

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT

BACHELORARBEIT

Delaystabilisierung von Synchronisation mit Anwendung auf Stromnetzwerke

Autor:
Denis HESSEL

Themenstellerin:
Dr. Svetlana GUREVICH
Zweitgutachter:
Dr. Oliver KAMPS

vorgelegt am 5. September 2017



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	2
2.1. Dynamische Systeme mit zeitverzögerter Rückkopplung	2
2.1.1. Stabilität	3
2.1.2. Hurwitz-Kriterium	4
2.1.3. Exponentielle Polynome	5
2.1.4. Cluster-Betrachtung der charakteristischen Eigenwerte	6
2.1.5. Rekasius' Substitution	8
2.1.6. Building Block Methode	10
2.2. Synchronisierende Systeme	11
2.2.1. Definition von Synchronisation	12
2.2.2. Kuramoto-Modell	12
2.2.3. Modellierung von Stromnetzwerken	13
2.2.4. Gekoppelte Swing-Gleichungen	14
2.2.5. Modell dritter Ordnung	15
3. Analyse eines Zwei-Maschinen-Systems	17
3.1. Swing-Gleichung	17
3.2. Modell dritter Ordnung	22
3.2.1. Fixpunkte	23
3.2.2. Stabilität ohne Delay	25
3.2.3. Stabilität mit einem Delayterm	28
3.3. Zwei unabhängige Delayparameter	30
4. Analyse von Mehr-Maschinen-Systemen	34
4.1. Allgemeine Bedingung für Stabilisierbarkeit	34
4.2. Netzwerk aus 12 Maschinen	35
5. Zusammenfassung und Ausblick	37
Anhang	40
Literatur	45

1. Einleitung

Für den ordnungsgemäßen Betrieb eines Stromnetzes ist es notwendig, dass die eingespeiste Leistung in so einem Netzwerk genau auf die entnommene Leistung (zuzüglich Reibungsverluste) angepasst wird. Konventionell wird dabei die eingespeiste Leistung einiger weniger großer Kraftwerke auf solche Weise geregelt, dass eingespeiste und entnommene Leistung immer möglichst nah beieinander liegen.

Im Zuge der Energiewende nimmt der Anteil erneuerbarer Energien immer weiter zu, was zu einer Dezentralisierung des Stromnetzes führt. Dies stellt das Stromnetzwerk vor Herausforderungen: Zum einen fluktuiert die eingespeiste Leistung von – um ein Beispiel zu nennen – einer Windkraftanlage auf nicht-triviale Weise und auf mehreren Zeitskalen [1, 2], und zum anderen lässt sich die eingespeiste Leistung nur bedingt regeln, da die maximale Leistung von externen Faktoren wie den Wetterverhältnissen abhängig ist.

Um die Auswirkungen des zuletzt genannten Punktes gering zu halten, werden als ein Ansatz sogenannte intelligente Stromnetze (sogenannte *smart grids*) vorgeschlagen [3]. Diese beinhalten unter Anderem, dass nicht mehr die eingespeiste Leistung an die Nachfrage, sondern die Nachfrage an die zur Verfügung stehende Leistung angepasst wird (sogenannte *dynamic demand response*). Dies kann zum Beispiel dadurch erreicht werden, dass der Strompreis von der gerade zur Verfügung stehenden Leistung abhängig gemacht wird. In einem derartigen Szenario fällt der Strompreis bei einem Überangebot an elektrischer Leistung, während er bei zu wenig zur Verfügung stehender Leistung steigt.

Da die Verbraucher allerdings eine gewisse Zeit benötigen, um auf Preisänderungen mit einer Änderung der Nachfrage reagieren zu können, lässt sich mutmaßen, dass durch die Zeitverzögerung die Dynamik eines Stromnetzwerkes vielleicht maßgeblich beeinflusst wird.

Im Zentrum dieser Bachelorarbeit steht deswegen die Frage: Welchen Einfluss hat eine auf Preisänderungen zeitverzögerte Reaktion der Nachfrage auf die Dynamik eines Stromnetzwerkes? Oder etwas allgemeiner gefasst: Wie beeinflusst eine zeitverzögerte Rückkopplung die Dynamik eines dynamischen Systems?

Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen für dynamische Systeme mit zeitverzögerter Rückkopplung erklärt und die zur Beschreibung von Stromnetzwerken verwendeten Modelle hergeleitet. In Kapitel 3 wird dann ein Stromnetzwerk bestehend aus zwei Synchronmaschinen untersucht, an dem die durch die Zeitverzögerung auftretenden Effekte beobachtet werden können. Dabei wird als zugrunde liegendes Modell zunächst das *klassische Modell*, darauf folgend das *Modell dritter Ordnung* betrachtet. Anschließend wird in Kapitel 4 am Beispiel eines aus zwölf Maschinen bestehenden Stromnetzwerkes gezeigt, dass sich entsprechende Effekte auch in Netzwerken mit komplizierterer Topologie und mehreren Maschinen nachweisen lassen. Zuletzt werden in Kapitel 5 die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und diskutiert, sowie ein Ausblick auf weitere mögliche Fragestellungen gegeben.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Dynamische Systeme mit zeitverzögerter Rückkopplung

Ist man daran interessiert, die Dynamik gewisser Phänomene zu modellieren und mit mathematischen Formeln zu beschreiben, so wird man häufig feststellen, dass die Änderung einer Größe nicht nur von ihrem jetzigen Wert abhängt, sondern auch von ihrem Wert zu einer früheren Zeit, nämlich immer dann, wenn Ursache und Wirkung zeitverzögert auftreten. Beispiele dafür finden sich in der Modellierung von Populationsdynamiken [4], in der Regelungstechnik [5], in wirtschaftlichen Modellen [6], in der Modellierung von Infektionen [7] und Epidemieszenarien [8], in der Kommunikationstechnik [9] oder auch – wie in dieser Arbeit betrachtet – bei der Modellierung von Stromnetzwerken mit zeitverzögert reagierenden Verbrauchern. In der mathematischen Beschreibung treten in so einem Fall Differentialgleichungen mit zeitverzögerter Rückkopplung oder auch Delay auf¹, wobei mit Delay aus dem Englischen die Zeitdauer zwischen Ursache und Wirkung beschrieben wird.

Solche dynamische Systeme mit endlich vielen diskreten und konstanten Delays lassen sich beschreiben durch ein System von Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{x}_{\tau_p}) \quad (1)$$

mit $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ einem Vektor, der als Komponenten die Zustandsvariablen enthält und $\mathbf{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ einem bezüglich \mathbf{x} glatten Vektorfeld, das die zeitliche Entwicklung von \mathbf{x} festlegt. Dabei wurde und wird im Folgenden die bei Differentialgleichungen mit Delay übliche Schreibweise $\mathbf{x}_\diamond \equiv \mathbf{x}(t - \diamond)$ mit beliebigem \diamond für die zeitverzögerten Variablen verwendet.

Während bei gewöhnlichen Differentialgleichungen² die n Komponenten des Zustandsvektors \mathbf{x} zu einer bestimmten Zeit t den Zeitverlauf von \mathbf{x} eindeutig festlegen, ist zur vollständigen Beschreibung des Zustands im System mit Delay die Kenntnis über alle Vektoren $\mathbf{x}(t)$ für $t \in (t - \tau_{\max}; t]$ mit der maximalen Delayzeit $\tau_{\max} = \max_{1 \leq j \leq s} \tau_j$ notwendig.

Deswegen sind dynamische Systeme mit Delay im Allgemeinen unendlichdimensional. Insbesondere tritt an die Stelle des vorgegebenen Anfangswerts $\mathbf{x}(0)$ bei gewöhnlichen Differentialgleichungen die Anfangsfunktion $\mathbf{x}^0(t)$, $t \in (-\tau_{\max}; 0]$, die dabei die Differentialgleichung nicht notwendigerweise erfüllen muss.

Eine Lösungsmethode für die Differentialgleichung in Gl. (1) ist wiederholtes schrittweises Integrieren: Die Anfangsfunktion $\mathbf{x}^0(t)$, $t \in (-\tau_{\max}; 0]$ sei gegeben. Dann sind für den Zeitraum $(0; \tau_{\min}]$, $\tau_{\min} = \min_{1 \leq j \leq s} \tau_j$ alle zeitverzögerten Variablen bekannt und die Differentialgleichung mit Delay lässt sich für dieses Zeitintervall durch einsetzen der

¹Man spricht auch von Retardierte Differentialgleichungen, Differentialgleichung mit nachteilendem Argument oder im Englischen von Delayed Differential Equation (DDE) oder Differential-difference equations.

²Es wird angenommen, dass der Leser bereits ein gewisses Vorwissen über die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und nichtlinearer Dynamik besitzt. Andernfalls wird in [10] eine hervorragende Einführung in diese Themen gegeben.

Anfangsfunktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen. Diese lässt sich formal lösen mittels

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{x}^0(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \underbrace{\mathbf{x}_{\tau_1}^0, \dots, \mathbf{x}_{\tau_p}^0}_{\text{bekannt, hängt maximal von } t \text{ ab}}) dt \quad (2)$$

und man erhält die Lösung für $t \in (0; \tau_{\min}]$. Iterativ erhält man nun die Lösungen in den darauf folgenden Zeitintervallen $t \in (n\tau_{\min}; (n+1)\tau_{\min}]$ analog durch

$$\mathbf{x}^{n+1}(t) = \mathbf{x}^n(n\tau_{\min}) + \int_{n\tau_{\min}}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \underbrace{\mathbf{x}_{\tau_1}^n, \dots, \mathbf{x}_{\tau_p}^n}_{\text{aus vorigem Schritt bekannt}}) dt. \quad (3)$$

Da es sich bei Differentialgleichungen mit Delay um ein sehr weites Feld handelt, in dem bis heute noch aktiv geforscht wird, kann im Rahmen dieser Bachelorarbeit nicht auf alle Einzelheiten zu diesem Thema eingegangen werden. Detaillierte Beschreibungen von Systemen mit Delay finden sich beispielsweise in [11, 12, 13].

2.1.1. Stabilität

Eine im Zusammenhang von vielen Anwendungen gestellte Frage ist die der dynamischen Stabilität. Angenommen, ein System mit Delay befindet sich an einem Fixpunkt \mathbf{x}^* , es gelte also

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*, \dots, \mathbf{x}^*) = 0. \quad (4)$$

Das konzeptuelle Vorgehen ist nun im Prinzip analog zum Vorgehen bei Systemen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen: Man betrachtet eine kleine Auslenkung vom Fixpunkt und prüft, ob sich das System in linearer Näherung zum Fixpunkt hin- oder vom Fixpunkt wegbewegt. Im ersten Fall bezeichnet man den Fixpunkt als stabil, im zweiten Fall als instabil. Dazu wird nun ein Stabilitätskriterium hergeleitet, dessen Herleitung sich in ähnlicher Form auch in [14] findet.

Betrachtet wird eine kleine Auslenkung vom Fixpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$. Eingesetzt in Gl. (1) gilt für das ausgelenkte System

$$\dot{\mathbf{x}} = \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}, \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_{\tau_n}) \quad (5)$$

$$\approx \mathbf{J}_0\delta\mathbf{x} + \mathbf{J}_{\tau_1}\delta\mathbf{x}_{\tau_1} + \dots + \mathbf{J}_{\tau_n}\delta\mathbf{x}_{\tau_n}. \quad (6)$$

Dabei wurde das System in der letzten Zeile mittels einer Taylor-Entwicklung linear genähert, \mathbf{J}_0 ist also die Jacobi-Matrix bezüglich der nicht zeitverzögerten Variablen, während die \mathbf{J}_{τ_i} , $i = 1, \dots, n$ die Jacobi-Matrizen bezüglich der um τ_i verzögerten Variablen sind (in beiden Fällen jeweils ausgewertet am Fixpunkt). Da das genährte System linear ist, wählt man für die Auslenkung $\delta\mathbf{x}$ einen exponentiellen Ansatz

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{\lambda t},$$

der in Gl. (6) eingesetzt

$$\lambda \mathbf{A} = \left(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_{\tau_1} e^{-\lambda \tau_1} + \dots + \mathbf{J}_{\tau_n} e^{-\lambda \tau_n} \right) \mathbf{A} \quad (7)$$

ergibt, wenn man beide Seiten noch durch $e^{\lambda t}$ teilt. Bei Gl. (7) handelt es sich um ein (nichtlineares) Eigenwertproblem. Für $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ist diese Gleichung also genau dann erfüllt, wenn

$$\chi(\lambda) = \det \left(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_{\tau_1} e^{-\lambda \tau_1} + \dots + \mathbf{J}_{\tau_n} e^{-\lambda \tau_n} - \lambda \mathbf{E} \right) = 0 \quad (8)$$

erfüllt ist (\mathbf{E} ist dabei die Einheitsmatrix und $\det(\mathbf{A})$ steht für die Determinante einer Matrix \mathbf{A}). Die Stabilität des Fixpunkts ergibt sich dann, wie im Falle eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, aus dem Vorzeichen des Realteils des Eigenwerts mit dem größten Realteil:

- Für $\left(\max_{\chi(\lambda)=0} \operatorname{Re}(\lambda) \right) < 0$ ist der Fixpunkt stabil. Im Folgenden wird auch von stabilen Fixpunkten auf der stabilen Halbebene $\mathbb{C}^- = \{\operatorname{Re}(z) < 0 \mid z \in \mathbb{C}\}$ gesprochen.
- Für $\left(\max_{\chi(\lambda)=0} \operatorname{Re}(\lambda) \right) > 0$ ist der Fixpunkt instabil. Analog wird im Folgenden auch von instabilen Fixpunkten auf der instabilen Halbebene $\mathbb{C}^+ = \{\operatorname{Re}(z) > 0 \mid z \in \mathbb{C}\}$ gesprochen.
- Für $\left(\max_{\chi(\lambda)=0} \operatorname{Re}(\lambda) \right) = 0$ ist das Stabilitätsproblem in linearer Ordnung nicht entscheidbar, für eine Entscheidung müssen noch höhere Ordnungen der Taylor-Entwicklung in Gl. (6) betrachtet werden. Man spricht auch von einem neutral stabilen Fixpunkt auf der imaginären Achse $\mathbb{C}^0 = \{\operatorname{Re}(z) = 0 \mid z \in \mathbb{C}\}$.

2.1.2. Hurwitz-Kriterium

Die charakteristische Gleichung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet im Allgemeinen

$$\chi_{\text{ODE}}(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0. \quad (9)$$

Im Rahmen der Frage nach der dynamischen Stabilität ist es zumeist ausreichend zu wissen, ob es Eigenwerte λ gibt, deren Realteil größer ist als null. Das Hurwitz-Kriterium ermöglicht es die Stabilität eines Fixpunkts zu bestimmen, ohne dabei die Eigenwerte explizit auszurechnen zu müssen [15]. Dafür definiert man zunächst aus den Koeffizienten des Polynoms (9) die Hurwitz-Matrix

$$H_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad (10)$$

wobei die Indizes von Spalte zu Spalte um zwei abnehmen und von Zeile zu Zeile um eins zunehmen. Wenn ein Index x negativ oder größer als n ist, ist allgemein $a_x = 0$ zu setzen. Nach dem Hurwitz-Kriterium sind nun alle Realteile der Eigenwerte von Gl. (9) kleiner null und ein Fixpunkt somit stabil, genau dann wenn die Determinante der Hurwitz-Matrix, sowie alle Hauptminoren der Hurwitz-Matrix

$$\det(H_1) = |a_{n-1}| \quad (11)$$

$$\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_{n-0} & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ \det(H) = \det(H_n) &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_{n-0} & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

größer sind als null. Dafür ist es eine notwendige Bedingung, dass alle Polynom-Koeffizienten das selbe Vorzeichen besitzen, also

$$\text{sgn}(a_0) = \text{sgn}(a_1) = \dots = \text{sgn}(a_n) \quad (15)$$

gilt. Für $n = 3$ ergeben sich als notwendige und hinreichende Bedingungen explizit

$$H_1 = a_2 > 0 \quad (16)$$

$$H_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (17)$$

$$H_3 = a_0 H_2 > 0. \quad (18)$$

2.1.3. Exponentielle Polynome

Während die charakteristische Gleichung eines Systems mit gewöhnlichen Differentialgleichungen im Allgemeinen ein Polynom ist, treten bei Systemen mit Delay im Allgemeinen als charakteristische Gleichung sogenannte exponentielle Polynome auf. Diese haben die Form

$$\chi_{\text{Delay}}(\lambda, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} \lambda^j e^{-\tau_i \lambda} \quad (19)$$

wobei $\tau_1 = 0$, $\tau_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 2, \dots, m$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$. Dabei wird $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ als Argument einer Funktion als verkürzte Schreibweise für sämtliche Delayparameter verwendet. Dazu äquivalent ist die Form

$$\chi_{\text{Delay}}(\lambda, \boldsymbol{\tau}) = P(\lambda) + \sum_{i=2}^m Q_i(\lambda) e^{-\tau_i \lambda}, \quad (20)$$

wobei $P(\lambda)$ und die $Q_i(\lambda)$, $i = 2, \dots, m$ Polynome mit reellen Koeffizienten in λ sind. Auch im Falle dynamischer Systeme mit Delay ist es für gewöhnlich ausreichend zu wissen, ob die Nullstellen von Gl. (19) bzw. (20) alle einen Realteil kleiner null besitzen. Während gewöhnliche Polynome jedoch nach dem Fundamentalsatz der Algebra stets eine endliche Anzahl von Nullstellen haben, haben exponentielle Polynome im Allgemeinen unendlich viele Nullstellen. Es lässt sich aber folgende Aussage über die Nullstellen mit positivem Realteil machen, wie in [16] gezeigt wird.

Sei als Voraussetzung

$$|a_{1n}| > \sum_{i=2}^m |a_{in}| \quad (21)$$

erfüllt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn in Gl. (20) gilt $\deg(P) > \max_{1 \leq i \leq m} \deg(Q_i)$. Definiere nun die beiden von den Delays unabhängigen Konstanten

$$D = |a_{1n}| - \sum_{i=2}^m |a_{in}| \quad (22)$$

und

$$M = \max_{0 \leq j \leq n-1} \sum_{i=1}^m \frac{|a_{ij}|}{D}. \quad (23)$$

Dann gilt, dass $\chi_{\text{Delay}}(\lambda)$ aus Gl. (19) bzw. (20) höchstens eine endliche Anzahl an Nullstellen auf \mathbb{C}^+ besitzt, wobei der Absolutbetrag der Nullstellen auf \mathbb{C}^+ beschränkt ist durch

$$|\lambda| < M + 1. \quad (24)$$

Falls $\deg(P) < \max_{1 \leq i \leq m} \deg(Q_i)$ gilt, ist die Anzahl der Nullstellen auf \mathbb{C}^+ abzählbar unendlich groß und das System für alle möglichen Delayzeiten instabil.

Ungleichung (24) ermöglicht es mit Hilfe numerischer Methoden für eine bestimmte Wahl von Delayzeiten sicher zu sagen, ob ein Fixpunkt eines System stabil, neutral stabil oder instabil ist. Wünschenswert wäre es jedoch, mit einer Methode direkt die Intervalle der Delayzeiten angeben zu können, in denen der Fixpunkt des Systems stabil oder instabil ist, ohne dabei für alle unterschiedlichen Delayzeiten in den Intervallen jeweils neu die Nullstellen ausrechnen zu müssen. Genau das ist tatsächlich möglich und wird nun im Folgenden Abschnitt beschrieben.

