengrad k und setzt sie in Bezug zur Gesamtknotenanzahl n . Zum Schluss wird ein Histogramm, das die Knotengradwahrscheinlichkeit $P(k)$ gegen die Knotengrade k aufträgt, erstellt. Ein dazugehöriger Poissonverteilungsfitt illustriert das charakteristische Verhalten in diesem Netzwerk. Das Simulationsergebnis eines Netzwerks mit einer Knotenverbindungswahrscheinlichkeit $p = 0,0015$ und einer Knotenanzahl $n = 10000$ ist in Abbildung 2 zu sehen.

In [2] wird gezeigt, dass die Verteilung der Knotengrade $P(k)$ von Zufallsnetzwerken einer Poissonverteilung mit

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (8)$$

folgt. Dies ist ebenfalls in dem gezeigten Histogramm zu erkennen, wodurch das berechnete Netzwerk als Zufallsnetzwerk mit einem mittleren Knotengrad $\langle k \rangle = np = 15$ identifiziert ist.

3.2 Skalenfreies Netzwerk

Als zweites wird ein skalenfreies Netzwerk nach dem Albert-Barabási-Modell [2] erzeugt. In diesem Modell werden beim Erzeugen der Adjazenzmatrix A mit der Länge $l = n$ zufällig eine geringe Anzahl von Startknoten n_0 verbunden. Anschließend fügt man nacheinander $n - n_0$ neue Knoten ein, wobei die neuen Knoten sich mit den alten Knoten mit einer variablen Verbindungswahrscheinlichkeit p verbinden, die wie folgt definiert ist

$$p(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^n k_j}. \quad (9)$$

Man erkennt, dass die Verbindungswahrscheinlichkeit $p(k_i)$ für eine Verbindung zwischen einem neuen Knoten j und einem schon vorhandenen Knoten i von dem Knotengrad k_i und von der momentanen Gesamtkantenanzahl im Graphen abhängt. Es wird auch von einer „preferential attachment“ gesprochen, da die Knoten sich nicht alle mit einer konstanten gleichen Wahrscheinlichkeit p' verbinden, sondern die Wahrscheinlichkeit $p(k_i)$ größer wird, je höher der Knotengrad des Knotens ist mit dem sich der neue Knoten verbinden kann und je weniger Knoten im Netzwerk vorhanden sind. Die anfangs relativ verbindungsreichen „populären“ Knoten, werden somit immer häufiger wiederverbunden, wohingegen die „unpopulären“ Knoten mit wachsender Netzwerkgröße immer seltener neue Verbindungen erhalten. Dieses Verhalten findet man z.B. im Internet wieder, wo beliebte Webseiten mit vielen Hyperlinks mit größerer Wahrscheinlichkeit wieder mit neuen Webseiten verlinkt werden, weil die neuen Webseiten dadurch leichter zu finden sind [2].

Ein skalenfreies Netzwerk zeichnet sich dadurch aus, dass sich die Knotengrade über mehrere Größenordnungen erstrecken, was bei einem Zufallsnetzwerk wie im vorherigen Abschnitt nicht der Fall ist. Nach [2] ist die allgemeine Verteilung für die Knotengradwahrscheinlichkeit $P(k)$ ein Potenzgesetz der folgenden Art

$$P(k) = k^{-\gamma}. \quad (10)$$

Eine weitere Eigenschaft ist, dass für $\gamma < 2$ das Integral zur Berechnung von $\langle k \rangle = \int_0^\infty dk \cdot k^{-\gamma}$ divergiert und somit keine typische Größe wie der durchschnittliche Knotengrad eines Knotens existiert. In Abbildung 3 wurde ein Netzwerk mit $n = 10000$ Knoten und $n_0 = 5$ Startknoten erzeugt und logarithmisch aufgetragen. Man erkennt, dass der Fit mit $f(k) = k^{-2,4}$ eine gute Näherung für den Simulationsverlauf darstellt und dass es sich somit um ein skalenfreies Netzwerk nach dem Albert-Barabási-Modell handelt.

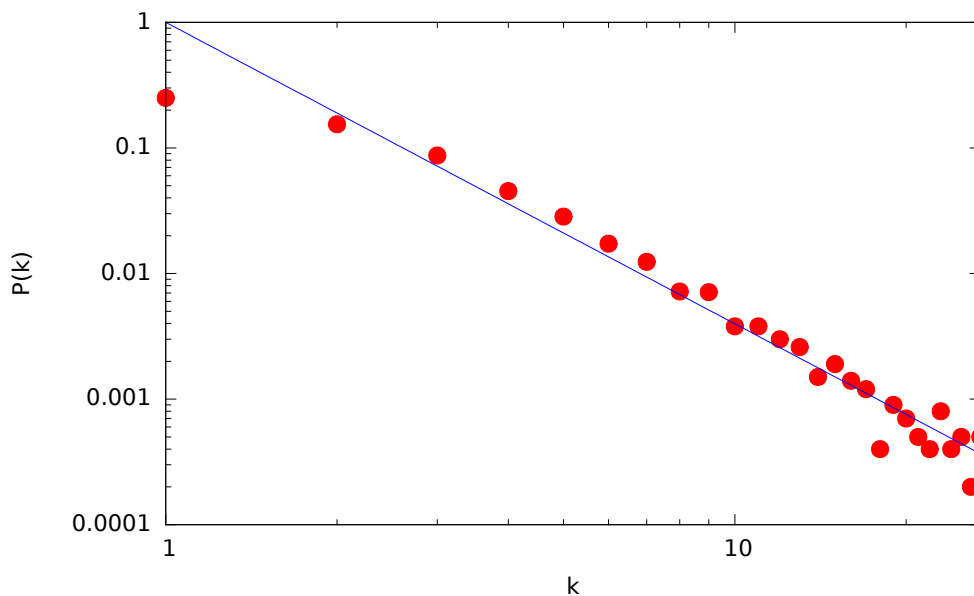


Abbildung 3: Die Knotengradwahrscheinlichkeit $P(k)$ eines skalenfreien Netzwerks nach dem Albert-Barabási-Modell mit $n = 10000$ und $n_0 = 5$ sowie ein Fit von $f(k) = k^{-2,4}$.

3.3 Small World Netzwerk

Unter einem Small World Netzwerk versteht man ein Netzwerk, das das „Kleine-Welt-Phänomen“ aufweist nach dem jeder Knoten durch eine geringe Anzahl an Kanten mit jedem anderen Knoten verbunden ist. Dieses Phänomen wurde 1967 vom amerikanischen Psychologen Stanley Milgram in einem Paketlieferung-Experiment untersucht und er fand heraus, dass alle US-Amerikaner durchschnittlich über 6 Bekanntschaften miteinander in Kontakt standen. In Small World Netzwerken wächst die charakteristische Weglänge L etwa mit $\log n$, genauso wie in Zufallsnetzwerken. In skalenfreien Netzwerken hingegen skaliert L mit $\log \log n$. Ein weiteres Merkmal ist der durchschnittlich hohe globale Clusteringskoeffizient C im Vergleich zu den beiden anderen Netzwerktypen. Small World Netzwerke werden nach folgendem Prinzip erstellt [10]:

1. Konstruiere eine Ringmatrix mit n Knoten, wobei jeder Knoten mit seinen g nächsten Nachbarn durch ungerichtete Kanten verbunden ist. Eine Ringmatrix ist eine Adjazenzmatrix eines Netzwerks, bei der alle Knoten mit mindestens zwei nächsten Nachbarn verbunden sind, um auf diese Weise einen Ring zu bilden.
2. Verbinde jeden Knoten n_i mit $i = 1, \dots, n$ neu, indem man jede Kante (n_i, n_j) mit $i < j$ mit der Wahrscheinlichkeit p wiederverbindet. Das Wiederverbinden erfolgt dadurch, dass man eine Kante (n_i, n_j) durch eine Kante (n_i, n_r) ersetzt, wobei r mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit so gewählt wird, dass es keine Selbstverbindungen (n_i, n_i) und keine doppelten Verbindungen zwischen Knoten gibt.

In Abbildung 4 ist die Entwicklung eines Small World Netzwerks mit steigender Verbindungswahrscheinlichkeit p dargestellt. Für kleine Werte von p verhält es sich wie ein reguläres, geordnetes Netzwerk mit hohem globalen Clusteringskoeffizienten C , für mittlere Werte wie ein Small World Netzwerk und für $p = 1$ ist es ein ungeordnetes Zufallsnetzwerk mit geringer charakteristischer Weglänge L .

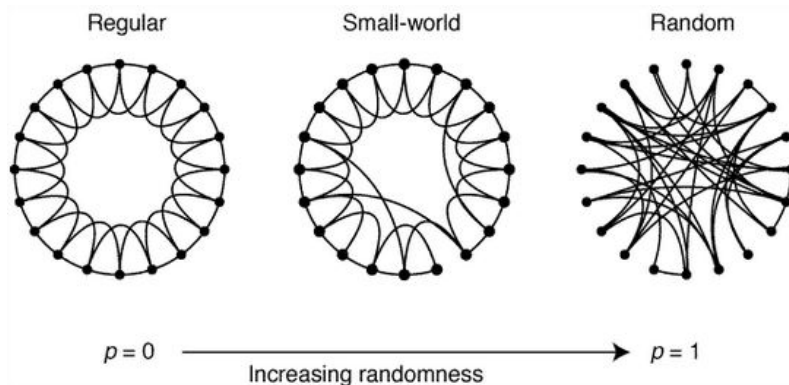


Abbildung 4: Entwicklungsstufen eines Small World Netzwerks mit steigender Verbindungswahrscheinlichkeit p [10].

