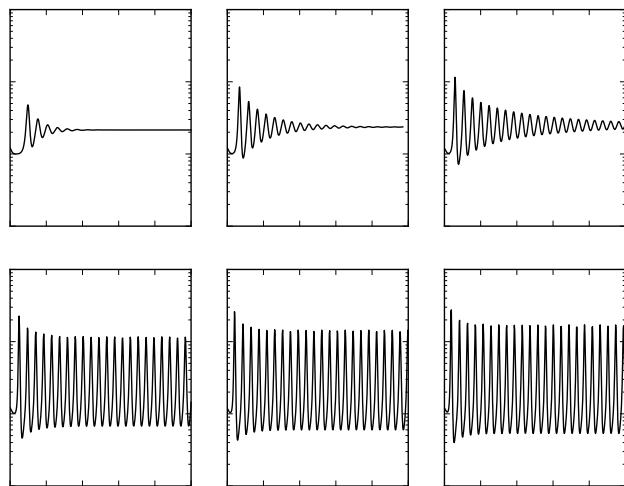


Shqiprim Adrian Abazi

Dynamische Eigenschaften und Entstehung von kriminellen Hotspots

Dynamical properties and formation of criminal hotspots



—September 2017 —



Dynamische Eigenschaften und Entstehung von kriminellen Hotspots

Dynamical properties and formation of criminal hotspots

vorgelegt von:
Shqiprim Adrian Abazi

zum Erlangen des akademischen Grades:
Bachelor of Science

Ausgegeben und betreut von:
Frau Dr. Svetlana Gurevich

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Uwe Thiele



—September 2017 —

Plagiatserklärung der / des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über die Entstehung und Dynamik von kriminellen Hotspots, selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Modellgleichungen	3
2.1 Reaktions-Diffusions-Gleichungen	3
2.2 Ein statistisches Modell für kriminelles Verhalten	4
2.3 Vergleich zur Chemotaxis	6
3 Numerische Näherungsverfahren	7
3.1 Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren	7
3.2 Pseudo-Spektralmethode	8
3.3 Finite Differenzen	9
4 Turing-Instabilität	11
4.1 Instabilitätskriterium	11
4.1.1 Turing-Instabilität	11
4.1.2 Lineare Stabilitätsanalyse des homogenen Zustands	12
4.2 Numerisches Beispiel	13
5 Numerische Untersuchungen des Phasenraums	17
5.1 Variation der Parameter	17
5.1.1 Homogene Attraktivität γ	18
5.1.2 Basis-Attraktivität α	21
5.1.3 Diffusionskonstante der Kriminalität D	23
5.1.4 Diffusionskonstante der Attraktivität ϵ	25

6 Dynamische Eigenschaften der Hotspots	29
6.1 Driftende Hotspots	29
6.2 Oszillierende Hotspots	31
7 Numerische lineare Stabilitätsanalyse	33
7.1 Herleitung des Formalismus	33
7.2 Ein-Hotspot-Zustand	35
7.3 Driftende Hotspots	37
7.4 Oszillierende Hotspots	38
8 Zusammenfassung	41
A Anhang	43

Kapitel 1

Einleitung

Die Muster und Strukturbildung zeigt sich in diversen Facetten der Natur. Zahlreiche Phänomene wie das Entstehen von Stürmen, Streifenmuster auf den Schuppen von Fischen oder Regentropfen auf einer Glasscheibe, lassen sich durch mathematische Modelle beschreiben. Diese Methode, naturwissenschaftliche Phänomene mathematisch zu beschreiben, ist der ein Grundstein der Physik. Somit ist das Beschreiben der vorher genannten Beispiele, obwohl sie auf dem ersten Blick eher aus der Meteorologie, Biologie etc. stammen, ein Teilgebiet der Physik. Da die mathematischen Zusammenhänge mit denen Muster und Strukturbildung beschrieben werden, meist von nichtlinearer Form sind ist die Muster und Strukturbildung eines der Hauptthemen der nichtlinearen Physik.

Selbst das Verhalten Menschen, welche sich meist als autonome Individuen sehen, führt, bei der Betrachtung großer Mengen, zu Musterbildungen die durch Methoden der Nichtlinearen Physik erklärt werden können.

Eine bestimmte Klasse der partiellen Differentialgleichungen, die Reaktions-Diffusions-Gleichungen , findet oft Verwendung in der statistischen Beschreibung diverser Aspekten der Dynamik von Menschen. Aus Biologischer Sichtweise, fühlen sich Menschen oft Gerüchen angezogen oder abgestoßen, seien es nun der Duft guten Essens oder der Gestank von Verdorbenem. Sie bewegen sich deswegen meist zu den Quellen dieser Düfte hin, oder von ihnen weg. Die daraus resultierende Dynamik ist ein Beispiel das durch Reaktions-Diffusions-Gleichungen beschreibbar ist [9].

Nun wurde in [18] ein Modell aufgestellt, dass aus sozialwissenschaftlicher Perspektive, mithilfe von Reaktions-Diffusions-Gleichungen die räumliche und zeitliche Entwicklung von Kriminalität behandelt. Das Modell wurde aus der Motivation aufgestellt, die Bekämpfung von Verbrechen, durch das Verständnis der Musterbildung der Kriminalität, zu unterstützen. Bei den entstehenden Mustern handeln es sich um raum- zeitliche Cluster hoher Kriminalitätsraten, so genannter kriminellen Hotspots.

Die Verbrechensbekämpfung macht sich die natürlich auftretende Musterbildung der Kriminalität zunutze, indem Polizeipräsenz an diesen Hotspots vermehrt eingesetzt wird. Anhand statistischer Daten ist es ersichtlich an welchen Position sich die Hotspots in der Vergangenheit befanden [17], jedoch können daraus wenige bis keine Prognosen für die zukünftige Position oder Intensität des Hotspots gemacht werden.

Verständnis über das Entstehen und die dynamischen Eigenschaften von kriminellen Hotspots, aus einer physikalischen Sicht der Muster und Strukturbildung, kann zu einer effizienteren Verteilung der Polizeipräsenz führen.

Auf der einen Seite könnte, durch Prognosen über das dynamische Verhalten, die Polizeipräsenz präventiv verteilt werden. Auf der anderen Seite kann die Entstehung krimineller Hotspots beeinflusst werden, wenn bekannt ist, welche spezifischen Effekte die Polizeipräsenz auf die Kriminalitätsrate ausübt.

Dieser Nutzen führt zu der Motivation das statistische Modell für kriminelles Verhalten aus [18] auf dynamische Eigenschaften und die Entstehung von Hotspots zu untersuchen. Dabei beschränkt sich die Betrachtung in dieser Arbeit auf eine räumliche Dimension. Der Fokus der Untersuchungen liegt auf Methoden der Numerik.

Zunächst soll das Modell in den theoretischen Kontext von Reaktions-Diffusions-Gleichungen eingeordnet werden. Somit können die Komponenten, der zu Grunde liegenden Gleichungen, verstanden und mit ähnlichen Modellen verglichen werden.

Da das Modell, in dieser Arbeit, zu einem großen Teil, durch numerische Simulationen untersucht wird, wird danach auf die benutzten numerischen Näherungsverfahren eingegangen. Die explizite Implementierung dieser Methoden erfolgt durch PYTHON.

Darauf wird ein Kriterium für das Entstehen von Hotspots aus einer räumlich homogenen Verteilung bestimmt. Durch dieses Kriterium können erste Kategorisierungen über die Wirkung der Parameter auf die Zustände des Systems gemacht werden.

Weiterhin wird durch Variation der Parameter das System auf Zerfälle und Entstehungen von Hotspots und somit den Wechsel von verschiedenen Zuständen untersucht.

Es besteht die Frage ob in dem Modell überhaupt dynamische Hotspots existieren. In [12] wurde eine Beispiel driftender Hotspots gezeigt, während die Hotspots diese Eigenschaft nach [18],[17] nicht besitzen sollten. Diese Frage wird durch numerische Reproduktion des Beispiels aus [12] untersucht. Außerdem wird das System auf Oszillationen untersucht.

Zuletzt wird die Stabilität spezifischer Hotspot Lösungen analysiert um so Aufschluss über mögliche Dynamik zu erhalten.

Kapitel 2

Modellgleichungen

Zuerst werden ein paar Grundlagen der Reaktions-Diffusions-Gleichungen erläutert. Dadurch können die statistischen Modellgleichungen für kriminelles Verhalten in den physikalischen Kontext der Muster und Strukturbildung eingeordnet werden. Es wird weiterhin das Modell für Chemotaxis kurz vorgestellt, damit ein Vergleich zum Modell der Kriminalität gezogen werden kann.

2.1 Reaktions-Diffusions-Gleichungen

Reaktions-Diffusions-Gleichungen beschreiben das Verhältnis von drei verschiedenen Größen eines Systems. Dabei handeln es sich um die räumliche Verteilung z.B. einer Dichte $\rho(\mathbf{x}, t)$, dem Fluss bzw. dem Strom $J(\mathbf{x}, t)$ und der Produktionsrate $f(\rho, \mathbf{x}, t)$ einer oder mehrerer Größen [14]. Bei diesen Größen kann es sich um Untersuchungsgegenstände diverser Disziplinen handeln, z.B. Populationen, reagierenden Chemikalien, oder auch Kriminalität. Durch den fundamentalen Erhaltungssatz, der besagt, dass die zeitliche Änderungsrate einer Größe im Volumen V durch ihren Fluss durch V und ihrer Produktionsrate in V beschrieben wird, lässt sich folgende Relation ableiten:

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla J(\mathbf{x}, t) = f(\rho, \mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun Reaktions-Diffusions-Gleichungen aufstellen, indem Fluss und Produktionsrate durch das jeweilige System spezifiziert werden. Der simpelste Fall ist ein System bei dem der Fluss proportional zum Gradienten der Dichte ist,

$$J = -D \nabla \rho. \quad (2.2)$$

Dieses Verhalten wird als Diffusion bezeichnet [8]. Phänomenologisch lässt sich Diffusion als jenes Verhalten verstehen, durch das Partikel in einem Medium (bspw. einer Flüssigkeit oder einem Gas) von Bereichen hoher Konzentration zu Bereichen niedriger Konzentration transportiert werden. Dies resultiert aus den unzähligen Stößen, die zwischen den Partikeln auf kleinster Skala ablaufen [10]. Die Diffusionskonstante kann somit als ein Längenverhältnis des Konzentrationsabfalls der jeweiligen Komponente aufgefasst werden [6]. Die Transportrichtung lässt sich umkehren, wenn sich das Vorzeichen der Diffusionskonstante D verändert. Ein Gegenbeispiel zu den auseinander diffundierenden Teilchen, findet sich in der Biologie. Eine Menge von Organismen die sich zu anderen ihrer Art angezogen fühlt könnte mit einer negativen Diffusionskonstante beschrieben werden.

Das Einsetzen von Gleichung (2.2) in (2.1) führt zu der Normalform von Reaktions-Diffusions-Gleichungen,

$$\partial_t \rho = D \nabla^2 \rho + f(\rho, \mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Nun existieren weiter Aspekte die auf den Strom einer Größe wirken können Advektion beschreibt im Kontext der Reaktions-Diffusions-Gleichungen, die Wirkung eines Geschwindigkeitsfeldes $V(\mathbf{x}, t)$ auf die Stromdichte einer Größe.

Unter einem solchen Feld ließe sich das Beispiel einer verschmutzten Wasserleitung nennen. Zuerst wird die Leitung im Stillstand betrachtet. Tritt eine Verschmutzung an einer Stelle der Leitung auf, durch bspw. einen Materialfehler in einem der Rohre, hätte dies zur Folge, dass sich die im Wasser gelösten Verschmutzungspartikel durch Diffusion homogen in der gesamten Leitung verteilen. Steht diese jedoch unter Betrieb, erhalten die Partikel durch die nun herrschende Strömung einen Drift in paralleler Richtung. Die Verteilung der Mineralien in der Wasserleitung ist nun nicht mehr homogen.

Im allgemeinen Fall wirkt sich die Advektion durch ein Geschwindigkeitsfeld auf den Strom J in folgender Weise aus:

$$J = -D \nabla \rho + V(\mathbf{x}, t) \rho \quad (2.4)$$

Dies führt zu der Reaktions-Diffusions-Gleichung:

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot [D \nabla \rho - V(\mathbf{x}, t) \rho] + f(\rho, \mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Advektion lässt sich weiterhin in zwei verschiedenen Kategorien einordnen. Es wird von passiver Advektion gesprochen, wenn ein externes Feld $V(\mathbf{x}, t)$ anliegt, welches nicht von den einzelnen Komponenten der Reaktions-Diffusions-Gleichungen abhängt. Besteht eine Abhängigkeit von den Konzentrationen der Komponenten $V(\mathbf{x}, t, \rho)$, so wird diese Form von Advektion als aktiv bezeichnet [20].

2.2 Ein statistisches Modell für kriminelles Verhalten

Die Größen, des in dieser Arbeit zu Grunde liegenden Modells, sind die Kriminalität und die Attraktivität für Kriminalität. Diese Attraktivität besteht nicht nur aus einer statischen, sondern auch aus einer dynamischen Komponente die nur aus dem Verhalten der Kriminalität hervorgeht. Dieser Dynamik basiert auf den sozialwissenschaftlichen “Broken-Windows-Effekt”[18].

Der Broken-Windows-Effekt besagt, dass an Orten und ihrer unmittelbarer Umgebung die Attraktivität für potentielle Kriminalität dann steigt, wenn bereits Kriminalität an diesem Ort stattgefunden hat. Wiederholte Kriminalität führt somit zur Steigung der Attraktivität für weitere Kriminalität. Diese dynamische Komponente sinkt zeitlich ab.

Die Validität des Effektes wurde statistisch von Short et al.[19] mit Daten realer Verbrechen unterstützt. Bildlich gesprochen ist es somit wahrscheinlicher, dass in ein Haus eingebrochen wird, welches zerbrochene Fenster besitzt. Ein weiteres Beispiel wäre, dass Personen, die durch ein Erleiden eines vorherigen Verbrechen schutzlos wirken, eher ausgeraubt werden. Diese dynamische Komponente der Attraktivität ermöglicht, selbst bei homogener Verteilung der statischen Attraktivität, das Entstehen und die Dynamik von lokalisierten Strukturen der Attraktivität und der Anzahl an Kriminellen. Die Strukturen in denen eine relativ zur Umgebung hohe Ansammlung von Kriminalität zu erkennen ist, werden als kriminelle Hotspots bezeichnet.

Die Modellgleichungen des Systems wurden in “A statistical model of criminal behavior”[18] von M.B. Short et al. aus einem diskreten Modell, dass auf dem Broken-Windows-Effekt

basiert hergeleitet. Diese beschreiben zum einen die zeitliche Entwicklung der räumlich ausgedehnten Attraktivität $A(\mathbf{x}, t)$ und zum anderen die Dichte an Kriminellen bzw. Kriminalität $\rho(\mathbf{x}, t)$. Die Variable \mathbf{x} beschreibt hier die Position in einem zweidimensionalen Raum. Die Untersuchungen dieser Arbeit beschränken sich jedoch auf eine räumliche Dimensionen x . Diese Differentialgleichungen besitzen folgende reduzierte dimensionslose Form:

$$\partial_t A = \epsilon^2 \nabla^2 A - A + \rho A + \alpha \quad (2.6)$$

$$\partial_t \rho = D \nabla \left(\nabla \rho - 2\rho \frac{\nabla A}{A} \right) - \rho A + \gamma - \alpha \quad (2.7)$$

Die Gleichung für die kriminelle Attraktivität (2.6) lässt sich durch die Normalform (2.3) klassifizieren. Die Variable der Attraktivität A entspricht wie Dichten oder Konzentrationen der räumlichen Verteilung einer Größe. Der Parameter ϵ^2 lässt sich als Diffusionskonstante der Attraktivität identifizieren. Wir erkennen also, dass durch den Broken-Windows-Effekt die Attraktivität durch den Raum diffundiert. Es lässt sich der reaktive Term

$$f_A = -A + \rho A + \alpha \quad (2.8)$$

ablesen. Der Term ρA beschreibt die Rate des Auftretens von Kriminalität. Die Kriminalitätsrate führt somit, wie durch den Broken-Windows-Effekt beschrieben, zur Steigerung der Attraktivität. Die Attraktivität nimmt durch $-A$ exponentiell ab bis zu der Basis Attraktivität α . Über den Parameter α wird die statische Komponente der Attraktivität festgelegt. Diese ist beschränkt auf das Intervall von null bis eins, $0 \leq \alpha \leq 1$.