2.1.4. Cluster-Betrachtung der charakteristischen Eigenwerte

Angenommen, es wird ein System betrachtet, dessen charakteristische Gleichung nur eine Delayzeit τ , sowie ganzzahlige Vielfache dieser Delayzeit enthält, also von der Form

$$\chi_{\text{Com.}}(\lambda, \tau) = P(\lambda) + \sum_{i=1}^m Q_i(\lambda) e^{-i\tau\lambda} \quad (25)$$

ist, wobei $P(\lambda)$ und die $Q_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ wieder Polynome mit reellen Koeffizienten in λ sind. Ferner soll gelten $\deg(P) > \max_{1 \leq i \leq n} \deg(Q_i)$, um zu gewährleisten, dass die

charakteristische Gleichung (25) höchstens endlich viele Nullstellen auf \mathbb{C}^+ hat. Man spricht hier in der englischen Literatur von dem Fall sogenannter *Commensurate Delays*. Dann lässt sich die Stabilität in Abhängigkeit des Delays mit Hilfe einer *Cluster-Betrachtung der charakteristischen Eigenwerte* (aus dem Englischen *Cluster Treatment of Characteristic Roots*), die in [17] und [18] vorgestellt und hier kurz zusammengefasst wird, vollständig beschreiben.

Zunächst wird das Eigenwertproblem für den Fall ohne Delay mit Hilfe des Hurwitz-Kriterium gelöst und die Anzahl der instabilen Eigenwerte bestimmt. Grundlegender Gedanke ist es dann zu bestimmen, wann ein Eigenwertpaar die imaginäre Achse überquert, also $\lambda_x = i\omega_x$ gilt, da sich die Stabilität auch nur dann ändern kann, wenn ein Eigenwertpaar die imaginäre Achse überquert³. Kennt man zusätzlich die Delayzeit τ_x , bei der das Eigenwertpaar gerade auf der imaginären Achse liegt, sowie die Richtung

$$RT_x = \operatorname{sgn} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) \middle| \begin{array}{l} \lambda = i\omega_x \\ \tau = \tau_x \end{array} \right], \quad (26)$$

in der das Eigenwertpaar die imaginäre Achse überquert (RT aus dem Englischen für *Root Tendency*), so lassen sich direkt die Intervalle bestimmen, in denen das System stabil oder instabil ist, da lediglich gezählt werden muss, wann es null Eigenwerte auf \mathbb{C}^+ für Stabilität und mehr als null Eigenwerte auf \mathbb{C}^+ für Instabilität gibt. Ziel der Methode ist es also, die Menge $\varrho = \{\tau_x, \omega_x, RT_x\}$ zu bestimmen. Problematisch ist jedoch, dass diese Menge im Allgemeinen unendlich viele Elemente enthält.

Drei wesentliche Beobachtungen reduzieren dieses unendliche jedoch auf ein endliches Problem:

1. Für Commensurate Delays gibt es nur endlich viele Werte $\omega_k \in \mathbb{R}^+$, $k = 1, \dots, k_{\max}$, bei denen Eigenwertpaare $\lambda_k = \pm i\omega_k$ die imaginäre Achse überqueren. Die Anzahl dieser Werte ist nach oben beschränkt durch $k_{\max} \leq ma_{2m}$, wobei

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1 \vee n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{für } n > 2 \end{cases} \quad (27)$$

die Folge der Fibonacci-Zahlen ist und m für die selbe Zahl wie in Gleichung (25) steht. Diese Abschätzung wird in [19] gezeigt und beruht im Wesentlichen auf Rekasius' Substitution, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

2. Gilt für ein τ_k für einen der Eigenwerte $\lambda_k = i\omega_k$, so gilt dies auch für

$$\tau_{k\ell} = \tau_k + \frac{2\pi}{\omega_k} \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

³Dies liegt daran, dass die Position des Eigenwerts mit größtem Realteil stetig von den Delayzeiten abhängt, folglich kein Eigenwert aus dem positiv Unendlichen auftreten kann, der eine Änderung der Stabilität bewirken würde.

Dies sieht man leicht durch einsetzen, da die Exponentialfunktion eine 2π periodische Funktion im Imaginärteil ihres Argumentes ist: $\exp\left(i\omega_k\left(\tau_k + \frac{2\pi}{\omega_k}\ell\right)\right) = \exp(i\omega_k\tau_k + i2\pi\ell) = \exp(i\omega_k\tau_k)$. Der Achsenabschnitt ω_k , bei dem die Eigenwerte die imaginäre Achse überqueren, entspricht also auch genau der Kreisfrequenz bezüglich der Delayzeit, mit der Eigenwerte die imaginäre Achse an dieser Stelle überqueren. Im folgenden sei $\tau_{k\ell}$ stets so umbenannt, dass τ_{k0} das kleinste positive $\tau_{k\ell}$ ist.

3. Die Richtung RT , in die das Eigenwertpaar die imaginäre Achse überquert, ist invariant gegenüber τ und hängt nur von ω_k bzw. k ab, in dem Sinne dass

$$RT\Big|_{\tau_{k\ell}} = \operatorname{sgn}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\right)\Big|_{\substack{\lambda = i\omega_k \\ \tau = \tau_{k\ell}}}\right] = \operatorname{const}(k) = RT\Big|_{\tau_{ki}} \quad \forall \ell, i \in \mathbb{N} \quad (29)$$

gilt. Diese Aussage wird in [20] gezeigt.

Die Lösung des Stabilitätsproblems ist also bereits gegeben durch die Menge $\rho_0 = \{\tau_{k0}, \omega_k, RT\Big|_{\tau_{k\ell}}\}$, die nur endlich viele Elemente enthält. Jedes Element aus ρ_0 entspricht also einem „Cluster“ unendlich vieler imaginärer Eigenwertpaare, die die imaginäre Achse auf der selben Höhe und in die selbe Richtung überqueren. Die anderen Elemente von ρ ergeben sich dann aus ρ_0 über die Gleichung (28), wodurch sich ein vollständiges Bild über die Stabilität in Abhängigkeit aller möglichen Delayzeiten ergibt. Dabei bezeichnet man ρ_0 auch als *Kernel* und $\rho \setminus \rho_0$ als *Offspring*.

2.1.5. Rekasius' Substitution

Wie im letzten Abschnitt gesehen, ist es eine der Hauptaufgaben der Analyse, alle rein imaginären Nullstellen der charakteristischen Gleichung zu finden. In den meisten Fällen gestaltet sich dies aufgrund der exponentiellen Terme $e^{-\tau_k\lambda}$ immer noch als schwierig. Mittels der als Rekasius' Substitution bekannten Substitution

$$e^{-\tau_k\lambda} \rightarrow \frac{1 - T_k\lambda}{1 + T_k\lambda} \quad (30)$$

ist es möglich, die charakteristische Gleichung auf ein Polynom zu reduzieren, deren Menge der imaginären Nullstellen identisch ist zu der Menge der imaginären Nullstellen der ursprünglichen charakteristischen Gleichung.

Dies lässt sich zeigen, indem man die Form der Delayzeiten vorgibt mit

$$\tau_k = \tau_{k\ell} = \frac{2}{\omega} (\arctan(\omega T_k) + \ell\pi), \quad T_k \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{N}_0. \quad (31)$$

Unter Verwendung der mittels der Eulerschen Formel schnell zu zeigenden Identität

$$\arctan(x) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right) \quad (32)$$

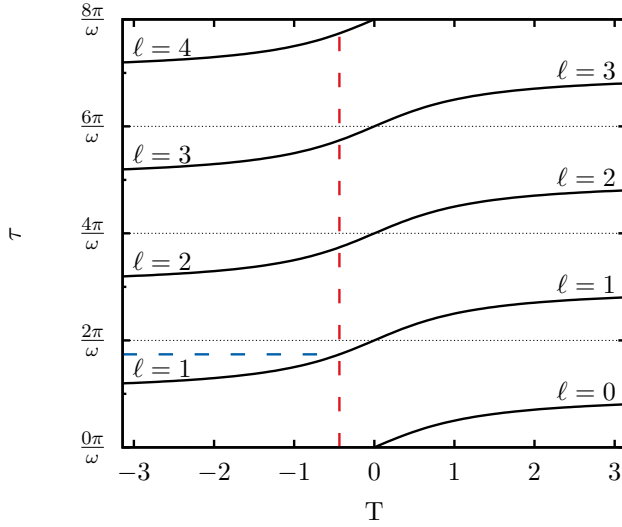


Abbildung 1: Darstellung von Rekasius' Substitution (Gln. (30) und (31)): Für jedes τ gibt es genau ein T (blau gestrichelte Linie) und für jedes T abzählbar unendlich viele τ (rot gestrichelte Linie). Dabei ist der Graph $2\pi/\omega$ periodisch in τ -Richtung (grau gestrichelt), was die Cluster-Betrachtung der charakteristischen Eigenwerte möglich macht.

erhält man im Fall $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ durch einsetzen

$$\begin{aligned} e^{-\tau_k \lambda} &\stackrel{\lambda=i\omega}{=} e^{-i\tau_k \omega} \stackrel{(31)}{=} \exp(-2i(\arctan(\omega T_k) + \ell\pi)) = \exp(-2i \arctan(\omega T_k)) \\ &\stackrel{(32)}{=} \exp\left(-2i \frac{i}{2} \log\left(\frac{1 - i\omega T_k}{1 + i\omega T_k}\right)\right) = \frac{1 - T_k \lambda}{1 + T_k \lambda}. \end{aligned} \quad (33)$$

Für $\lambda = i\omega$ ist die Substitution (30) also exakt (für andere Werte im Allgemeinen nicht), weswegen imaginäre Nullstellen invariant unter Rekasius' Transformation sind. Für die T_k ergibt sich dann aus Gl. (31) durch umformen

$$T_k = \frac{1}{\omega} \tan\left(\frac{\tau_k \omega}{2}\right) = \frac{1}{\omega} \tan\left(\frac{\nu_k}{2}\right) \quad \text{mit } 0 \leq \nu_k \leq 2\pi. \quad (34)$$

In Abb. 1 ist die Beziehung zwischen τ_k und T_k graphisch dargestellt: Jedes τ kann genau einem T zugeordnet werden, andererseits gehören zu einem T abzählbar unendlich viele Werte von τ mit Abstand $2\pi/\omega$. Jedes T entspricht also einem „Cluster“ von imaginären Eigenwertpaaren mit Delayabstand $2\pi/\omega$ und ermöglicht es deswegen, das unendlich dimensionale Problem der ursprünglich transzendenten charakteristischen Gleichung auf ein endlich dimensionales Polynom zu reduzieren. Dies erreicht man, indem man den nach der Transformation (30) entstehenden Ausdruck noch mit jedem der in den Nenner stehenden Ausdrücke multipliziert. So erhält man

$$\bar{\chi}(\lambda, \mathbf{T}) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} \lambda^j \frac{1 - T_i \lambda}{1 + T_i \lambda} \right) \prod_{i=1}^m (1 + T_i \lambda). \quad (35)$$

Dabei wird $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)$ als abkürzende Schreibweise verwendet. Mit Hilfe von Rekasius' Substitution lässt sich zeigen, warum es im Fall von Commensurate Delays nur

endliche viele Werte ω_k gibt, bei denen Eigenwertpaare die imaginäre Achse streifen: Für jede imaginäre Nullstelle der substituierten charakteristischen Gleichung muss gelten, dass das vorletzte Element in der ersten Spalte des sogenannten *Routh's Array* gleich null ist (siehe [21] für eine Erklärung von Routh's Array und [22] für einen Beweis). Dieses Element ist im Allgemeinen ein multivariates Polynom in den T_k und unabhängig von λ . Im Falle nur eines einzigen unabhängigen Delays ist das Element also nur ein univariates Polynom in T_1 , das nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens endlich viele Nullstellen hat. Für insgesamt p verschiedene Delays ist das Element ein p -variables Polynom in T_1 bis T_p und als Lösung gibt es maximal endlich viele $(p - 1)$ -dimensionale Hyperoberflächen.

2.1.6. Building Block Methode

In Gegenwart mehrerer unabhängiger Delayzeiten $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_p) \in \mathbb{R}^{p+}$, das heißt wenn man die Annahme von Commensurate Delays fallen lässt, muss das in Abschnitt 2.1.4 beschriebene Vorgehen modifiziert werden, sodass die sogenannte *Building Block Methode* (vorgestellt in [23] und hier kurz zusammengefasst) entsteht. Grund dafür ist, dass nun in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\tau}$ ein Kontinuum von imaginären Eigenwertpaaren $\lambda = i\omega$ gibt, das die charakteristische Gleichung erfüllt. Die Invarianz der Root Tendency unter Veränderung der Delayzeit, also Gl. (29), bleibt allerdings erhalten, wenn man die partielle Ableitung nach jeweils nur einer Komponente τ_j , $j = 1, \dots, p$ bildet und alle anderen Delayzeiten τ_k , $k \neq j$ konstant hält. Gleiches gilt für die Periodizität, mit der die Eigenwertpaare die imaginäre Achse überqueren, Gl. (28) gilt also unverändert für jede der Delayzeiten.

Deswegen führt man mit der Abbildung, die $\boldsymbol{\tau}$ immer dann auf $\boldsymbol{\nu} := \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\omega} \in SDS \subseteq \mathbb{R}^{p+}$ abbildet, wenn $\chi(i\omega, \boldsymbol{\tau}) = 0$, den als *spektralen Delayzeitraum* (aus dem Englischen *Spectral Delay Space*) bezeichneten Raum SDS ein. Dieser Raum ist in jeder seiner p Dimensionen 2π periodisch, wie aus Gl. (28) folgt. Aufgrund dieser Periodizität wird mit dem sogenannten *Building Block* $BB = \{\boldsymbol{\nu} \in [0; 2\pi]^p \mid \boldsymbol{\nu} \in SDS\}$, die Stabilität in Abhängigkeit der Delays vollständig beschrieben. Beim Building Block handelt es sich um den ersten Würfel im spektralen Delayzeitraum mit Kantenlänge 2π und anschaulich enthält der Building Block jeweils die kleinsten Delays, um ein Eigenwertpaar zu erhalten, das bei $i\omega$ die imaginäre Achse berührt.

Die Stabilitätsanalyse wird nun insgesamt wie folgt durchgeführt: Zunächst wird die Anzahl der instabilen Nullstellen für den Fall ohne Delay bestimmt. Dann wird der Fall mit Delay betrachtet und die charakteristische Gleichung mit Rekasius' Transformation in Polynomform gebracht. Jetzt werden alle imaginären Nullstellen der Gleichung

$$P(\mathbf{u}, \omega) = \bar{\chi}(\lambda, \mathbf{u}/\omega) \Big|_{\lambda=i\omega} = \sum_{k=0}^N b_k(\mathbf{u}/\omega)(i\omega)^k = 0 \quad (36)$$

gesucht, wobei $\mathbf{u} = \tan(\boldsymbol{\nu}/2)$ (vgl. mit Gln. (34) und (35)). Dazu ist es instruktiv $P(\mathbf{u}, \omega)$ in Real- und Imaginärteil aufzuteilen und gleich null zu setzen

$$\operatorname{Re}(P(\mathbf{u}, \omega)) = \sum_{k=0}^n f_k(\mathbf{u}) \omega^k = 0 \quad (37)$$

$$\operatorname{Im}(P(\mathbf{u}, \omega)) = \sum_{\ell=0}^n g_\ell(\mathbf{u}) \omega^\ell = 0, \quad (38)$$

da Gln. (37) und (38) genau dann gemeinsame Nullstellen besitzen, wenn Sylvester's Resultantenmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_n(\mathbf{u}) & f_{n-1}(\mathbf{u}) & f_{n-2}(\mathbf{u}) & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & f_n(\mathbf{u}) & f_{n-1}(\mathbf{u}) & f_{n-2}(\mathbf{u}) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & f_2(\mathbf{u}) & f_1(\mathbf{u}) & f_0(\mathbf{u}) \\ g_n(\mathbf{u}) & g_{n-1}(\mathbf{u}) & g_{n-2}(\mathbf{u}) & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_n(\mathbf{u}) & g_{n-1}(\mathbf{u}) & g_{n-2}(\mathbf{u}) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & g_2(\mathbf{u}) & g_1(\mathbf{u}) & g_0(\mathbf{u}) \end{pmatrix}_{2n \times 2n} \quad (39)$$

singulär ist [24], also

$$F\left(\tan\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{2}\right)\right) := \det(\mathbf{M}) = 0 \quad (40)$$

gilt. So erhält man eine Bedingung die nur von den Elementen $\boldsymbol{\nu} \in BB$ aus dem Building Block abhängt. Letztlich ist durch einsetzen in Gl. (36) zu überprüfen, ob es für die gefundenen Werte $\boldsymbol{\nu}$ auch ein ω gibt, sodass $\bar{\chi}(i\omega, \tan(\boldsymbol{\nu}/2)/\omega) = 0$ gilt und $i\omega$ also ein imaginärer Eigenwert ist. Dann ergibt sich der Building Block in geschlossener Form zu

$$BB = \left\{ \boldsymbol{\nu} \in [0; 2\pi]^p \mid F\left(\tan\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{2}\right)\right) = 0 \wedge P\left(\tan\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{2}\right), \omega\right) = 0, \omega \in \mathbb{R} \right\}. \quad (41)$$

und zur Bestimmung der Menge ρ_0 muss lediglich noch für jedes Hyperoberflächensegment die Root Tendency aus Gl. (29) für alle Komponenten des Delays $\boldsymbol{\tau}$ bestimmt werden.

2.2. Synchronisierende Systeme

In diesem Abschnitt geht es um die Modelle, auf die die im Abschnitt 2.1 vorgestellte Theorie der dynamischen Systeme mit Delay angewendet werden soll. Dazu wird zunächst der Begriff der *Synchronisation* definiert und erklärt. Anschließend wird als grundlegendes Modell, mit dem sich Synchronisierung mathematisch beschreiben lässt, das *Kuramoto-Modell* vorgestellt und kurz diskutiert. Nach einer kurzen Beschreibung der Funktionsweise einer *Synchronmaschine* als zentraler Baustein des Stromnetzwerkmodells, folgt schließlich die Herleitung des *klassischen Modells* sowie des *Modell dritter Ordnung*, die mit unterschiedlichem Detailgrad dazu geeignet sind, die Dynamik von gekoppelten Synchronmaschinen in einem Stromnetzwerk zu modellieren.

2.2.1. Definition von Synchronisation

Der Definition und den Ausführungen von [25] folgend versteht man unter Synchronisation das Angleichen der Frequenzen verschiedener oszillierender Objekte aufgrund ihrer (hier nicht weiter spezifizierten) schwachen Wechselwirkung. Dabei kommen für die oszillierenden Objekte selbst-erregte oder getriebene Oszillatoren in Frage, die ohne Wechselwirkung mit ihrer natürlichen Frequenz schwingen, wobei als Kriterium die Existenz eines stabilen Grenzzyklus entscheidend ist. Dies ist deswegen wichtig, da bei einer kleinen Störung, der Oszillator wieder zum Grenzzyklus zurückkehrt, dabei allerdings seine Phase verändern kann. Da die Phase bei einer Störung also nicht wieder in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehrt, sondern veränderlich ist, kann bei entsprechender Wechselwirkung mehrerer Oszillatoren (was für jeden Oszillator einzeln betrachtet einer Störung entspricht) erreicht werden, dass vorher unterschiedliche natürliche Frequenzen (also die Änderung der Phasen) der Oszillatoren sich durch die Kopplung auf eine gleiche Frequenz einstellen.

Dabei hängt die Differenz der Frequenz der gekoppelten Oszillatoren $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ ab von der Differenz ihrer natürlichen Frequenzen $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, die man auch Frequenzverstimmung nennt. Abhängig von der Kopplungsstärke erwartet man für betragsmäßig kleine Frequenzverstimmungen eine Frequenzdifferenz der gekoppelten Oszillatoren von null, während ab einem bestimmten Wert mit betragsmäßig größer werdenden Frequenzverstimmungen die Frequenzdifferenz der gekoppelten Oszillatoren auch immer größer wird.