Das Simulationsergebnis eines Small Netzwerks mit $n = 10000$ Knoten und $p = 0,08$ ist in Abbildung 5 zu erkennen. Die Knotengradhäufigkeit $P(k)$ des Netzwerks wird in Abhängigkeit vom Knotengrad k logarithmisch aufgetragen. Das Small World Netzwerk wird aber im weiteren Verlauf

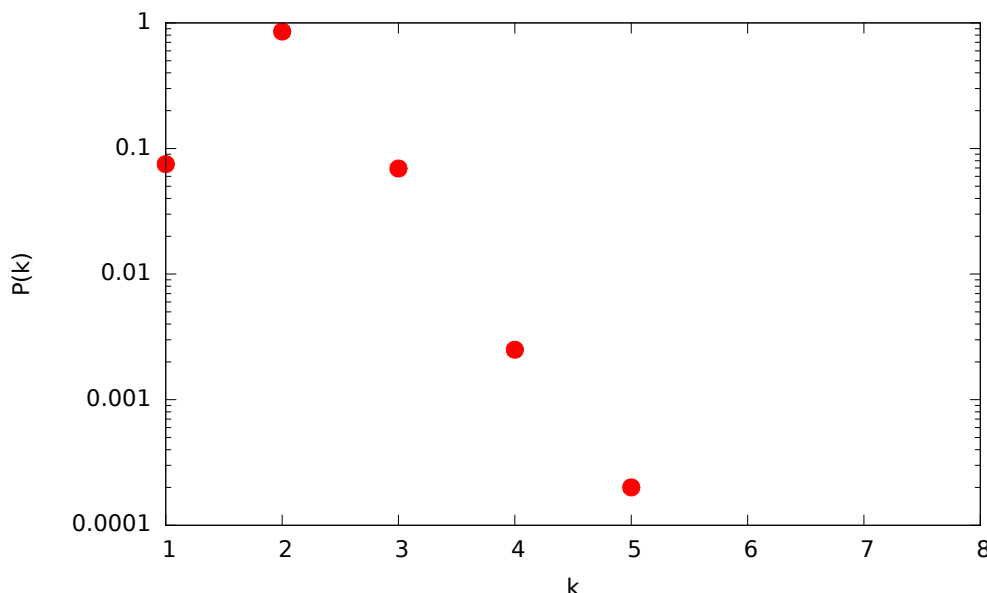


Abbildung 5: Die Knotengradhäufigkeit $P(k)$ eines Small World Netzwerks mit $n = 10000$ und $p = 0,08$.

der Arbeit nicht weiter betrachtet.

3.4 Minimum-Distanz Netzwerk

In [4] wird gezeigt, dass die Topologien der drei vorgestellten Netzwerkmodelle, also Zufallsnetzwerk, skalenfreies Netzwerk und Small World Netzwerk, nicht mit den Topologien von realen elektrischen Netzwerken übereinstimmen. Es werden das amerikanische Stromnetz IEEE 300 und das Eastern United States Netz mit den Modell-Netzwerken ähnlicher Größe verglichen und man kommt zu dem Schluss, dass diese Modelle nicht deren Strukturen und Eigenschaften aufweisen. Aus diesem Grund wird ein neuer Netzwerktyp eingeführt, der näher an die Topologien bekannter realer Stromnetzwerke heranreicht: das Minimum-Distanz-Netzwerk.

Bei einem Minimum-Distanz-Netzwerk werden die Kosten, die bei der Erschaffung einer neuen Verbindung zwischen zwei Knoten entstehen, berücksichtigt. Ein gutes Beispiel für ein solches Netzwerk ist ein Infrastruktur-System oder eben ein Stromnetz. Hier spielen die Entfernungen zwischen verschiedenen Zielen eine große Rolle, da sie ein bedeutender Faktor für die Höhe die Kosten für die Verbindungen sind. Die vorherigen Netzwerkmodelle sind nur geeignet, um Systeme zu modellieren, bei denen das Problem mit den Kosten und der Entfernung vernachlässigt werden kann wie z.B. das Internet. Ein Minimum-Distanz Netzwerk wird erstellt, indem man die Anzahl der Knoten n und die Anzahl der Kanten m zu Beginn festlegt und anschließend den Graphen mittels nachfolgendem Algorithmus erzeugt [4]:

For $a = 1 : n$

1. Erzeuge zufällige Koordinatenpunkte (x_a, y_a) nach einer bestimmten Verteilung.
2. Erzeuge $\text{floor}(m/n)$ neue Verbindungen zwischen a und b , indem man die euklidischen Distanzen zwischen den Punkten berechnet und die am nächsten beieinander liegenden Punkte jeweils miteinander verbindet.²:

$$\min_b ((x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2) \text{ unter der Bedingung, dass } b \text{ nicht mit } a \text{ verbunden ist.}$$

3. Erzeuge eine zusätzliche Verbindung vom Punkt a zu einem weiteren nahegelegenen Punkt b mit der Wahrscheinlichkeit $P(n, m)$:

$$P(n, m) = m/n - \text{floor}(m/n)$$

In Abbildung 6 ist für ein Netzwerk mit $n = 5000$ Knoten und $m = 6000$ Verbindungen die Knotengradhäufigkeit $P(k)$ gegen den Knotengrad k logarithmisch aufgetragen. Es wurde für die Verteilung der Koordinatenpunkte eine Gleichverteilung gewählt. Aus der Abbildung lässt sich qualitativ entnehmen, dass der mittlere Knotengrad dieses erzeugten Netzwerks etwa den Wert Zwei hat.

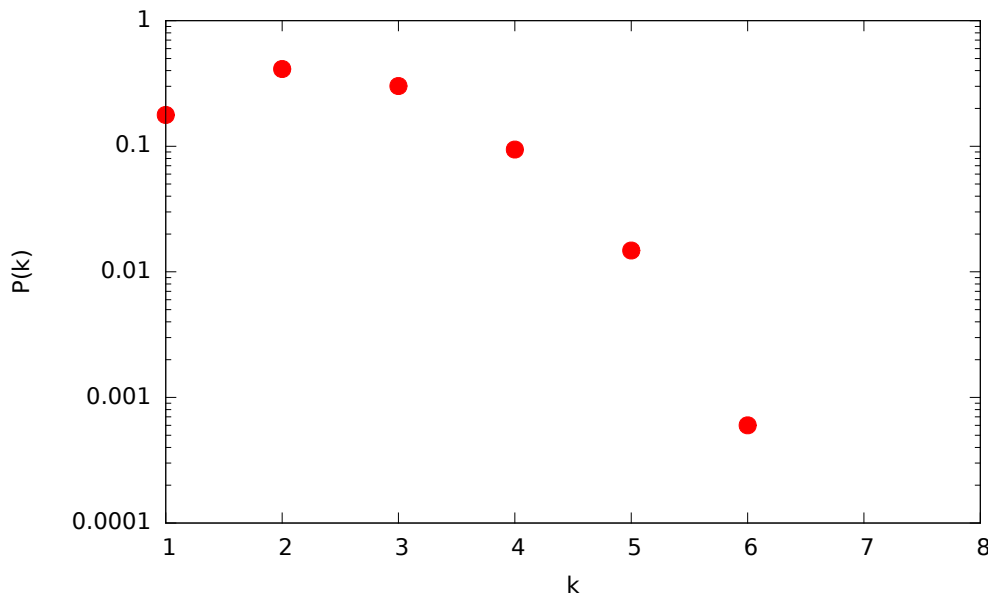


Abbildung 6: Die Knotengradhäufigkeit $P(k)$ eines Minimum-Distanz Netzwerks mit $n = 5000$ und $m = 6000$.

² $\text{floor}(x)$ ist eine Abrundungsfunktion

4 Synchronisation und das Kuramoto-Modell

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Phänomen der Synchronisation und einem Modell, dem Kuramoto-Modell, zur dessen Beschreibung.

4.1 Synchronisation

Synchronisationsvorgänge kann man im Alltag sehen, wenn sich z. B. ein Publikum bei einem Konzert nach einer gewissen Zeit einklatscht und schließlich im selben Rhythmus klatscht oder, wenn sich nachts das Blinken von verschiedenen Glühwürmchen angleicht. Man kann Synchronisation als das Angleichen der Rhythmen von selbsterregten Oszillatoren aufgrund ihrer schwachen Wechselwirkung definieren [9]. Unter selbsterregten Oszillatoren versteht man Objekte, die in ihrem eigenen natürlichen Rhythmus schwingen, wenn sie keinen äußeren Einflüssen ausgesetzt sind. Dieser Rhythmus kann aufrechterhalten werden, da der Oszillator über eine Energiequelle verfügt, die Reibungsverluste ausgleicht. Bei einer Störung des Systems kehrt der Oszillator wieder zu seinem ursprünglichen Rhythmus zurück, wobei man diese Oszillation als Grenzyklus bezeichnet. Die Amplitude ist hierbei stabil und behält nach einer Störung ihren ursprünglichen Wert, doch die Störung der Phase bleibt zeitlich konstant und kann schon durch schwache Wechselwirkungen beeinflusst werden, was die entscheidende Voraussetzung für Synchronisation darstellt. Diese schwache Wechselwirkung, die in allen erdenklichen Weisen vorkommen kann, sorgt dafür, dass sich die Oszillatoren gegenseitig beeinflussen ohne aber ihre eigenen Rhythmen vollständig zu verlieren. Der Rhythmus einer Oszillation kann durch die Kreisfrequenz ω angegeben werden

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (11)$$

wobei f die Frequenz und T die Periodendauer des Systems sind. Das Angleichen der Rhythmen heißt, dass sich mindestens zwei mit verschiedenen Frequenzen schwingende Oszillatoren aufgrund der Wechselwirkung auf eine gemeinsame Frequenz einstellen. Dieser Vorgang ist davon abhängig, wie hoch die Kopplungsstärke K , ein Maß dafür wie stark die Oszillatoren miteinander gekoppelt sind, ist und welche Differenzen ihre natürlichen Kreisfrequenzen ω_i untereinander aufweisen.