In Anwendungsbeispielen kann die Basis-Attraktivität räumlich modifiziert werden, um z.B. das Modell an geographische Umgebungsbedingungen anzupassen. Dadurch würde aber die Muster- und Strukturbildung durch die Geographie beeinflusst werden. Um die Effekte des Modells somit isoliert zu betrachten, wird in dieser Arbeit die Basis-Attraktivität als räumlich homogen angenommen. Der Broken-Windows-Effekt wird somit in allen Aspekten durch Gleichung (2.6) simuliert.

Nun wird die Dichte der Kriminellen ρ (Gl. (2.7)) betrachtet. Diese besitzt einen Reaktionsterm der Form

$$f_\rho = -\rho A + \gamma - \alpha. \quad (2.9)$$

Während die Kriminalitätsrate ρA dazu führt, dass die Attraktivität steigt, senkt sie die Dichte der Kriminellen. Dies resultiert aus der Annahme, dass Kriminelle von dem Tatort fliehen. Der Term $\gamma - \alpha$ fungiert als konstante Rate, mit der Kriminelle generiert werden. Es gilt zwischen den Parametern folgende Beziehung: $0 \leq \alpha < \gamma \leq 2$. Die Bedeutung des Parameters γ selbst ist die Attraktivität im homogenen Zustand. Der homogene Zustand wird an spätere Stelle näher diskutiert. Da $\gamma > \alpha$ vorausgesetzt wird, erhöht sich somit die Dichte.

Während sich D eindeutig als Diffusionskonstante identifizieren lässt, scheint der Rest des Diffusionsterm jedoch nicht der Normalform zu entsprechen. Somit nimmt der Kriminellenfluss

$$J_\rho = -D \left(\nabla \rho - 2\rho \frac{\nabla A}{A} \right) \quad (2.10)$$

eine nichtlineare Form an. Diese wird durch Advektion (vgl. GL. (2.5)) beschreiben. Für die Gleichung (2.7) lässt sich somit das Geschwindigkeitsfeld

$$V_\rho(A, \nabla A, x, t) = 2D \frac{\nabla A}{A} = 2D \nabla \ln(A) \quad (2.11)$$

der aktiven Advektion der Dichte der Kriminellen aufstellen. Die Dichte der Kriminellen diffundiert somit ebenfalls durch den Raum, mit der Diffusionskonstante D , während

sie zusätzlich eine aktive Advektion in Richtung des Gradienten des natürlichen Logarithmus der Attraktivität erfährt. Die Kriminalität bewegt sich somit in Richtung hoher Attraktivität.

Da das Modell der Chemotaxis Ähnlichkeiten mit dem Modell für Kriminalität besitzt, bietet sich an dieser Stelle ein Vergleich an.

2.3 Vergleich zur Chemotaxis

Das Modell der Chemotaxis beschreibt das Verhalten von Organismen, die Dynamik dadurch erfahren, dass sie eine Änderung einer Konzentration auslösen [9].

Ein anschauliches Beispiel dafür sind Amöben, die sich von Bakterien in einem Substrat ernähren. Unter dem Substrat versteht man den Raum auf dem sich die Amöben bewegen. Die Amöben sind im Falle einer Sättigung der Populationen der Bakterien homogen verteilt. Liegt jedoch ein Mangel an Bakterien vor, ein Nahrungsangebot, so verhalten sich die Amöben auf eine Weise, die dem vorgestellten Modell für Kriminalität phänomenologisch bereits stark ähnelt.

Die Amöben beginnen eine bestimmte Chemikalie zu sekretieren. Diese Chemikalie wirkt anziehend auf andere Amöben und diffundiert selbst [14]. Wie im Modell der Kriminalität wird durch eine diffundierende Komponente die Konzentration einer anderen diffundierenden Komponente erhöht, welche einen Drift der vorherigen Komponente zu der Konzentration der zweiten Komponente auslöst. Das Verhalten von Verbrechern und Amöben wirkt aus dieser Sichtweise äußerst ähnlich.

Die folgende Betrachtung bezieht sich auf eine Raumdimension. Es werden die Konzentration an Amöben nun $a(x, t)$, sowie die des Sekretes $c(x, t)$ benannt. Zu Grunde liegen folgende Reaktions-Diffusions-Gleichungen mit Stromdichten $J_{1,2}$ und Reaktionsterm $f(a, c)$:

$$\partial_t a = -\nabla J_1 = -\nabla(J_{diff} + J_{chem}), \quad (2.12)$$

$$\partial_t c = -\nabla J_2 + f(a, c) = D_c \nabla^2 c + sa - kc. \quad (2.13)$$

Anders als die Kriminalitätsdichte besitzt die Reaktions-Diffusions-Gleichung der Amöbenkonzentration (2.12) nun keinen Reaktionsterm. Die Gesamt-Anzahl an Amöben ändert sich somit nicht in diesem Modell. Das Sekret diffundiert mit der Konstante D_c , während es mit der Sekretionsrate s von den Amöben ausgestoßen wird und mit der Konstante k zerfällt [14]. Die Amöben diffundieren mit $J_{diff} = -D_a \nabla a$ und erfahren eine chemotaktische Advektion, durch das Geschwindigkeitsfeld V_{chem} mit der Konstante v :

$$V_{chem} = v \nabla c. \quad (2.14)$$

Die Geschwindigkeitsfelder (2.14) und (2.11) weisen nun eine ähnliche Form auf, mit dem Unterschied, dass die Kriminalitätsdichte den Logarithmus der anderen Komponente beinhaltet. Deswegen wird der advektive Term der Kriminalitätsdichte in der Literatur oft als chemotaktischer Driftterm bezeichnet [12]. Somit ist die Beschreibung der Terme der Hauptgleichungen (2.6), (2.7) vollständig.

Kapitel 3

Numerische Näherungsverfahren

Um das Modell simulieren zu können werden einige Operatoren benötigt, die durch die Programmierumgebung nicht oder in nicht zufriedenstellender Form implementiert sind. Da in den Hauptgleichungen (2.6),(2.7) einige Ableitungsoperatoren vorkommen ist ein geeignete Methode zur Implementierung der Ableitung nötig, die im idealen Fall wenig Rechenleistung benötigt. Abhilfe schafft die Fouriertransformation. Die räumliche Ableitung im Spektralraum erfolgt simpel über eine Multiplikation mit dem Wellenvektor. Außerdem ist es für die Lineare Stabilitätsanalyse notwendig verallgemeinerte Operatoren der Ableitung selbst zu implementieren. Dies gelingt über finite Differenzen. Zuletzt ist es notwendig ein geeignetes Integrationsverfahren zu wählen. Dieses soll nun zuerst beschrieben werden.

3.1 Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren

Ein Runge-Kutta-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Einer Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = d_t \mathbf{y}$ wird so eine erzeugende Funktion $\Phi(t, \mathbf{y}(t); h; \mathbf{f})$ zugeordnet, $\mathbf{y}, \Phi, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. Für Anfangswerte $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ gibt Φ eine Näherung der Lösung der Differentialgleichung für einen Integrationsschritt h . Im Falle einer zeitlichen Integration erhält man somit eine Näherung der Lösung zu dem Zeitpunkt $t_0 + h$. Die erzeugende Funktion Φ für ein s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren ist folgendermaßen definiert [21]:

$$\Phi(t_0, \mathbf{y}(t_0); h; \mathbf{f}) = \mathbf{x}_0(t_0 + h) := c_1 k_1 + \cdots + c_s k_s, \quad (3.1)$$

mit den Koeffizienten

$$k_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0), \quad (3.2)$$

$$k_2 = \mathbf{f}(t_0 + \alpha_2 h, \mathbf{y}_0 + h\beta_{21} k_1), \quad (3.3)$$

$$k_3 = \mathbf{f}(t_0 + \alpha_3 h, \mathbf{y}_0 + h(\beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)), \quad (3.4)$$

$$\vdots \quad (3.5)$$

$$k_s = \mathbf{f}(t_0 + \alpha_s h, \mathbf{y}_0 + h(\beta_{s1} k_1 + \cdots + \beta_{s,s-1} k_{s-1})). \quad (3.6)$$

Den Koeffizienten werden Zahlenwerte zugeordnet die sich aus der Herleitung des Verfahrens ableiten. In der Anwendung werden diese aus so genannten Butcher Tableaus 3.1 abgelesen [21].

	0				
α_2		β_{21}			
α_3		β_{31}	β_{32}		
\vdots		\vdots		\ddots	
α_s	β_{s1}	β_{s2}	\cdots	$\beta_{s,s-1}$	
	c_1	c_2	\cdots	c_{s-1}	c_s

Tabelle 3.1: Allgemeine Form des Butcher Tableaus

Der Diskretisierungsfehler des Runge-Kutta-Verfahrens hängt von der Schrittweite ab. Eine Verringerung von dieser würde auch einen verringerten Fehler hervorrufen. Kleinere Schrittweiten bedeuten jedoch auch einen höheren Rechenaufwand. Es gilt somit ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit des Verfahrens und dem Rechenaufwand einzugehen. In der Praxis bietet es sich an die Schrittweite h dynamisch zu wählen. Die Basis dieser Idee schlug E. Fehlberg 1969 [7] in der Anwendung zur Lösung des Wärmeleitungsproblems vor. Die Idee dieses Verfahrens ist die Fehlerabschätzung einer gewählten Schrittweite und die Variation dieser, sollte der abgeschätzte Fehler ϵ über oder unter einer gewählten Toleranz ϵ_0 liegen. Der abgeschätzte Fehler ϵ bildet sich aus der Differenz der Ergebnisse jeweils einer Iteration des Runge-Kutta-Verfahrens in vierter \mathbf{y}_4 und fünfter Ordnung \mathbf{y}_5

$$\epsilon = |\mathbf{y}_4 - \mathbf{y}_5|. \quad (3.7)$$

Die neue Schrittweite h^* ist nun definiert als:

$$h^* = \begin{cases} \beta h \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{1/p+1}, & \epsilon \geq \epsilon_0 \\ \beta h \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{1/p}, & \epsilon < \epsilon_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Der Parameter p beschreibt hier die Ordnung des Diskretisierungsfehlers und ist in diesem Anwendungsfall $p = 4$. Während β ein Anpassungsfaktor ist mit dem die Schrittweite in der Anwendung oft modifiziert wird [21]. In den Simulationen dieser Arbeit, wurde $\beta = 0.85$ und $\epsilon_0 = 10^{-8}$ gewählt. Es wurde folgendes Butcher Tableau in Tabelle 3.2 verwendet.

0	0				
1/4	1/4				
3/8	3/32	9/32			
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197		
1	439/216	-8	3680/513	-845/4101	
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4101	-11/40
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5
	16/135	0	656/12825	28561/56430	-9/50
					2/55

Tabelle 3.2: Butcher Tableaus des RKF45 Verfahrens [7]

3.2 Pseudo-Spektralmethode

Die in der numerischen Berechnungen auftretenden Ableitungen werden implementiert mit Hilfe einer Pseudo-Spektralmethode. Dies ist zum einen nützlich, da die räumliche Ableitung einer Funktion $f(x)$ im Spektralraum simpel durch Multiplikation mit dem Wellenvektor k definiert ist

$$\partial_x f = \mathcal{F}^{-1}[ikF] = \mathcal{F}^{-1}[ik\mathcal{F}[f]]. \quad (3.9)$$

Dabei steht \mathcal{F} für die Fouriertransformation und \mathcal{F}^{-1} für die Inverse. F impliziert die Fouriertransformierte von f . Das Verwenden solcher Methoden suggeriert die benötigten periodischen Randbedingungen [4]. Zu Grunde liegen Algorithmen, die für die diskreten Felder $f_n = f(nL/N)$ der Simulationen eine diskrete Fouriertransformation (DFT) zu F_n und eine inverse diskrete Fouriertransformation (IDFT) ausführen. Dabei ist N die Anzahl an Gitterpunkten und L die Domainlänge.

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \quad (3.10)$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_n e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \quad (3.11)$$

Der Vorteil ist, dass die Anzahl an Rechenoperation der schnellen Fouriertransformationsalgorithmus (FFT), mit $O(N \log N)$ Operationen, geringer als die der regulären Fouriertransformation $O(N^2)$ ist [3].

Analytisch gesehen wird eine trigonometrische Interpolation minimaler Oszillationen von $f(x)$ durchgeführt durch den Aliasing Effekte minimiert werden [11].

$$f(x) = F_0 + \sum_{0 < k < N/2} \left(F_k e^{\frac{2\pi i}{L} kx} + F_{N-k} e^{-\frac{2\pi i}{L} kx} \right) + F_{N/2} \cos\left(\frac{\pi}{L} Nx\right) \quad (3.12)$$

Zu vermerken ist das Verhalten des Nyquist Terms $F_{N/2}$ bei der Differenzierung von (3.12), da dadurch zwei verschiedene Operationen für die erste und zweite Ableitung zu implementieren sind. Damit gilt für die diskreten Ableitungen ($x=nL/N$):

$$f'_n = \sum_{0 < k < N/2} \frac{2\pi i}{L} k \left(F_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} - F_{N-k} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \right) \quad (3.13)$$

$$f''_n = - \sum_{0 < k < N/2} \left[\frac{2\pi}{L} k \right]^2 \left(F_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} + F_{N-k} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \right) - (-1)^n \left[\frac{\pi}{L} N \right]^2 F_{N/2} \quad (3.14)$$

Zu erkennen ist, dass in der ersten Ableitung der Nyquist Term mit $\sin(\pi n) = 0$ verschwindet, für die zweite jedoch nicht. Somit gilt nicht der oft intuitive Ansatz, die erste Ableitung ein zweites mal abzuleiten, um die zweite Ableitung zu erhalten,

$$(f'_n)' = - \sum_{0 < k < N/2} \left[\frac{2\pi}{L} k \right]^2 \left(F_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} + F_{N-k} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \right) \neq f''_n. \quad (3.15)$$

3.3 Finite Differenzen

In der numerischen linearen Stabilitätsanalyse wird ein Eigenwertproblem gelöst bei dem Differenzierungsoperatoren auftauchen. Diese werden implementiert durch finite Differenzen. Wir gehen von einer diskretisierten Funktion $f(x_i)$ mit einer Anzahl von N Stützstellen x_i ,

$$x_i = (i-1)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{L}{N-1} \quad (3.16)$$

auf einer Domain der Länge L aus, wobei anzumerken ist, dass sich $i = 1 \dots N$ periodisch verhält. Die finiten Differenzen lassen sich herleiten über die Taylorentwicklung von $f(x)$ an der Stelle x_i [4]. Es folgen somit die ersten beiden Ableitungen in einer Dimension:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{1}{2\Delta x} (f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})) + O(\Delta x^2) \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{1}{\Delta x^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) + O(\Delta x^2) \quad (3.18)$$

Wichtig ist es, periodische Randbedingungen nun Manuell zu implementieren, da keine Spektralmethode in der linearen Stabilitätsanalyse benutzt wird.

Kapitel 4

Turing-Instabilität

4.1 Instabilitätskriterium

In diesem Kapitel soll ein Kriterium hergeleitet werden, dass angibt für welche Parameter in des Systems (2.6),(2.7) Hotspots auftreten. Zuerst wird die Turing-Instabilität diskutiert welches als historisches und hineinleitendes Beispiel dient. Danach wird eine ähnliche lineare Stabilitätsanalyse des homogenen Zustandes auf das Modell für Kriminalität angewandt. Anzumerken ist, dass eine Linearisierung in der Anwendung auf das Modell stattfindet und nur in diesem Rahmen Gültigkeit besitzt.

4.1.1 Turing-Instabilität

Diffusion galt stets als ein Phänomen, dass zu der Homogenität eines Systems führt. A. Turing stellte 1952 ein Modell auf, welches Musterbildung, sprich Inhomogenitäten, von zwei diffundierenden und reagierenden Chemikalien voraussagte [23]. Solche Systeme lassen sich nun durch die Grundgleichungen von Reaktions-Diffusions-Systemen zweier gekoppelter Komponenten ausdrücken,

$$\partial_t u = D_u \nabla^2 u + f(u, v), \quad (4.1)$$

$$\tau \partial_t v = D_v \nabla^2 v + g(u, v). \quad (4.2)$$

Bei den Komponenten handelt es sich im Falle der Betrachtung von Turing, um zwei chemische Stoffe u und v . Die Funktionen $f(u, v)$ und $g(u, v)$ stehen für die chemischen Reaktionen dieser Stoffe, während die Diffusion durch die linearen Diffusionsterme $D_u \nabla^2 u$ und $D_v \nabla^2 v$ mit den jeweiligen positiven Diffusionskonstanten D_u, D_v beschrieben wird. Der Parameter τ entspricht einem gewählten zeitlichem Skalenverhältnis zwischen den beiden Reaktanten. Anhand der Jacobimatrix

$$(\partial_u \quad \partial_v) \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

lassen sich nun, wenn die Bedingung $f_u > 0$ und $g_v < 0$ erfüllt ist, die jeweiligen Reaktanten als Inhibitor v und Aktivator u identifizieren. Aktivatoren verursachen einen Anstieg, während Inhibitoren eine Verringerung der Konzentrationen auslösen [10].