2.2.2. Kuramoto-Modell

Eines der „einfacheren“ Modelle, mit dem sich das Phänomen der Synchronisation mathematisch beschreiben lässt, ist das sogenannte Kuramoto-Modell [26]. Für eine Schar von N harmonischen Oszillatoren ist die Änderung der Phase des j -ten Oszillators, $j = 1, \dots, N$ im Kuramoto-Modell gegeben durch

$$\dot{\theta}_j = \omega_j - \sum_{k=1}^N K_{jk} \sin(\theta_j - \theta_k). \quad (42)$$

Dabei ist jeder Oszillator sinusoidal mit jedem anderen Oszillator mit der Kopplungsstärke K_{jk} gekoppelt ($K_{jk} \geq 0$) und würde ohne die Kopplung mit seiner natürlichen Frequenz ω_j schwingen. Im Folgenden wird eine jeder-mit-jedem Kopplung angenommen und $K_{jk} = \frac{K}{N}$ gesetzt⁴. Durch die Einführung des Ordnungsparameters r ($0 \leq r \leq 1$) und der mittleren Phase ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$), die über

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\theta_k} \quad (43)$$

⁴ K wird noch durch N geteilt, damit $\dot{\theta}_j$ im späteren Übergang $N \rightarrow \infty$ endlich bleibt.

definiert sind und im Allgemeinen zeitabhängig sind, kann man Gl. (42) umschreiben⁵ zu

$$\dot{\theta}_j = \omega_j - Kr \sin(\theta_j - \psi) \quad (44)$$

und sieht dadurch, dass die Änderung der Phase eines jeden Oszillators nur durch seine natürliche Frequenz und der Wechselwirkung mit dem mittleren Feld der anderen Oszillatoren abhängt. Damit lässt sich auch veranschaulichen wie die Synchronisation stattfindet: Ist die individuelle Phase eines Oszillators ein klein wenig größer als die mittlere Phase der Schar, so hat der Kopplungsterm $-Kr \sin(\theta_j - \psi)$ ein negatives Vorzeichen, ist sie ein klein wenig kleiner so hat der Kopplungsterm ein positives Vorzeichen, sodass in beiden Fällen ein Angleichen von individueller Phase und mittlerer Phase bewirkt wird. Da die Kopplung proportional zum Ordnungsparameter r ist, der mit steigender Kohärenz der Phasen auch steigt, wird dadurch die Synchronisation positiv verstärkt. Auch ist ersichtlich, warum die Differenz der natürlichen Frequenzen für die Synchronisation nicht beliebig groß sein darf, wie bei der Definition von Synchronisation in Abschnitt 2.2.1 bereits angedeutet wurde: Für synchronisierte Oszillatoren muss gelten $\dot{\theta}_j = 0$, was nur möglich ist, wenn $\frac{|\omega_j|}{Kr} \leq 1$ und somit ω_j nicht zu groß ist.

Im Übergang $N \rightarrow \infty$ findet man (für Details zur Berechnung und einen generell detaillierten Überblick über das Kuramoto-Modell siehe [27]), dass r exponentiell gegen einen Wert $r_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$ konvergiert. Für $K \leq K_c$ gilt dabei $r_\infty = 0$, wobei K_c sich bestimmen lässt zu

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (45)$$

mit einer unimodalen symmetrischen Verteilung $g(\omega)$ für die natürlichen Frequenzen der Oszillatoren. Für eine Lorentz- oder auch Cauchy-Verteilung lässt sich der Ordnungsparameter für $K \geq K_c$ explizit ausrechnen zu

$$r_\infty = \sqrt{1 - \frac{K}{K_c}}, \quad K > K_c. \quad (46)$$

Für $K \leq K_c$ sind die Phasen der Oszillatoren im stationären Zustand also völlig inkohärent, während für $K > K_c$ die Oszillatoren partiell synchronisiert sind, wobei die Phasenkohärenz mit steigender Kopplungsstärke K wächst. Insbesondere ist hier $r_\infty < 1 \forall K \in \mathbb{R}$, vollständig synchronisierte Zustände also nur für $K \rightarrow \infty$ möglich.

2.2.3. Modellierung von Stromnetzwerken

Stromnetzwerke lassen sich als mit Leitungen verbundene Synchronmaschinen modellieren. Aus netzwerktheoretischer Sicht lässt sich ein solches Stromnetzwerk als Graph repräsentieren, wobei die Knoten jeweils eine Synchronmaschine und die Kanten die Leitungen zwischen den Synchronmaschinen darstellen.

Ein exemplarischer Aufbau einer solchen Synchronmaschine ist in Abb. 2 zu sehen, wobei

⁵Dazu teilt man Gl. (43) durch $e^{i\theta_j}$, nimmt den Realteil beider Seiten und nutzt noch die Symmetrie $\sin(\theta_k - \theta_j) = -\sin(\theta_j - \theta_k)$ bzw. $\sin(\psi - \theta_j) = -\sin(\theta_j - \psi)$ der Sinusfunktion aus.

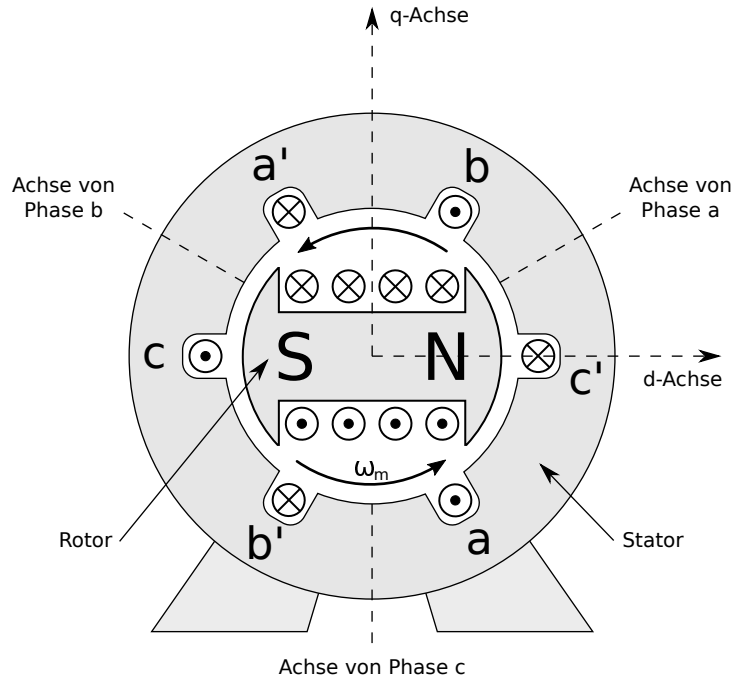


Abbildung 2: Schematischer Aufbau einer Synchronmaschine. Die d- und q-Achse rotieren dabei mit dem Rotor mit, während die a-, b- und c-Achse fix auf den Stator bezogen sind.

die folgenden Ausführungen [28] entlehnt sind. Sie besteht aus einem Stator, auf dem sich die um jeweils 120° versetzten Ankerwindungen aa' , bb' und cc' befinden, und einem sich in dem Stator drehenden Rotor, auf dem sich die Feldwindungen befinden. Durch einen in der Feldspule fließenden Gleichstrom wird ein magnetisches Feld erzeugt. Bringt man den Rotor durch Aufwenden eines mechanischen Drehmoments in Rotation ändert sich die magnetische Flussdichte, wodurch eine dreiphasige Wechselspannung in den Ankerwindungen induziert wird. Andersherum kann durch Anlegen einer Wechselspannung in den Ankerwindungen der Rotor in Rotation gebracht werden. Insgesamt ermöglicht eine Synchronmaschine also eine Umwandlung mechanischer Leistung in elektrische Leistung oder umgekehrt. Im ersten Fall nennt man die Synchronmaschine auch Synchrongenerator und im zweiten Fall Synchronmotor. Dabei kommt der Name Synchronmaschine daher, dass die Frequenz mit der der Rotor sich dreht synchron zum elektrischen Phasenwinkel der Spannung in den Ankerwindungen ist.

2.2.4. Gekoppelte Swing-Gleichungen

In diesem und nächsten Abschnitt wird als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen dieser Arbeit je ein Modell mit unterschiedlichem Detailgrad für die Dynamik von gekoppelten Synchronmaschinen hergeleitet. Dabei stützen sich die Ausführungen beider Abschnitte auf die Referenzen [28, 29].

Die Dynamik einer einzelnen Synchronmaschine wird beschrieben durch die so genannte *Swing-Gleichung*, die sich über die Newtonschen Gesetze herleiten lässt. Sie lautet

$$M \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + D \frac{d \theta_m}{dt} = P_m - P_{el}. \quad (47)$$

Dabei beschreibt θ_m den Rotorwinkel zur stationären Achse, M das Trägheitsmoment des Rotors, D die Dämpfungskonstante, P_m die mechanische Leistung und P_{el} die elektrische Leistung. Die Gleichung beschreibt einen getriebenen gedämpften Oszillator.

Die Wechselwirkung der Synchronmaschinen erfolgt dabei über den Term P_{el} : Für die Scheinleistung S_j der j -ten Synchronmaschine gilt

$$S_j = V_j \bar{I}_j \quad (48)$$

mit der Spannung $V_j = |V_j| e^{i\theta_{el,j}}$ und dem elektrischen Phasenwinkel $\theta_{el,j}$, der Stromstärke $I_j = \sum_{k=1}^N Y_{jk} V_k$ sowie den Admittanzen $Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$ (dabei sind die G_{jk} Konduktanzen und die B_{jk} Suszeptanzen). Der Strich bei \bar{I}_j steht dabei für das komplex konjugierte von I_j . Unter der Annahme verlustfreier Leitungen ($G_{jk} = 0 \forall j, k$) ergibt sich für die elektrische Leistung $P_{el,j}$ dann

$$P_{el,j} = \text{Re}(S_j) = - \sum_{k=1}^N |V_j| |V_k| B_{jk} \sin(\theta_{el,j} - \theta_{el,k}). \quad (49)$$

Für einen Zweipol-Generator gilt $\theta_m = \theta_{el} \equiv \theta$ und durch einsetzen von Gl. (49) in Gl. (47) erhält man mit

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \omega_j \\ M\dot{\omega}_j &= P_j(t, \tau) - D_j\omega_j + \sum_{k=1}^N B_{jk}|V_k||V_j| \sin(\theta_k - \theta_j) \end{aligned} \quad (50)$$

schließlich ein Modell gekoppelter Swing-Gleichungen, dass im Kontext der Stromnetzwerkmodellierung im Fall $P_j(t) = \text{const.}$ auch als das klassische Modell bezeichnet wird. Dieses Modell entspricht dem Kuramoto-Modell um die Erweiterung eines Trägheitsterms.

2.2.5. Modell dritter Ordnung

Das im letzten Abschnitt hergeleitete Modell nimmt an, dass die Spannungen an den einzelnen Knoten konstant ist. Um das Modell um die Spannungsdynamik zu erweitern, ist es notwendig, die elektrodynamischen Wechselwirkungen zwischen Stator und Rotor detaillierter zu betrachten, als es hier im Rahmen der Bachelorarbeit möglich ist. Deswegen werden hier lediglich die wesentlichen Ergebnisse skizziert und für Details auf die Referenzen [28, 29] sowie die Referenzen darin (insbesondere [30]) verwiesen.

Man unterscheidet die drei charakteristische Maschinenzustände subtransient, transient und stationär. Die Störung einer Synchronmaschine wird modelliert durch sub-/transiente Spannungen hinter dazugehörigen Reaktanzen. Die Dynamik der subtransienten Spannungen $E''_{q/d}$ und transienten Spannungen $E'_{q/d}$ (der Index q bzw. d gibt dabei an, ob es

sich um die q- oder d-Komponente der entsprechenden Spannung handelt, vgl. Abb. 2) ist dann gegeben durch

$$T_{d0}'' \dot{E}_q'' = E_q' - E_q'' + I_d (X_d' - X_d'') \quad (51)$$

$$T_{q0}'' \dot{E}_d'' = E_d' - E_d'' - I_q (X_q' - X_q'') \quad (52)$$

$$T_{d0}' \dot{E}_q' = E_f - E_q' + I_d (X_d - X_d') \quad (53)$$

$$T_{q0}' \dot{E}_d' = -E_d' - I_q (X_q - X_q') \quad (54)$$

mit den sub-/transienten Zeitkonstanten $T_{d/q0}''/T_{d/q0}'$, den Reaktanzen $X_{d/q}$ im stationären Zustand, den sub-/transienten Reaktanzen $X_{d/q}''/X_{d/q}'$, den Ankerströmen $I_{q/d}$ in der d- bzw. q-Komponente der Rotorkoordinaten und E_f einer zur Spannung in den Feldspulen proportionale Größe. Unter Vernachlässigung des subtransienten Zustands ($E_q'' = E_d'' = 0$) sowie der d-Komponente der transienten Spannung ($E_d' = 0$) bleibt Gl. (53) als einzige der vier Gleichungen übrig. Mit der Swing-Gleichung (47) ergibt sich damit das *Modell dritter Ordnung*

$$\dot{\theta}_j = \omega_j \quad (55)$$

$$M \dot{\omega}_j = -D_j \omega_j + P_{m,j} - P_{el,j} \quad (56)$$

$$T_{d0,j}' \dot{E}_{q,j}' = E_{f,j} - E_{q,j}' + I_{d,j} (X_{d,j} - X_{d,j}') \quad (57)$$

Für die elektrische Leistung $P_{el,j}$ und die Stromstärke I_d findet man nach einigem Rechnen und einigen weiteren vereinfachenden Annahmen (die sich in den oben zitierten Referenzen nachschlagen lassen)

$$P_{el,j} = -3 \sum_{k=1}^N B_{jk} E_{q,j}' E_{q,k}' \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (58)$$

und

$$I_{d,j} = \sum_{k=1}^N B_{jk} E_{q,j}' \cos(\theta_k - \theta_j). \quad (59)$$

Gl. (58) eingesetzt in Gl. (56) sowie Gl. (59) in Gl. (57) ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \omega_j \\ M_j \dot{\omega}_j &= P_j(t, \tau) - D_j \omega_j + 3 \sum_{k=1}^N B_{jk} E_{q,k}' E_{q,j}' \sin(\theta_k - \theta_j) \\ T_{d0,j}' \dot{E}_{q,j}' &= E_{f,j} - E_{q,j}' + (X_{d,j} - X_{d,j}') \sum_{k=1}^N B_{jk} E_{q,k}' \cos(\theta_k - \theta_j). \end{aligned} \quad (60)$$

3. Analyse eines Zwei-Maschinen-Systems

Dieses Kapitel befasst sich mit der Analyse von Zwei-Maschinen-Systemen. Dabei wird zunächst eine vollständige Analyse zweier identischer miteinander gekoppelten Maschinen im Modell gekoppelter Swing-Gleichungen unter der Zunahme eines Delayterms durchgeführt. Anschließend wird das Modell dritter Ordnung für zwei identische Maschinen mit einem und zwei Delaytermen betrachtet.

3.1. Swing-Gleichung

Zunächst wird das Modell gekoppelter Swing-Gleichungen (50) mit zwei Maschinen, einem Generator und einem Motor, mit sonst identischen Parametern betrachtet. Als Parameter werden $N = 2$, $M = 1$, $P_1(t) = P/2$, $P_2(t) = -P/2$, $D_j = D/2$, $V_j = V$ sowie $B_{jk} = B/2$ festgelegt. Außerdem werden nicht die Variablen $\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2$ der beiden Maschinen betrachtet, sondern die Differenz der Variablen von Maschine 1 und Maschine 2, also $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ und $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$.

Als Delayterm wird zunächst

$$P(t, \tau) = P(t) - \epsilon \Delta\omega_\tau, \quad (61)$$

später noch

$$P(t, \tau) = P(t) - \epsilon(\Delta\theta_{\tau_1} - \Delta\theta_{\tau_1+\tau_2}) \quad (62)$$

betrachtet. In [31] wird gezeigt, wie diese Terme auftreten können, wenn man die zeitverzögerte Reaktion von Verbrauchern auf Strompreisänderungen berücksichtigt. Insgesamt hat das in diesem Abschnitt betrachtete System die Form

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\theta} &= \Delta\omega \\ \Delta\dot{\omega} &= P - \epsilon\Delta\omega_\tau - D\Delta\omega - BV^2 \sin(\Delta\theta). \end{aligned} \quad (63)$$

Die synchronisierten Zustände der Gl. (63) sind den Fixpunkten des Systems zugeordnet, da sich dort die Phasendifferenz der beiden Synchronmaschinen nicht ändert. Die Fixpunkte lassen sich bestimmen, indem man die Ableitungen in Gl. (63) gleich null setzt und die zeitverzögerten durch die instantanen Variablen ersetzt. Auflösen liefert

$$\Delta\omega^* = 0 \quad (64)$$

$$\Delta\theta_{1,n}^* = \arcsin\left(\frac{P}{BV^2}\right) + 2\pi n \quad (65)$$

$$\Delta\theta_{2,n}^* = \pi - \Delta\theta_{1,0}^* + 2\pi n. \quad (66)$$

Für $\frac{P}{KE^2} \leq 1$ existieren also Modulo 2π zwei verschiedene Fixpunkte. Für deren Stabilität bestimmt man zunächst die Jacobi-Matrix bezüglich der Zeit t

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \Delta\theta}(\Delta\dot{\theta}) & \frac{\partial}{\partial \Delta\omega}(\Delta\dot{\theta}) \\ \frac{\partial}{\partial \Delta\theta}(\Delta\dot{\omega}) & \frac{\partial}{\partial \Delta\omega}(\Delta\dot{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -BV^2 \cos(\Delta\theta^*) & -D \end{pmatrix} \quad (67)$$

und die Jacobi-Matrix bezüglich des Delays τ

$$\mathbf{J}_\tau = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j_\tau}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \Delta \theta_\tau} (\Delta \dot{\theta}) & \frac{\partial}{\partial \Delta \omega_\tau} (\Delta \dot{\theta}) \\ \frac{\partial}{\partial \Delta \theta_\tau} (\Delta \dot{\omega}) & \frac{\partial}{\partial \Delta \omega_\tau} (\Delta \dot{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (68)$$

woraus sich dann die charakteristische Gleichung wie in Abschnitt 2.1.1 gezeigt ergibt zu

$$\chi(\lambda, \tau) = \det(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_\tau e^{-\lambda\tau} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 + D\lambda + BV^2 \cos(\Delta\theta^*) + \lambda\epsilon e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (69)$$

Ein System mit äquivalenter charakteristischen Gleichung wurde in einem anderen Kontext in [32] untersucht. Die hier vorgestellte Analyse ist dabei unabhängig davon entstanden und kommt zu denselben Ergebnissen.

Im Fall ohne Delay wird aus Gl. (69)

$$\chi(\lambda, 0) = \lambda^2 + (D + \epsilon)\lambda + BV^2 \cos(\Delta\theta^*) = 0. \quad (70)$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium (siehe Abschnitt 2.1.2) ist das System ohne Delay genau dann stabil, wenn

$$\cos(\Delta\theta^*) > 0 \quad \wedge \quad D + \epsilon > 0. \quad (71)$$

Die Fixpunkte mit $\Delta\theta^* = \Delta\theta_{1,n}^*$ sind also im Fall ohne Delay immer stabil, während die Fixpunkte mit $\Delta\theta^* = \Delta\theta_{2,n}^*$ immer instabil sind.