4.2 Das Kuramoto-Modell

Das in [9] beschriebene von dem japanischen Physiker Yoshiki Kuramoto entwickelte Kuramoto-Modell beschreibt die Synchronisation in einer Gruppe von N nahezu identischen und schwach gekoppelten Oszillatoren. Kuramoto ging von einer rein sinusförmigen Interaktion zwischen den Oszillatoren aus und seine aufgestellte Differentialgleichung lautet

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

wobei θ_i die Phase des i -ten Oszillators ist, K_{ij} ein Eintrag in der Kopplungsmatrix K ist, der die Kopplung zwischen dem j -ten und i -ten Oszillator beschreibt, und ω_i für die Grundfrequenz eines ungekoppelten Oszillators i steht.

Die Grundfrequenzen ω_i der einzelnen Oszillatoren sind verschieden wählbar. Es kann z.B. $\omega_i = 0 \forall i$ gelten, die Frequenzen können gaußverteilt sein oder sie sind lorentzverteilt mit der Verteilungsfunktion

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (13)$$

wobei der Parameter γ zu 1 gewählt werden kann. In den nachfolgenden Simulationen wird, wenn nicht anders beschrieben, durchgehend von einer Lorentzverteilung ausgegangen.

4.3 Der Mean-Field-Fall

Die Kopplung K_{ij} zwischen idealerweise unendlich vielen miteinander verbundenen Oszillatoren i und j ist im Mean-Field-Fall immer gleich stark ausgeprägt und alle Oszillatoren sind miteinander

gekoppelt. Die Kopplung wird hierbei durch

$$K_{ij} = \frac{K}{N} \quad (14)$$

beschrieben. Kuramoto ging in seinem untersuchten Mean-Field-Fall von $N = \infty$ Oszillatoren aus und K ist allgemein eine beliebig gewählte Kopplungsstärke. Außerdem sind die natürlichen Oszillatorfrequenzen ω_i unimodal um ihren Mittelwert nach einer symmetrischen Wahrscheinlichkeitsfunktion, z.B. nach einer Normalverteilung, verteilt. Im Mean-Field-Fall wird Gleichung (12) zu

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Um die Synchronität einer Gruppe aus Oszillatoren zu beschreiben wird der komplexe Ordnungsparameter

$$r e^{i\phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (16)$$

eingeführt. Sein Betrag $0 \leq r(t) \leq 1$ gibt die Phasenkohärenz des Systems an und $\phi(t)$ ist die mittlere Phase aller Oszillatoren. Man kann sich den komplexen Ordnungsparameter $r e^{i\phi}$ am bes-

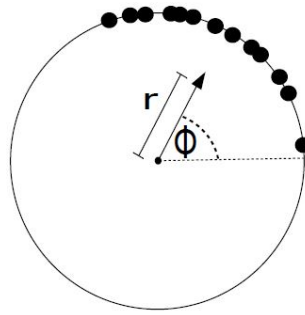


Abbildung 7: Darstellung des komplexen Ordnungsparameters mithilfe des komplexen Einheitskreises. Die Phasen der Oszillatoren sind als Punkte auf dem Kreis dargestellt. [9]

ten vorstellen, wenn man die Phasen der einzelnen Oszillatoren als Punkte auf dem komplexen Einheitskreis darstellt. Dann gibt der Ordnungsparameter den Schwerpunkt der Oszillatoren an. Wenn alle Phasen gleichmäßig zwischen $[0, 2\pi)$ verteilt sind, ist sein Betrag $r=0$ und der Schwerpunkt liegt genau im Kreismittelpunkt, womit ein inkohärenter Zustand vorliegt. Bei zunehmender Kohärenz wird der Wert von r immer größer und er erreicht bei vollständiger Synchronisation die 1, sobald der Pfeil in Abbildung 7 auf dem Kreis liegt und auf den gemeinsamen Phasenpunkt aller Oszillatoren zeigt.

Ein interessantes Phänomen ist die positive Rückkopplung der Kohärenz. Mit einfachen Rechnungen lässt sich Gleichung 16 zu

$$\dot{\theta} = \omega_i + K r \sum_{j=1}^N \sin(\phi - \theta_i) \quad (17)$$

umformen. Die Wechselwirkung zwischen den Oszillatoren wird durch $\phi(t)$ und $r(t)$ bestimmt. Da die effektive Kopplungsstärke rK proportional zur Kohärenz ist, kommt es zu einer positiven Rückkopplung, denn mit steigender Kohärenz wird die Kopplung stärker, wodurch weitere Oszillatoren sich der kohärenten Gruppe anschließen [9].

5 Simulation des Kuramoto-Modells

Das Kuramoto-Modell wird nun auf unterschiedliche Netzwerktypen angewendet. Vom Mean-Field-Fall ausgehend werden nachfolgend nacheinander drei der in Kapitel 3 behandelten Netzwerke numerisch untersucht: das Zufallsnetzwerk, das skalenfreie und das Minimum-Distanz Netzwerk.

5.1 Im Mean-Field-Fall

Es wird ein Netzwerk aus einer Population von gekoppelten Oszillatoren simuliert. Die Oszillatoren mit ihren Grundfrequenzen ω_i bilden die Knoten und die Kopplungen K_{ij} der Kopplungsmatrix K stehen für die Gewichtung der Kanten im Netzwerk. Im ersten Schritt wird das Kuramoto-Modell mit einer Jeder-Mit-Jedem-Kopplung im Mean-Field-Fall betrachtet. Kuramos Differentialgleichung erster Ordnung wird mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung (s. Anhang) gelöst. Bei der Simulation sind die Anfangsphasen der Oszillatoren θ_i zwischen $[0, 2\pi)$ gleichverteilt und die Grundfrequenzen besitzen eine Lorentzverteilung nach Gleichung (13) mit $\gamma = 1$.

Der Verlauf des Betrags des Ordnungsparameters $r(t)$ nach t Zeitschritten wird für verschiedene Werte von K berechnet, um den gesättigten Wert $r_\infty(K)$, den r nach theoretisch unendlich vielen Zeitschritten annehmen wird, zu bestimmen. Es gilt also $r(t \rightarrow \infty) = r_\infty$. In Abbildung 8 ist der schematische Verlauf von r unter und oberhalb der kritischen Kopplungsstärke K_c bei verschiedenen Anfangsbedingungen der Oszillatoren dargestellt. Ab der kritischen Kopplungsstärke K_c findet Synchronisation statt. Dies kann man als Phasenübergang zwischen dem inkohärenten Zustand der Oszillatoren und einem (teilweise) synchronisierten Zustand betrachten. Bei $K > K_c$

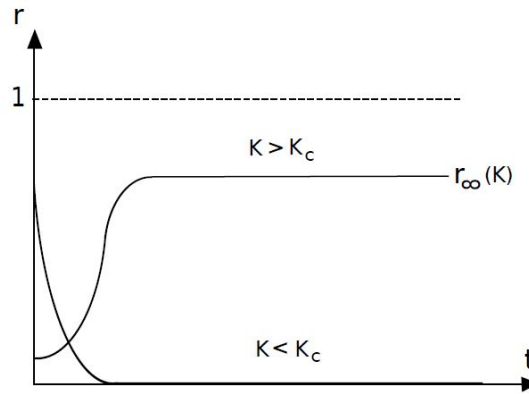


Abbildung 8: Der zeitliche Verlauf der Kohärenz $r(t)$ mit Kopplungsstärken K ober- und unterhalb der kritischen Kopplungsstärke K_c [9].

steigt die Kohärenz $r(t)$ vom Anfangswert exponentiell bis zu ihrem Sättigungswert r_∞ an und es wird ein stationärer Zustand erreicht. Im entgegengesetzten Fall, wenn $K < K_c$ ist, verteilen sich die Phasen der Oszillatoren nach kurzer Zeit über den gesamten Einheitskreis mit $r_\infty = 0$.