Nun gilt es die zeitliche Stabilität eines solchen Systems zu bestimmen. Es werden die Lösungen der Reaktions-Diffusions-Gleichungen in ihre homogenen Teile \bar{u}, \bar{v} , sowie kleiner

Abweichungen $|\tilde{u}| \ll 1$, $|\tilde{v}| \ll 1$ aufgeteilt, $u = \bar{u} + \tilde{u}$, $v = \bar{v} + \tilde{v}$. Durch die Betrachtung der Fouriermoden der Abweichung,

$$\tilde{u}(x, t) = \delta_u e^{ik \cdot x + \sigma t} + c.c. \quad (4.3)$$

$$\tilde{v}(x, t) = \delta_v e^{ik \cdot x + \sigma t} + c.c. \quad (4.4)$$

können Eigenschaften über die Stabilität abgeleitet werden [10]. Diese sind abhängig von komplexen Konstanten δ_u , δ_v und der Wellenzahl k . Der Eigenwert σ beschreibt somit die Stabilität des Systems. Es lässt sich eine Dispersionsrelation zwischen den Eigenwerten σ und den Wellenzahlen k aufstellen, die Auskunft gibt für welche Moden von k der Eigenwert σ das Vorzeichen wechselt. Ist der Eigenwert σ negativ, so ist die Lösung für diese Moden stabil, sowie instabil für positive Werte des Eigenwertes.

4.1.2 Lineare Stabilitätsanalyse des homogenen Zustands

Nun soll das Verfahren des Vorherigen Abschnittes angewandt werden, damit bestimmt werden kann für welche Parameter Hotspots entstehen können.

Die Hauptgleichungen (2.6),(2.7) besitzen nicht die selbe Form wie Gleichungen (4.1) und (4.2). Bei Betrachtung der Gleichungen der Attraktivität und Kriminellendichte kann keine Unterscheidung zwischen Aktivator und Inhibitor gemacht werden, da die Diffusion der Dichte der Kriminellen Nicht-Linearitäten enthält. Trotzdem wird das Entstehen von Hotspots in mancher Literatur als Turing-Instabilität bezeichnet [12].

Hotspots sollen definiert werden als signifikante Abweichungen von der räumlich homogenen Lösung ($\nabla \bar{A} = 0$, $\nabla \bar{\rho} = 0$). Zusätzlich wird davon ausgegangen, dass nur Systeme im Gleichgewichtszustand ($\partial_t A = 0$, $\partial_t \rho = 0$) betrachtet werden. Aus diesen Annahmen folgt aus den Hauptgleichungen des Systems (2.6),(2.7) folgende Lösungen für die Homogenen Zustände:

$$\bar{A} = \gamma, \quad \bar{\rho} = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma}. \quad (4.5)$$

Zu vermerken ist, dass diese nicht von den Diffusionskonstanten ϵ^2 und D abhängen. Für eine kleine Abweichungen $|\delta_{A,\rho}| \ll 1$ von diesen homogenen Lösungen wird, äquivalent zu Turing-Instabilitäten, eine lineare Stabilitätsanalyse angewandt. Diese Abweichungen oder Störungen werden als Fouriermoden mit der Wellenzahl k und dem Eigenwert σ ausgedrückt. Es bilden sich somit folgende Lösungsansätze:

$$A(x, t) = \bar{A} + \delta_A e^{ik \cdot x + \sigma t} \quad (4.6)$$

$$\rho(x, t) = \bar{\rho} + \delta_\rho e^{ik \cdot x + \sigma t} \quad (4.7)$$

Es wird für beide Gleichungen dieselbe Wellenzahl benutzt, da Störungen verschiedener Moden mit der Zeit verschwinden [18]. Durch Einsetzen in die Hauptgleichungen (2.6),(2.7) und einer Linearisierung durch Vernachlässigung von Termen der Ordnung δ_A^2 , δ_ρ^2 , $(\delta_A \cdot \delta_\rho)$, erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} \sigma = \begin{bmatrix} -\epsilon^2 k^2 - 1 + \bar{\rho} & \bar{A} \\ \frac{2k^2 D \bar{\rho}}{A} - \bar{\rho} & -Dk^2 - \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Alle Lösungen mit positivem Eigenwert σ bedeuten eine zeitlich ansteigende Abweichung vom homogenen Zustand und führen zu einem oder mehreren Hotspots. Dies ist der Fall, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix in (4.8) negativ ist [18]. Für negative Determinanten gilt somit die folgende Ungleichung:

$$k^4 \epsilon^2 D - k^2 (3\bar{\rho}D - \epsilon^2 \bar{A} - D) + \bar{A} < 0 \quad (4.9)$$

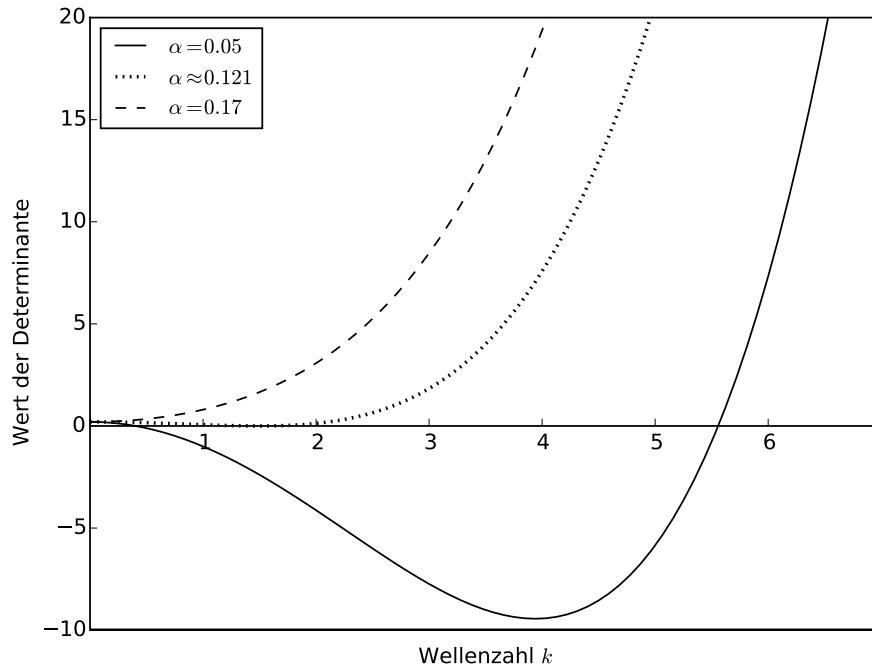


Abbildung 4.1: Determinante der Koeffizientenmatrix gegen Wellenzahl k aufgetragen; für Parameter $\gamma = 0.2$, $\epsilon = 0.2$, $D = 1$; $\alpha = 0.05$ innerhalb des Kriteriums in durchgezogener Linie, $\alpha = 0.17$ außerhalb des Kriteriums in gestrichelter Linie und $\alpha \approx 0.12$ im Grenzfall in gepunkteter Linie

Diese Ungleichung gilt nur für ein endliches Band an Wellenzahlen. Dies ist in Abbildung 4.1 verdeutlicht. Es wurden die Determinante in Abhängigkeit zur Wellenzahl k für drei verschiedene Fälle aufgetragen. Bei diesen wurde der Parameter α so variiert, dass Instabilität, Stabilität und ein Grenzfall vorliegt. Für den instabilen Fall ist das endliche Band an negativen Werten zu erkennen. Analytisch wird der Bereich des endlichen Bandes durch eine Extremalwertbetrachtung für die Determinante bestimmt. Es findet sich somit ein Wert für das Minimum von:

$$k^2 = \frac{3\bar{\rho}D - \epsilon^2\bar{A} - D}{2\epsilon^2D}$$

Setzt man diesen wieder in die Gleichung (4.10) ein, so erhält man eine Ungleichung, die nur von den Parametern der Differentialgleichungen abhängen.

$$D(3\bar{\rho} - 1) - \epsilon^2\bar{A} > 2\epsilon\sqrt{D\bar{A}} \quad (4.10)$$

Ist diese erfüllt, so sind Hotspots in den Lösungen der Differentialgleichungen zu erwarten.

4.2 Numerisches Beispiel

Es wurde eine numerische Berechnung durchgeführt um das Kriterium für die Entstehung von Hotspots zu zeigen. Dafür wurden eine Reihe an Lösungen der Hauptgleichungen (2.6), (2.7) angefertigt, bei dem der Parameter α erhöht wurde. Jede Lösung benutzt die Vorherige als Anfangswerte, während für die erste Lösung Anfangswerte in zufälliger

Verteilung um die homogene Lösung gewählt wurde. Zusätzlich werden die vorherigen Lösungen, die als Anfangswerte dienen, minimal gestört, damit sich der Zustand wechseln kann. Es wurde die L^2 -Norm der Funktionen der Form $\phi(x)$,

$$L^2(\phi(x)) = \int_0^L \phi(x)^2 dx \quad (4.11)$$

für die Attraktivität A jeder Lösung berechnet und in Abhängigkeit zu dem variierenden Parameter α in Abbildung 4.2 aufgetragen.

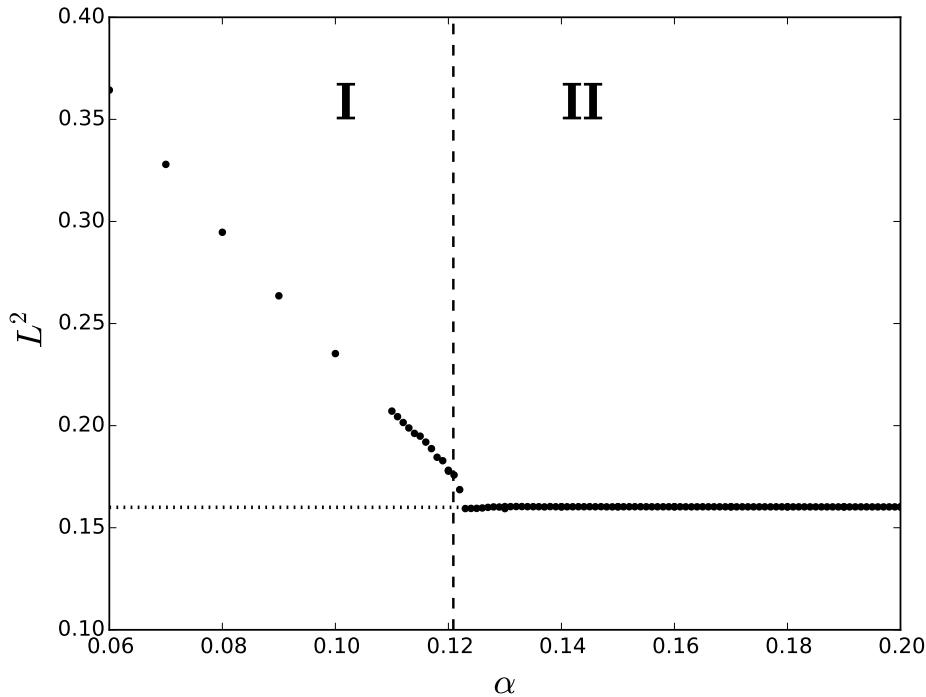


Abbildung 4.2: Auftragung der Verringerung von α gegen die L^2 -Norm der Attraktivität; Die horizontale Linie entspricht dem homogenen Zustand; Die vertikale Linie entspricht der Schwelle zwischen Turing-Stabilität II und -Instabilität I

Das Koordinatensystem ist durch eine vertikale Linie getrennt. Diese liegt auf dem Wert von α für den, nach dem Kriterium (4.10), ein Übergang zwischen der homogenen Lösung II und Lösungen die Hotspots ausbilden I bestimmt ist. Die L^2 -Norm der homogenen Lösung wurde ebenfalls als horizontale Linie aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass sich der homogene Zustand als Lösung bildet, sobald der Parameter α das Kriterium deutlich erfüllt, die Lösungen also die vertikale Linie übertritt. Aufgrund der Linearisierung in Gleichung (4.8) ist der eigentlich nichtlineare Übergang in den Homogenen Zustand nicht exakt beschrieben. Man erhält noch Hotspot-Lösungen unmittelbar nach und auf der vertikalen Linie.

Eine Simulation, mit der ungestörten homogenen Lösung der Attraktivität als Anfangswerte, würde unter Variation des Parameters α (wie auch für alle anderen Parameter außer γ , siehe Gleichung (4.5)) diese homogene Lösung nicht verändern. Diese Option kann als ein Ast, in Abbildung 4.2 als vertikale gepunktete Linie, angesehen werden. Werden nun kleine Störungen in die Simulation implementiert, wird für Werte von α im Bereich I,

der Ast der homogenen Lösung instabil. Dabei bildet sich nun ein neuer Ast an stabilen Lösungen. Diese Aufspaltung bzw. Zerstörung oder Entstehen von Ästen oder Trajektorien der Fixpunkte, wie sie im Phasenraum bezeichnet werden, wird als Bifurkation bezeichnet [22]. Es ist unklar um welche Bifurkation es sich handelt, da hier die L^2 Norm betrachtet wird und nicht eine einzige Variable. Um diese exakt zu klassifizieren, sind Numerische Betrachtungen zwar richtungsweisend, aber nicht ausreichend. Stattdessen muss analytisch von den Gleichungen (2.6), (2.7) auf die Normalform der jeweiligen Bifurkation geschlossen werden.

Es wurden aus jedem Bereich jeweils eine Lösung der Attraktivität in Abbildung 4.3 aufgetragen. Links I ist eine Ein-Hotspot-Lösung zu erkennen, während rechts II die homogene Lösung aufgetragen ist. Bis auf α wurden die gleichen Parameter wie in Abbildung 4.1 gewählt. Für $\bar{A} = \gamma = 0,2$ ist also die homogene Lösung II in Abbildung 4.3 den Erwartungen entsprechend.

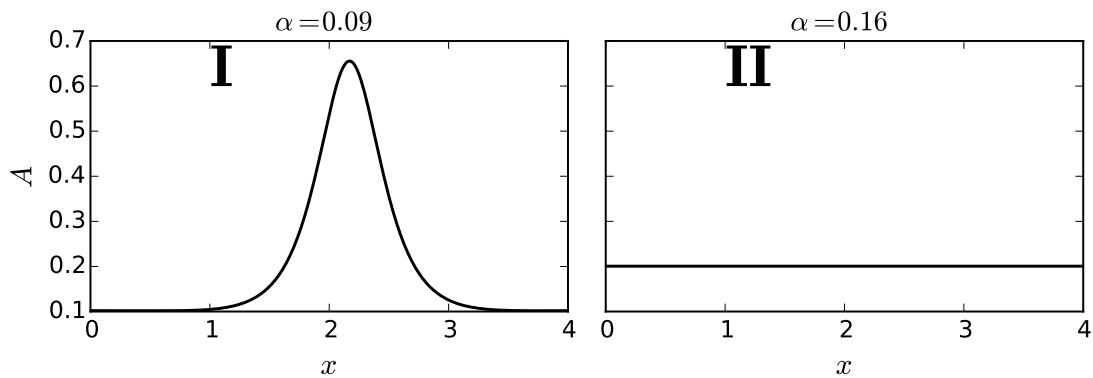


Abbildung 4.3: Hotspot Lösung I und homogene Lösung II der Attraktivität für verschiedene Werte von α

Kapitel 5

Numerische Untersuchungen des Phasenraums

Im Folgenden wird der Einfluss der Parameter auf die stationären Zustände des Systems untersucht. Dies erfolgt über numerische Simulationen des Anfangswertproblems der partiellen Differentialgleichungen (2.6),(2.7) . Die L^2 -Norm (vgl. Gl. (4.11)) der näherungsweise stationären Zustände wird in Abhängigkeit der Variation eines Parameters betrachtet. Dies gibt Aufschluss über das Verhalten der stationären Lösungen im Phasenraum, speziell über Strukturen wie Bifurkationen oder homogene Zustände.