Zurück zu Gl. (69) und dem Fall mit Delay: Aufteilen in Real- und Imaginärteil liefert mit $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$

$$\omega(D + \epsilon \cos(\tau\omega)) = 0 \quad (72)$$

$$\omega^2 - BV^2 \cos(\Delta\theta^*) - \epsilon\omega \sin(\tau\omega) = 0. \quad (73)$$

Aus Gl. (72) folgt

$$\tau\omega = \pm \arccos\left(-\frac{D}{\epsilon}\right) + 2\pi n \quad (74)$$

und Gl. (74) wiederum eingesetzt in Gl. (73) ergibt unter Verwendung von $\sin(\pm \arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\omega^2 - KE^2 \cos(\Delta\theta^*) \mp \epsilon\omega \sqrt{1 - \left(\frac{D}{\epsilon}\right)^2} = 0 \quad (75)$$

$$\implies \omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - D^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - D^2 + 4BV^2 \cos(\Delta\theta^*)}. \quad (76)$$

Falls ω reell ist, gibt es für den Betrag von ω genau zwei Möglichkeiten, nämlich

$$|\omega_1| = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - D^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - D^2 + 4BV^2 \cos(\Delta\theta^*)}, \quad (77)$$

$$|\omega_2| = \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - D^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 - D^2 + 4BV^2 \cos(\Delta\theta^*)} \right) \text{sgn}(\cos(\Delta\theta^*)). \quad (78)$$

Dabei ist $|\omega_1|$ mit dem Plus- und $|\omega_2|$ mit dem Minuszeichen in Gl. (74) assoziiert. Die dazugehörigen τ_{1n} und τ_{2n} erhält man, wenn man Gl. (74) durch ω_1 bzw. ω_2 teilt. Als letztes bleibt zu bestimmen, in welche Richtung die Eigenwertpaare die imaginäre Achse überqueren. Dazu bildet man zunächst die implizite Ableitung von Gl. (69) nach τ und erhält

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \frac{\epsilon \lambda^2}{e^{\tau \lambda} (D + 2\lambda) + \epsilon + \epsilon \tau \lambda}. \quad (79)$$

Bilden des Realteils, sowie einsetzen von $\lambda = i\omega$ zusammen mit $\cos(\tau\omega) = \frac{D}{\epsilon}$ und $\sin(\tau\omega) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{D}{\epsilon}\right)^2}$ liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) \Big|_{\lambda=i\omega} &= \frac{\omega^2}{c^+} \left(2\omega\epsilon \sin(\tau\omega) - D\epsilon \cos(\tau\omega) - \epsilon^2 \right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^+} \left(\pm 2\omega\sqrt{\epsilon^2 - D^2} - D^2 - \epsilon^2 \right), \end{aligned} \quad (80)$$

wobei

$$c^+ = (D \sin(\tau\omega) + \epsilon\tau\omega + 2\omega \cos(\tau\omega))^2 + (D \cos(\tau\omega) + \epsilon - 2\omega \sin(\tau\omega))^2 > 0 \quad (81)$$

eine positive Zahl ist. Setzt man nun ω_1 aus Gl. (77) für das Pluszeichen in Gl. (80) ein, ist der rechte Teil der Gl. (80) positiv. Setzt man ω_2 aus Gl. (78) für das Minuszeichen in Gl. (80) ein, ist das Resultat negativ. Es ergibt sich also für die in Abschnitt 2.1.4 definierte Root Tendency

$$RT \Big|_{\lambda=i\omega} = \begin{cases} +1, & \text{für } |\omega| = |\omega_1| \\ -1, & \text{für } |\omega| = |\omega_2| \end{cases}. \quad (82)$$

Damit ist die Stabilitätsanalyse vollständig und es lassen sich folgende Fällen unterscheiden:

1. $D > \epsilon$:

Dann sind $\tau_1\omega_1$ und $\tau_2\omega_2$ aufgrund von Gl. (74) komplex, folglich überquert kein Eigenwertpaar die imaginäre Achse und die Stabilität des Systems ist unabhängig von dem Delay τ . Der Fixpunkt mit $\cos(\Delta\theta_{1,n}^*) > 0$ ist also für alle Zeiten stabil, während der Fixpunkt mit $\cos(\Delta\theta_{2,n}^*) < 0$ für alle Zeiten instabil ist.

2. $0 < D < \epsilon$:

a) $\cos(\Delta\theta^*) > 0$:

Dieser Fall beschreibt den Fixpunkt, der ohne Delay stabil ist. Wegen $|D| < \epsilon$ sind ω_1 , ω_2 , sowie τ_{1n} und τ_{2n} reell. Die Stabilität des Fixpunkts wechselt bei $\tau = \tau_{10}$ von stabil auf instabil, da ein Eigenwertpaar die imaginäre Achse in Richtung \mathbb{C}^+ überquert. Solange $\tau_{1s} < \tau_{2s} < \tau_{1(s+1)}$ gilt, also abwechselnd ein Eigenwertpaar in die instabile Halbebene wechselt und andersherum, ändert

der Fixpunkt jeweils zu den Zeiten τ_{1s} seine Stabilität von stabil zu instabil und zu den Zeiten τ_{2s} seine Stabilität von instabil zu stabil. Da $|\omega_1| > |\omega_2|$, sich also Eigenwertpaare mit einer höheren Frequenz in die instabile Halbebene als in die andere Richtung bewegen, kommt es zu einer von der Parameterwahl abhängigen, endlichen Anzahl s_{\max} von Stability-Switches. Anschließend wird der Fixpunkt für alle Delayzeiten größer $\tau_{1s_{\max}}$ instabil.

b) $\cos(\Delta\theta^*) < 0$:

Dieser Fall beschreibt den Fixpunkt, der nach dem Hurwitz-Kriterium ohne Delay instabil ist. Da $\tau_{10} < \tau_{20}$ wegen $|\omega_1| > |\omega_2|$ gilt, überquert immer zunächst ein Eigenwertpaar die imaginäre Achse in Richtung \mathbb{C}^+ bevor ein Eigenwertpaar die imaginäre Achse in die andere Richtung überquert. Folglich ist der Fixpunkt für alle Delayzeiten instabil.

Lässt man für den Parameter ϵ auch negative Werte zu, lässt sich ein ohne Delay instabiler Fixpunkt stabilisieren: Unter der Voraussetzung $\epsilon < 0$ und $|\epsilon| > D$ ist der zuvor stabile Fixpunkt wegen der rechten Seite der Bedingung in (71) instabil. Betrachtet wird der Fixpunkt mit $\cos(\Delta\theta^*) > 0$. Wegen

$$\epsilon \sqrt{1 - \left(\frac{D}{\epsilon}\right)^2} = \text{sgn}(\epsilon) \sqrt{\epsilon^2 - D^2} \quad (83)$$

kehrt sich nun das Vorzeichen von Gl. (75) zu Gl. (76) um, sodass in Gl. (76) aus dem ersten \pm -Zeichen ein \mp wird. Dies hat zur Folge, dass bei gleich bleibender Root Tendency $|\omega_1|$ nun mit dem negativen und $|\omega_2|$ mit dem positiven Vorzeichen in Gl. (74) assoziiert ist. Dadurch ist $\tau_{20} < \tau_{10}$ möglich, wenn $|\omega_2|$ nicht wesentlich kleiner ist als $|\omega_1|$, was durch genügend großes $BV^2 \cos(\Delta\theta^*)$ garantiert werden kann. Dadurch überquert zuerst ein Eigenwertpaar die imaginäre Achse von der instabilen in die stabile Halbebene. Der Fixpunkt ist nach diesem Übergang solange stabil, bis ein Eigenwertpaar wieder in die instabile Halbebene wandert. Da $|\omega_1| > |\omega_2|$ gilt, bewegen sich auch in diesem Szenario Eigenwertpaare häufiger von der stabilen Halbebene in die instabile als umgekehrt, weswegen der Fixpunkt ab einer gewissen Delayzeit für alle späteren Delayzeiten instabil ist. In Abb. 3 wurden die Aussagen für diesen Fall numerisch untersucht und bestätigt. Für die in der Bildbeschreibung angegebenen Parameter gibt es für $\tau = 0$ zwei instabile Eigenwerte (im Prinzip Abb. 3a, siehe Beschreibung der Abbildung), die bei $\tau = \tau_{20}$ die imaginäre Achse überqueren (siehe Abb. 3b). Für $\tau_{20} < \tau < \tau_{10}$ befinden sich alle Eigenwerte auf der stabilen Halbebene und der entsprechende Fixpunkt ist stabil (siehe Abb. 3c), jedoch befinden sich ab einer gewissen Zeit immer mindestens zwei Eigenwerte in der instabilen Halbebene (hier bereits für $\tau \geq \tau_{10}$, siehe Abb. 3d, im Allgemeinen sind aber auch mehrere Stability-Switches möglich). In den Abb. 3e bis 3h ist gezeigt, wie weiterhin Eigenwertpaare in beide Richtungen die imaginäre Achse überqueren. Für immer größer werdende Delayzeiten liegen die Eigenwerte immer dichter beieinander, sodass sich für große Delayzeiten genähert ein quasikontinuierlicher „Lösungsast“ ergibt (siehe Abb. 4).

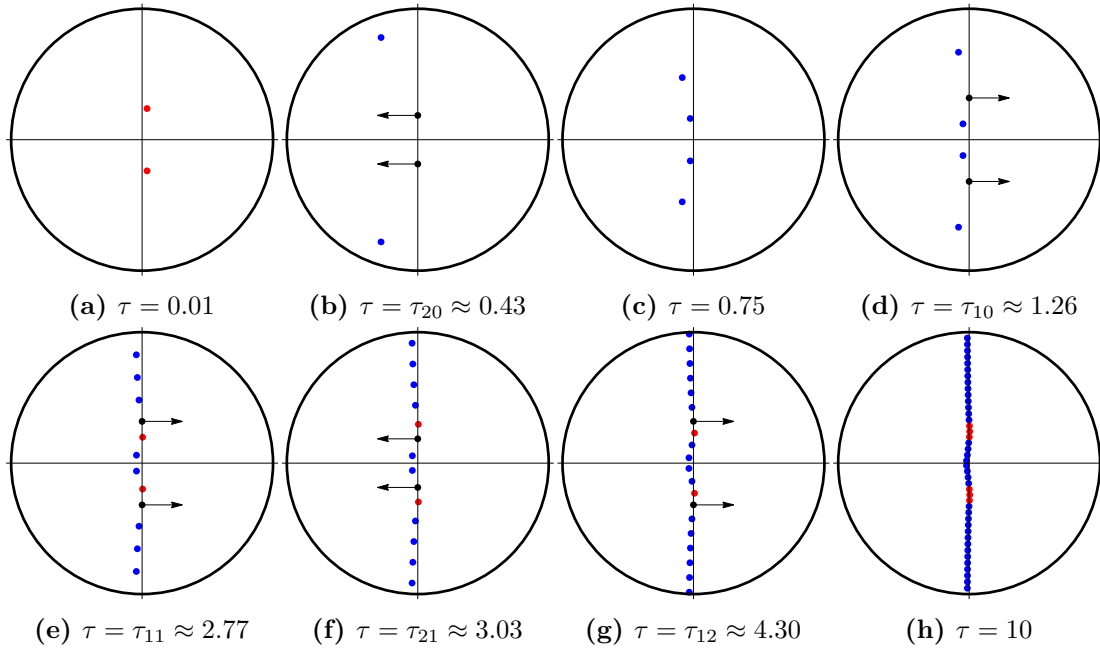


Abbildung 3: Eigenwerte für das Zwei-Maschinen-System gekoppelter Swing-Gleichungen (63) mit den Parametern $D = 1$, $BV^2 \cos(\theta^*) = 10$ und $\epsilon = -2$ für verschiedene Delays τ . Rote Punkte: Instabile Eigenwerte. Blaue Punkte: Stabile Eigenwerte. Schwarze Punkte: Eigenwerte mit Realteil null. In dem schwarz gezeichneten Kreis mit Radius 13 befinden sich nach Abschnitt 2.1.3 sämtliche Eigenwerte mit positivem Realteil. In (a) wurde $\tau \gtrsim 0$ gewählt, da die Aussage in Abschnitt 2.1.3 nur für $\tau > 0$ gilt. Das Hurwitz-Kriterium aus Abschnitt 2.1.2 garantiert jedoch, dass das System auch für $\tau = 0$ instabil ist (vgl. mit Gleichung (71)).

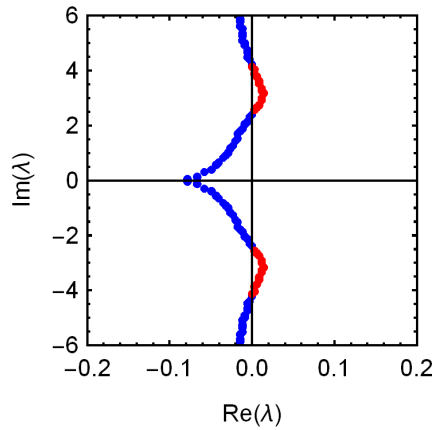
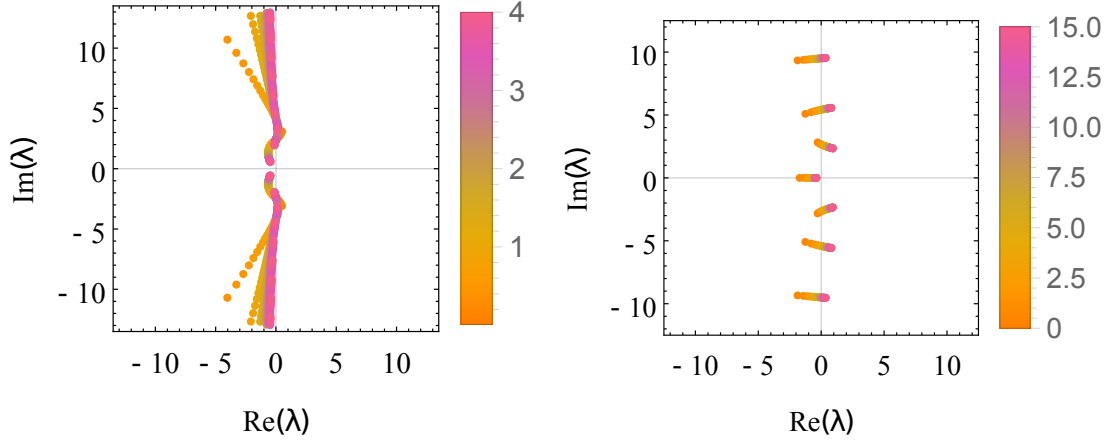


Abbildung 4: Eigenwerte für das Zwei-Maschinen-System gekoppelter Swing-Gleichungen (63) für $\tau = 50$ und übrigen Parametern wie in Abb. 3. Instabile Fixpunkte sind rot, stabile Fixpunkte blau gezeichnet. Bei der hier verwendeten Punktdicke liegen die Eigenwerte auf einer fast kontinuierlichen Linie.



(a) τ von 0 bis 4 in Schritten von 0.01. (b) ϵ von 0 bis 15 in Schritten von 0.5, $\tau = 1.5$.

Abbildung 5: Eigenwerte für das Zwei-Maschinen-System gekoppelter Swing-Gleichungen (63) unter Veränderung der Delayzeit τ und der Delaystärke ϵ . Sämtliche nicht aufgeführten Parametern sind dieselben wie in Abb. 3.

In Abb. 5a sind die Eigenwerte für verschiedene Delayzeiten gleichzeitig in einem Diagramm aufgetragen, um zu demonstrieren, dass die Position der Eigenwerte stetig von der Delayzeit abhängt. Selbiges gilt für die Delaystärke, wie in Abb. 5b zu sehen ist. Außerdem wird in der Abbildung deutlich, wie die Zunahme der Delaystärke für eine fixe Delayzeit dazu führt, dass mehr und mehr Eigenwerte die imaginäre Achse überqueren und ein Fixpunkt deswegen mit zunehmender Delaystärke instabil wird.

3.2. Modell dritter Ordnung

In diesem Abschnitt wird nun das Modell dritter Ordnung mit zwei Maschinen näher untersucht. Zunächst wird erneut ein System von einem Generator und einem Motor betrachtet, die sonst identische Parameter haben. Für die Parameter der Spannungsdynamik wird $T_{d0,j} = 1$, $E_{f,j} = E_f$, $(X_{d,j} - X'_{d,j}) = 6\beta$, $B_{jk} = B/6$, $j \neq k$ und $B_{jj} = 1 - \alpha$, $\alpha > 1$ festgelegt, während die restlichen Parameter wie in Abschnitt 3.1 gewählt werden. Ebenso werden wieder die beiden Differenzen $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ und $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ betrachtet. Da die Terme für die Spannungsdynamik gleich sind, wird zusammenfassend $E = E'_{q,1} = E'_{q,2}$ betrachtet. Insgesamt lautet die Form des in diesem Abschnitt betrachteten Systems

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\theta} &= \Delta\omega \\ \Delta\dot{\omega} &= P - \epsilon\Delta\omega_\tau - D\Delta\omega - BE^2 \sin(\Delta\theta) \\ \dot{E} &= E_f - \alpha E + \beta BE \cos(\Delta\theta). \end{aligned} \quad (84)$$

Wie in Abschnitt (3.1) ist man an den Fixpunkten dieses Systems interessiert, da diese dem synchronen Betrieb der beiden Maschinen entsprechen. Da nun jedoch die Änderung

der Frequenz und die Änderung der Spannung auf nicht-triviale Weise gekoppelt sind, erweist sich schon das bestimmen der Fixpunkte als deutlich komplizierter im Vergleich zum einfacheren Modell in Abschnitt 3.1.

3.2.1. Fixpunkte

Nullsetzen der rechten Seiten des Gleichungssystems (84) liefert sofort $\Delta\omega^* = \Delta\omega_r^* = 0$, wodurch noch

$$\begin{aligned} 0 &= P - BE^2 \sin(\Delta\theta) \\ 0 &= E_f - \alpha E + \beta BE \cos(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (85)$$

zu betrachten bleibt. Umgeformt nach den beiden auftretenden trigonometrischen Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin(\Delta\theta) &= \frac{P}{KB^2} \\ \cos(\Delta\theta) &= \frac{\alpha E - E_f}{\beta BE}. \end{aligned} \quad (86)$$

Die linke Seite der Gleichung parametrisiert mit $\Delta\theta$ den Einheitskreis. Nach einer Umparametrisierung der rechten Seite nach dem neuen Parameter

$$x = \frac{\alpha E - E_f}{\beta BE} \quad (87)$$

$$\implies \frac{1}{E} = \frac{\beta B}{E_f} \left(\frac{\alpha}{\beta B} - x \right) \quad (88)$$

und einsetzen in (86) erhält man

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\theta) &= x \\ \sin(\Delta\theta) &= \frac{P\beta^2 B}{E_f^2} \left(\frac{\alpha}{\beta B} - x \right)^2 =: \xi (\Gamma - x)^2, \end{aligned} \quad (89)$$

wobei zur Verkürzung die beiden Parameter $\xi = \frac{P\beta^2 B}{E_f^2}$ und $\Gamma = \frac{\alpha}{\beta B}$ eingeführt wurden.

Die Fixpunkte des Systems ergeben sich also aus den Schnittpunkten des Einheitskreises mit der Parabel, deren Scheitelpunkt bei $(\Gamma, 0)$ liegt und deren Streckfaktor ξ beträgt. Graphisch sind die verschiedenen Möglichkeiten der Schnittpunkte zwischen dem Einheitskreis und der Parabel in Abb. 6 dargestellt. Für $\Gamma > 1$ kann es in Abhängigkeit von ξ null, einen oder zwei Fixpunkte geben, wobei die Zahl der Fixpunkte monoton mit ξ fällt. Für $\Gamma \leq 1$, also wenn der Scheitelpunkt der Parabel innerhalb des Kreises liegt, gibt es für alle ξ genau zwei Fixpunkte. Die Schnittpunkte zwischen einem Kreis und einer Parabel und somit die Fixpunkte des Systems (84) lassen sich explizit als Lösung einer quartischen Gleichung analytisch angeben. Aufgrund der Länglichkeit der entstehenden Ausdrücke wird aber an dieser Stelle auf die explizite Darstellung verzichtet.