Danach wird ein K - r_∞ -Diagramm wie in Abbildung 9 erstellt, indem man die erreichten r_∞ für verschiedene Kopplungsstärken K aufträgt. Man sieht deutlich, dass unterhalb der kritischen Kopplung K_c keine Synchronisation stattfindet und ein inkohärenter Systemzustand vorliegt. Erst oberhalb von K_c besteht die Möglichkeit zur (partiellen) Synchronisation. Außerdem erkennt man, dass sich bei hohen Kopplungsstärken nach K_c der Verlauf von $r_\infty(K)$ im Mean-Field-Fall asymptotisch $r_\infty = 1$ nähert. Die kritische Kopplungsstärke K_c beträgt im Mean-Field-Fall (für eine Herleitung sei auf [9] verwiesen)

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (18)$$

mit der Lorentzverteilung aus Abschnitt 4.2 $g(\omega = 0)$. Die Kohärenz r wird damit zu

$$r(K) = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}}. \quad (19)$$

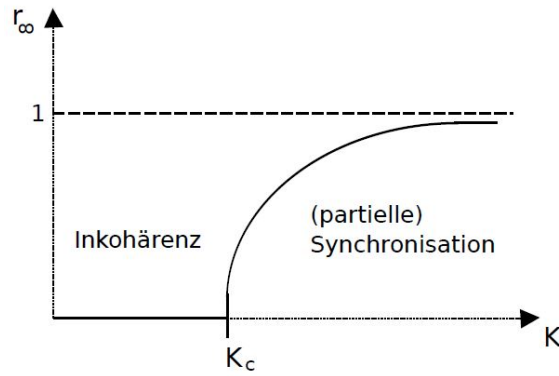


Abbildung 9: Der Verlauf von r_∞ in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke K [9].

Die Abbildungen 10 bis 11 zeigen die zeitlichen Verläufe der Kohärenz r für verschiedene Oszillatorpopulationen ($N = 100$ und $N = 1000$) mit jeweils fünf unterschiedlichen Kopplungsstärken K . Als Zeitschrittweite wurde $dt = 0,2$ gewählt und die Zeit t wird in Einheiten von dt angegeben. Die Anfangsphasen sind lorentzverteilt und das Kohärenzmaß nimmt von einem von den Anfangsbedingungen abhängigen Wert $r(0)$ exponentiell zu, bis es um einen stationären Wert r_∞ fluktuiert. Es lässt sich aufgrund der Abbildungen festhalten, dass die Fluktuationen bei einem festen K mit steigender Populationsgröße N abnehmen. Außerdem sieht man, dass für $N = 100$ der Anstieg bis zum maximalen r , um das der Wert fluktuiert, schneller erfolgt als bei $N = 1000$. Die Fluktuationen kommen durch die endlichen Oszillatorpopulationen zustande. Im Kuramoto-Modell wird von einer unendlich großen Oszillatoranzahl ausgegangen, weshalb r im stationären Zustand idealerweise einen konstanten Wert r_∞ besitzt.

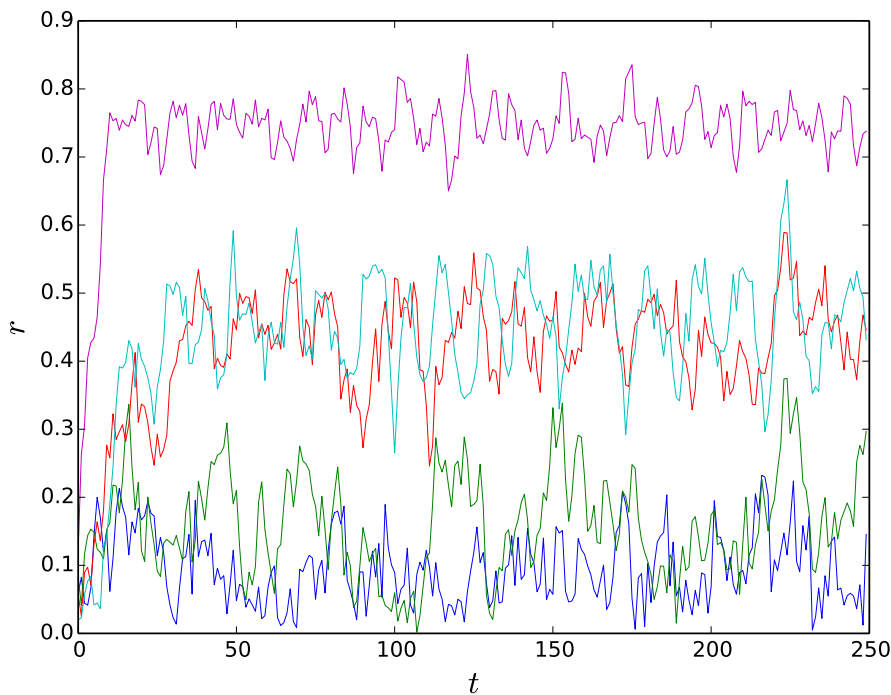


Abbildung 10: Der zeitliche Verlauf des Kohärenzmaßes r für eine Oszillatorpopulation von $N = 100$ und verschiedene Kopplungsstärken K (blau=0,5; grün=1,5; rot=2,0; hellblau=2,5; lila=3,5).

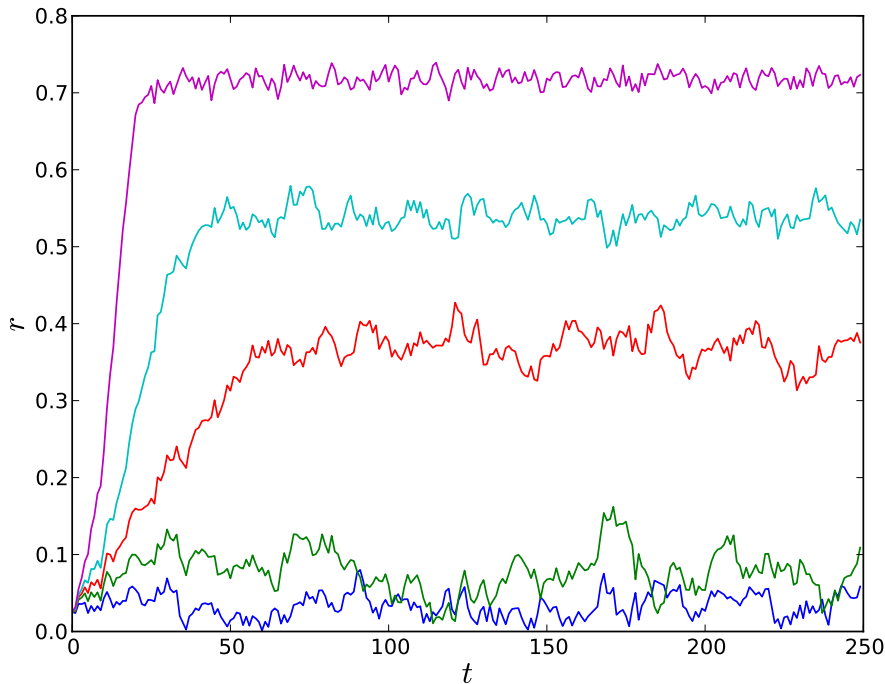


Abbildung 11: Der zeitliche Verlauf des Kohärenzmaßes r für eine Oszillatorpopulation von $N = 1000$ und verschiedene Kopplungsstärken K (blau=0,5; grün=1,5; rot=2,0; hellblau=2,5; lila=3,5).

In den Abbildungen 12 und 13 ist die stationäre Kohärenz r_∞ für verschieden große Oszillatorpopulationen ($N = 100$ und $N = 1000$) in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke K aufgetragen. Die Systeme wurden für jeden K -Wert solange entwickelt, bis sie um r_∞ fluktuierten. Anschließend wurde die Simulation mehrere Zeitschritte weitergeführt und über die dort auftretenden Werte von r gemittelt, um einen Wert für r_∞ zu erhalten. Bei $N = 100$ wird über ein Ensemble von 100 Durchläufen gemittelt und bei $N = 1000$ werden zehn Durchgänge ausgeführt und anschließend gemittelt, um Schwankungen in den einzelnen Durchgängen zu kompensieren.

Zunächst erkennt man anhand der Abbildungen 12 und 13, dass bei steigender Oszillatoranzahl N sich der $r_\infty(K)$ -Verlauf dem Mean-Field-Fall mit $K_c = 1,99$ immer weiter annähert. Ein Unterschied zwischen den endlichen Oszillatorpopulationen mit $N = 100$ und $N = 1000$ und dem Mean-Field-Fall ist, dass beim letzteren das Kohärenzmaß r_∞ für $K < K_c$ verschwindet und $r_\infty = 0$ gilt, aber bei den endlichen Populationen ist $r_\infty \neq 0$, wobei für höhere N der Wert von r_∞ in diesem Bereich abnimmt und sich der Null nähert. Der Verlauf der Phasenkohärenz liegt im Mean-Field-Fall unter den Verläufen mit endlichen Populationen [9]. Die Erklärung hierfür ist, dass sich bei einer unendlichen Population r_∞ nur asymptotisch dem Wert $r_\infty = 1$ nähert, im Falle einer endlichen Oszillatoranzahl aber ab einer bestimmten Kopplungsstärke vollständige Synchronisation, d.h. $r_\infty = 1$, auftreten kann, da die Frequenzen der Oszillatoren ω_i sich in einem abgeschlossenen Intervall $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ befinden. Dies kann man für $N = 1000$ in Abbildung 13 beobachten.