5.1 Variation der Parameter

Es werden nun Reihen an Simulationen durchgeführt, jede mit der Variation eines unterschiedlichen Parameters. Begonnen wird mit dem kleinsten Wert des zu variierenden Parameters, der numerisch Simuliert werden kann ¹ und sich im vorbestimmten Bereich (siehe Kapitel 2) befindet. Dieser wird nach jeder Simulation erhöht, bis das Ende des Parameterbereichs erreicht wurde. Danach wird der Parameter verringert, bis der initiale Wert des Parameters erreicht wurde. Durch Variation in positiver sowie negativer Richtung soll somit ein Teil des Phasenraums untersucht werden. Dabei werden positive Variationsrichtungen mit \uparrow und negative mit \downarrow gekennzeichnet.

Das Ziel jeder einzelnen Simulation ist es, die L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA des erreichten Zustandes zu berechnen und in Abhängigkeit des Parameters darzustellen.

Die initialen Anfangswerte einer Simulationsreihe bilden sich durch zufällig gestörte homogene Zustände \bar{A}' , $\bar{\rho}'$. Nach jeder weiteren Variation wird die Lösung der vorherigen Simulation ebenfalls zufällig gestört. Die Störung eines Zustandes ist nötig, da verhindert werden soll, dass instabile Zustände bestehen bleiben. Würde z.B. der homogene Zustand nicht gestört werden, so bliebe er für jeden Wert des Parameters bestehen. Erst durch die kleine Störung wird die Stabilität des Zustands deutlich.

Wie in Kapitel 3 beschrieben, werden für die Simulation das Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren, sowie für Ableitungen ein Pseudospektralverfahren verwendet. Die Anzahl an Iterationen des Runge-Kutta-Fehlberg Verfahrens ist so hoch, dass ein stationärer Zustand

¹In manchen Grenzfällen, wie sehr kleine Parameter, benötigen die Simulationen eine zu große Anzahl an Iterationen. Deswegen wird oft nicht mit der unteren Grenze des Bereichs begonnen.

erreicht wird, $\partial_t A = 0$, $\partial_t \rho = 0$. Numerisch ist es ratsam eine untere Schranke bzw. ein Abbruchkriterium einzuführen, da ein exakter Wert von null numerisch meist nicht erreichbar ist oder einen zu hohen Rechenaufwand darstellen würde. Das Abbruchkriterium kann an die benötigte Genauigkeit der jeweiligen Betrachtung angepasst werden. Für die Untersuchungen in diesem Kapitel ist es ausreichend, wenn die zeitlichen Ableitungen $\partial_t A$ und $\partial_t \rho$ eine Ordnung von $O(10^{-3})$ erreichen.

Dieses Kriterium tritt in den meisten Fällen in Kraft. In wenigen Fällen wird kein stationärer Zustand erreicht, da das System für gewisse Parameterbereiche zu Oszillationen neigt. Es wird deswegen eine Obergrenze an Iterationen eingeführt, damit die Simulationen nicht unendlich lang fortgesetzt werden. Auf die Fälle in denen die stationären Zustände nicht erreicht wurden wird spezifisch eingegangen.

Dieser Fall kann eintreten, wenn das System eine Hopfbifurkation (oder ähnliche Oszillationen) durchführt, durch die das System nicht (oder stark verspätet) einen stationären Zustand einnimmt. In Punktformigen Systemen sind Hopfbifurkationen an oszillatorischen Übergängen von Fixpunkten zu elliptischen Grenzzyklen, bei Variation der Parameter, im Phasenraum erkennbar. Die linearisierte Jacobi-Matrix des Systems besitzt, im Falle einer Hopfbifurkation, zwei rein imaginäre, komplex konjugierte Eigenwerte [22]. In ausgedehnten Systemen wie diesem ist die Klassifikation etwas komplexer. Dies wird in Kapitel 7 erneut aufgegriffen.

Die Betrachtung wird auf einen bestimmten Parametersatz limitiert. Dieser ist in Tabelle A.1 dargestellt. Außerdem wurden in den numerischen Berechnungen eine Domainlänge $L = 12$ und eine Anzahl an Stützstellen von $N = 128$ benutzt.

5.1.1 Homogene Attraktivität γ

Zunächst werden die Ergebnisse der Variation der homogenen Attraktivität γ vorgestellt. Da $\gamma - \alpha$ die Rate der Generation von Kriminellen darstellt, wäre eine Steigung der Kriminalitätsrate ρA , bei einer Erhöhung des Parameters γ naheliegend.

Die Ergebnisse für die Variation der homogenen Attraktivität sind in Abbildung 5.2 dargestellt. In dem Intervall $\gamma \in [0.13, 2]$ werden nach dem Kriterium (4.10) keine homogenen Lösungen erwartet und gefunden. Eine Erhöhung des Parameters von $\gamma = 0.1$ bis auf $\gamma = 2$, in Abständen von $\Delta\gamma = 0.01$, bewirkt einen großteils stetig wirkenden Verlauf der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate. Die Verringerung des Parameters bewirkt nahezu gleiche Werte der L^2 -Norm wie Abbildung 5.2 zu erkennen ist.

Dies ist nicht der Fall im Bereich von $(0.11, 0.14)$. In positiver Richtung bildet sich eine Zwei-Hotspot Lösung für $\gamma = 0.11 \uparrow$. Durch einen unstetigen Sprung in Abbildung 5.2 ist zu sehen, dass ab $\gamma = 0.14 \uparrow$ sich eine Drei-Hotspot Lösung bildet, welche für die weitere Variation bestehen bleibt. Somit existieren für $\gamma = 0.14$ zwei verschiedene Lösungen des gleichen Parametersatzes. Die Eigenschaft der Existenz von zwei stabilen Zuständen eines Systems wird als Bistabilität bezeichnet [15]. Die Lösungen der zuvor beschriebenen Parameter sind in Abbildung 5.3 aufgetragen.

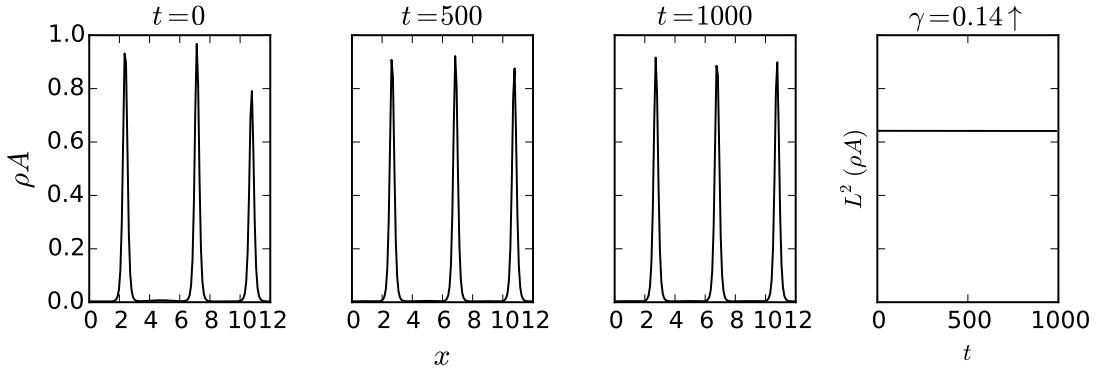


Abbildung 5.1: Auftragung der gesonderten Weiterführung der Simulation von Lösung $\gamma = 0.14 \uparrow$ aus der Simulation in Abb. 5.2, zu drei Zeiten von t und Verlauf der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA . Die Symmetrisierung tritt erst nach einer großen Menge von Zeitschritten ein. Die Norm ändert sich dabei nicht signifikant.

Die deutliche Asymmetrie der Lösung für $\gamma = 0.14 \uparrow$ scheint ein Artefakt des Abbruchkriteriums zu sein. Bei gesonderte Simulation dieses Zustands mit einem Abbruchkriterium niedrigerer Ordnung, symmetrisiert sich der Zustand über einen großen Zeitabstand (vgl. Abb. 5.1). Die L^2 -Norm verändert sich jedoch, mit einer Ordnung von $O(10^{-4})$, nicht signifikant. Somit ist das Abbruchkriterium für die Betrachtung der L^2 -Norm ausreichend. Dies wird für alle Ergebnisse der Variation der Parameter angenommen.

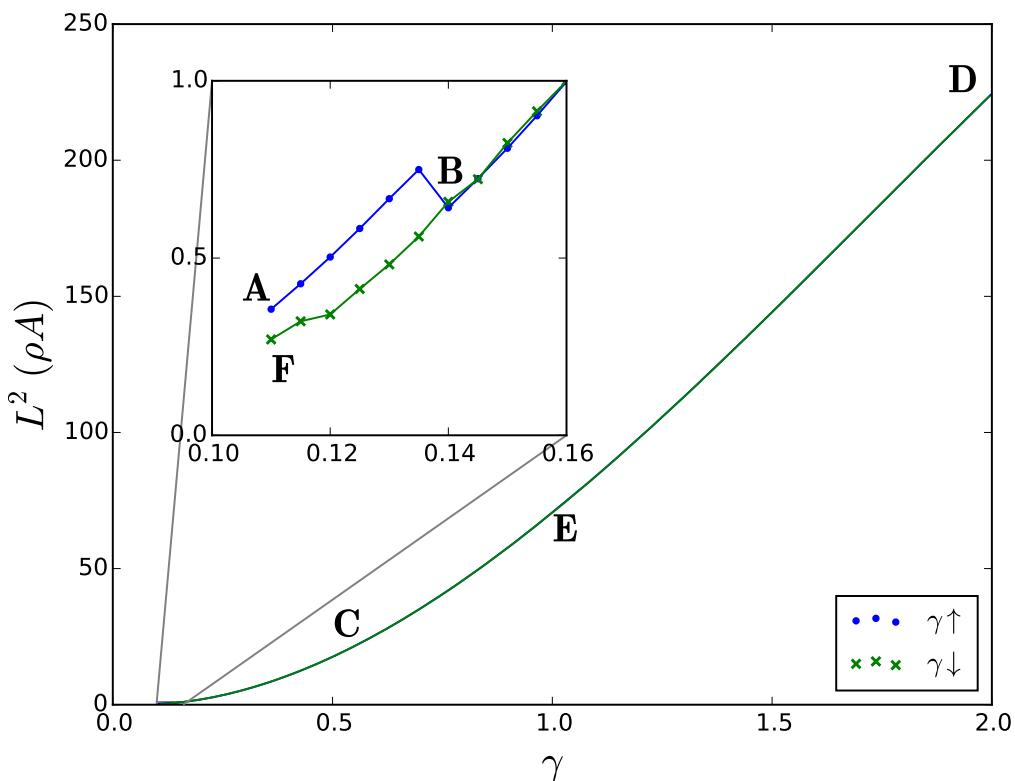


Abbildung 5.2: Auftragung der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρ_A mit positiver \uparrow (blaue Punkte) und negativer \downarrow (grüne Kreuze) Variation des Parameters γ ; Parametersatz I; Vergrößerung für Bereich bistabiler Zustände; Alphabetische Markierung der Zustände die in Abb. 5.3 aufgetragen sind. Die Markierung folgt der Richtung der Variation. Die Kriminalitätsrate steigt für Erhöhungen von γ und sinkt für Verringerungen.

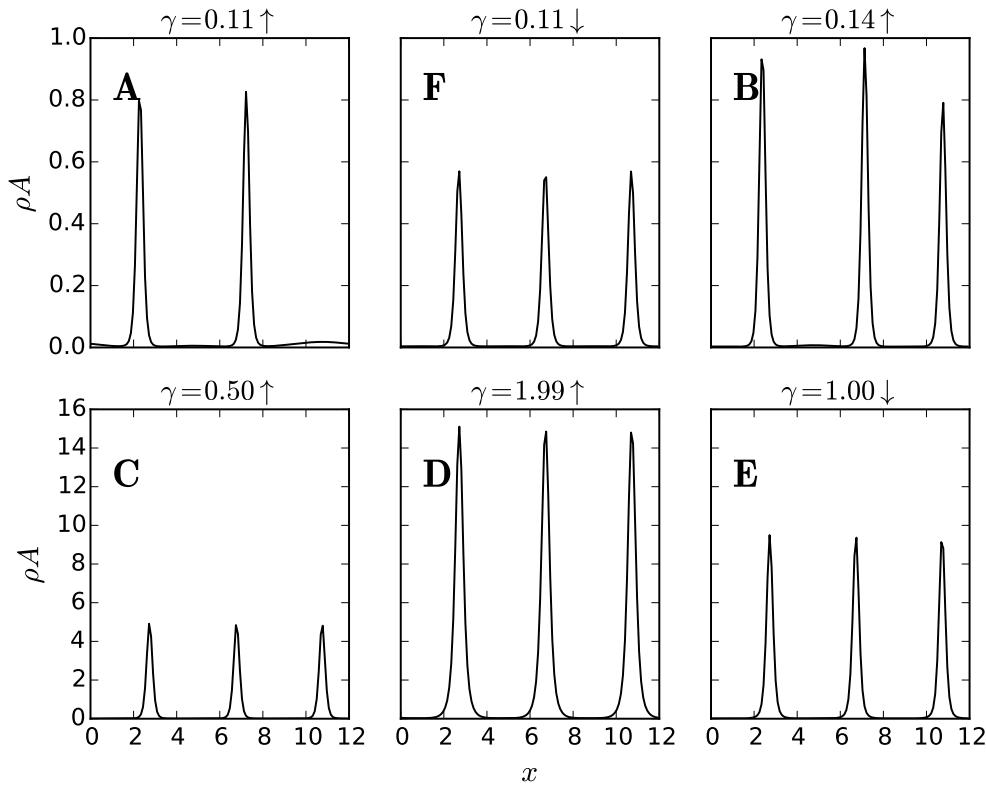


Abbildung 5.3: Auftragung der Lösungen aus Simulation in Abb. 5.2 für sechs Werte von γ . Die Lösungen sind in Reihenfolge der Variation aufgelistet, bis auf **A** und **F** um die Bistabilität zu unterstreichen. Bei **B** bildet sich der dritte Hotspot. Der Zustand bleibt stabil für gesamte weitere Variation von γ

5.1.2 Basis-Attraktivität α

Dasselbe Verfahren wird nun analog, mit dem selben Parametersatz I, auf die Basis-Attraktivität α angewandt. Der Parameter α wird über das Intervall $[0.01, 0.2]$ variiert. Es wird erwartet, dass sich analog zu Kapitel 4.2 räumlich homogene Zustände, bei der Grenze $\alpha \approx 0.12$ bilden. Da eine Erhöhung der Basis-Attraktivität eine Verringerung der Generationsrate $\gamma - \alpha$ der Kriminalität auslöst, ist ein Sinken der Kriminalitätsrate zu erwarten.

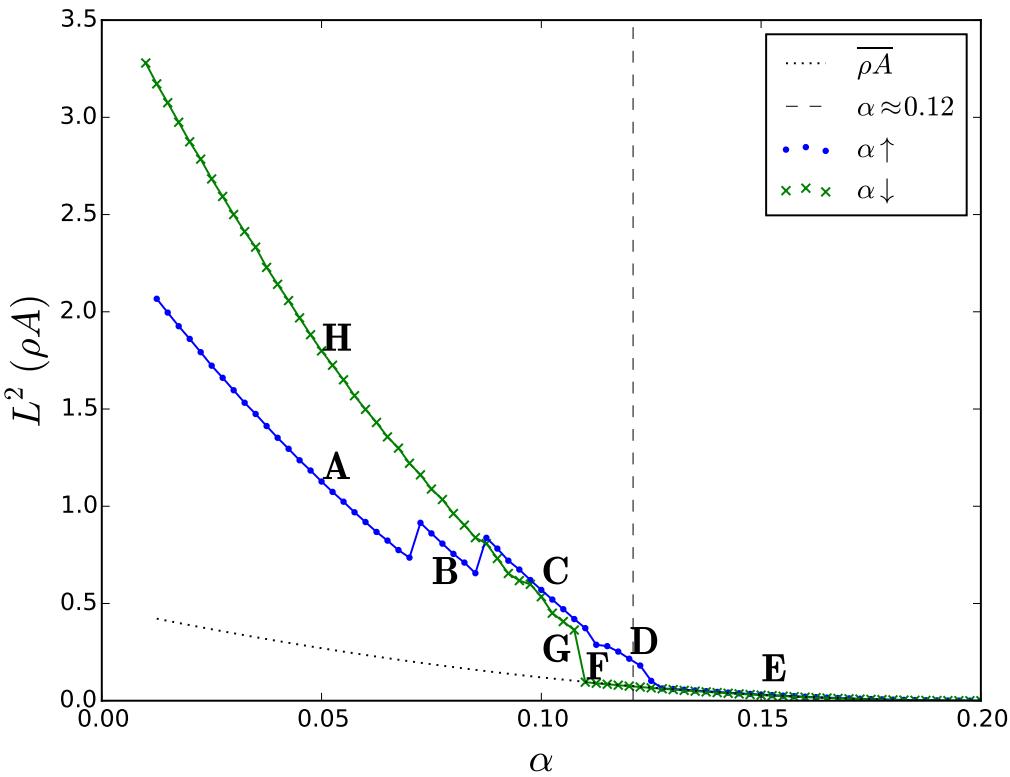


Abbildung 5.4: Auftragung der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA mit positiver \uparrow (blaue Punkte) und negativer \downarrow (grüne Kreuze) Variation des Parameters α , sowie der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA des homogenen Zustands als gepunktete Kurve und Grenze zur Instabilität des homogenen Zustand nach (4.10) als vertikale gestrichelte Linie; Parametersatz I; Alphabetische Markierung der Zustände die in Abb. 5.5 aufgetragen sind. Die Markierung folgt der Richtung der Variation. Die Kriminalitätsrate sinkt für Erhöhungen von γ und steigt für Verringerungen. Es ist Bistabilität in der Hysterese bei der Stabilitätsgrenze des homogenen Zustands und zwischen den Ästen zwischen **H** und **A,B** erkennbar.