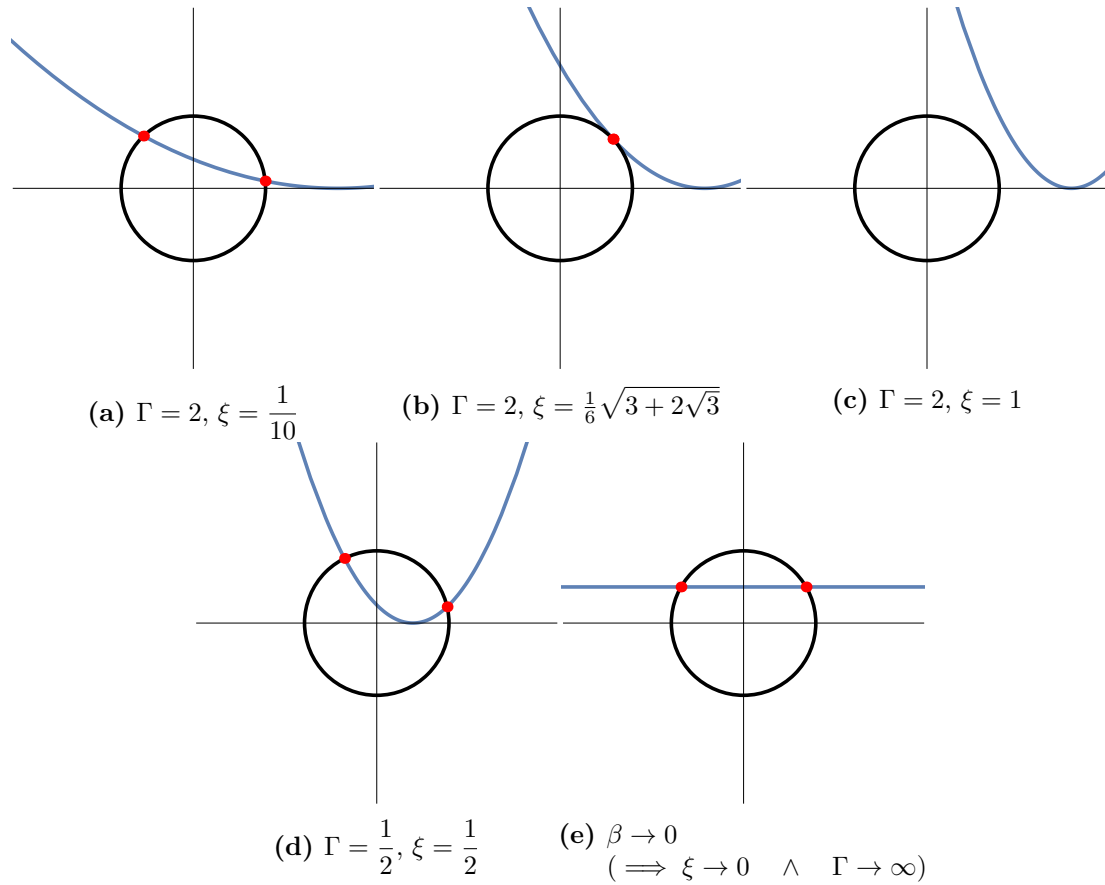


Abbildung 6: Verschiedene Möglichkeiten für Fixpunkte des Modells dritter Ordnung mit zwei gleichartigen Maschinen nach Gleichung (89). (a-c) Es gilt $\Gamma > 1$ und abhängig von ξ ergeben sich zwei, ein oder kein Fixpunkt. Dabei wurde in (b) Gleichung (90) zur Berechnung von ξ verwendet. (d) Es gilt $\Gamma < 1$ und das System hat immer zwei Fixpunkte. (e) Übergang $\beta \rightarrow 0$ zum klassischen Modell, bei dem die Symmetrie $\theta_1^* = \pi - \theta_2^*$ ersichtlich wird.

Tabelle 1: Koeffizienten der Polynome der Sturmschen Kette für die Bestimmungsgleichung der Fixpunkte des Modells dritter Ordnung mit zwei identischen Maschinen.

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
P_0	$\Gamma^4 \xi^2 - 1$	$-4\Gamma^3 \xi^2$	$6\Gamma^2 \xi^2 + 1$	$-4\Gamma \xi^2$	ξ^2
P_1	$-4\Gamma^3 \xi^2$	$12\Gamma^2 \xi^2 + 2$	$-12\Gamma \xi^2$	$4\xi^2$	
P_2	1	$-\frac{\Gamma}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
P_3	$4\Gamma (\Gamma^2 + 8) \xi^2$	$-2 (2 (\Gamma^2 + 2) \xi^2 + 1)$			
P_4	$\frac{16 (\Gamma^2 - 1)^3 \xi^4 + (\Gamma^4 - 20\Gamma^2 - 8) \xi^2 - 1}{(2 (\Gamma^2 + 2) \xi^2 + 1)^2}$				

Allerdings lässt sich mit Hilfe der *Sturmschen Kette*⁶ für $\Gamma > 1$ ein recht kurzer Ausdruck für ξ_{\max} herleiten, bei dem das System gerade noch einen Fixpunkt hat. Für $\xi < \xi_{\max}$ hat das System dann genau zwei Fixpunkte und für $\xi > \xi_{\max}$ gibt es keine Fixpunkte mehr. Um einen Ausdruck für ξ_{\max} zu erhalten quadriert man zunächst beide Gleichungen des System (89) und addiert sie anschließend. Aufgrund der Beziehung $\cos^2(\Delta\theta) + \sin^2(\Delta\theta) = 1$ erhält man daraus eine quartische Gleichung für die Fixpunkte, die sich umformen lässt zu $P_0(x) = 0$. Die Koeffizienten des Polynoms $P_0(x)$ sowie die Koeffizienten der Polynome der sich daraus ergebenden Sturmschen Kette sind Tabelle 1 zu entnehmen.

In der Tabelle 1 ist zu erkennen, dass der einzige Koeffizient führender Ordnung, der in Abhängigkeit von Γ und ξ sein Vorzeichen ändern kann, der zum Polynom $P_4(x)$ gehörige ist. Die Anzahl der reellen Nullstellen ändert sich folglich genau dann, wenn dieser Koeffizient sein Vorzeichen wechselt. Nullsetzen des Koeffizienten und auflösen nach $\xi_{\max} = \xi$ ergibt als einzige positive reelle Lösung

$$\xi_{\max} = \sqrt{\frac{-\Gamma^4 + 20\Gamma^2 + 8\sqrt{\Gamma^2 + 8}\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 8}\Gamma^3 + 8}{32(\Gamma^2 - 1)^3}}. \quad (90)$$

3.2.2. Stabilität ohne Delay

Da bereits im vorigen Abschnitt demonstriert wurde, wie sich die charakteristische Gleichung für ein System mit Delay bestimmen lässt, wird hier lediglich das Ergebnis

⁶Mit Hilfe der Sturmschen Kette lässt sich für Polynome mit reellen Koeffizienten bestimmen, wie viele Nullstellen dieses Polynoms sich in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ befinden. Die Zahl der Nullstellen in diesem Intervall lautet $\sigma(a) - \sigma(b)$, wobei $\sigma(x)$ die Zahl der Vorzeichenwechsel in der Sturmschen Kette ist, wenn x eingesetzt wird. Setzt man $a = -\infty$ und $b = +\infty$ lässt sich prüfen wie viele reelle Nullstellen es gibt. Für Details, die den Rahmen dieser Bachelorarbeit übersteigen, und einen Beweis siehe [33].

Tabelle 2: Koeffizienten der charakteristischen Funktion des Modells dritter Ordnung mit zwei identischen Maschinen und einem Delayterm beschrieben durch Gl. (84). Multiplizieren der Elemente mit Kopfzeile und -spalte und aufsummieren liefert dabei die charakteristische Funktion $\chi(\lambda, \tau)$.

	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
e^0	1	$D + \alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$	$Bx(E^*)^2 + D\alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$	$\frac{B\alpha(E^*)^2}{\Gamma} (x^2 + \Gamma x - 2)$
$e^{-\lambda\tau}$	0	ϵ	$\epsilon\alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$	0

der Rechnung präsentiert. Aufgrund der Länglichkeit des entstehenden Ausdrucks findet sich die charakteristische Funktion in Form einer Koeffiziententabelle in Tabelle 2. Dabei ergibt sich die charakteristische Funktion dadurch, dass man die einzelnen Elemente in der Tabelle mit der Kopfzeile und -spalte multipliziert und schließlich aufsummiert. Durch Nullsetzen erhält man daraus die charakteristische Gleichung.

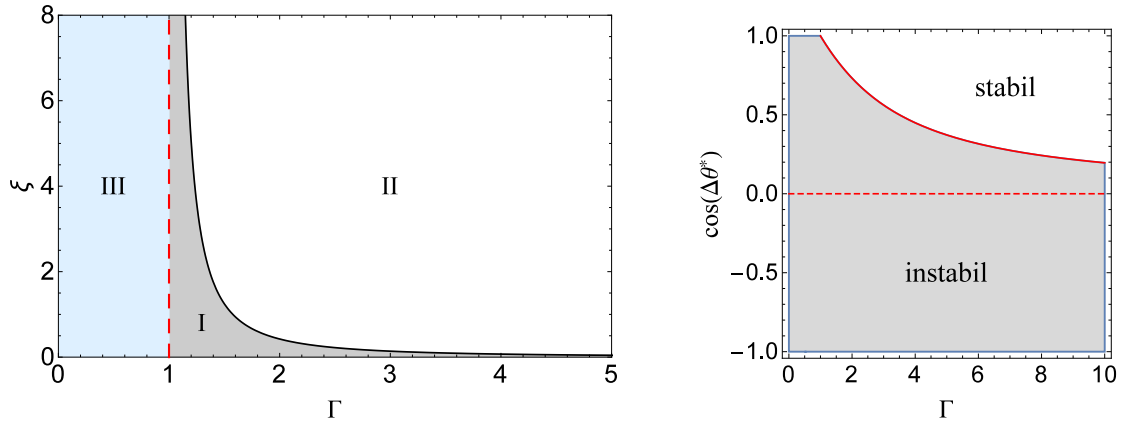
Zunächst wird der Fall ohne Delay betrachtet. Für die charakteristische Funktion erhält man eine Koeffizienten-Tabelle, die gleich der ersten Spalte der Tabelle 2 des Falls mit Delay ist, wenn man zusätzlich noch D durch $\tilde{D} = D + \epsilon$ ersetzt. Nach dem Hurwitz-Kriterium (siehe Abschnitt 2.1.2) ergeben sich für den Fall ohne Delay drei Ungleichungen, wobei ein Fixpunkt genau dann alle drei Ungleichungen erfüllt, wenn er stabil ist. Diese Ungleichungen lauten (in bereits vereinfachter Form)

$$x^2 + \Gamma x - 2 > 0 \quad (91)$$

$$\tilde{D} + \alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right) > 0 \quad (92)$$

$$\alpha\Gamma \left(2B(E^*)^2 (1 - x^2) + \tilde{D}^2(\Gamma - x)\right) + B\Gamma^2(E^*)^2 x\tilde{D} + \alpha^2 \tilde{D}(\Gamma - x)^2 > 0. \quad (93)$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \cos(\Delta\theta^*) > -\frac{\Gamma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma^2 + 8}$ und somit insbesondere $0 < x \leq 1 < \Gamma$. Wenn Ungleichung (91) erfüllt ist, ist Ungleichung (92) wegen $1 - \frac{x}{\Gamma} > 0$ auch erfüllt. Außerdem ist bei Ungleichung (93) wegen $0 < x \leq 1$ und $x < \Gamma$ keine der Terme auf der linken Seite negativ, weswegen diese Ungleichung in diesem Fall auch erfüllt ist. Folglich ist ein Fixpunkt genau dann stabil, wenn Ungleichung (91) erfüllt ist. Zusammenfassend sind die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse im Fall ohne Delay in Abb. 7 dargestellt.



(a) Möglichkeiten für Fixpunkte im Modell dritter Ordnung mit zwei identischen Maschinen (Gl. (84)) in Abhängigkeit von Γ und ξ . I: Das System hat zwei Fixpunkte, von denen einer stabil und einer instabil ist. II: Das System hat keine Fixpunkte mehr. III: Das System hat zwei Fixpunkte, die beide instabil sind.

(b) Stabilität eines Fixpunktes im Modell dritter Ordnung mit zwei identischen Maschinen (Gl. (84)) in Abhängigkeit von Γ und $\cos(\Delta\theta^*)$. Rot gestrichelt: Grenzlinie für den Übergang $\beta \rightarrow 0$ zum klassischen Modell.

Abbildung 7: Möglichkeiten für Fixpunkte und deren Stabilität für zwei identische Maschinen im Modell dritter Ordnung für den Fall ohne Delay beschrieben durch Gl. (84).

3.2.3. Stabilität mit einem Delayterm

Betrachtet wird zunächst eine beliebige charakteristische Gleichung mit einem Delayterm $P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\tau\lambda} = 0$. Aufteilen in Imaginär- und Realteil mit $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ liefert

$$P_{Re} + Q_{Re} \cos(\tau\omega) + Q_{Im} \sin(\tau\omega) = 0 \quad (94)$$

$$P_{Im} + Q_{Im} \cos(\tau\omega) - Q_{Re} \sin(\tau\omega) = 0, \quad (95)$$

mit $P/Q_{Re/Im} = \text{Re/Im}(P/Q(i\omega))$. Dies ist ein lineares Gleichungssystem in $\cos(\tau\omega)$ und $\sin(\tau\omega)$ mit der Lösung

$$\cos(\tau\omega) = -\frac{P_{Im}Q_{Im} + P_{Re}Q_{Re}}{|Q|^2} \quad (96)$$

$$\sin(\tau\omega) = \frac{P_{Im}Q_{Re} - P_{Re}Q_{Im}}{|Q|^2}. \quad (97)$$

Für das Zwei-Maschinen-Modell im Modell dritter Ordnung mit einem Delay ergibt sich

$$\cos(\tau\omega) = -\frac{e\omega(b\omega - \omega^3) - d\omega^2(c - a\omega^2)}{d^2\omega^4 + e^2\omega^2} =: x_{\tau\omega} \quad (98)$$

$$\sin(\tau\omega) = -\frac{e\omega(c - a\omega^2) + d\omega^2(b\omega - \omega^3)}{d^2\omega^4 + e^2\omega^2} =: y_{\tau\omega}, \quad (99)$$

wenn die Parameter in Tabelle 2 so gewählt werden, dass sich als charakteristische Gl. $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c + e^{-\lambda\tau}(d\lambda^2 + e\lambda) = 0$ ergibt. Gl. (98) nach ω umgeformt ergibt

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{-be + cd - e^2x_{\tau\omega}}}{\sqrt{ad + d^2x_{\tau\omega} - e}}. \quad (100)$$

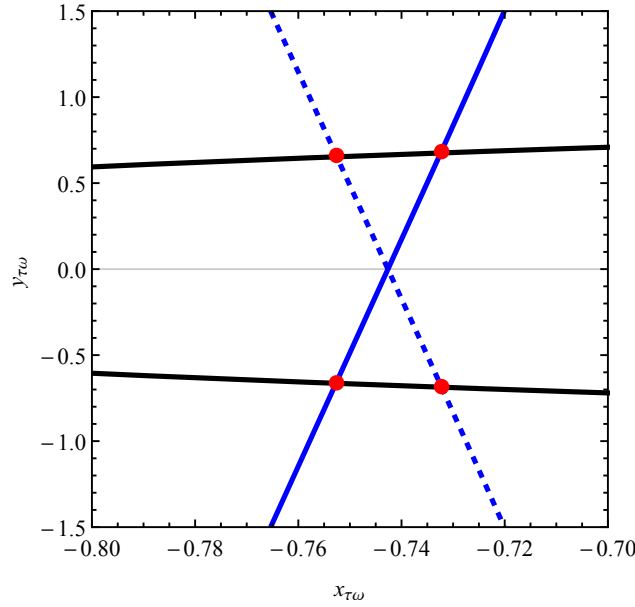
Gl. (100) wiederum in Gl. (99) eingesetzt liefert

$$y_{\tau\omega} = \pm \frac{-a(b + ex_{\tau\omega}) - dx_{\tau\omega}(b + ex_{\tau\omega}) + c}{\sqrt{ad + d^2x_{\tau\omega} - e}\sqrt{cd - e(b + ex_{\tau\omega})}} \quad (101)$$

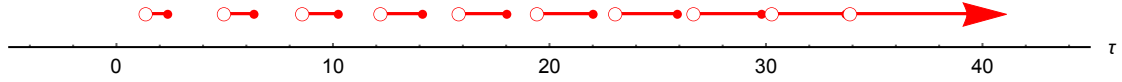
Die gesuchten Größen ω und τ ergeben sich nun aus den Schnittpunkten des Einheitskreises mit dem Graphen der in Gl. (101) gegebenen Funktion. Der Winkel zur x-Achse ist dabei $\tau\omega$ und ω ergibt sich aus der Schnittstelle über Gl. (100).

Das Lösen dieser Bestimmungsgleichung ist graphisch oder numerisch möglich. Beispielhaft ist in Abb. 8 für eine bestimmte Parameterwahl gezeigt, wie daraus die Stabilität in Abhängigkeit der Delayzeit bestimmt werden kann.

Eine Möglichkeit ist, dass sich kein Schnittpunkt ergibt. In diesem Fall sind alle ω komplex die Stabilität eines Fixpunkts ist unabhängig vom Delay. Oder es ergeben sich betragsmäßig zwei verschiedene Werte für $|\omega|$. Dann ist das größere $|\omega|$ mit Eigenwertpaaren assoziiert, die in die instabile Halbebene wandern, während das kleinere $|\omega|$ mit Eigenwertpaaren assoziiert ist, die sich in die stabile Halbebene bewegen. Schließlich ist auch möglich, dass die beiden Beträge für $|\omega|$ zusammen fallen, wobei Eigenwertpaare dann höchstens in die instabile Halbebene wandern können.



(a) Schnittpunkte der Funktion aus Gl. (101) mit dem Einheitskreis zur Bestimmung von ω und τ . Blau durchgezogen: Funktion aus Gl. (101) mit positivem Vorzeichen. Blau gestrichelt: Funktion aus Gl. (101) mit negativem Vorzeichen. Schwarz: Einheitskreis. Aus den Schnittpunkten ergibt sich mit Hilfe von Gl. (100) $|\omega_1| \approx 1.74$, $\tau_{10} \approx 1.37$, $RT_1 = +1$ und $|\omega_2| \approx 1.60$, $\tau_{20} \approx 2.40$, $RT_2 = -1$.



(b) Sich aus den in (a) bestimmten Werten für ω und τ ergebendes Stabilitätsdiagramm für das Modell dritter Ordnung mit einem Delay (Gl. (84)). Betrachtet wird dabei der ohne Delay stabile Fixpunkt. In den Bereichen mit einer roten Linie ist dieser Fixpunkt instabil, in den anderen Bereichen stabil. Der Pfeil deutet an, dass der Fixpunkt für alle größeren Delayzeiten instabil ist.

Abbildung 8: Bestimmung der Stabilität des Modell dritter Ordnung mit einem Delay (Gl. (84)) in Abhängigkeit der Delayzeit. Als Parameter wurden $D = 0.1$, $P = 1$, $B = 8$, $\epsilon = 0.2$, $\alpha = 2$, $E_f = 1$ und $\Gamma = 5$ gewählt.