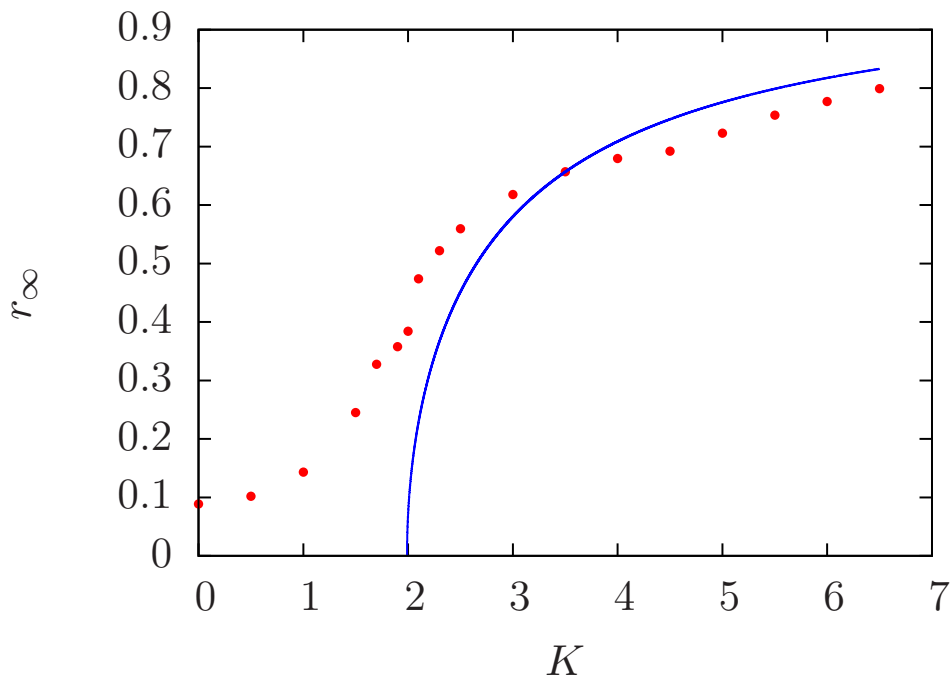


Abbildung 12: Der Verlauf von r_∞ für eine Oszillatorpopulation von $N = 100$ in Abhängigkeit von verschiedenen Kopplungsstärken K (rot) sowie zum Vergleich der Mean-Field-Fall mit $K_c = 1,99$ (blau).

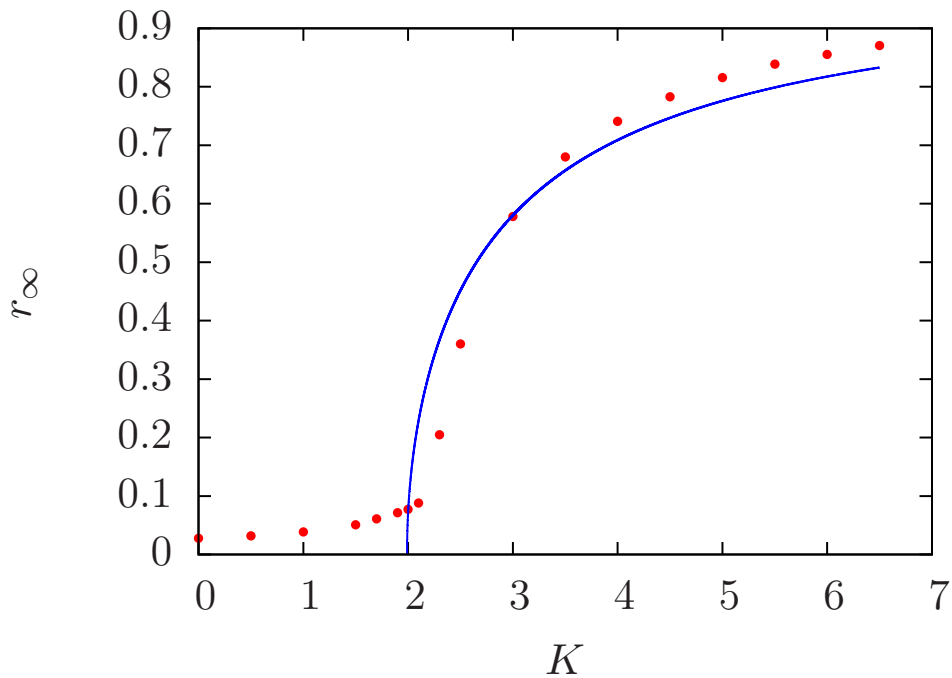


Abbildung 13: Der Verlauf von r_∞ für eine Oszillatorpopulation von $N=1000$ in Abhängigkeit von verschiedenen Kopplungsstärken K (rot) sowie zum Vergleich der Mean-Field-Fall mit $K_c = 1,99$ (blau).

5.2 Das Kuramoto-Modell auf verschiedenen Netzwerktopologien

In diesem Kapitel der Arbeit wird schließlich das Kuramoto-Modell auf verschiedenen Netzwerktopologien untersucht. Im vorher betrachteten Mean-Field-Fall ist man von einer Jeder-Mit-Jedem-Kopplung ausgegangen, weshalb noch keine spezifischen Eigenschaften von unterschiedlichen Netzwerktypen behandelt wurden. Jetzt werden die im dritten Kapitel vorgestellten Netzwerktypen in Kombination mit dem Kuramoto-Modell benutzt, um die Dynamik von Synchronisationsvorgängen auf verschiedensten Topologien zu simulieren. Bei diesen Simulationen sollen aber nur Netzwerke berücksichtigt werden, die eine gewisse Ähnlichkeit zu Stromnetzwerken aufweisen und somit eine gewisse Synchronisationsfähigkeit besitzen.

In den vorher verwendeten Programmen für die Erzeugung der Netzwerke wurde eine für Stromnetzwerke entscheidende Tatsache nicht berücksichtigt: Die Verbindung von einzelnen Clustern zu einem zusammenhängenden Netzwerk. Reale Stromnetze müssen zusammenhängend sein, d.h. es existieren keine einzelnen Knoten oder Cluster, die vollständig von anderen Knoten oder Clustern isoliert sind, da der elektrische Strom in der Realität zu jedem Knoten von der Quelle hinfließen können muss. Für Synchronisationsvorgänge ist es ebenfalls entscheidend, dass es keine isolierten und somit nicht wechselwirkenden Knoten gibt, da es sonst wegen diesen nie zu einer hohen oder gar vollständigen Synchronisation im Netzwerk kommen kann. Es wird deshalb eine modifizierte Version des Programms verwendet, die ein zusammenhängendes Netzwerk gewährleistet, damit die erzeugten Netzwerke realen Energienetzwerken näher kommen und die Synchronisation in solchen Netzen qualitativ besser untersucht werden kann. Außerdem ist es nun möglich die Anzahl der Kanten beim Zufallsnetzwerk und beim Minimum-Distanz Netzwerk anzugeben.

Bei allen Simulationen zur Erstellung der $r_\infty(K)$ -Diagramme wird eine Population von $N = 1000$ Oszillatoren betrachtet, wobei insgesamt 5000 Zeitschritte bei einer Schrittweite von $dt = 0,025$ erfolgen. Die Mittelung zur Bestimmung von r_∞ wird über die letzten 1500 Datenpunkte ausgeführt und ein Ensemble von jeweils zehn Durchgängen gewährleistet geringere Schwankungen. Es erfolgen insgesamt drei Durchgänge dieser Art mit jeweils anderen Netzwerken, die wiederum zum finalen r_∞ -Diagramm gemittelt werden, um die Fluktuationen nochmals zu minimieren. Bei den $r(t)$ -Diagrammen werden die ersten 5000 Zeitschritte eines Durchgangs betrachtet, wobei für K fünf verschiedene Stärken gewählt werden, um das Synchronisationsverhalten sichtbar zu machen. Die Anfangsfrequenzen sind wie im vorherigen Mean-Field-Fall lorentzverteilt.

5.2.1 Zufallsnetzwerk

Als erstes wird ein Zufallsnetzwerk mit $N = 1000$ Knoten und $m = 1350$ Kanten erzeugt, dessen Verläufe von $r(t)$ und von $r_\infty(K)$ in den Abbildungen 14 und 15 zu sehen sind. Der $r(t)$ Verlauf von einem Durchgang wurde für fünf verschiedene Kopplungsstärken $K \in \{1,0; 2,0; 3,0; 5,0; 7,0\}$ aufgetragen.

Anhand der Abbildung 14 erkennt man, dass die Stärke der Kopplung keine großen Auswirkungen auf die Geschwindigkeit hat, mit der der stationäre Zustand erreicht wird. Außerdem nehmen die Schwankungen kontinuierlich für steigende Kopplungsstärken ab. Man sieht, dass beim Vergleich zwischen $K = 1,0$ (blau) und $K = 3,0$ (rot) die Fluktuationen beim höheren K geringer werden, und, wenn man $K = 3,0$ nochmals mit $K = 5,0$ (hellblau) vergleicht, kommt man zu dem Schluss, dass die Fluktuationen bei noch höherer Kopplung weiter sinken. Die Höhe der Kohärenz im stationären Zustand r_∞ bei dem Lauf mit $K = 7,0$ liegt am höchsten und ihr Wert beträgt ca. $r_\infty = 0,7$.

In Abbildung 15 werden die über die drei Durchgänge mit jeweils zehn Ensembles gemittelten $r_\infty(K)$ -Werte für verschiedenen Kopplungsstärken graphisch aufgetragen. Zwischen $K = 0$ und $7,0$ steigt $r_\infty(K)$ exponentiell an und nähert sich einem konstanten Wert, der bei ungefähr $r_\infty = 0,7$ liegt. Das Verhalten der Synchronisation stimmt damit gut mit dem $r(t)$ -Verlauf aus der vorherigen Abbildung überein.