Für die Variation des Parameters α sind die Werte der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate in Abbildung 5.4 dargestellt. Mit steigendem Parameter α sinkt die Kriminalitätsrate unstetig. Diese Unstetigkeiten werden als Sprünge in Abbildung 5.4 deutlich. Sie entstehen dadurch, dass die Anzahl der Hotspots sinkt bzw. steigt. Dieses Entstehen bzw. Zerfallen der Hotspots ist in den Lösungen in Abbildung 5.5 ersichtlich. Die Asymmetrie der Lösungen ist auf das Abbruchkriterium zurückzuführen.

Bei **D** ist eine asymmetrische Lösung zu sehen. Diese würde durch weitere Iterationen in eine symmetrische Lösung übergehen. Der Übergang in den homogenen Zustand erfolgt von drei zu keinen Hotspots. Zusätzlich ist bei der Variation um die Stabilitätsgrenze des homogenen Zustands nach (4.10) ein Hystereseverhalten erkennbar. Der homogene Zustand, der durch eine gepunktete Kurve eingezeichnet ist, bildet sich erst bei einem höheren Wert von α , als bei dem Wert bei dem sich Hotspots in negativer Variationsrichtung bilden.

Aus dem homogenen Zustand bildet sich ein Drei-Hotspots Zustand (siehe **G** Abb. 5.4) dessen Anzahl sich nicht weiter verändert. Das System besitzt somit zwei Bereiche der Bistabilität.

Die Unterschiede der L^2 -Normen der Drei-Hotspot Lösungen, bei gleichen Parameter und unterschiedlicher Variationsrichtung, (siehe Bereich um Markierung **C** Abb. 5.4) lassen sich durch numerische Abweichungen durch das Abbruchkriterium erklären. Würde genug Rechenzeit zu Verfügung stehen würden die Äste auf den selben Werten liegen.

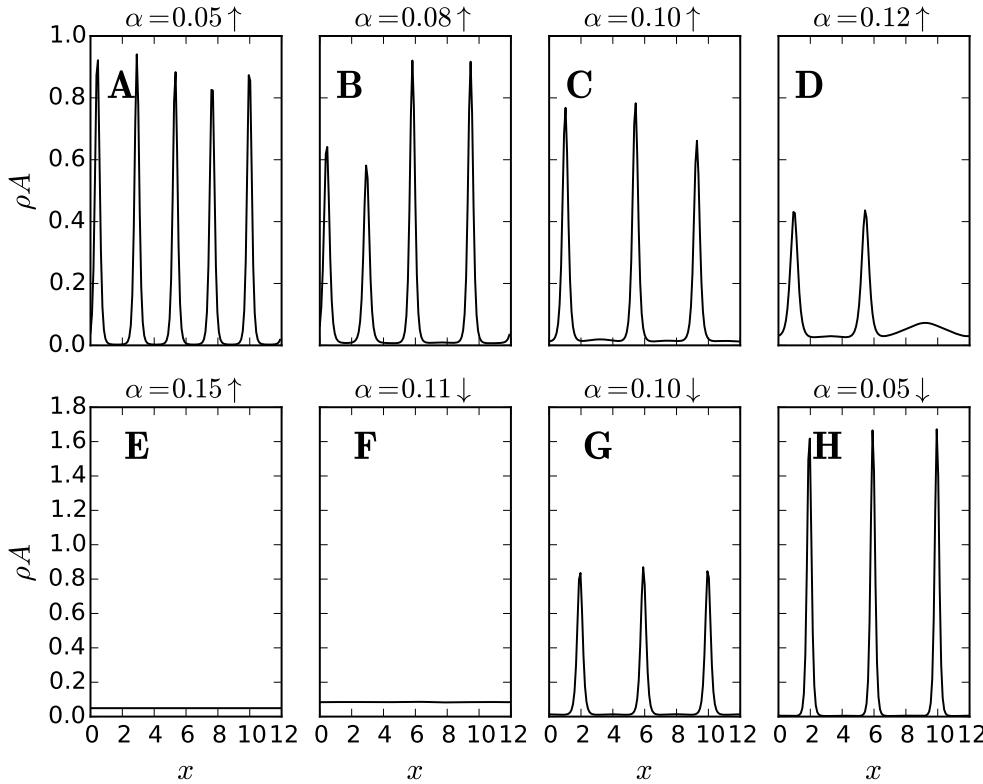


Abbildung 5.5: Auftragung der Lösungen aus Simulation in Abb. 5.4 für acht Werte von α .

Die Lösungen sind in Reihenfolge der Variation aufgelistet. Es sind Zerfälle der Hotspots von **A** bis **E** zu sehen. Bei **G** bilden sich wieder drei Hotspots und bleiben für weitere Verringerung Bestehen.

5.1.3 Diffusionskonstante der Kriminalität D

Die Untersuchung der Variation der Diffusionskonstante der Kriminalität D , mit dem Parametersatz I, ist in Abbildung 5.6 aufgetragen. Es wurde ein Intervall von $[0.01, 5]$ durchlaufen. Nach dem Kriterium (4.10) ist in dem Intervall die Bildung des homogenen Zustandes für $D = 0.08$ oder $D = 0.03$ zu erwarten. Die Grenzen sind als vertikale gestrichelte Linien und der homogene Zustand ist als horizontale gepunktete Linie eingezeichnet. Durch Betrachtung der Lösungen 5.7, ist es eindeutig, dass der Fall $D = 0.03$ als Abgrenzung für den homogenen Zustand eingetroffen ist.

Da die Variation, anders als in den anderen Abschnitten, mit einem homogenen Zustand begonnen hat, bilden sich direkt symmetrische Lösungen. Somit liegen die Werte der L^2 -Norm für Variationsrichtungen gleicher Zustände näher beieinander. Anhand der genaueren Symmetrie der Hotspots in den Lösungen wird dieser Zusammenhang deutlich.

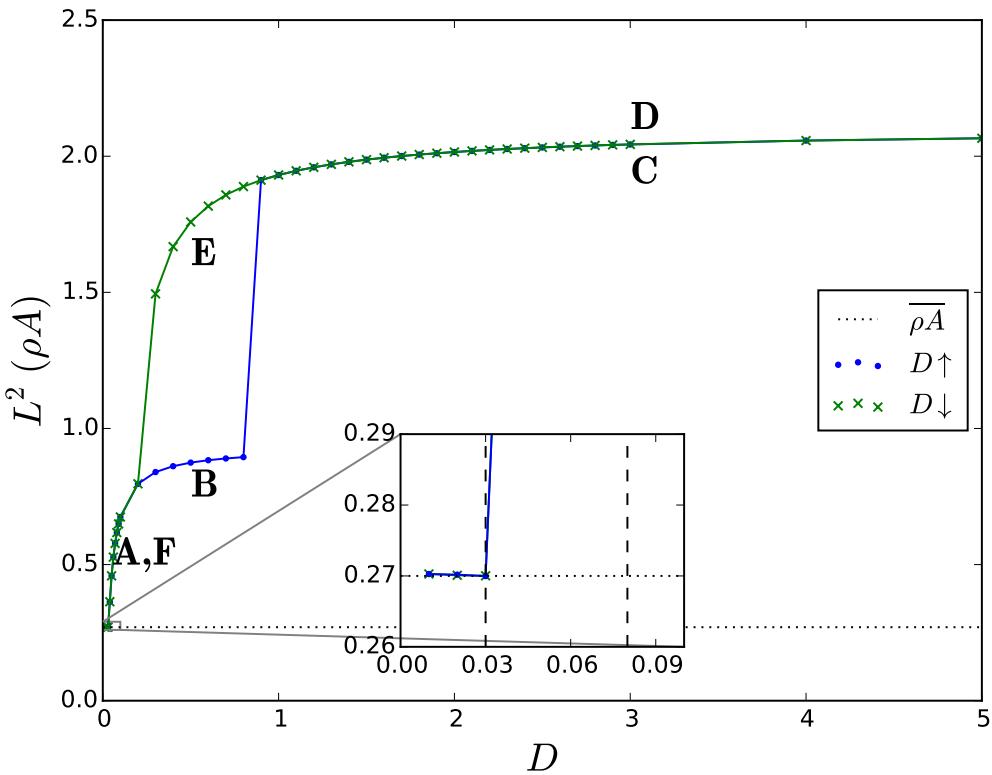


Abbildung 5.6: Auftragung der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA mit positiver \uparrow (blaue Punkte) und negativer \downarrow (grüne Kreuze) Variation des Parameters D , sowie der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA des homogenen Zustands als gepunktete Linie und zwei Grenzen zur Instabilität des homogenen Zustand nach (4.10) als vertikal gestrichelte Linien; der Fall; Parametersatz I; Alphabetische Markierung der Zustände die in Abb. 5.5 aufgetragen sind. Die Markierung folgt der Richtung der Variation

Es wird Bistabilität, durch ein Hystereseverhalten, der L^2 -Norm beobachtet, bei dem sich die Anzahl der Hotspots halbiert bzw. verdoppelt. Dies steht im Kontrast zu den Zerfällen bzw. Formationen der Variation der Parameter α und γ (wie im nächsten Abschnitt zu sehen ist teilweise auch ϵ), da bei diesen sich die Hotspotmenge stets nur um Einen verändert.

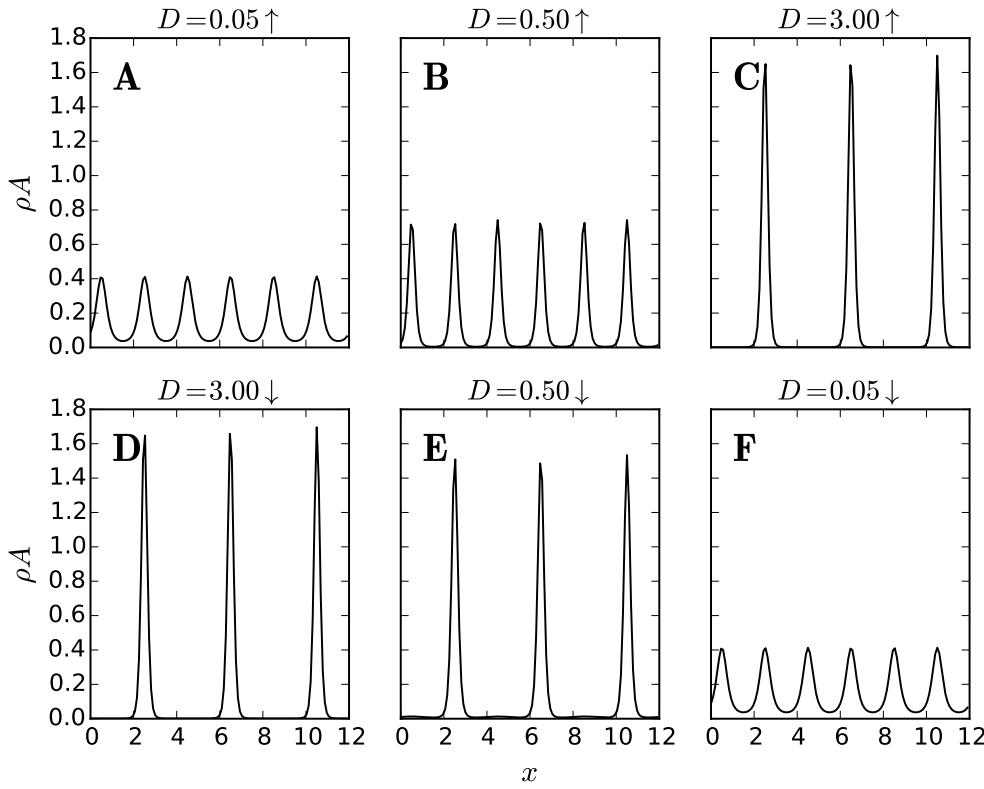


Abbildung 5.7: Auftragung der Lösungen aus Simulation in Abb. 5.6 für sechs Werte von D . Die Lösungen sind in Reihenfolge der Variation aufgelistet. Es ist eine Halbierung sowie Verdopplung der Anzahl der Hotspots zu erkennen. Auf die Darstellung der homogenen Zustände wurde hier verzichtet.

5.1.4 Diffusionskonstante der Attraktivität ϵ

Die Untersuchungen des Parameters ϵ verlaufen analog, mit der Ausnahme, dass ein dritter Variationsstrang simuliert wird. In positiver Variationsrichtung, wird nach dem ersten Zerfall eines Hotspots eine separate Simulation negativer Variationsrichtung \downarrow' gestartet. Im Gesamten wurde das Intervall $[0.13, 1]$ durchlaufen. In diesem Intervall werden keine homogenen Zustände erwartet. Bei der isolierten Betrachtung der L^2 -Norm ist die Bildung eines vermeintlich homogenen Zustands zu erkennen (vgl. Abb. 5.8). In Abbildung 5.9 ist bei Markierung **A** dieser Zustand zu sehen. Dieser besitzt zwar die selbe Norm wie der homogene Zustand, formt aber eine Gestalt, die ein Maximum besitzt. Aufgrund der geringen Höhe lässt sich das Maximum jedoch nicht als Hotspot klassifizieren.

Durch das Ansteigen der Diffusionskonstante der Attraktivität sinkt die L^2 -Norm der Kriminalitätsrate, mit Ausnahmen durch den Zerfall von Hotspots. Es sind in Abbildung 5.8 drei Bereiche der Bistabilität und einen Bereich drei stabiler Lösungen zu erkennen. Dieser Bereich drei verschiedener Zustände ist in Abbildung 5.9 für das Beispiel von $\epsilon = 0.3$, durch Markierungen mit römischen Zahlen verdeutlicht.