Auf einen Unterschied zwischen dem klassischen Modell und dem Modell dritter Ordnung sei gesondert hingewiesen: Für das klassische Modell wurde in Abschnitt 3.1 gezeigt, dass ein stabiler Fixpunkt für hinreichend große Delayzeiten genau dann instabil wird, wenn $\epsilon > D$. Im Modell dritter Ordnung gilt dies nicht. Denn der Term in der Wurzel des Zählers von Gl. (100) lautet ausgeschrieben

$$-\frac{\alpha^2 \epsilon (\Gamma - \cos(\Delta\theta^*))^2 (D + x_{\tau\omega} \epsilon)}{\Gamma^2} - \frac{2\alpha B(E^*)^2 (1 - \cos(\theta)^2) \epsilon}{\Gamma} \quad (102)$$

und geht für $E^* \rightarrow \infty$ für beliebig feste und positive Parameter sowie $x_{\tau\omega} \in [-1; 1]$ gegen $-\infty$. Daraus folgt, dass für $E^* \rightarrow \infty$ sämtliche Frequenzen ω in Gl. (100) komplex werden und die Stabilität somit vom Delay unabhängig wird. Aufgrund von $E^* = E_f / \alpha (1 - \cos(\Delta\theta^*) / \Gamma)^{-1}$, wie man durch Umformen von Gl. (88) zeigen kann, geht $E^* \rightarrow \infty$ für $\Gamma \rightarrow 1$, da dann gleichzeitig $\cos(\Delta\theta^*) \rightarrow 1$ gilt. Folglich gibt es für beliebiges $\epsilon > 0$ ein $\Gamma > 1$, sodass die Stabilität eines Fixpunkts unabhängig vom Delay ist. Während also im Fall ohne Delay die Wechselwirkung mit der Spannungsdynamik tendenziell zu einer Destabilisierung führt, lässt sich im Fall mit Delay durch eine entsprechende Wahl der Kopplung (sprich die Differenz aus den Reaktanzen im stationären und subtransienten Zustand) eine vom Delay unabhängige Stabilität eines Fixpunkts erreichen.

3.3. Zwei unabhängige Delayparameter

Nun wird das Zwei-Maschinen-System im Modell dritter Ordnung mit zwei Delaytermen betrachtet und $P(t, \tau) = P - \epsilon(\Delta\theta_{\tau_1} - \Delta\theta_{\tau_1+\tau_2})$ wie in Gl. (62) gesetzt. Die Gleichungen des Systems resultieren aus Gl. (84), wenn ω_τ durch $(\theta_{\tau_1} - \theta_{\tau_1+\tau_2})$ ersetzt wird. Sie lauten

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\theta} &= \Delta\omega \\ \Delta\dot{\omega} &= P - \epsilon(\Delta\theta_{\tau_1} - \Delta\theta_{\tau_1+\tau_2}) - D\Delta\omega - BE^2 \sin(\Delta\theta) \\ \dot{E} &= E_f - \alpha E + \beta BE \cos(\Delta\theta). \end{aligned} \quad (103)$$

Die daraus resultierende charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Stabilität ergibt sich aus den in Tabelle 3 zu sehenden Koeffizienten.

Um nun für eine bestimmte Parameterwahl die Stabilität in Abhängigkeit der beiden Delays τ_1 und τ_2 zu bestimmen, wird im Folgenden wie in Abschnitt 2.1.6 beschrieben vorgegangen. Die Stabilität im Fall ohne Delay wurde in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 mit dem Ergebnis betrachtet, dass es nur für $\Gamma > 1$ und $\xi < \xi_{\max}$ einen stabilen Fixpunkt gibt. In diesem Abschnitt wird lediglich die Änderung der Stabilität dieses stabilen Fixpunkts betrachtet. Dies liegt darin begründet, dass die Stabilität der instabilen Fixpunkte im Modell dritter Ordnung von den Delays unabhängig ist (siehe Abschnitt 4.1).

Die charakteristische Gleichung wird durch Anwenden von Rekasiuss' Transformation (siehe Abschnitt 2.1.5) in Polynomform gebracht. Es verschwinden τ_1 und τ_2 aus der charakteristischen Gleichung, wofür $T_1 = \tan(\nu_1/2)/\omega$ bzw. $T_2 = \tan(\nu_2/2)/\omega$ auftreten. Es folgt die Berechnung der Determinante $F(\tan(\nu/2))$ von Sylvester's Resultantenmatrix aus Gl. (39). Die Determinante ist zu lang, um an dieser Stelle aufgeführt zu werden. In Anhang A findet sich deswegen der verwendete `Mathematica` [34] Quellcode für die Berechnung der Determinante und die im Folgenden auftretenden Abbildungen.

Tabelle 3: Koeffizienten der charakteristischen Funktion für zwei identische Maschinen im Modell dritter Ordnung mit zwei Delays.

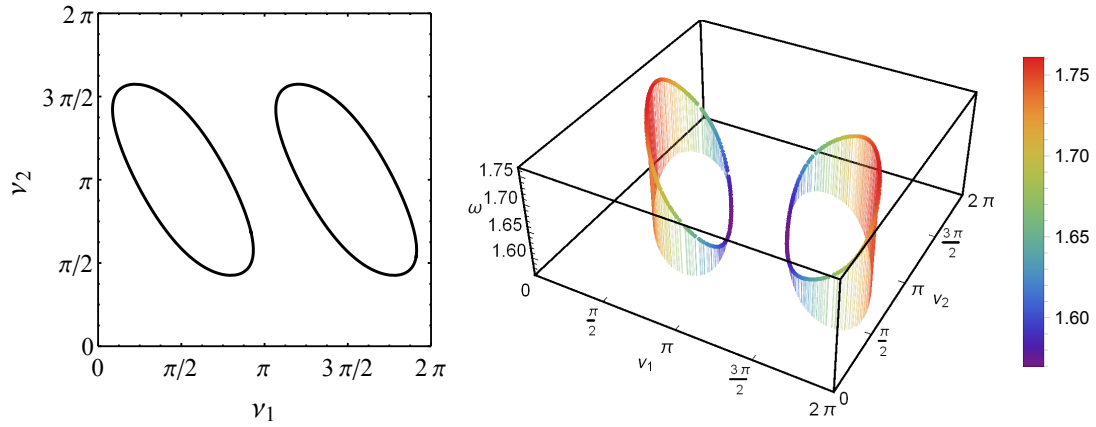
	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
e^0	1	$D + \alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$	$Bx (E^*)^2 + D\alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$	$\frac{B\alpha (E^*)^2}{\Gamma} (x^2 + \Gamma x - 2)$
$e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}$	0	0	$-\epsilon$	$-\epsilon\alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$
$e^{-\lambda\tau_1}$	0	0	ϵ	$\epsilon\alpha \left(1 - \frac{x}{\Gamma}\right)$

Mit Hilfe numerischer Methoden werden nun die Nullstellen von F in Abhängigkeit von ν_1 und ν_2 im Bereich von jeweils 0 bis 2π gesucht und so alle potentiellen Elemente des Building Blocks bestimmt. In Abb. 9a sind die Nullstellen von F für die in der Beschreibung von Abb. 9 gelistete Wahl der Parameter graphisch dargestellt.

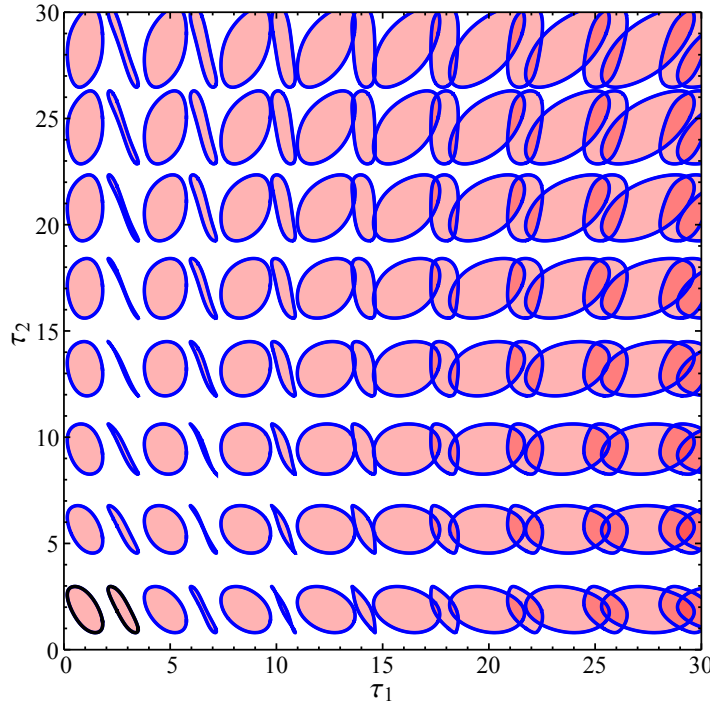
Nun muss für jedes dieser Elemente überprüft werden, ob es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, das zusammen mit ν_1 und ν_2 die charakteristische Gleichung erfüllt, woraus Abb. 9b resultiert.

Zuletzt wird das Stabilitätsdiagramm im Delayzeitraum erstellt, indem man zunächst die Elemente ν_1 und ν_2 jeweils durch das dazugehörige ω teilt. Daraus ergibt sich der Kernel ρ_0 (in Abb. 9c schwarz). Über die punktweise nichtlineare Transformation (28) ergibt sich aus dem Kernel der Offspring $\rho \setminus \rho_0$ (in Abb. 9c blau). Analog zum Vorgehen bei Abb. 3 findet man, dass sich im Innern der von den schwarzen Linien des Kernels ρ_0 eingeschlossenen beiden Flächen zwei Eigenwerte auf der instabilen Halbebene befinden (nicht dargestellt). Daraus folgt, dass die von den anderen blauen Linien eingeschlossenen Flächen jeweils auch instabil sind (in Abb. 9c transparent rot).

Nun wird untersucht, wie die Form des Building Blocks von den Parametern abhängt. In Abb. 10 ist dafür der Building Block für verschiedene Werte von ϵ , Γ und D dargestellt. Für $\epsilon = 0$ gibt es keine verzögerte Rückkopplung auf das System und folglich ist das System für alle Delays stabil, was sich in einem leeren Building Block widerspiegelt. Ist ϵ groß genug, ergibt sich der Building Block als der Rand der Vereinigung zweier konkaver Flächen, wobei die Fläche monoton mit ϵ wächst. Für kleine ϵ sind diese beiden Flächen zunächst disjunkt (in Abb. 10 z. B. $\forall \epsilon \leq 0.8$), überschneiden sich dann aber für größer werdendes ϵ (in Abb. 10 z. B. für $\epsilon = 1$, $\Gamma = \infty$, $D = 0.5$). Ähnlich wie auch schon beim Fall mit einem Delay führt eine größere Dämpfung D zu einer kleineren Fläche im Building Block und somit zu einem größeren Anteil an stabilen Flächen im Delayzeitraum (in Abb. 10 haben blaue, schwarze und rote Linien unterschiedliche Dämpfungen D). Im Modell gekoppelter Swing-Gleichungen muss nicht wie vorher notwendigerweise $\epsilon > D$ für die Möglichkeit eines Stability-Switches gelten (in Abb. 10 z. B. für $\epsilon = 0.4$, $\Gamma = \infty$ und $D = 0.5$). Ist Γ nah genug an 1, ist der Fixpunkt – wie im vorigem Abschnitt auch schon – unabhängig vom Delay stabil, da dann der Building Block leer ist.



(a) Potentielle Elemente des Building (b) Elemente des Building Blocks und zugehörige Frequenzen ω , mit denen Eigenwertpaare die imaginäre Achse überqueren.



(c) Aus (b) resultierendes Stabilitätsdiagramm. Weiß: Stabile Bereiche. Transparent rot: Instabile Bereiche, wobei sich in Bereichen mit dunkleren Rottönen mehr Eigenwerte auf der instabilen Halbebene befinden (die Anzahl der instabilen Eigenwerte ist das doppelte der Anzahl sich überschneidender Flächen). Schwarz: Kernel ρ_0 . Blau: Offspring $\rho \setminus \rho_0$ des Kernels, der sich über Gleichung (28) aus dem Kernel ergibt.

Abbildung 9: Vom potentiellen Building Block zum Stabilitätsdiagramm mittels der Building Block Methode (siehe Abschnitt 2.1.6): Betrachtet wird der stabile Fixpunkt des Zwei-Maschinen-Systems im Modell dritter Ordnung mit zwei Delays. Als Parameter wurden $D = 0.1$, $P = 1$, $B = 8$, $\epsilon = 0.2$, $\alpha = 2$, $E_f = 1$ und $\Gamma = 5$ gewählt.

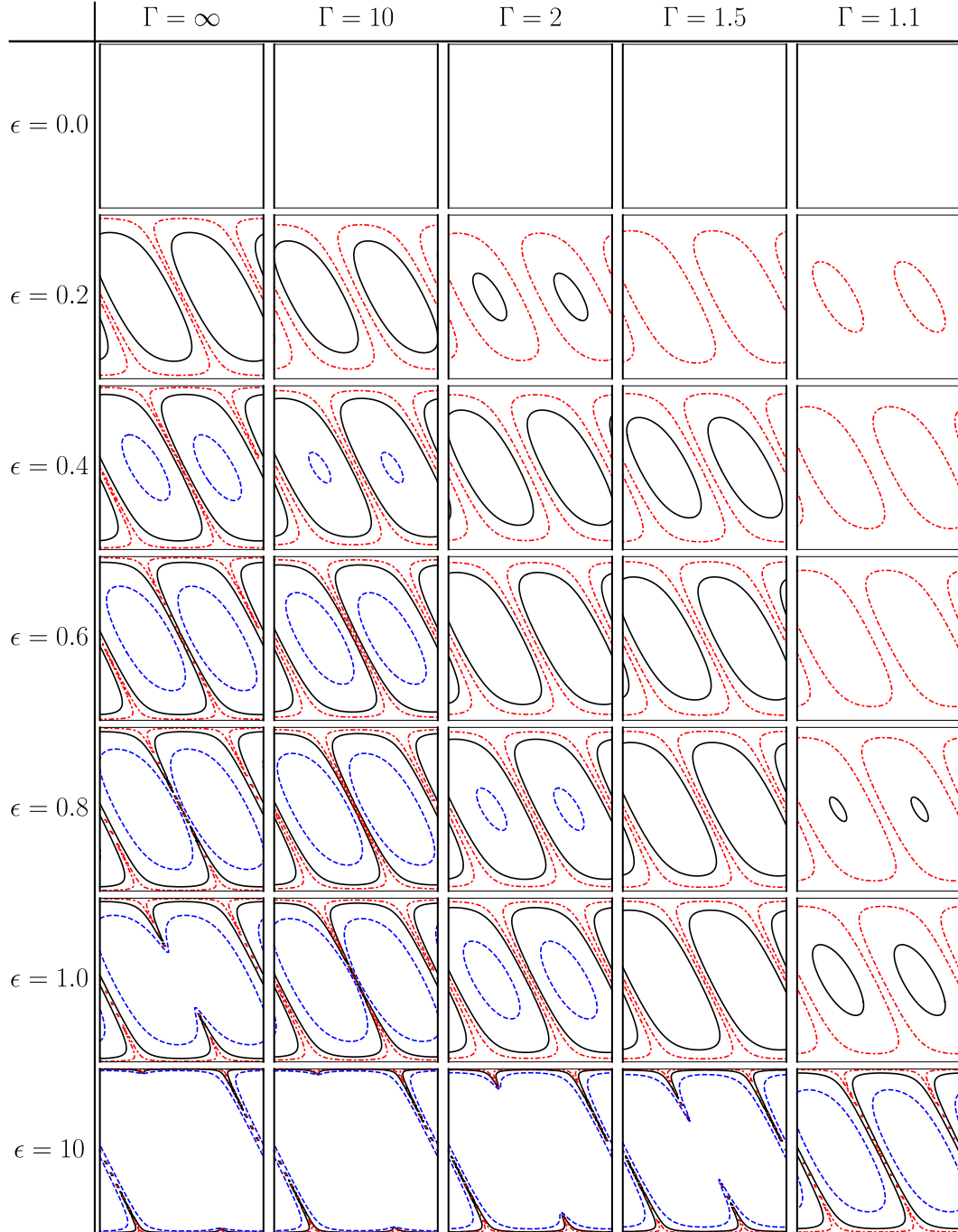


Abbildung 10: Building Block für den stabilen Fixpunkt des Zwei-Maschinen-Systems im Modell dritter Ordnung mit zwei Delaytermen für verschiedene Werte von ϵ , Γ und D . Auf der Abszissenachse ist jeweils ν_1 von 0 bis 2π aufgetragen, während auf der Ordinatenachse ν_2 von 0 bis 2π in gleicher Skalierung aufgetragen ist (vgl. Abbildung 9a). Die für alle Graphen identische Parameter lauten $P = 1$, $B = 8$, $\alpha = 2$ und $E_f = 1$. Rot gestrichpunktete Linie: $D = 0,02$. Schwarz durchgezogene Linie: $D = 0,1$. Blau gestrichelte Linie: $D = 0,5$.

4. Analyse von Mehr-Maschinen-Systemen

Nach der Betrachtung der Zwei-Maschinen-Systeme folgt nun die Betrachtung von Systemen, die mehr Maschinen beinhalten. Zuerst wird dargelegt, welche allgemeine Bedingung ein ohne Delay instabiler Fixpunkt erfüllen muss, damit er durch den Einfluss des Delays stabilisiert werden kann. Anschließend folgt exemplarisch eine Betrachtung der Zeitreihen eines aus zwölf Maschinen bestehenden Stromnetzwerkes.

4.1. Allgemeine Bedingung für Stabilisierbarkeit

Zunächst wird ein Ausdruck für die partielle Ableitung eines Eigenwertes nach einer Delayzeit hergeleitet. Durch implizites Ableiten der allgemeinen Form der charakteristischen Gleichung (20) für Systeme mit Delay erhält man

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_j} = - \frac{\frac{\partial \chi}{\partial \tau_j}}{\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}} = - \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_j} \frac{P'(\lambda) + Q_j(\lambda)e^{-\tau_j \lambda}}{\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}} + \frac{\lambda Q_j(\lambda)e^{-\tau_j \lambda}}{\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}}. \quad (104)$$

Auflösen nach $\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_j}$ und einsetzen von $\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} = P'(\lambda) + \sum_{i=1}^m (Q'_i(\lambda) - \tau_i) e^{-\tau_i \lambda}$ liefert

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_j} = \lambda \left(\frac{Q_j(\lambda)e^{-\tau_j \lambda}}{2P'(\lambda) + \sum_{i=1}^m (Q'_i(\lambda) - \tau_i + \delta_{ij}Q_i(\lambda)) e^{-\tau_i \lambda}} \right). \quad (105)$$

Dabei bezeichnet in diesem Kontext ein Strich wie in $P'(\lambda)$ die Ableitung nach dem Argument einer Funktion und $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$ das Kronecker-Delta. Gl. (105) ist allgemein gültig für die exponentiellen Polynome, die im Rahmen der linearen Stabilitätsanalyse von Delay-Systemen auftauchen und eignet sich zum Beispiel zur Bestimmung der Root Tendency RT . Da sowohl $P(\lambda)$ als auch die $Q_i(\lambda)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind, erhält man beim Einsetzen einer reellen Zahl in Gl. (105) sowie in höhere Ableitungen von λ nach einem der Delays wieder eine reelle Zahl. Es gilt also

$$\text{Im} \left(\frac{\partial^n \lambda}{\partial \tau^n} \right) \Big|_{\lambda \in \mathbb{R}} = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (106)$$

oder in Worten ausgedrückt: Ein Eigenwert, der ohne Delay reell ist, bleibt für beliebige Delays reell.

Ist $\lambda = 0$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung, kann sich durch den Einfluss des Delays ein Eigenwert an der Stelle $\lambda = 0$ höchstens in Richtung der instabile Halbebene bewegen [23]. Ein Fixpunkt der ohne Delay instabil ist, kann also höchstens dann durch Delay stabilisiert werden, wenn sein Imaginärteil nicht null ist.