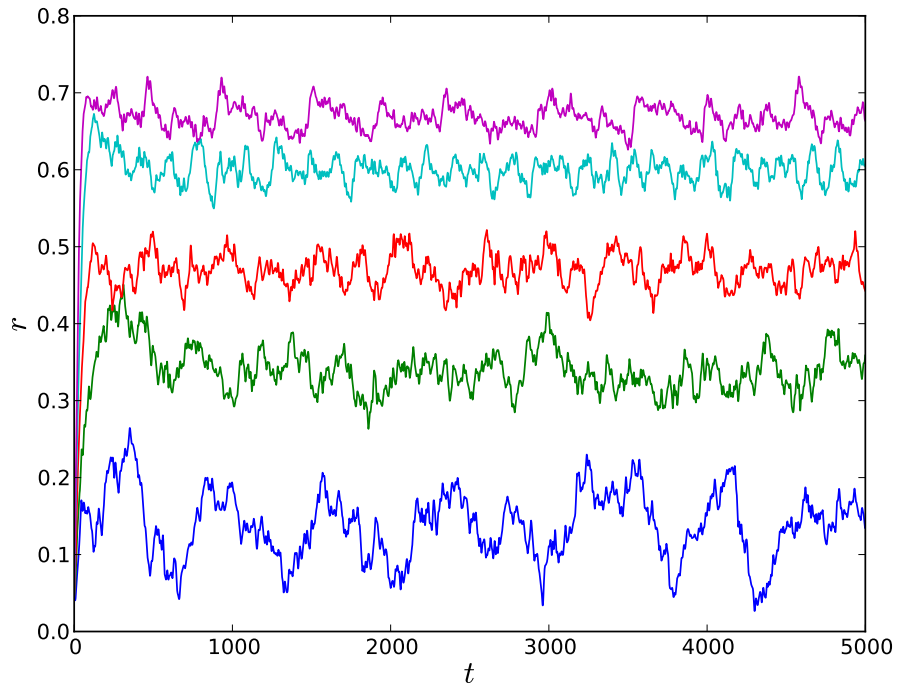


Abbildung 14: Der zeitliche Verlauf des Kohärenzmaßes r in einem Zufallsnetzwerk für eine Oszillatorpopulation von $N = 1000$ und verschiedene Kopplungsstärken K (blau=1,0; grün=2,0; rot=3,0; hellblau=5,0; lila=7,0).

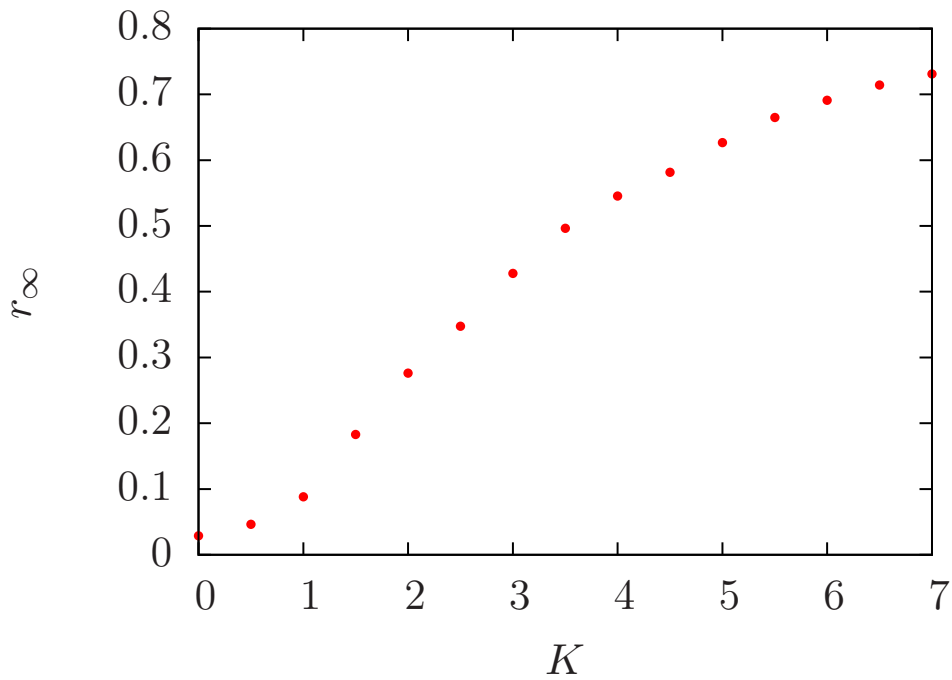


Abbildung 15: Der Verlauf von r_∞ für eine Oszillatorpopulation von $N=1000$ in einem Zufallsnetzwerk in Abhängigkeit von verschiedenen Kopplungsstärken K .

5.2.2 Skalenfreies Netzwerk

Es wird ein skalenfreies Netzwerk nach dem Albert-Barabási-Modell mit $N = 1000$ Knoten und fünf Startknoten erzeugt und wiederum die zeitlichen Kohärenzverläufe und die stationären Kohärenzwerte in den Abbildungen 16 und 17 aufgetragen.

In Abbildung 16 erkennt man, dass die Zeit zum Erreichen von r_∞ nicht signifikant von K abhängt, was schon beim Zufallsnetzwerk zu beobachten war. Das Ansteigen zum stationären synchronisierten Zustand beim skalenfreien Netzwerk verläuft wie beim vorherigen Zufallsnetzwerk ebenfalls nach ca. 100 Zeitschritten. In diesem Fall wird wieder bei steigendem K der Wert von r_∞ größer. Der $r_\infty(K)$ -Verlauf in Abbildung 17 zeigt, dass r_∞ anfangs mit steigender Kopplung stark exponentiell bis circa $K=3,0$ ansteigt und sich einem r_∞ -Wert um 0,5 nähert. Es ist demnach ein ähnliches Verhalten wie beim Zufallsnetzwerk zu beobachten, wobei die Kohärenzwerte im allgemeinen beim skalenfreien Fall niedriger liegen und der Anstieg zum konstanten Kohärenz-Wert deutlich schneller erfolgt als beim Zufallsnetz. Wieder passen die beide Abbildungen zu diesem Netzwerktyp gut zusammen.

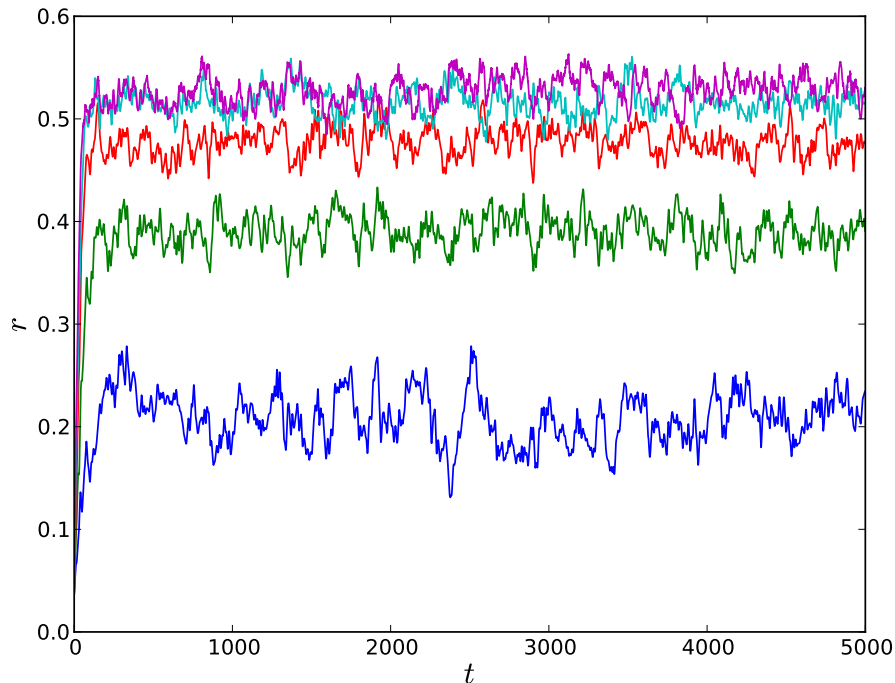


Abbildung 16: Der zeitliche Verlauf des Kohärenzmaßes r in einem skalenfreien Netzwerk für eine Oszillatorpopulation von $N = 1000$ und verschiedene Kopplungsstärken K (blau=1,0; grün=2,0; rot=3,0; hellblau=5,0; lila=7,0).

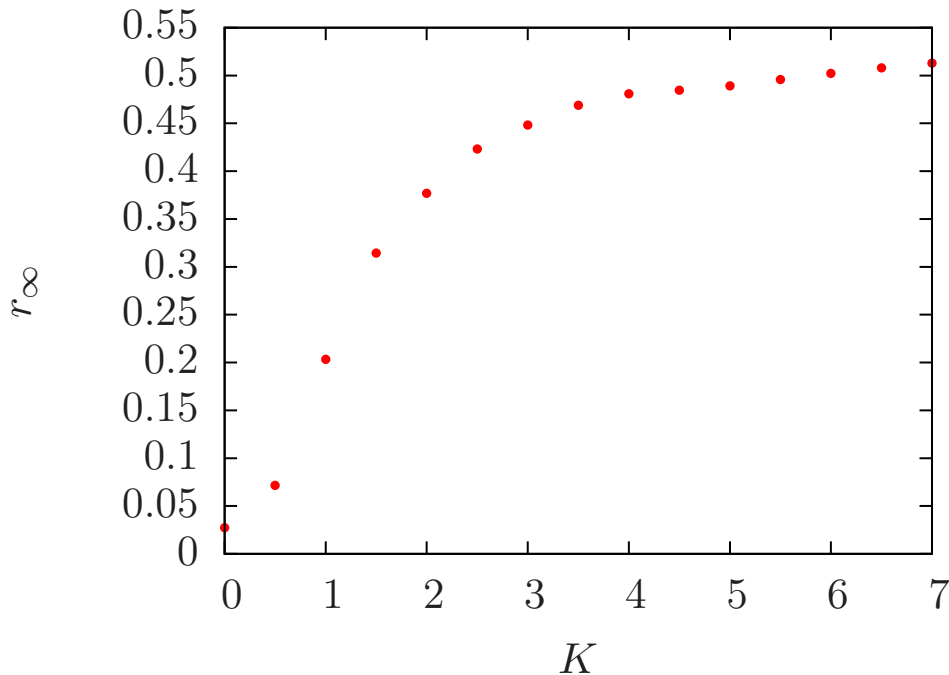


Abbildung 17: Der Verlauf von r_∞ für eine Oszillatorpopulation von $N = 1000$ in einem skalenfreien Netzwerk in Abhängigkeit von verschiedenen Kopplungsstärken K .