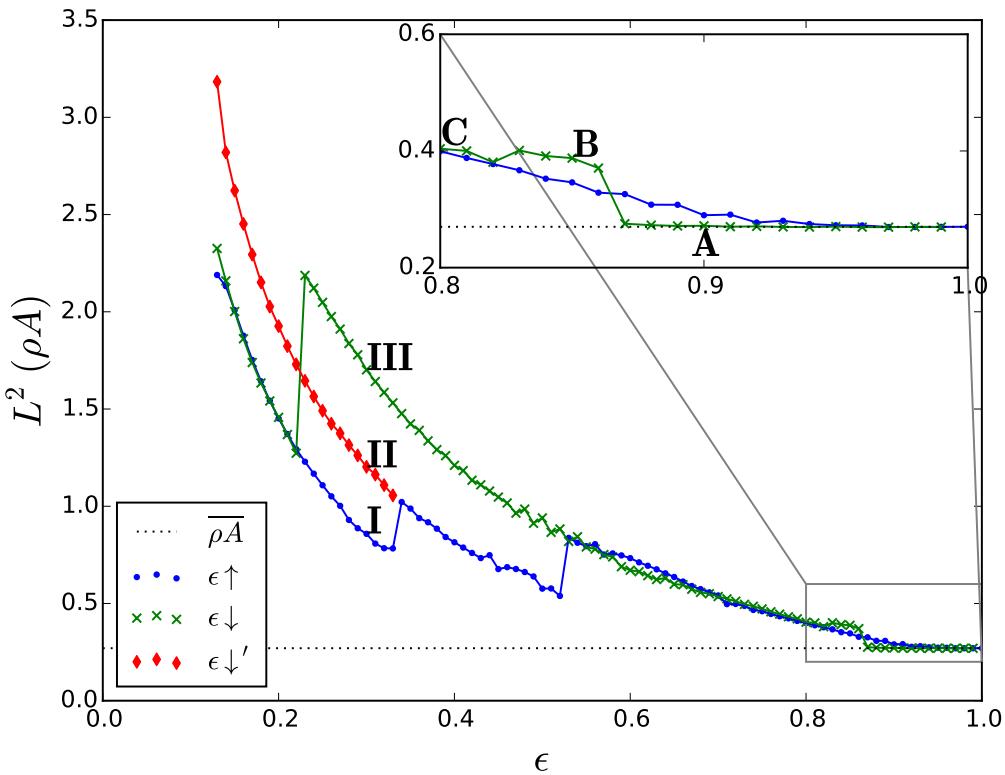


Abbildung 5.8: Auftragung der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA mit positiver \uparrow (blaue Punkte) und negativer \downarrow (grüne Kreuze und rote Rauten) Variation des Parameters ϵ , sowie der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA des homogenen Zustands als gepunktete Linie; Parametersatz I; Vergrößerung in den Hysteresebereich. Nummerierung von drei Zuständen (siehe Abb. 5.9) auf jeweils einem Ast bei $\epsilon = 0.3$ durch römische Zahlen. Markierung der Zustände in der Vergrößerung durch Buchstaben.

Im Bereich von $\epsilon = 0.47$ bis 0.55 sind zackenförmige Strukturen im negativen Ast \downarrow zu erkennen. Dies liegt daran, dass für diesen Parameterbereich das System schwach gedämpfte Oszillationen durchführt. Für diese Werte wurde nicht die Genauigkeit der Ordnung $O(10^{-3})$ erreicht, wodurch die Anzahl maximaler Iterationen überschritten wurde. Diese Abweichungen der zwei Äste setzt sich weiter fort. Die Lösung **B** zeigt einen Extremfall asymmetrischer Lösungen. Die L^2 -Norm dieser Lösung entspräche bei genügender Simulation dem anderen Ast. Dieses oszillatorisches Verhalten soll im nächsten Kapitel näher diskutiert werden.

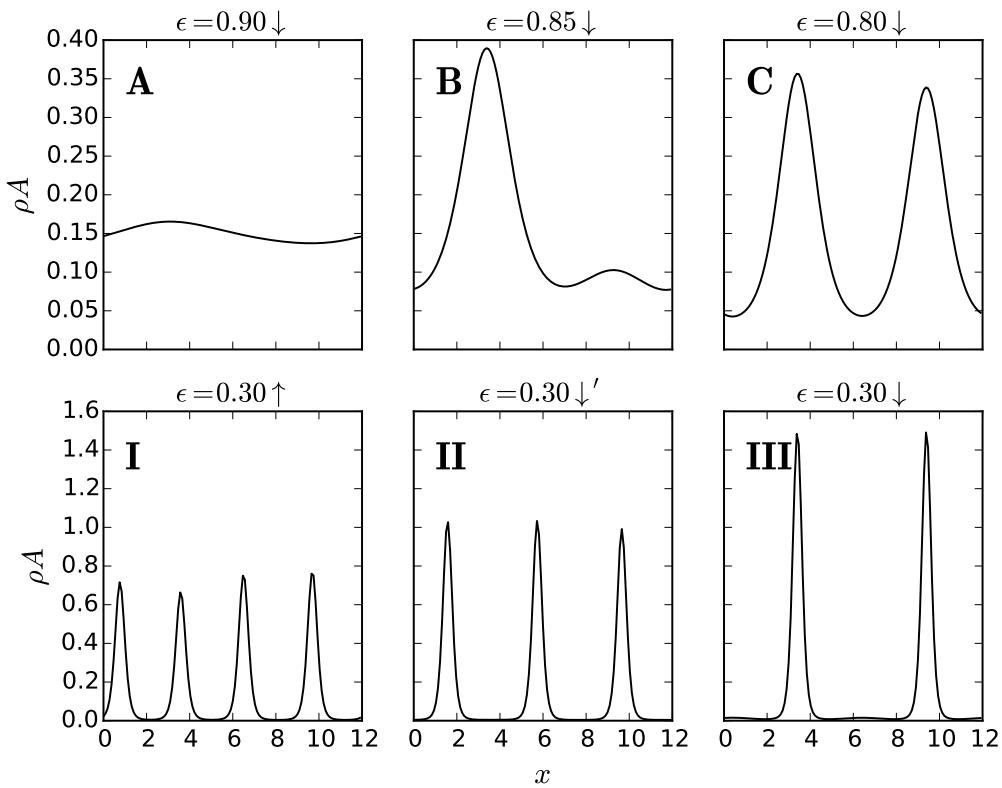


Abbildung 5.9: Auftragung der Lösungen aus Simulation in Abb. 5.8 für sechs Werte von ϵ ; Vergleich von drei Stabilen Zuständen des gleichen Parameter in römischen Zahlen. Betrachtung der Zustände in der Nähe des homogenen Zustands markiert durch Buchstaben.

Kapitel 6

Dynamische Eigenschaften der Hotspots

Die Dynamik der Hotspots stellt deswegen ein großes Interesse dar, da ein Verständnis dieser in der Anwendung großen Nutzen darstellt. Die Ressourcen der Verbrechensbekämpfung könnten somit effektiver auf den Raum verteilt werden.

Zunächst ist es jedoch fraglich ob dynamische Zustände in dem untersuchten Modell überhaupt existieren. Unter einem dynamischen Hotspot, wird ein solcher verstanden, der nicht in einen stationären Zustand relaxiert. Dies kann zum einen aus einer Hopfbifurkation resultieren, sodass die Höhe oder Position des Hotspots kontinuierlich oszilliert. Zum anderen könnte jedoch ein Driften vorliegen, sodass sich der Hotspot kontinuierlich in eine Richtung bewegt.

Die Fragestellung nach der Existenz dynamischer Hotspots löste verschiedene Antworten aus. In [18],[17] wird die Existenz von Dynamischen Hotspots bestritten. Sie seien zwar in dem diskreten, jedoch nicht im kontinuierlichen Modell vorhanden.

In [12] wurde unter anderem die Stabilität einer Zwei-Hotspot Lösung untersucht. Es wurde beobachtet, dass unter bestimmten Bedingungen ein Hotspot zerfällt und der andere einen kontinuierlichen Drift erfährt. Da in [12] jedoch nur die Stabilität betrachtet wurde, blieb eine nähere Diskussion dieses Drifts aus.

Zunächst soll das System auf driftende Hotspots untersucht werden, indem die numerischen Untersuchungen aus [12] reproduziert werden. Danach wird auf den Fall oszillierender Hotspots eingegangen.

6.1 Driftende Hotspots

Das Driften von Hotspots wurde nur beobachtet, wenn sich mehrere Hotspots äquidistant auf den Raum verteilen. Ein Beispiel einer Drei-Hotspot Lösung die zu einer Zwei-Hotspot Lösung zerfällt ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die zwei übrigen Hotspots wachsen in ihrer Höhe und driften, aufgrund der Symmetrie der Periodischen Randbedingungen, zu äquidistanten Abständen.

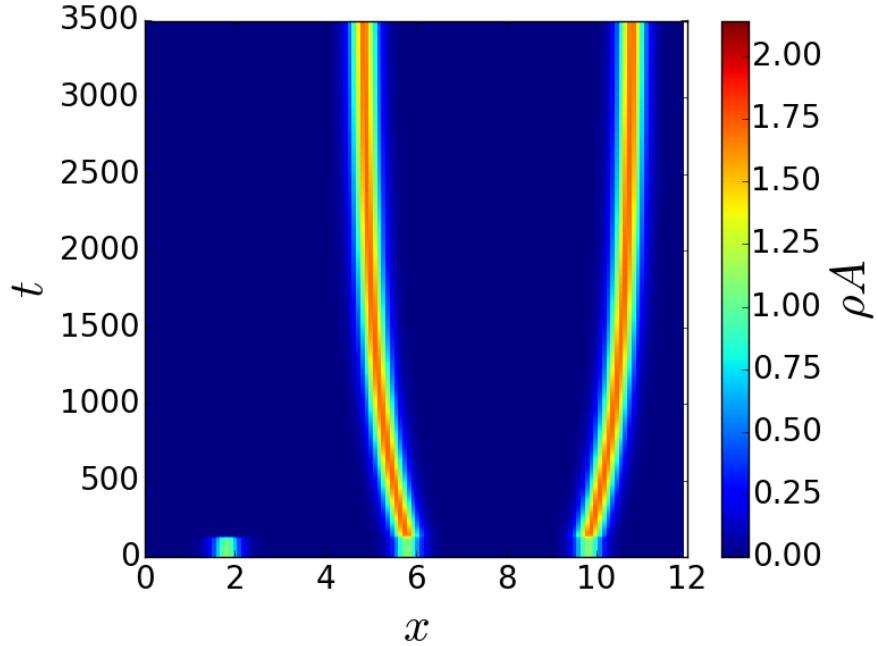


Abbildung 6.1: Auftragung des Zerfalls einer Drei-Hotspot Lösung und anschließende äquidistante Verteilung der übrigen zwei Hotspots; Auftragung von Position gegen Zeit mit farblicher Kennzeichnung für die Kriminalitätsrate ρ_A ; Parametersatz X aus Tabelle A.5

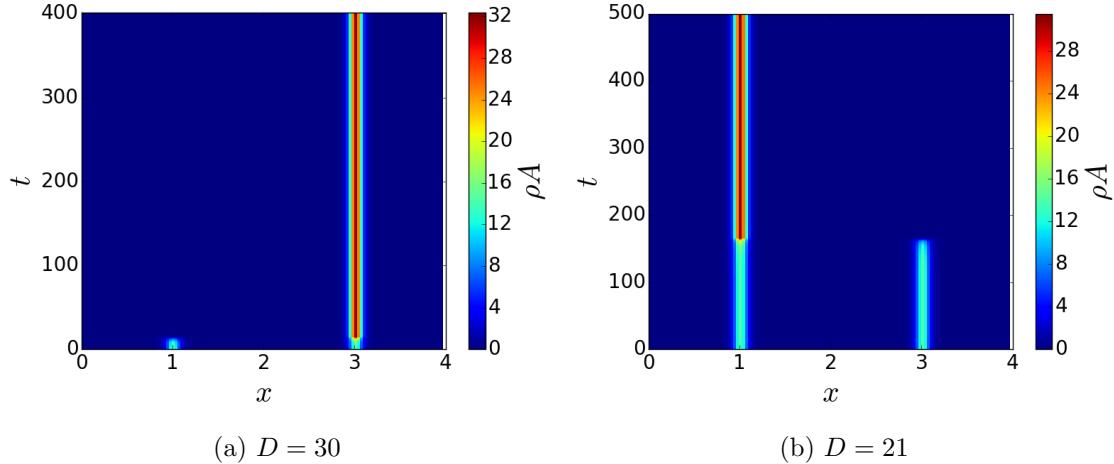


Abbildung 6.2: Auftragung des Zerfalls einer Zwei-Hotspot Lösung. Nach [12] wird ein driftender Hotspot und eine langsame Zeitinstabilität erwartet; Auftragung von Position gegen Zeit mit farblicher Kennzeichnung für die Kriminalitätsrate ρ_A ; Parametersatz II aus Tabelle A.2

In [12] wurden unter anderem Grenzen für die Diffusionskonstante der Kriminalität bestimmt, die die Zeitliche Stabilität einer K -Hotspot Lösung, im Bereich für die Diffusionskonstante $\epsilon \rightarrow 0$ charakterisieren. Für Werte von $D < \hat{D}$

$$\hat{D} = \frac{(L/4)^4(\gamma - \alpha)^3}{K^4\alpha^2\pi^2\epsilon^2} \quad (6.1)$$

soll eine K-Hotspot Lösung zeitlich stabil sein und für Werte von $D > \hat{D}'$

$$\hat{D}' = \hat{D} \cdot \frac{2}{1 + \cos(\pi/K)} \quad (6.2)$$

soll eine K-Hotspot Lösung schnell auftretende Instabilität aufweisen. Der Bereich $\hat{D} < D < \hat{D}'$ charakterisiert K-Hotspot Lösungen die eine zeitlich langsame Instabilität aufweisen. Für diesen Bereich wurde in [12], für $K = 2$ nach dem Zerfall, ein einzelner driftender Hotspot gezeigt. Dieses Driften ist in dem Bereich zeitlich schneller Instabilität nicht zu beobachten. Die Parameter die in [12] benutzt wurden, sind in A.2 aufgelistet. Damit ergibt sich ein Wert von $\hat{D}' = 20.67$ als erste Grenze für die Diffusionskonstante. Der Driftende Hotspot wurde in [12] bei einem Wert von $D = 30$ beobachtet.

blieb die entstandene Ein-Hotspot Lösung stationär (vgl. Abb 6.2a). Außerdem wurde für $D = 30$ keine langsame Instabilität beobachtet.

Es wurde analog eine zweite Simulation mit $D = 21$ durchgeführt, die nach den Ergebnissen aus [12] gleiches Verhalten aufweisen sollte. Dieses Ergebnis ist in Abbildung 6.2b aufgetragen. Es ist nun eine Instabilität zu beobachten, die erst nach einem längeren Verlauf der Zeit eintritt. Ein driften der Hotspots ist nicht zu beobachten.

Somit ist die Existenz driftender Ein-Hotspot Lösungen, nach den hier bestimmten Untersuchungen weiterhin anzuzweifeln. Im nächsten Kapitel soll die Entstehende Lösung auf ihre Stabilität analysiert werden. Für weitere Untersuchungen soll der Fall von $D = 21$ betrachtet werden, da dadurch ein geringerer Rechenaufwand als bei $D = 30$ entsteht.

6.2 Oszillierende Hotspots

Die Relaxion zu einem stationären Hotspot Zustand erfolgt, in manchen Parameterbereichen über eine Oszillation der Lösung um den stationären Zustand. Dieses Verhalten wird als “Ringing” bezeichnet [22]. Es besteht die Annahme, dass das Ringing auch in ausgedehnten Systemen, wie dem hier betrachteten, auftreten kann.

Bei der Betrachtung der L^2 -Norm ist dieses Relaxionsverhalten, für kleine Werte von D des Parametersatzes III A.3, vergleichbar mit einer gedämpften Schwingung (siehe Abb. 6.3). Die Maxima der Hotspots sinken nach jeder Schwingung, für die Werte von $D = 0.5, 0.75$ und 1 . Durch eine Variation der Parameter scheint diese “Dämpfung” variierbar zu sein. Ein Erhöhung des Parameters D bewirkt somit eine stärkere Verzögerung der Relaxion in den stationären Zustand. Ab einem Wert von $D = 3$ ist, in den Ergebnissen in Abbildung 6.3, über den verlauf von $t = 500$ Zeiteinheiten kein sinken der Maxima deutlich.

Eine gesonderte Betrachtung für einen Wert von $D = 14$, zeigt über einen Verlauf von $t = 2500$ Zeiteinheiten, weiterhin keine Dämpfung (vgl. Abb. 6.4). Entweder ist die Dämpfung nun verschwindend gering, oder das System ist im Zustand einer Hopfbifurkation. Dieses Verhalten soll nun durch eine lineare Stabilitätsanalyse genauer betrachtet werden.