Für das Modell dritter Ordnung lässt sich für den Fall ohne Delay zeigen, dass nur

gedämpfte Schwingungen möglich sind. Das heißt, wenn für einen Eigenwert λ gilt $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, so folgt daraus $\operatorname{Im}(\lambda) = 0$ [35]. Ein instabiler Fixpunkt im Modell dritter Ordnung mit Delay kann also nur dann stabilisiert werden, wenn der Fixpunkt bereits ohne Delay stabil ist. Andernfalls ist der Fixpunkt für beliebige Delayzeiten instabil.

4.2. Netzwerk aus 12 Maschinen

Die Berechnung der Determinante einer $n \times n$ Matrix mit symbolischen Einträgen benötigt größenordnungsmäßig $\tilde{O}(n^3\sqrt{n})$ [36] Rechenschritte⁷. Das bedeutet, dass schon bei einer relativ geringen Anzahl an Synchronmaschinen die Determinante für die Bestimmung der charakteristischen Gleichung nicht mehr in hinreichend kurzer Zeit ausgerechnet werden kann. Deswegen werden in diesem Abschnitt die Zeitreihen der dynamischen Variablen betrachtet. Konkret wird nun das in Abbildung 11 zu sehende Stromnetzwerk im Modell dritter Ordnung mit einem Delay und den in der Bildunterschrift aufgeführten Parametern unter Variation des Delays τ untersucht.

Dazu wird die Differenzialgleichung (60), die nun aus $12 \times 3 = 36$ dynamischen Variablen besteht, mit Hilfe der standardmäßig in *Mathematica* [34] implementierten Funktion `NDSolve` numerisch für den Zeitraum $t \in [0; 30]$ integriert. Als Anfangsfunktion für $(\theta_j, \omega_j, E'_{q,j})$ wurde dabei für jede der Synchronmaschine ein pseudozufälliger konstanter Wert aus $[-\pi; \pi] \times [-10; 10] \times [0; 3]$ gewählt. Die Anfangsfunktionen bleiben für jede Wahl des Delays gleich. In *Mathematica* [34] geschriebener Quellcode, mit dem sich die im Folgenden referenzierte Abbildung reproduzieren lässt, findet sich in Anhang A.

In den Abb. 12a-12c ist eine solche Zeitsimulation für $\tau = 0$ zu sehen, wobei jeweils die Beträge aller möglichen Phasendifferenzen $|\theta_i - \theta_j|$, die Beträge aller möglichen Frequenzdifferenzen $|\omega_i - \omega_j|$ und alle Spannungen $E'_{q,i}$ gegen die Zeit aufgetragen sind. Hier lässt sich der in Abschnitt (2.2.1) beschriebene Prozess der Synchronisation beobachten: Zu Beginn der Zeitreihe sind die Phasenbeziehungen, sowie die Frequenzbeziehungen und die Spannungen der Synchronmaschinen zufällig. Bedingt durch die Wechselwirkung der Synchronmaschinen untereinander gleichen sich nun die Frequenzen der Maschinen an und die Frequenzdifferenzen gehen jeweils gegen null (Abb. 12b). Daraus resultiert eine feste, zeitlich konstante Phasenbeziehung der Maschinen untereinander und eine konstante Spannung, was sich in Abb. 12a bzw. 12c sehen lässt.

Dahingegen kann für $\tau = 2$ für dieses Netzwerk keine Synchronisation beobachtet werden (Abb. 12d-12f, die aufgetragenen Variablen sind die selben wie für den Fall $\tau = 0$). Die Frequenzdifferenzen fallen im Laufe der Zeit nicht auf null ab, sondern fluktuieren im Bereich von circa 0 bis 8 hin und her (Abb. 12e). Da die Synchronmaschinen nicht mit synchroner Frequenz laufen, ergibt sich auch keine feste Phasenbeziehung und auch keine konstanten Spannungen (Abb. 12d bzw. 12f). Die Stabilität des synchronen Zustands kann sich – wie schon beim Zwei-Maschinen-System beobachtet – aufgrund des Delays von stabil auf instabil ändern.

⁷Das Symbol \tilde{O} steht dabei für die Größenordnung der benötigten Rechenschritte unter Fortlassung von Ausdrücken, die in einem Logarithmus stehen. Die Schreibweise mit \tilde{O} ist dabei als *Soft-O* und die mit O als *Big-O* bekannt. Die Soft-O-Notation gibt dabei den wesentlichen Anteil der Laufzeitkomplexität wieder, da $O(\log^k(n)) = O(n^\epsilon)$ für alle $\epsilon > 0$ und beliebig festes k gilt.

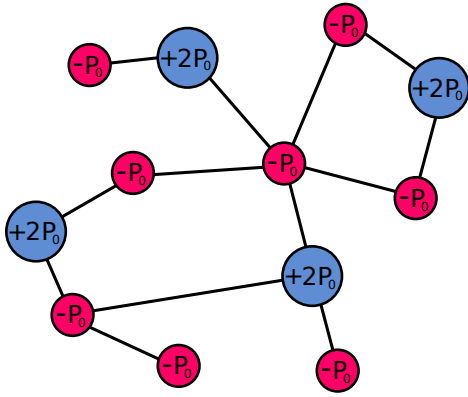


Abbildung 11: Netzwerk aus 12 Synchronmaschinen. Dabei sind vier Maschinen Generatoren mit $P_{0,j} = +2P_0$ (blau) und acht Maschinen Motoren mit $P_{0,j} = -P_0$ (rot). Die restlichen Maschinenparameter sind identisch und lauten $P_j(t, \tau) = P_{0,j} - \epsilon_j \omega_j \tau$, $P_0 = 1$, $\epsilon_j = 0,5$, $D_j = 0,1$, $B_{jk} = 8/3$, $k \neq j$, $B_{jj} = -1$, $E_{f,j} = 1$, $(X_{d,j} - X'_{d,j}) = 0,06$, $M_j = 1$ und $T'_{d0,j} = 1$. Die Form des Netzwerks stammt aus [37].

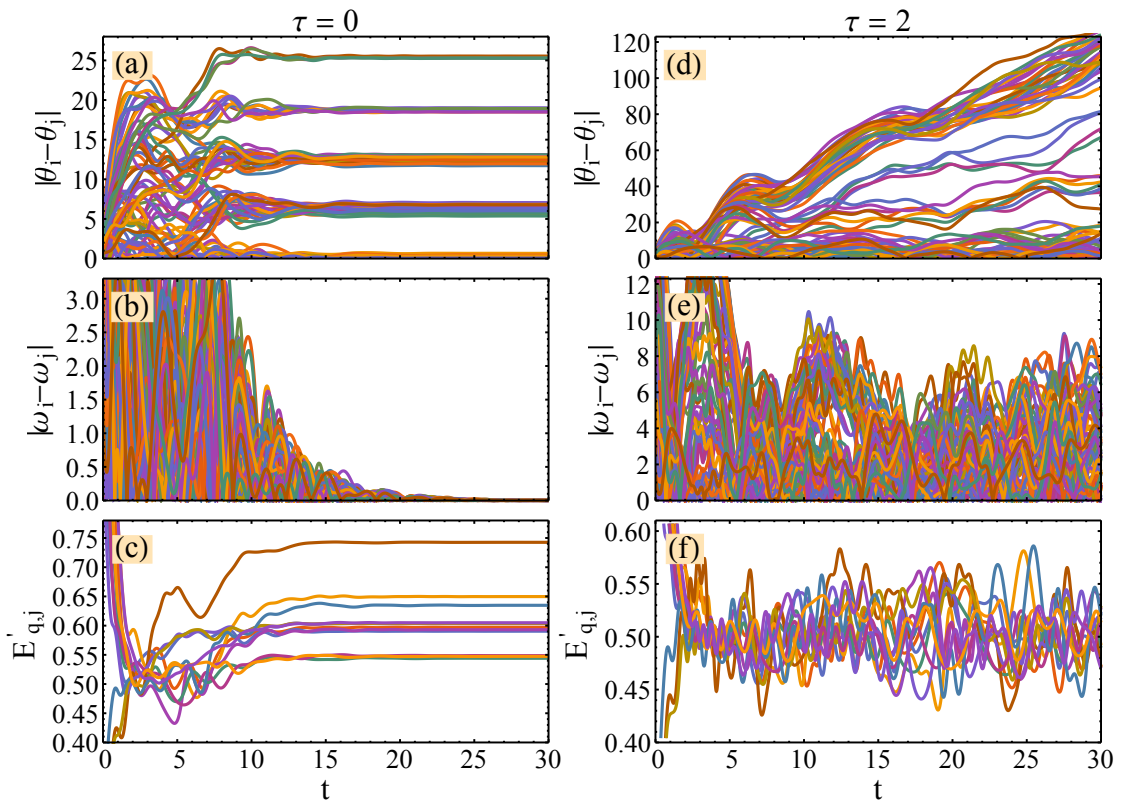


Abbildung 12: Zeitreihen für das Stromnetzwerk aus zwölf Maschinen wie in Abbildung 11 beschrieben für verschiedene Werte von τ . Auf den Ordinatenachsen sind jeweils sämtliche Phasendifferenzen $|\theta_i - \theta_j|$ ($i = 1, \dots, 12$, $i < j < 12$), sämtliche Frequenzdifferenzen $|\omega_i - \omega_j|$ ($i = 1, \dots, 12$, $i < j < 12$), sowie die Spannungen $E'_{q,j}$ ($j = 1, \dots, 12$) aufgetragen, während auf der Abszisse immer die Zeit t aufgetragen ist. Als Anfangsfunktionen für $(\theta_j, \omega_j, E'_{q,j})$ wurden dabei zufällige konstante Werte aus $[-\pi; \pi] \times [-10; 10] \times [0; 3]$ gewählt.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde untersucht, welchen Effekt eine zeitverzögerte Rückkopplung auf die Dynamik eines dynamischen Systems, insbesondere eines Stromnetzwerkmodells hat. Dazu wurden nach der Einleitung in Kapitel 1 zunächst in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen gelegt. Es wurde beschrieben, wie in der charakteristische Gleichung durch die Einführung eines Delays im Allgemeinen exponentielle Polynome auftreten, durch die sich eine Stabilitätsanalyse deutlich komplexer gestaltet. Mit der Cluster-Betrachtung der charakteristischen Eigenwerte, Rekasisus' Substitution und der Building Block Methode wurde folgend beschrieben, wie sich die Betrachtung der exponentiellen Polynome effektiv auf die Betrachtung von gewöhnlichen Polynomen zurückführen lässt.

Als betrachtete Modell wurden dann das klassische Modell gekoppelter Swing-Gleichungen und das Modell dritter Ordnung eingeführt. Beide können als Erweiterung des Kuramoto-Modells aufgefasst werden, mit dem sich Synchronisationsprozesse beschreiben lassen.

Auf die in dieser Arbeit untersuchte Frage, wie sich eine zeitverzögerte Rückkopplung auf die Stabilität eines Stromnetzwerkes auswirkt, lautet eine zusammengefasste Antwort:

- Ist die Delayzeit vernachlässigbar klein gegenüber den typischen Zeitskalen oder unterschreitet die Stärke des Delays einen kritischen Wert, so ändert sich die Stabilität eines Fixpunkts nicht. Dabei ist das Modell dritter Ordnung aufgrund der Wechselwirkung mit der Spannungsdynamik robuster gegenüber dem Einfluss eines Delays.
- Sind sowohl Delayzeit als auch Delaystärke groß genug, so kann sich die Stabilität mit größer werdendem Delay mehrmals ändern.
- Für immer größere Delayzeiten und einer Delaystärke, die einen kritischen Wert überschreitet, ändert sich die Stabilität schließlich ab einer gewissen Delayzeit endgültig von stabil auf instabil.

Detaillierter lautet die Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit wie folgt: Zuerst wurde die vorgestellte Theorie in Kapitel 3 auf ein aus zwei Maschinen bestehendes Stromnetzwerk angewandt. Für das durch die gekoppelte Swing-Gleichung beschriebene System mit einem Delayterm konnte die dynamische Stabilität der Fixpunkte vollständig analytisch bestimmt werden. Das System besitzt null bis zwei Fixpunkte. Hat es zwei Fixpunkte, ist einer davon stabil und der andere instabil. Ist die Delaystärke größer als die Dämpfung findet nur für den stabilen Fixpunkt mit steigender Delayzeit eine endliche Anzahl von Stability-Switches statt, bevor der Fixpunkt für alle größeren Delays instabil ist. Betrachtet man auch negative Delaystärken, was in dem Modell des Stromnetzwerkes dem eher unwahrscheinlichen Fall entspricht, dass sich die Nachfrage proportional zum Preis verhält, lässt sich bei geeigneter Wahl der anderen Parameter ein ohne Delay instabiler Fixpunkt stabilisieren.

Im Modell dritter Ordnung ergeben sich die Fixpunkte aus einer quartischen Bestimmungsgleichung, die sich prinzipiell analytisch lösen lässt. Auch hier kann die Zahl der

Fixpunkte zwischen null und zwei betragen. Beträgt die Anzahl der Fixpunkte zwei, gibt es im Gegensatz zum Modell gekoppelter Swing-Gleichungen einen ganzen Parameterbereich, in dem beide Fixpunkte instabil sind. Außerhalb dieses Bereichs ist auch hier einer der beiden Fixpunkte stabil und der andere instabil. Weiterhin hat sich für das Modell dritter Ordnung im Gegensatz zum Modell gekoppelter Swing-Gleichungen gezeigt, dass eine Unabhängigkeit der Stabilität vom Delay erreicht werden kann, wenn die Kopplung (sprich die Differenz aus den Reaktanzen im stationären und subtransienten Zustand) zwischen Spannungs- und Frequenzdynamik entsprechend gewählt wird. Ursache dafür ist, dass die Spannung am Fixpunkt über diese Kopplung beliebig groß gewählt werden kann. In der Bestimmungsgleichung für die Frequenzänderungen fällt dann der Delay enthaltende Term gegenüber dem Term, der die beliebig großen (aber endlichen) Spannungen enthält, nicht mehr ins Gewicht. Im Rahmen dieses Modells ließe sich vielleicht schlussfolgern, dass eine entsprechend angepasste Bauweise der Synchronmaschinen die Robustheit gegenüber Delayeinflüssen erhöhen kann. Es wäre interessant zu untersuchen, ob dieses Verhalten eine Folge der Näherungen bei der Herleitung des Modells ist oder ob es auch bei den detaillierteren Modellen höherer Ordnung auftritt.

Für das Modell dritter Ordnung mit zwei Delaytermen wurde gezeigt, wie mit der Building-Block-Methode numerisch ein Stabilitätsdiagramm in Abhängigkeit von mehr als einer Delayzeit erstellt werden kann. Außerdem wurde die Form des Building-Blocks in Abhängigkeit der Delaystärke, der Dämpfung und der Kopplungsstärke zwischen Spannungs- und Frequenzdynamik untersucht. Dabei ändert sich die Stabilität eines Fixpunktes nur, wenn die Delaystärke eine bestimmte Größe überschreitet. Dieser Wert ist umso größer, je größer auch die Dämpfung ist. Wie auch schon im Fall mit einem Delay führt die Kopplung mit der Spannungsdynamik im Modell dritter Ordnung zu einer Stabilisierung gegenüber den Einfluss des Delays und die Kopplung kann immer so gewählt werden, dass die Stabilität des Systems unabhängig vom Delay ist.

In Kapitel 4 wurde zunächst dargelegt, dass ein ohne Delay instabiler Fixpunkt höchstens dann stabilisiert werden kann, wenn alle Eigenwerte mit nicht negativen Realteil einen Imaginärteil ungleich null besitzen. Für das hier betrachtete Modell dritter Ordnung folgt, dass sich für die übliche positive Parameterwahl nur die Stabilität von ohne Delay stabilen Fixpunkten in Abhängigkeit des Delays verändern kann. Ohne Delay instabile Fixpunkte bleiben in diesem Modell also unabhängig vom Delay instabil.

Zuletzt wurde an einem aus zwölf Maschinen bestehenden Netzwerk gezeigt, dass sich die Stabilität des zum synchronen Zustands zugehörigen Fixpunkt auch in Netzwerken aus mehreren Maschinen mit komplizierterer Topologie ändern kann. Während es ohne Delay für eine bestimmte Wahl der Parameter zu einer Synchronisation der Maschinen kommt, ist dies bei Einführung eines bestimmten Delays nicht mehr der Fall.

In diesem Zusammenhang wäre es sicherlich interessant, die Auswirkungen des Delays auf größere Netzwerke systematischer zu erforschen. Zum einen könnte die Rolle der Netzwerktopologie bezüglich des Einflusses des Delays untersucht werden und zum anderen könnten Netzwerke mit größerer Spanne in der Verteilung der Leistungen P_0 betrachtet werden, sodass durch den Delay vielleicht Übergänge von partiell synchro-

nisierten zu synchronisierten Zuständen oder umgekehrt beobachtet werden können. Ebenso könnte der Einfluss zufällig fluktuierende Parameter untersucht werden, da die eingespeiste Leistung von Photovoltaik- oder Windkraftanlagen ebenso fluktuert.

Ferner könnte die Delaystärke nicht nur positiv reell, sondern auch komplex gewählt werden. Alternativ könnten für jeweils eine Maschine auch zeitverzögerte Rückkopplungen der Variablen der anderen Maschinen eingeführt werden. Interessant wäre dann beispielsweise, wie sich die unterschiedlichen zeitverzögerten Rückkopplungen auf die Form des Building Blocks auswirken.

Schließlich wurde in dieser Arbeit die Existenz eines Grenzzyklus vollkommen außer acht gelassen, der beispielsweise für das Zwei-Maschinen-System beschrieben durch die gekoppelte Swing-Gleichung ohne Delay in einer sogenannten homoklinen Bifurkation entsteht [10, 38]. Es lässt sich vermuten, dass die Einführung eines Delays auch Auswirkungen auf diesen Grenzzyklus hat. Dies ließe sich beispielsweise mit einer Methode überprüfen, die als numerische Kontinuierung [39] bekannt ist.