5.2.3 Minimum-Distanz Netzwerk

Zum Schluss wird ein Minimum-Distanz Netzwerk mit $N = 1000$ und $m = 1350$ Kanten erstellt und die Ergebnisse sind in den Abbildungen 18 und 19 zu finden.

Der zeitliche Verlauf von der Kohärenz r in Abbildung 18 zeigt, dass keine wirkliche Synchronisation unter den genannten Bedingungen im betrachteten System stattfindet. Dies ist im starken Kontrast zu den zwei vorherigen Netzwerktypen, die nach kurzer Zeit unter den gleichen Bedingungen synchronisierten.

Mithilfe von Abbildung 19 kann man das unter diesen Bedingungen unerwartete $r_\infty(K)$ -Verhalten von einem Minimum-Distanz Netzwerk sehen. Zwischen $K=0$ und $K=3,5$ steigt die Kohärenz an, doch dann kommt es trotz der mehrfachen Mittelungen zu Schwankungen. Nach $K=3,5$ fällt die Kohärenz wieder ab, steigt dann wieder auf einen sehr niedrigen Maximalwert von $r = 0,08$ an und sinkt erneut, wobei die Schwankungen mit höherem K wieder geringer werden. Weitere Simulationen mit Verkleinerungen der Schrittweite dt bis auf $dt = 0,01$ und Erhöhungen der Kopplungsstärke K bis auf $K = 20,0$ führten zu den gleichen inkohärenten Ergebnissen.

Das Minimum-Distanz Netzwerk verhält sich demnach völlig anders als das Zufalls- und skalenfreie Netzwerk. Um zu zeigen, dass es dennoch zur Synchronisation in einem solchen Netzwerk kommen kann, wird statt lorentzverteilter Anfangsfrequenzen ω_i eine einheitliche Frequenz von $\omega_i = 0$ für alle Oszillatoren gewählt. Die Simulation umfasst $N = 1000$ Oszillatoren mit $m = 1350$ Kanten nach 10000 Zeitschritten mit einer Schrittweite von $dt = 0,2$. Es wird nur ein Durchgang aus einem Ensemble betrachtet und die Mittelung erfolgt über die letzten 1500 r -Werte. Man beobachtet, dass es außer bei $K = 0$ bei allen anderen K -Werten zwischen $K = 0$ und $K = 1,0$ zur Synchronisation kommt. Die Kohärenz ist umso höher, je höher die Kopplungsstärke K ist. Demnach ist das Minimum-Distanz Netzwerk synchronisationsfähig im Fall gleicher Eigenfrequenzen.

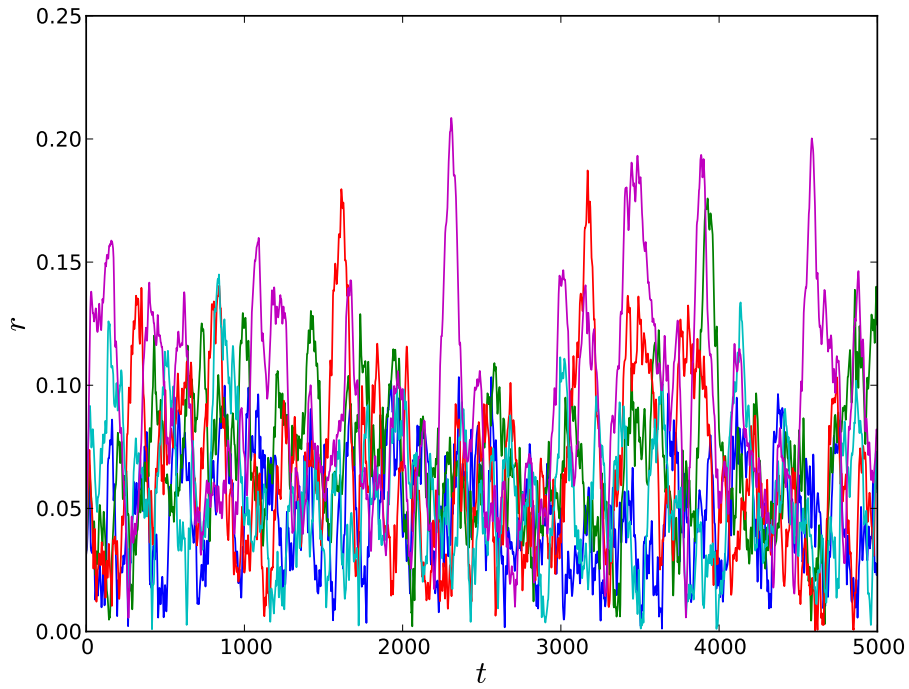


Abbildung 18: Der zeitliche Verlauf des Kohärenzmaßes r in einem Minimum-Distanz Netzwerk für eine Oszillatorpopulation von $N = 1000$ und verschiedene Kopplungsstärken K (blau=1,0; grün=2,0; rot=3,0; hellblau=5,0; lila=7,0).

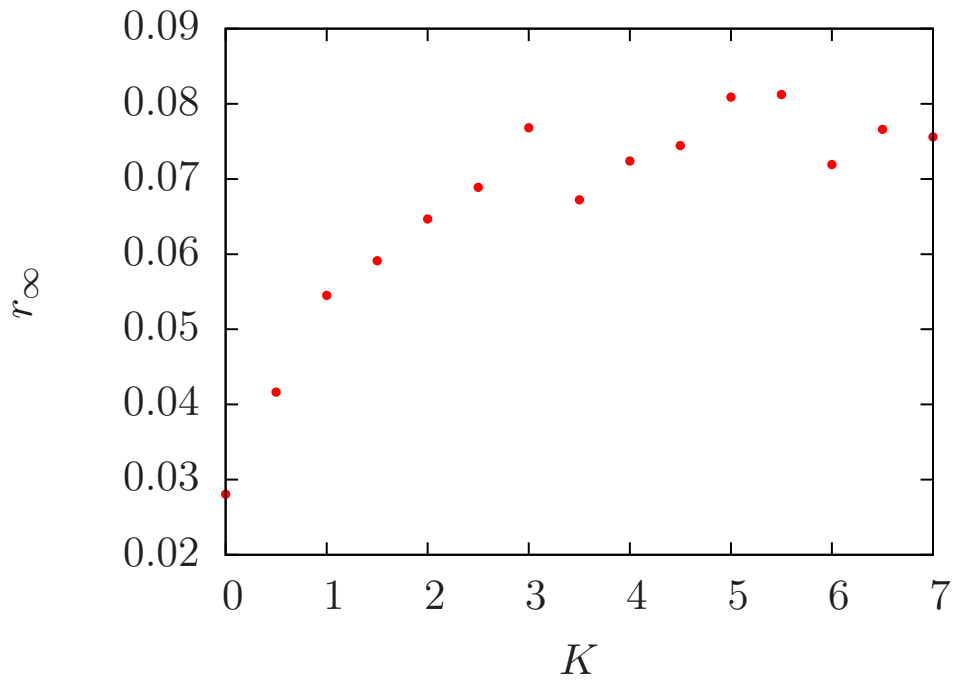


Abbildung 19: Der Verlauf von r_∞ für eine Oszillatorpopulation von $N = 1000$ in einem Minimum-Distanz Netzwerk in Abhängigkeit von verschiedenen Kopplungsstärken K .

6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung des Verlaufs von Synchronisation auf verschiedenen Netzwerktopologien. Dazu wurde das Kuramoto-Modell zur Beschreibung der Wechselwirkung der beteiligten Objekte benutzt und verschiedene Netzwerktypen betrachtet. Durch die Einführung von Größen, die die Synchronisationsvorgänge qualitativ beschreiben, konnten schließlich Aussagen über die Vorgänge in den jeweiligen Netzwerken gemacht werden.

Im ersten Kapitel wurden die graphen- und netzwerktheoretischen Grundlagen gelegt, indem die wichtigsten Größen zur Beschreibung von Netzwerken eingeführt wurden. Begriffe wie die Adjazenzmatrix und der Knotengrad k spielten im weiteren Verlauf der Arbeit besonders große Rollen. Das zweite Kapitel handelte von drei grundlegenden Netzwerken, dem Zufallsnetzwerk, dem skalenfreien Netzwerk, dem Small World Netzwerk und dem in [4] neu eingeführten Minimum-Distanz Netzwerk. Die Eigenschaften und Standard-Algorithmen nach [2] und [4] zur Erzeugung dieser Netzwerke wurden kurz vorgestellt. Anschließend wurde die Knotengradverteilung $P(k)$ von jedem Netzwerk untersucht und graphisch aufgetragen. Dabei wurden die Unterschiede zwischen dem skalenfreien und den anderen Netzwerken besonders deutlich.