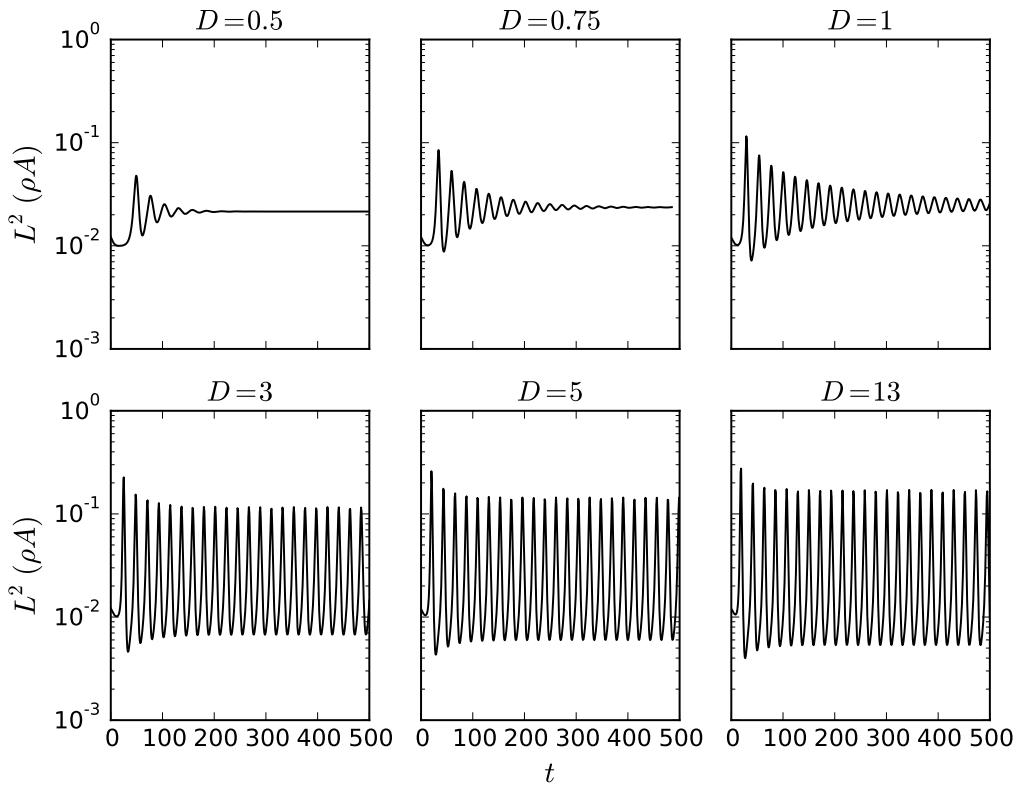


Abbildung 6.3: Auftragung der Zeit gegen die L^2 -Norm der Kriminalität in logarithmischer Darstellung, für verschiedene Werte von D . Parametersatz III aus Tabelle A.3. Die Oszillationen halten länger an für steigende Werte von D .

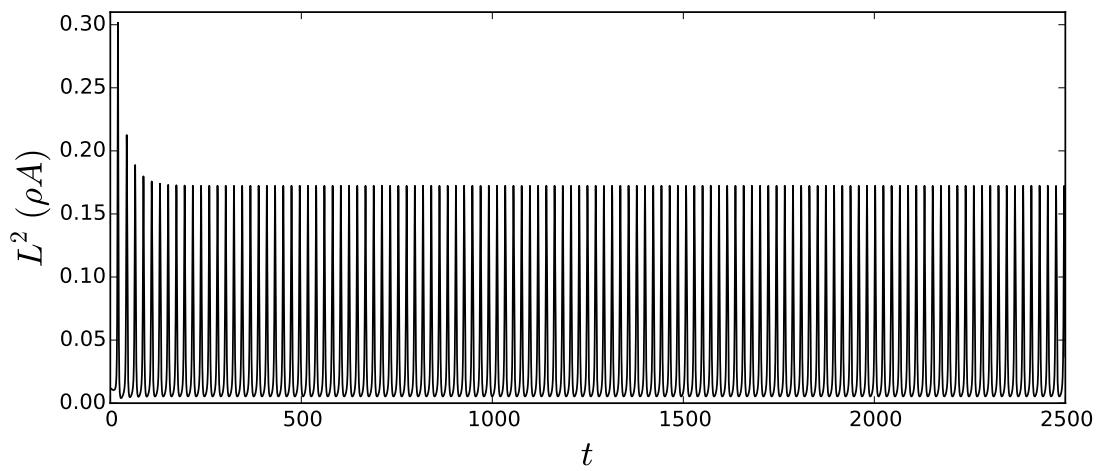


Abbildung 6.4: Auftragung der Zeit gegen die L^2 -Norm der Kriminalität, für $D = 14$. Parametersatz III aus Tabelle A.3. Es ist keine Relaxion erkennbar.

Kapitel 7

Numerische lineare Stabilitätsanalyse

Durch die numerische lineare Stabilitätsanalyse wird das Spektrum der Eigenwerte, des linearisierten Operators des Systems, für einen stationären Zustand gewonnen. Dieses Spektrum gibt in erster Linie Aufschluss über die Stabilität des Zustandes. In zweiter Linie können Vermutungen über dynamisches Verhalten gemacht werden, indem Zustände für Parametervariationen verglichen werden.

Nach einer Herleitung des Verfahrens, wird die Methode einleitend auf eine Ein-Hotspot Lösung angewandt und weiterführend auf Lösungen angewandt, die auf dynamisches Verhalten überleiten könnten.

7.1 Herleitung des Formalismus

Um ein tieferes Verständnis über die Lösungen der Differentialgleichung aus den numerischen Simulationen zu erhalten, bietet sich eine numerische lineare Stabilitätsanalyse an. Sie beschreibt, wie sich ein System unter Einfluss einer kleinen Störung in Näherung erster Ordnung verhält. Der hier durchgeführte Formalismus ist äquivalent zu der in [1] beschriebenen Methode.

Zunächst werden die Differentialgleichungen durch einen nichtlinearen Operator $\mathcal{F}(\nabla, x)[\cdot]$ beschrieben. Die Variablen der Attraktivität und Kriminalitätsdichte werden als Vektor $\mathbf{f} = (A(x, t), \rho(x, t))^T$ in kompakter Schreibweise vereinfacht. Somit können wir die der Arbeit zu Grunde liegenden gekoppelten Differentialgleichungen (2.6),(2.7) schreiben als:

$$\partial_t \mathbf{f} = \mathcal{F}(\nabla, x)[\mathbf{f}(x, t)] \quad (7.1)$$

Nun wird angenommen, dass eine stationäre Lösung $\tilde{\mathbf{f}}(x)$ für Attraktivität und Dichte existiert. Es wird die zeitliche Entwicklung dieser stationären Lösung unter Einfluss einer zeitlich abhängenden Störung $\eta(x, t)$

$$\mathbf{f}(x, t) = \tilde{\mathbf{f}}(x) + \eta(x, t) \quad (7.2)$$

betrachtet. Dieser Ansatz kann nun in die ursprüngliche Gleichung (7.1) eingesetzt werden. Auf der linken Seite ist zu erkennen, dass die Ableitung nach der Zeit für den stationären Teil der Lösung verschwindet,

$$\partial_t \eta(x, t) = \mathcal{F}(\nabla, x)[\tilde{\mathbf{f}}(x) + \eta(x, t)]. \quad (7.3)$$

Der rechte Teil der Gleichung lässt sich nun um die stationäre Lösung entwickeln,

$$\partial_t \eta(x, t) = \mathcal{F}(\nabla, x)[\tilde{\mathbf{f}}(x)] + \mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} \eta(x, t) + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (7.4)$$

\mathcal{F}' beschreibt die Fréchet-Ableitung [2] des nichtlinearen Operators \mathcal{F} . Der Operator \mathcal{F}' ist linear und nimmt im Falle der Gleichung (7.4) folgende Form an:

$$\mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} = \begin{pmatrix} \partial_A \mathcal{F}_A(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} & \partial_\rho \mathcal{F}_A(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} \\ \partial_A \mathcal{F}_\rho(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} & \partial_\rho \mathcal{F}_\rho(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_A \mathcal{F}_A(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} &= \epsilon^2 \nabla^2 + \tilde{\rho} - 1 \\ \partial_\rho \mathcal{F}_A(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} &= \tilde{A} \\ \partial_A \mathcal{F}_\rho(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} &= -\frac{2D\tilde{\rho}}{\tilde{A}} \nabla^2 + 2D \frac{2\tilde{A}_x \tilde{\rho} - \tilde{\rho}_x \tilde{A}}{\tilde{A}^2} \nabla \\ &\quad + 2D \frac{\tilde{\rho} \tilde{A}_{xx} + \tilde{A}_x \tilde{\rho}_x}{\tilde{A}^2} - \frac{4D\tilde{\rho}\tilde{A}_x^2}{\tilde{A}^3} - \tilde{\rho} \\ \partial_\rho \mathcal{F}_\rho(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} &= D \nabla^2 - \frac{2D\tilde{A}_x}{\tilde{A}} \nabla + \frac{2D\tilde{A}_x^2}{\tilde{A}^2} - \frac{2D\tilde{A}_{xx}}{\tilde{A}} - \tilde{A}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearisierung werden in der Entwicklung Terme der Ordnung η^2 und höher vernachlässigt. Zusätzlich ist ersichtlich, dass der Operator $\mathcal{F}(\nabla, x)$ angewandt auf die stationäre Lösung ebenfalls verschwindet. Man erhält nun eine linearisierte zeitliche Entwicklungsgleichung der Störung,

$$\partial_t \eta(x, t) = \mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} \eta(x, t). \quad (7.6)$$

Nun soll die Störung dargestellt werden als Linearkombination von den Eigenfunktionen $\eta_j(x)$ des Operators \mathcal{F}' , mit einer exponentiellen Zeitabhängigkeit mit einem Exponenten λ_j ,

$$\eta(x, t) = \sum_j \eta_j(x) e^{\lambda_j t}. \quad (7.7)$$

Durch einsetzen dieser Darstellung in die Zeitentwicklungsgleichung (7.6) ergibt sich das Eigenwertproblem,

$$\lambda_j \eta_j(x) = \mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)} \eta_j(x). \quad (7.8)$$

Durch die Bestimmung der Eigenwerte λ_j können auf diese Weise Aussagen über die lineare Stabilität der jeweiligen stationären Lösung $\tilde{\mathbf{f}}(x)$ gemacht werden. Nach dem Hartmann-Grobmann Theorem [22] lassen sich die Eigenschaften der Linearisierung auf die des gesamten Systems übertragen, wenn der Realteil aller Eigenwerte ungleich null ist, $\Re(\lambda_j) \neq 0 \forall i$. Existiert ein Eigenwert mit einem Realteil der größer als null ist, $\exists \Re(\lambda_j) > 0$, so lässt sich der Schluss ziehen, dass der Zustand instabil ist. Sind die Realteile aller Eigenwerte kleiner als null, so schließt man auf einen stabilen Zustand.

Während in Lehrbüchern oft das Beispiel des homogenen Zustand aufgegriffen wird [1], wird in diesem Abschnitt das Verfahren auf stationäre Zustände verallgemeinert. Diese Zustände $\tilde{\mathbf{f}}(x)$ werden in ihrer diskretisierten Form numerisch simuliert. Die Gradienten des $\mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)}$ Operators werden durch ihre finiten Differenzen approximiert. Durch diese Implementierung, besitzt $\mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)}$ die Form einer $2N \times 2N$ -Matrix, mit N als Anzahl der Gitterpunkte der Simulation. Es werden vorgefertigte Algorithmen der Programmierumgebung zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der $\mathcal{F}'(\nabla, x)|_{\tilde{\mathbf{f}}(x)}$ -Matrix genutzt.

Die lineare Stabilitätsanalyse benötigt eine höhere Genauigkeit als die Betrachtungen der vorherigen Kapitel. Dabei läuft es darauf hinaus, dass der stationäre Zustand \tilde{f} $N = 512$ Stützstellen benötigt. Rechenleistung wird dadurch eingespart, dass \tilde{f} zuerst mit $N = 128$ Stützstellen berechnet wird und auf $N = 512$ Stützstellen extrapoliert wird. Dieser extrapolierte Zustand wird dann weitersimuliert, bis ein Abbruchkriterium mit $\partial_t \rho, \partial_t A$ in $O(10^{-4})$ erreicht wird. Die erreichte Genauigkeit ist an der Ordnung des Eigenwertes der Eigenfunktionen der Translation abslesbar. Diese sollte im Idealfall $O(10^{-3})$ nicht übersteigen.

Aufgrund der Symmetrie der Lösungen und den Periodischen Randbedingungen ist es ersichtlich, dass die Lösung translationsinvariant ist. Sie müsste also, ohne eine Veränderung der Gestalt, durch den Raum verschiebbar sein. Diese Eigenschaft der Translationsinvarianz soll im Spektrum deutlich werden. Das Spektrum muss somit immer einen Eigenwert auf dem Ursprung besitzen. Die Eigenfunktionen dieses Eigenwertes besitzt die Gestalt der räumlichen Ableitung der Lösung [16]. Der Zusammenhang zwischen der Translation und der ersten räumlichen Ableitung kann durch eine Taylorentwicklung an der Position x_0

$$\phi(x_0 + \delta) = \phi(x_0) + \phi'(x_0)\delta + O(\delta^2) \quad (7.9)$$

deutlich gemacht werden. Je kleiner die Verschiebung δ ist wird, desto genauer wäre die Verschiebung durch eine Addition der Ableitung darstellbar.

7.2 Ein-Hotspot-Zustand

Begonnen wird mit der Analyse einer Ein-Hotspot Lösung. Diese basiert auf den Parametersatz IV A.4. Dieser Parametersatz wurde gewählt, da dort eine schnelle Relaxion in den stationären Zustand eintritt. Somit kann die benötigte Genauigkeit effizient erreicht werden.

In Abbildung 7.1 ist ein Teil des Spektrums der größten Eigenwerte λ_j des Eigenwertproblems aus Gleichung (7.8) dargestellt. Das Spektrum zeigt einen Eigenwert λ_0 im Ursprung. Die Restlichen Eigenwerte besitzen alle einen negativen Realteil. Somit ist der Zustand zeitlich stabil. Es existieren außerdem zwei Paare komplex konjugierter Eigenwerte. Diese weisen auf das oszillatorische Verhalten bei dem Erreichen des stationären Zustandes, wie das Ringen des Maximum des Hotspots hin.

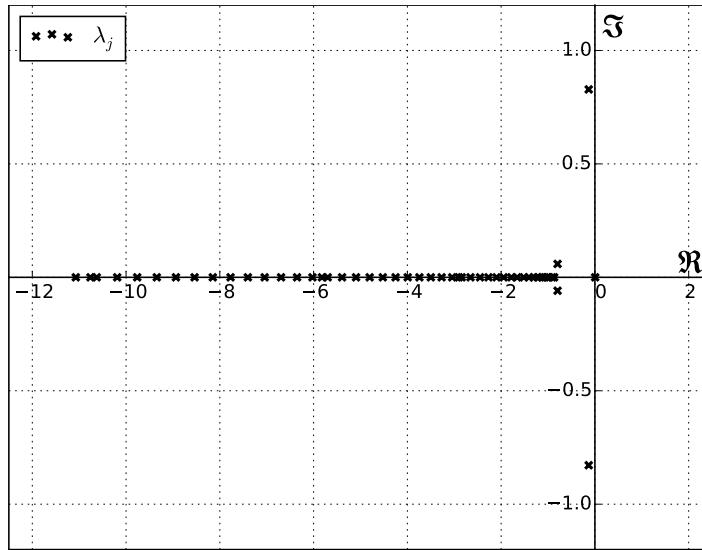


Abbildung 7.1: Auftragung der größten 50 Eigenwerte einer Ein-Hotspot Lösung des Parametersatzes IV aus Tabelle A.4, mit dem Realteil als horizontale und dem Imaginärteil als vertikale Achse. Alle Eigenwerte haben näherungsweise einen Realteil von $\Re(\lambda_j) \leq 0$. Die Lösung ist stabil.

Die erreichte Präzision der Analyse ist durch die Betrachtung des Eigenwertes λ_0 ablesbar. Dieser Eigenwert gehört zu der vorher besprochenen Translationsmode. Diese Mode ist die dem Eigenwert entsprechende Eigenfunktion η_0 bzw. $\eta_{A,0}$ und $\eta_{\rho,0}$ da das System zwei Variablen besitzt.

In Abbildung 7.2 sind Links die Translationsmoden und die erste Ableitungen aufgetragen. Bis auf eine kleine Ungenauigkeit, sichtbar im Maximum der Attraktivität, besitzen die Funktionen die gleiche Gestalt. Da aufgrund der Symmetrie und Randbedingungen der Eigenwert im Idealfall $\lambda_0 = 0$ wäre, gibt der berechnete Wert $\lambda_0 = 0.00531$ zusätzlich die Präzision der Stabilitätsanalyse an.

Auf der Rechten Seite von Abbildung 7.2 ist die Lösung in schwarz und die Lösung mit einer Addition der Translationsmode in rot zu sehen. Die Verschiebung ist nicht ideal, da sich die Gestalt, erkennbar an der Höhe der Maxima, geändert hat. Im idealen Fall muss der Faktor δ infinitesimal klein sein, wodurch die Verschiebung aber auch im gleichen Maße klein wird.