Anhang

A. Mathematica-Quellcode

```

In[1]:= PadTranspose[x_] := Module[{dimx = Length[x], dimy = Max[Length /@ x], ■},
  Transpose[PadRight[x, {dimx, dimy}, ■]] /. ■ → Sequence[]

In[2]:= RekasiusSub[equ_, lmbda_, tauTlist_] :=
  Module[{keys = Keys[tauTlist], vals = Values[tauTlist], sub = equ, exp},
    sub = ExpandAll[sub] /. Power[E, x_] :> Times@@ (exp /@ Level[x + 0.0, 1]);
    Do[sub = sub /. exp[l__ * lmbda * keys[[i]]] →
      ((1 - vals[[i]] * lmbda) / (1 + vals[[i]] * lmbda)) ^ (-1), {i, Length@keys}];
    sub /. exp → Exp]

In[3]:= SylvesterMatrix[flist_, glist_] :=
  Module[{n = Max[Length /@ {flist, glist}], M = {}, f, g},
    {f, g} = PadRight[{flist, glist}];
    Do[AppendTo[M, ArrayPad[Reverse[f], {i, n - i - 2}]], {i, 0, n - 2}];
    Do[AppendTo[M, ArrayPad[Reverse[g], {i, n - i - 2}]], {i, 0, n - 2}];
    M]

In[4]:= GenerateOffspringOfPoint =
  Compile[{{nu1, _Real}, {nu2, _Real}, {omega, _Real}, {nmax, _Integer}},
    Block[{r = Range[0, nmax]},
      Outer[{(nu1 + 2 * Pi * #1, nu2 + 2 * Pi * #2)} / omega &, r, r]]];

In[5]:= GenerateOffspring[nulist_, omegalist_, max_] := Module[{n}, n =
  Max[MapThread[Floor[(#2 * max - Min[#1 / #2]) / (2 Pi)] &, {nulist, omegalist}]];
  MapThread[Flatten[GenerateOffspringOfPoint[#1[[1]], #1[[2]], #2, n], 1] &,
    {nulist, omegalist}]

In[6]:= Kernel[nulist_, omegalist_, max_] :=
  Select[MapThread[Divide, {nulist, omegalist}], #[[1]] ≤ max && #[[2]] ≤ max &]

In[7]:= SameShapeRec[list_, shapedlist_] :=
  If[Length@shapedlist == 1 || First@shapedlist ≥ Length@list,
    {package[list]}, {package[list[[1 ;; First@shapedlist]]],
      SameShapeRec[list[[First@shapedlist + 1 ;;]], Rest@shapedlist]}]

In[8]:= SameShape[list_, shapedlist_] :=
  Flatten@SameShapeRec[list, Length /@ shapedlist] /. package → Identity

```

```
In[10]:= BuildingBlock[F_, plot_ : False, opts : OptionsPattern[]] :=
Module[{contour, contourListC}, contour =
ContourPlot[(Rationalize[F] == 0 /. {v[1] -> a, v[2] -> b}) // Evaluate,
{a, 0, 2 Pi}, {b, 0, 2 Pi}, ImageSize -> Medium, FrameLabel -> {"v1", "v2"},
PerformanceGoal -> Accuracy, opts]; If[plot, contour,
contourListC = Cases[Normal@contour, Line[x_] -> x, Infinity]]];
```

```
In[11]:= TimeSpaceFromBuildingBlock[BB_, charEqu_, lmbda_,  $\tau$ 1list_,  $\tau$ 2list_] :=
Module[{mediandist, fillings, shortkernel, offspringlongdist,
offspringshortdist, Ts, RS, P, f, g, F, offspring, kernel,
 $\omega$ Sol, delPos, flatBB,  $\omega$ s,  $\tau$ 1 = First@ $\tau$ 1list,
 $\tau$ 2 = First@ $\tau$ 2list, max $\tau$  = Max[Last/@{ $\tau$ 1list,  $\tau$ 2list}]},
RS = RekasiusSub[charEqu, lmbda, { $\tau$ 1 -> T[1],  $\tau$ 2 -> T[2]}];
P = RS /. {T[n_Integer] :> Tan[v[n]/2]/ $\omega$ , lmbda -> i *  $\omega$ };
flatBB = Partition[Flatten@BB, 2];
 $\omega$ Sol = Table[(NSolve[(P == 0 && Abs[Im[ $\omega$ ]] ≤ 10^-3 && Re[ $\omega$ ] ≠ 0) /.
{v[1] -> pt[[1]], v[2] -> pt[[2]]}],  $\omega$ ], {pt, flatBB}];
delPos = Position[ $\omega$ Sol, {}]; delPos = If[delPos == {}, noSol = True;
{}, noSol = False;
delPos];
flatBB = Delete[flatBB, delPos];
 $\omega$ Sol = Delete[ $\omega$ Sol, delPos];
If[Length[ $\omega$ Sol] > 0,
 $\omega$ s = Abs /@ First /@ ((Re[ $\omega$ ]) /.  $\omega$ Sol);
offspring = PadTranspose@GenerateOffspring[flatBB,  $\omega$ s, max $\tau$ ];
kernel = Kernel[flatBB,  $\omega$ s, max $\tau$ ],
offspring = {}; kernel = {};
]; <|"Kernel" -> kernel,
"Offspring" -> offspring, "Frequencies" ->  $\omega$ s, "FlatBB" -> flatBB|>
]
```

```
In[12]:= M3OTwoDelaysRHS =
{ $\omega$ [t], P -  $\epsilon$  * ( $\theta$ [t -  $\tau$ 1] -  $\theta$ [t - T]) - d *  $\omega$ [t] - B * V[t]^2 * Sin[ $\theta$ [t]],
Ef -  $\alpha$  * V[t] (1 - Cos[ $\theta$ [t]] /  $\Gamma$ )};
```

```
In[13]:= M3OTwoMachinesFPSol =
Solve[{P - B * Sin[ $\theta$ [t]] V[t]^2 == 0, Ef -  $\alpha$  * V[t] +  $\alpha$  /  $\Gamma$  * Cos[ $\theta$ [t]] * V[t] == 0},
{ $\theta$ [t], V[t]}] /. C[_] -> 0;
```

```

In[14]:= M3OTwoDelaysCharEqu = Module[{vars = {θ, ω, V}, J0, Jtau, JT, charEqu},
  J0 = Table[D[M3OTwoDelaysRHS[[i]], vars[[j]][t]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
  Jtau = Table[D[M3OTwoDelaysRHS[[i]], vars[[j]][t - τ1]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
  JT = Table[D[M3OTwoDelaysRHS[[i]], vars[[j]][t - T]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
  charEqu = Det[J0 + Exp[-λ * τ1] * Jtau + Exp[-λ * T] * JT - λ * IdentityMatrix[3]];
  charEqu /. T → τ1 + τ2];

In[15]:= M3OTwoDelaysF = CalculateF[M3OTwoDelaysCharEqu, λ, τ1, τ2];

In[16]:= SplitDistanceLessThan[d_] :=
  Function[list, Split[Partition[Flatten[list], 2], Norm[#2 - #1] < d &]];

In[17]:= FromBBToTimeSpace[ParameterSubstitution_,
  TryJoined_ : True, MaxJoinedDist_ : 0.3] :=
Module[{Γ = Γ /. ParameterSubstitution, Fixpoint, StableFixpoint, Substitution,
  BB, TimeSpace, τ1It = {τ1, 0, 30}, τ2It = {τ2, 0, 30}, fillings = {}},
  StableFixpoint = First@Select[M3OTwoMachinesFPSol /. ParameterSubstitution,
    Im[θ[t] /. #] == 0 && (Cos[θ[t] /. #] > (-Γ/2 + 1/2 * Sqrt[Γ^2 + 8]) &];
  Substitution = ParameterSubstitution ~Join~ StableFixpoint;
  BB = BuildingBlock[M3OTwoDelaysF /. Substitution];
  TimeSpace = TimeSpaceFromBuildingBlock[
    BB, M3OTwoDelaysCharEqu /. Substitution, λ, τ1It, τ2It];
  If[TryJoined,
    TimeSpace["Offspring"] =
      SplitDistanceLessThan[MaxJoinedDist]@TimeSpace["Offspring"];
    TimeSpace["Kernel"] = SplitDistanceLessThan[MaxJoinedDist]@
      TimeSpace["Kernel"];
    fillings = Graphics[Flatten[{Opacity[0.3], Red, Polygon[#]} & /@
      TimeSpace["Offspring"]]];
  ];
  GraphicsGrid[{{ListPlot[BB, PlotStyle → Black, Joined → True, PlotRange →
    {{0, 2 Pi}, {0, 2 Pi}}, AspectRatio → 1, AxesLabel → {"v1", "v2"}],
    ListPointPlot3D[MapThread[{#1[[1]], #1[[2]], #2} &,
      TimeSpace /@ {"FlatBB", "Frequencies"}] // Evaluate, Filling → Bottom,
    ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends → Automatic, PlotRange →
    {{0, 2 Pi}, {0, 2 Pi}, Automatic}, AxesLabel → {"v1", "v2", "ω"}]},
    {Show[{ListPlot[TimeSpace["Offspring"], PlotStyle → Blue,
      PlotRange → {τ1It[[2] ;;], τ2It[[2] ;;]}, AspectRatio → 1,
      AxesLabel → {"τ1", "τ2"}, Joined → TryJoined],
      ListPlot[TimeSpace["Kernel"], PlotStyle → Black, Joined → TryJoined],
      fillings}], SpanFromLeft},
    {SpanFromAbove, SpanFromBoth}}, Alignment → Center]
]

```

```

In[18]:= FromBBToTimeSpace[{d → 0.1, P → 1, B → 8, ε → 0.2, α → 2.0, Ef → 1, Γ → 5}]

In[19]:= AppendIndex[index_] := Function[list, (#[index]) & /@ list];

In[20]:= ConstantPower[P0_] := Module[{Power},
  Power["Delays"] = {};
  Power["Expression", J_] := P0; Power]

In[21]:= DelayedPower[P0_, eps_, tau_: tau] := Module[{Power},
  Power["Delays"] = Flatten@{tau};
  Power["Expression", J_] :=
    P0 - eps * (ω[#][t - If[Length[tau] == 0, tau, tau[[#]]]] & /@ J); Power]

In[22]:= IntegratedPower[P0_, eps_, tau_: tau, T_: T] := Module[{Power},
  Power["Delays"] = {tau, T};
  Power["Expression", J_] :=
    P0 - eps * (θ[#][t - If[Length[tau] == 0, tau, tau[[#]]]] -
      θ[#][t - If[Length[T] == 0, T, T[[#]]]] & /@ J); Power]

In[23]:= M3OSystem[Power_, AdjMatB_, d_, Ef_, alpha_, beta_] :=
  Module[
    {system, J, θs, ωs, Vs, θst, ωst, Vst, SumDθs, SumDVs, Dθs, Dws, DVs},
    system["Machines"] = Length[AdjMatB]; system["VarsPerMachine"] = 3;
    system["Dimension"] = system["VarsPerMachine"] * system["Machines"];
    system["Delays"] = Power["Delays"];
    {θs, ωs, Vs} =
      Table[#, {i, 1, system["Machines"]}] & /@ {θ[i], ω[i], V[i]};
    system["Variables"] = Join[θs, ωs, Vs];
    {θst, ωst, Vst} = (AppendIndex[t]@# &) /@ {θs, ωs, Vs};
    system["LHS"] = D[Join[θst, ωst, Vst], t];
    J = Array[#, &, system["Machines"]];
    SumDθs = Outer[Vst[[#1]] * Vst[[#2]] * Sin[θst[[#1]] - θst[[#2]]] &, J, J];
    SumDθs = Diagonal[AdjMatB.SumDθs];
    SumDVs = Outer[Vst[[#1]] * Cos[θst[[#1]] - θst[[#2]]] &, J, J];
    SumDVs = Diagonal[AdjMatB.SumDVs];
    Dθs = ωst;
    Dws = Power["Expression", J] - d * ωst + 3 * SumDθs;
    DVs = Ef - alpha * Vst + beta * SumDVs;
    system["RHS"] = Join[Dθs, Dws, DVs]; system]

```

```

In[24]:= Options[DelayDynSys] = {InitialFunctions → 0, tmax → 10};
DelayDynSys[sys_, opts : OptionsPattern[{DelayDynSys, NDSolve}]] :=
Module[{eqs, inConds, IF, tmaxv},
  IF = OptionValue[InitialFunctions]; tmaxv = OptionValue[tmax];
  eqs = Equal @@@ Transpose[{sys["LHS"], sys["RHS"]}]];
  inConds =
    Equal @@@ Transpose[{#[t /; t ≤ 0] & /@ sys["Variables"],
      If[Length[IF] == 0, Array[IF &, sys["Dimension"]], IF]}];
  NDSolve[Join[eqs, inConds], sys["Variables"], {t, 0, tmaxv},
    Evaluate[Sequence @@ FilterRules[{opts}, Options@NDSolve]]]]

In[26]:= VariableDifferences[sys_, varnumber_] := Module[
  {variables, differences, firstIndex = (varnumber - 1) * sys["Machines"] + 1,
    lastIndex = varnumber * sys["Machines"]},
  variables = AppendIndex[t]@sys["Variables"][[firstIndex ;; lastIndex]];
  differences = (Abs[Subtract @@ #] & /@ Subsets[variables, {2}])]

In[27]:= Plot12MachineNetwork[ParameterReplacementRules_] :=
Module[{AdjMatB, PVector, ParameterVector, sys, solvedSys},
  SeedRandom[45 149 198 519 195 124 512 125];
  AdjMatB = B * {{0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1},
    {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1},
    {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}];
  PVector = {2 P, 2 P, 2 P, 2 P, -P, -P, -P, -P, -P, -P, -P, -P};
  ParameterVector =
    {PVector, ε, τ, AdjMatB, d, Ef, α, β} /. ParameterReplacementRules;
  sys = M3OSystem[DelayedPower[#1, #2, #3], #4, #5, #6, #7, #8] & @@
    ParameterVector;
  solvedSys = DelayDynSys[sys, InitialFunctions →
    RandomReal[{-Pi, Pi}, sys["Machines"]] ~Join~ RandomReal[{-10, 10},
      sys["Machines"]] ~Join~ RandomReal[{0, 3}, sys["Machines"]], tmax → 30];
  Plot[#[sys] /. solvedSys // Evaluate, {t, 0, 30}] & /@
    {Function[sys, VariableDifferences[sys, 1]], Function[sys,
      VariableDifferences[sys, 2]], Function[sys, (V[#][t] & /@ Range[12])]}]
]

In[28]:= Plot12MachineNetwork[
  {B → 8.0/3.0, P → 1.0, d → 0.1, Ef → 1.0, α → 2.0, β → 0.06, ε → 0.5, τ → 0.0}]

In[29]:= Plot12MachineNetwork[
  {B → 8.0/3.0, P → 1.0, d → 0.1, Ef → 1.0, α → 2.0, β → 0.06, ε → 0.5, τ → 2.0}]

```

Literatur

- [1] P. Milan, M. Wächter und J. Peinke. „Turbulent character of wind energy“. In: *Physical review letters* 110.13 (2013), S. 138701 (siehe S. 1).
- [2] D. Heide, L. Von Bremen, M. Greiner, C. Hoffmann, M. Speckmann und S. Bofinger. „Seasonal optimal mix of wind and solar power in a future, highly renewable Europe“. In: *Renewable Energy* 35.11 (2010), S. 2483–2489 (siehe S. 1).
- [3] X. Fang, S. Misra, G. Xue und D. Yang. „Smart grid—The new and improved power grid: A survey“. In: *IEEE communications surveys & tutorials* 14.4 (2012), S. 944–980 (siehe S. 1).
- [4] J. M. Cushing. *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*. Bd. 20. Springer Science & Business Media, 2013 (siehe S. 2).
- [5] K. Watanabe und M. Ito. „A process-model control for linear systems with delay“. In: *IEEE Transactions on Automatic control* 26.6 (1981), S. 1261–1269 (siehe S. 2).
- [6] G. Stoica. „A stochastic delay financial model“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 133.6 (2005), S. 1837–1841 (siehe S. 2).
- [7] D. Li und W. Ma. „Asymptotic properties of a HIV-1 infection model with time delay“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 335.1 (2007), S. 683–691 (siehe S. 2).
- [8] C. C. McCluskey. „Complete global stability for an SIR epidemic model with delay—distributed or discrete“. In: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11.1 (2010), S. 55–59 (siehe S. 2).
- [9] S. Sirouspour und A. Shahdi. „Model predictive control for transparent teleoperation under communication time delay“. In: *IEEE Transactions on Robotics* 22.6 (2006), S. 1131–1145 (siehe S. 2).
- [10] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press, 2014 (siehe S. 2, 39).
- [11] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Bd. 20. Applied Mathematical Sciences. New York NY: Springer New York, 1977 (siehe S. 3).
- [12] R. Bellman und K. L. Cooke. *Differential-difference equations*. Bd. v. 6. Mathematics in science and engineering. New York: Academic Press, 2011 (siehe S. 3).
- [13] T. Erneux. *Applied delay differential equations*. Bd. 3. Springer Science & Business Media, 2009 (siehe S. 3).
- [14] M. R. Roussel. *Delay-differential equations*. 2005 (siehe S. 3).
- [15] A. Hurwitz. „Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt“. In: *Mathematische Annalen* 46.2 (1895), S. 273–284 (siehe S. 4).
- [16] A. M. Krall. „On the Michailov Criterion for Exponential Polynomials“. In: *SIAM Review* 8.2 (1966), S. 184–187 (siehe S. 6).

- [17] N. Olgac und R. Sipahi. „The Cluster Treatment of Characteristic Roots and the Neutral Type Time-Delayed Systems“. In: *ASME 2004 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. November 13 – 19, 2004, S. 1359–1368 (siehe S. 7).
- [18] R. Sipahi und N. Olgac. „Improvements on the Cluster Treatment of Characteristic Roots and the Case Studies“. In: *Advances in Time-Delay Systems* (2004), S. 61–73 (siehe S. 7).
- [19] R. Sipahi und N. Olgac. „Complete stability robustness of third-order LTI multiple time-delay systems“. In: *Automatica* 41.8 (2005), S. 1413–1422 (siehe S. 7).
- [20] K. L. Cooke. „On zeroes of some transcendental equations“. In: *Funkcialaj Ekvacioj* 29.1 (1986), S. 77–90 (siehe S. 8).
- [21] F. Golnaraghi und B. C. Kuo. *Automatic Control Systems*. 9th. Wiley, 2009 (siehe S. 10).
- [22] M.-T. Ho, A. Datta und S. Bhattacharyya. „An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 43.3 (1998), S. 405–409 (siehe S. 10).
- [23] H. Fazelinia, R. Sipahi und N. Olgac. „Stability Robustness Analysis of Multiple Time- Delayed Systems Using “Building Block” Concept“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52.5 (2007), S. 799–810 (siehe S. 10, 34).
- [24] S. Barnett. *Matrices in Control Theory with applications to linear programming*. Van Nostrand Reinhold Co., 1971 (siehe S. 11).
- [25] A. Pikovsky, M. Rosenblum und J. Kurths. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Bd. 12. Cambridge university press, 2003 (siehe S. 12).
- [26] Y. Kuramoto. „Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators“. In: *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*. Springer. 1975, S. 420–422 (siehe S. 12).
- [27] S. H. Strogatz. „From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators“. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143.1 (2000), S. 1–20 (siehe S. 13).
- [28] K. Schmietendorf. „Synchronisation und Spannungsstabilität in einem Netzwerk von Synchronmaschinen“. Diplomarbeit. Münster: Westfälische Wilhelmsuniversität, 2012 (siehe S. 14 f.).
- [29] K. Schmietendorf, J. Peinke, R. Friedrich und O. Kamps. „Self-organized synchronization and voltage stability in networks of synchronous machines“. In: *The European Physical Journal Special Topics* 223.12 (2014), S. 2577–2592 (siehe S. 14 f.).
- [30] J. Machowski, J. Bialek und J. Bumby. *Power System Dynamics Stability and control*, John Wiley&Sons. 2008 (siehe S. 15).
- [31] B. Schäfer, M. Matthiae, M. Timme und D. Witthaut. „Decentral Smart Grid Control“. In: *New Journal of Physics* 17.1 (2015), S. 015002 (siehe S. 17).

- [32] K. L. Cooke und Z. Grossman. „Discrete delay, distributed delay and stability switches“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86.2 (1982), S. 592–627 (siehe S. 18).
- [33] A. Prestel und C. Delzell. *Positive polynomials: from Hilbert’s 17th problem to real algebra*. Springer Science & Business Media, 2013 (siehe S. 25).
- [34] Wolfram Research Inc. *Mathematica, Version 9.0*. Champaign, 2012 (siehe S. 30, 35).
- [35] K. Sharafutdinov, M. Matthiae, T. Faulwasser und D. Witthaut. „Rotor-angle versus voltage instability in the third-order model“. In: *arXiv preprint arXiv:1706.06396* (2017) (siehe S. 35).
- [36] E. Kaltofen. „On Computing Determinants of Matrices Without Divisions“. In: *Papers from the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. ISSAC ’92. Berkeley, California, USA: ACM, 1992, S. 342–349 (siehe S. 35).
- [37] B. Schäfer, M. Matthiae, X. Zhang, M. Rohden, M. Timme und D. Witthaut. „Escape routes, weak links, and desynchronization in fluctuation-driven networks“. In: *Physical Review E* 95.6 (2017), S. 060203 (siehe S. 36).
- [38] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, 1996 (siehe S. 39).
- [39] K. Engelborghs, T. Luzyanina und D. Roose. „Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 28.1 (2002), S. 1–21 (siehe S. 39).

Selbstständigkeitserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

Delaystabilisierung von Synchronisation mit Anwendung auf Stromnetzwerke

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Ort, Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Ort, Datum, Unterschrift)