Im dritten Kapitel wurde das Phänomen der Synchronisation beschrieben und das Kuramoto-Modell eingeführt. Mithilfe der fundamentalen Wechselwirkungsgleichung des Kuramoto-Modells, das die Synchronisation von einer Population von Oszillatoren beschreibt, konnte nun der Mean-Field-Fall betrachtet werden. In dieser Jeder-Mit-Jedem-Kopplung wurde der komplexe Ordnungsparameter $re^{i\phi}$ eingeführt, dessen Betrag als Maß für die Phasenkohärenz verwendet wurde.

Kapitel 4 erläuterte zu Beginn knapp die Grundlagen der nachfolgenden Simulationen. Es wurden die theoretischen Verläufe des Betrags des Ordnungsparameters $r(K)$ vorgestellt und die kritische Kopplungsstärke K_c definiert. Somit konnte zwischen inkohärenten und partiell synchronisierten Systemen unterschieden werden und im Verlauf ein Phasenübergang zwischen diesen Systemen identifiziert werden. Die Simulationen wurden für den Mean-Field-Fall mit $N = 100$ und 1000 Oszillatoren durchgeführt. Anhand der Simulationsergebnisse war zu erkennen, dass sich mit zunehmender Oszillatoranzahl die $r(K)$ -Verläufe dem Mean-Field-Fall immer mehr angleichen. Die Unterschiede zwischen Simulation und Theorie waren zum einen, dass der Verlauf aufgrund endlicher Oszillatorpopulationen teilweise stark fluktuierte und zum anderen, dass er häufig über dem des Mean-Field-Falls lag, was besonders bei $N = 1000$ zu erkennen war. Die Fluktuationen nahmen zwar mit zunehmenden N ab, aber gleichzeitig dauerte es länger bis die für das System maximale Phasenkohärenz r_∞ erreicht wurde.

Im nächsten Abschnitt wurde das Kuramoto-Modell auf unterschiedlichen Netzwerktopologien angewendet. Es wurden insgesamt drei Netzwerke, das Zufallsnetzwerk, das skalenfreie Netzwerk und das Minimum-Distanz Netzwerk, untersucht, wobei ein modifizierter Erzeugungsalgorithmus angewandt wurde, der gewährleistet hat, dass die Netzwerke zusammenhängend sind. Zusammenhängende Netzwerke sind deshalb entscheidend, da die Synchronisation durch isolierte Knoten sinkt und somit niedrige Kohärenzen zu erwarten sind. Außerdem spielen im Hinblick auf reale Stromnetzwerke nur solche künstlichen Netzwerke, in denen man von jedem Ort zu allen anderen Orten gelangen kann, eine Rolle. Die Simulationsergebnisse mit $N = 1000$ Oszillatoren von allen drei Netzwerken zeigten zwar ähnliche $r_\infty(K)$ -Verläufe bei denen r_∞ mit höher werdender Kopplungsstärke K bis zu einem maximalen r_∞ -Wert ansteigt, aber beim Minimum-Distanz Netzwerk waren besonders bei hohen Kopplungen Unterschiede in Form von großen Schwankungen zu sehen. Der beobachtete Verlauf der Kohärenz im skalenfreien Netzwerk ist auch in [8] zu finden. Bei dem Minimum-Distanz Netzwerk mit lorentzverteilten Anfangsfrequenzen fand, wie in dem $r(t)$ -Verlauf erkennbar ist, keine wirkliche Synchronisation statt und es waren große Fluktuationen im Bereich des vermuteten konstanten $r(K)$ -Maximums zu erkennen. Eine Erhöhung der Kopplungsstärke zur Verbesserung der Synchronisation oder eine Verkleinerung der Schrittweite dt konnte die anhand der anderen Simulationsergebnisse aufgestellte Hypothese einer Annäherung an einen stationären Zustand und dem damit einhergehenden auftretenden Phasenübergang weder bestätigen noch widerlegen. Ein Minimum-Distanz Netzwerk scheint viel komplexer und schwerer synchronisierbar zu sein als die beiden anderen betrachteten Netzwerktypen. Im Fall einer einheitlichen Eigenfrequenz ω_i konnte aber eine deutliche Synchronisation bei diesem Netzwerktyp festgestellt werden. Weitere Untersuchungen müssten nun die komplexen Synchronisationseigenschaften eines Minimum-Distanz Netzwerks genauer bestimmen.

Es wurde in dieser Arbeit zwar kein Small World Netzwerk in Verbindung mit dem Kuramoto-Modell untersucht, aber in [6] erfolgte es und es wurde ein ähnlicher Verlauf im Small World Fall wie bei den ersten beiden untersuchten Netzwerktypen gefunden.

Eine Anwendung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit könnte bei der Erstellung von neuen Modellen zur Stromnetzabbildung liegen. Ein erster Schritt wurde in [4] mit der Einführung des Minimum-Distanz Netzwerks getan und nun gilt es dieses zu verbessern und weitere Modelle zu finden, damit sich die Simulation von Stromnetzwerken stetig weiter an die Realität annähert. Das Synchronisationsverhalten in Stromnetzen mit Verbrauchern und Produzenten besitzt einen großen Einfluss auf die Versorgungssicherheit. Nachfolgend könnte man Simulationen auf weiteren modifizierten Netzwerken und mit einem modifizierten Kuramoto-Modell wie in [9], das z.B. die Knoten als Stromproduzenten oder Verbraucher beschreibt, durchführen.

Ausblickend kann man sagen, dass das Thema erneuerbare Energien (EE) so aktuell wie nie zuvor in Deutschland ist und deshalb die Nachfrage nach neuen, zuverlässigen und effektiven Stromnetzen einen Höhepunkt besitzt. Nachdem 2011 die Bundesregierung aufgrund der Havarie des Atomkraftwerks Fukushima Daiichi in Folge der Tsunami-Katastrophe in Japan den Ausstieg aus der Kernkraft beschlossen hat, war das neue Ziel klar: den Ausbau der EE.

Aber es reicht nicht nur die Erzeugung vom sogenannten Ökostrom zu fördern und zu erhöhen, sondern man muss gleichzeitig die Stromnetze ausbauen, um den Strom bei Bedarf regional und teilweise überregional verteilen zu können. Die Stromproduktion durch die Hauptsäulen der EE, Solarzellen und Windkraftanlagen, schwankt ständig aufgrund wechselnder Wetterbedingungen, wodurch es umso wichtiger wird, einerseits den Strom bei Bedarf schnell zum Verbraucher mittels geeigneter Stromleitungen zu transportieren und andererseits bei niedrigem Verbrauch die elektrische Energie in irgendeiner Form zu speichern. Dazu will die Bundesregierung zwischen 2013 und 2022 rund 200 Milliarden Euro in die deutsche Stromversorgung investieren, wobei der größte Teil den EE und dem Netzausbau zugute kommt [5]. Man sieht also, dass die Erforschung der Synchronisation in Netzwerken eine große Rolle spielt.

A Anhang

A.1 Runge-Kutta-Verfahren

Das Runge-Kutta-Verfahren erlaubt es Differentialgleichungen erster Ordnung mittels folgender Formeln zu lösen und den Verlauf der Lösung Stück für Stück zu erstellen:

$$y'(x) = f(x) \quad (20)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (21)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dt}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \quad (22)$$

$$k_1 = f(x) \quad (23)$$

$$k_2 = f(x + k_1 \cdot dt/2) \quad (24)$$

$$k_3 = f(x + k_2 \cdot dt/2) \quad (25)$$

$$k_4 = f(x + k_3 \cdot dt) \quad (26)$$

mit der Schrittweite dt und der Anfangsbedingung y_0 .

Literatur

- [1] Rodolphe Sepulchre, Jorge Gonçalves, Abdullah Hamadeh, Guy-Bart Stan. Global State Synchronization in Networks of Cyclic Feedback Systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57, February 2012.
- [2] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97, January 2002.
- [3] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286, October 1999.
- [4] P. Hines, S. Blumsack, E. C. Sanchez, C. Barrows. The topological and electrical structure of power grids. *System Sciences (HICSS), 2010 43rd Hawaii International Conference on*, 2010.
- [5] Marc Oliver Bettzüge. Nationaler Hochmut oder cui bono? *Physik Journal*, 5, May 2014.
- [6] H. Hong, Choi M. Y., and Beom Jun Kim. Synchronization on small-world networks. *Phys. Rev. E*, 65:026139, Jan 2002.
- [7] Conrad J. Pérez Vicente, Félix Ritort, Renato Spigler, Juan A. Acebrón, L. L. Bonilla. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena.
- [8] Y. Moreno and A.F. Pacheco. Synchronization of kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhys. Letters*, November 2004.
- [9] Katrin Schmietendorf. Synchronisation und Spannungsstabilität in einem Netzwerk von Synchronmaschinen, Diplomarbeit. *Westfälische-Wilhelms-Universität Münster*, 2012.
- [10] Duncan J. Watts, Steven H. Strogatz. Collective dynamics of 'small world' networks. *Nature*, 393, June 1998.