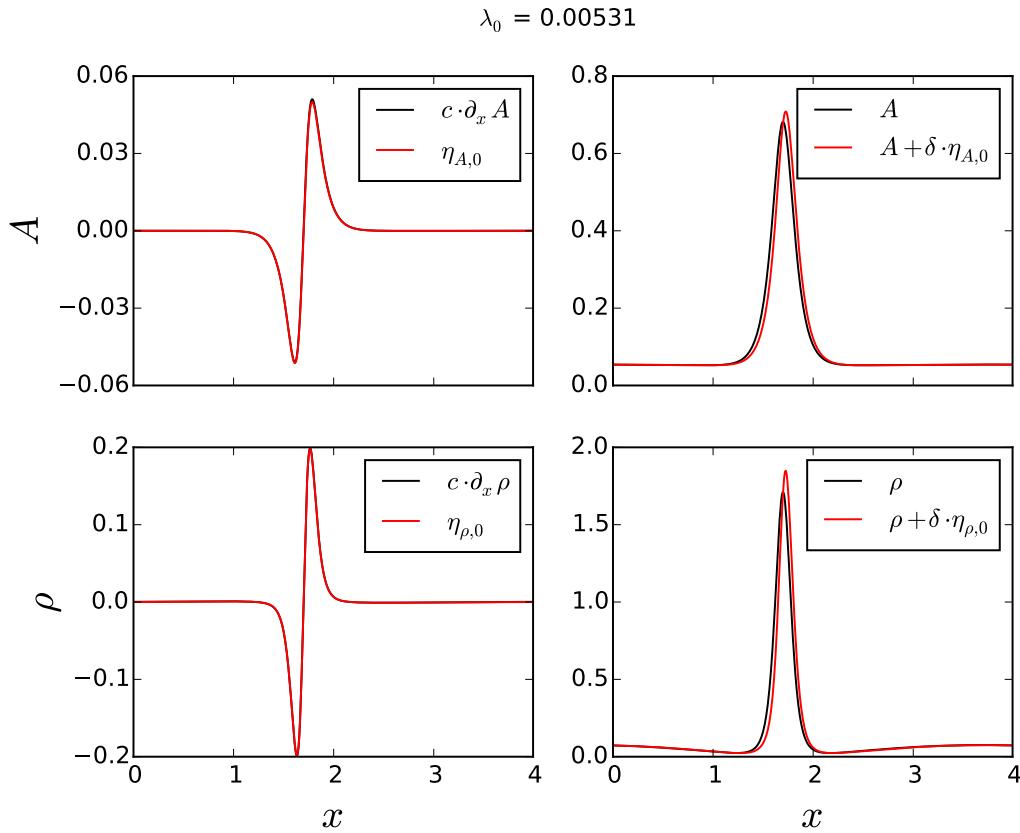


Abbildung 7.2: Links: Translationsmoden und erste Ableitungen einer Ein-Hotspot Lösung des Parametersatzes IV aus Tabelle A.4. Anpassung der Funktionen durch einen Faktor c . Die Funktionen haben bis auf eine kleine Ungenauigkeit die selbe Gestalt.
Rechts: Ein-Hotspot Lösung des Parametersatzes IV in schwarz und Addition der Translationsmode in rot. Keine Ideale Verschiebung sichtbar.

7.3 Driftende Hotspots

Nun soll der Zustand analysiert werden, der nach [12] einen Drift erfahren soll. Driftet der Hotspot, so sollte dies im Spektrum sichtbar sein. Es wird die Endlösung, sichtbar in Abbildung 6.2b analysiert.

In Abbildung 7.3 ist das bestimmte Spektrum der Eigenwerte λ_j aufgetragen. Alle Eigenwerte besitzen näherungsweise einen Realteil von $\Re(\lambda_j) \leq 0$. Die Lösung ist somit stabil und nicht driftend. Es muss jedoch hinzugefügt werden, dass die Präzision geringer als im vorherigen Beispiel ist. Der Eigenwert der Translationsmode λ_0 besitzt einen Wert von $\lambda_0 = 0.00969$.

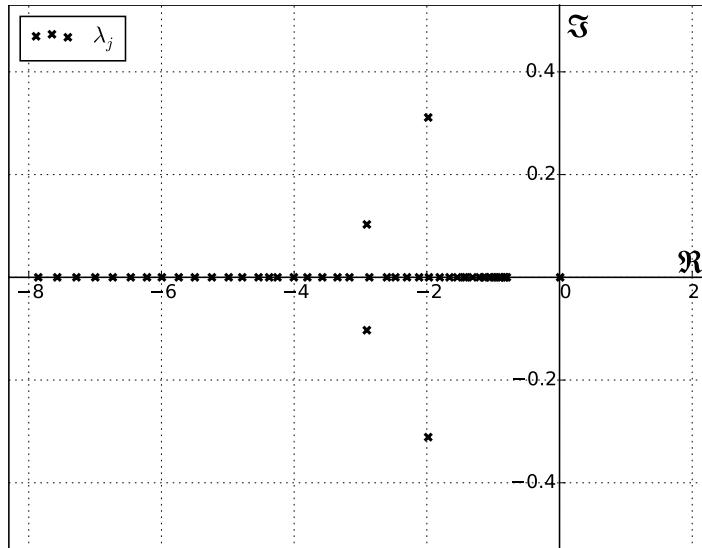


Abbildung 7.3: Auftragung der größten 50 Eigenwerte einer Ein-Hotspot Lösung mit den Parametersatz II aus Tabelle A.2, mit dem Realteil als horizontale und dem Imaginärteil als vertikale Achse. Alle Eigenwerte haben näherungsweise einen Realteil von $\Re(\lambda_j) \leq 0$. Die Lösung ist stabil.

7.4 Oszillierende Hotspots

Zuletzt soll das System im Parametersatz III (Tabelle A.3) auf ein Anzeichen einer Hopfbifurkation untersucht werden. Da mit Erhöhung des Parameters D die Relaxationszeit steigt, wie es in Abbildung 6.3 zu sehen ist, ist im Spektrum zu erwarten, dass sich durch die Erhöhung von D die komplex konjugierte Eigenwerte der imaginären Achse annähern. Es liegt somit nahe, die relaxierten Zustände von $D = 0.5, D = 0.75$ zu untersuchen. Bei diesen erhält man jedoch Spektren, die zum einen Instabilitäten aufweisen und zum anderen keinen Eigenwert mit dem Realteil null besitzen, der eigentlich aufgrund der Randbedingungen vorhanden sein muss. Da somit diese Spektren definitiv nicht den Zuständen entsprechen, wird auf eine Darstellung dieser verzichtet.

Vermutlich führen noch nicht entdeckte Effekte zu Instabilitäten in dem System. Um diese weiter zu untersuchen, würde der nächste Arbeitsschritt in der Variation des Parameters der Diffusionskonstante der Attraktivität ϵ liegen. Es wird vermutet, dass hohe ϵ diese unbekannte Instabilität auslösen, da Parametersatz IV A.4 mit der linearen Stabilitätsanalyse untersuchbar ist (vgl. Abb.7.1).

Eine andere Option wäre das Wechseln des numerischen Näherungsverfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems. Während für die Iterationen durch das Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren, bei der Simulation mit $D = 0.5$ bzw. $D = 0.75$ A.3 in der Nähe des stationären Zustands, die partiellen Ableitungen der Gleichungen (2.6),(2.7) in einer Ordnung von $O(10^{-3})$ verweilen, verändert sich jedoch die L^2 -Norm der Kriminalitätsrate nur mit einer Ordnung von $O(10^{-11})$. Das System wirkt also instabil, obwohl es sich in einen stationären Zustand relaxiert hat. Die hohe Ordnung der ∂_A, ∂_t von $O(10^{-3})$ scheint der Grund der falschen Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse, für den Parametersatz III A.3 zu sein.

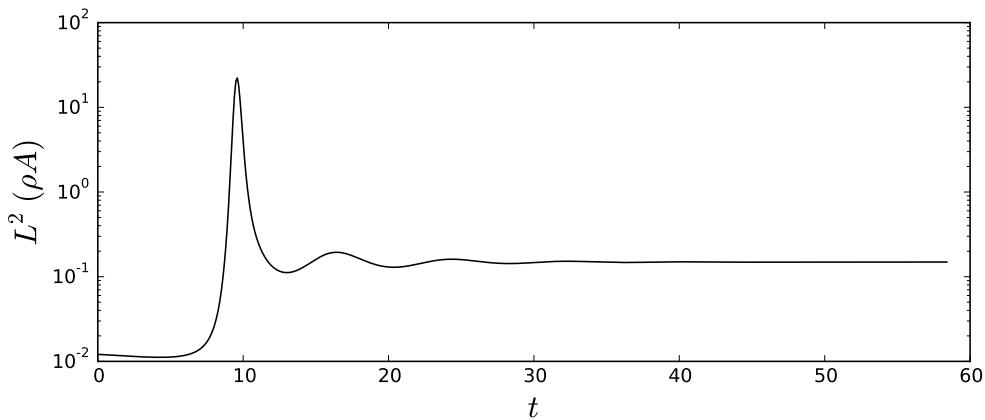


Abbildung 7.4: Zeitliche Entwicklung der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA , für den Parametersatz IV A.4. Es ist gedämpftes oszillatorisches Verhalten sichtbar. Dieses entspricht den Eigenwerten in Abbildung 7.1

Die Hopfbifurkation selbst, also der Fall, dass ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte rein imaginär ist, ist durch die lineare Stabilitätsanalyse nicht nachweisbar. Dies resultiert daraus, dass die Analyse in dieser Form einen stationären Zustand als Untersuchungsgegenstand benötigt. Befindet sich das System in einer Hopfbifurkation, so erreicht es den stationären Zustand nicht.

Trotzdem soll die Hypothese getestet werden, dass eine Variation von D eine Verschiebung der komplex konjugierten Eigenwerte auslöst und somit zu einer Hopfbifurkation führen kann. Dazu wird der D im Parametersatz IV A.4 variiert. Bei diesem ist für $D = 1$ bereits in Abbildung 7.1 sichtbar. Die zeitliche Entwicklung der L^2 -Norm der Kriminalitätsrate ρA zeigt ebenfalls ein oszillatorisches Verhalten (siehe Abb. 7.4). Bei einer Verringerung von D sollte nun das Paar von komplex konjugierten Eigenwerten einen geringeren Realteil besitzen, während einer Erhöhung den Realteil erhöhen sollte. In Abbildung ?? ist dieses Verhalten zunächst zu sehen. Jedoch ändert sich die Richtung der Änderung des Realteils, die mit einer Erhöhung von D mit eingeht. Vermutlich folgt der tatsächliche Verlauf der komplex konjugierten Eigenwerte einem “snaking” in negativer Richtung der imaginären Achse. In [13] wurde bereits in verschiedenen Aspekten ein snaking der L^2 -Norm gefunden. Hier scheint dieses Verhalten ebenfalls im Spektrum der Eigenwerte zu finden zu sein.

Für diesen Parametersatz wird somit wahrscheinlich keine Hopfbifurkation durch die Variation von D erreicht. Trotzdem sollte das System nach den Ergebnissen aus Kapitel 6, wahrscheinlich eine Hopfbifurkation durchführen.

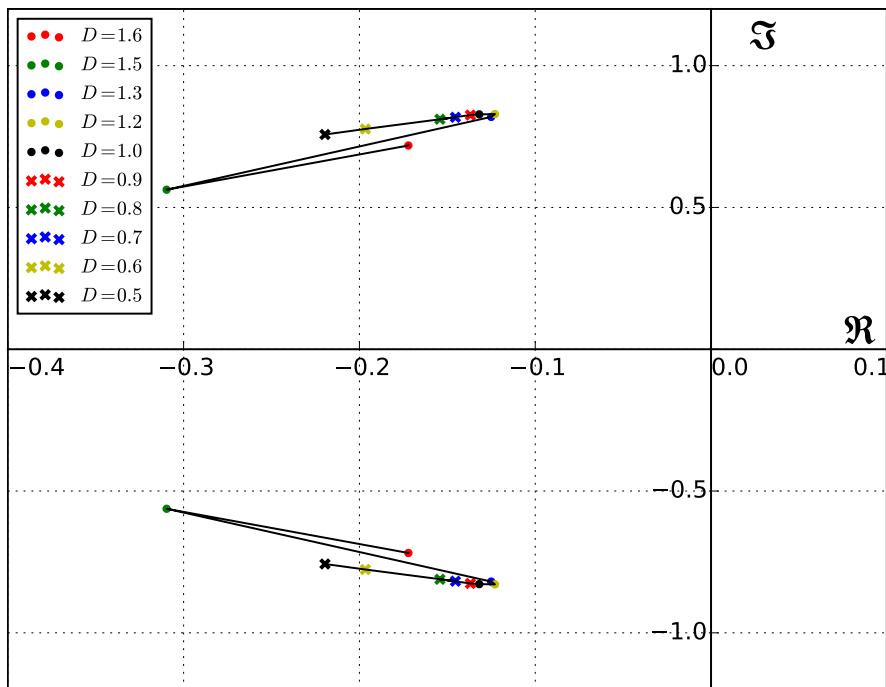


Abbildung 7.5: Auftragung der komplex konjugierten Eigenwerte von Ein-Hotspot Lösungen verschiedener Werte von D . Die Eigenwert sind in steigender Richtung von D durch Linien Verbunden. Eine Erhöhung von D führt zunächst zu einer Erhöhung des Realteils. Bei $D = 1.2$ sinkt der Realteil bei einer Erhöhung von D . Für $D = 1.6$ steigt sie erneut. Ansätze eines Snaking sind zu erkennen.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war es, Erkenntnisse über die Entstehung und dynamischem Eigenschaften von kriminellen Hotspots, des statistischen Modells für Kriminalität aus [18], zu gewinnen. Der Fokus der Untersuchungen bestand in der Anwendung numerischer Methoden, während analytische Methoden als Hilfsmittel dienten. Dabei beschränkte sich die Betrachtung auf eine räumliche Dimension.

Zunächst wurden die zwei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, die das Modell vollständig beschreiben, in den Kontext der Reaktions-Diffusions-Gleichungen eingeordnet. So konnte Verständnis über die einzelnen Bestandteile dieser Gleichungen gewonnen werden. Die Attraktivität für kriminelle Aktivitäten, eine Größe die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass Objekte oder Personen potenzielles Opfer von Kriminalität werden, diffundiert frei durch den Raum. Die Dichte der Kriminellen selbst diffundiert ebenfalls durch den Raum, erfährt jedoch einen Drift in Richtung hoher Attraktivitäten. Dabei erhöht das Eintreten von Kriminalität die Attraktivität und Verringert die Dichte an der jeweiligen Position im Raum. Cluster hoher Kriminalitätsraten, die sich aus der Attraktivität und Kriminalitätsdichte zusammensetzen, werden Kriminelle Hotspots genannt.

Zusätzlich wurde ein Vergleich zwischen dem Driftterm der Kriminellen und dem Driftterm im Modell für Chemotaxis gezogen.

Drei numerische Näherungsverfahren wurden benutzt und besprochen. Darunter befinden sich das Runge-Kutta-Fehlbergverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems, sowie die Pseudospektralmethode und finite Differenzen zur Implementierung der Differenzierung.

Ein Kriterium der Bildung von lokalisierten Strukturen in Reaktions-Diffusions Systeme wurde zunächst aus historischer Sicht vorgestellt und auf das Modell für Kriminalität angewandt. Es wurde eine Ungleichung gefunden, die die Bildung von Hotspots, für das Verhältnis der einzelnen Parameter vorhersagt. Dies wurde für einen Parameter numerisch gezeigt.

Weiterhin wurde numerisch ein Teil des Phasenraums untersucht. Durch Variation der Parameter wurden so, verschiedene stabile Zustände gezeigt die das System einnehmen kann. Es wurde gezeigt, dass das System viele Bistabilitäten aufweist und auch Parameterbereiche mit drei Stabilen Zuständen. Diese Zustände unterscheiden sich in der Anzahl der Hotspots. In den entstandenen Bifurkationsdiagrammen sind einige Stellen deutlich geworden, die auf dynamisches Verhalten verwiesen haben.

Somit wurden die Möglichkeiten der Dynamik von Hotspots diskutiert. Bezuglich des Driften von Hotspots gibt es in der Literatur sich widersprechende Ergebnisse. In dieser Arbeit

wurden keine driftende Ein-Hotspot Zustände gefunden. Einzig die räumliche Verteilung von mehreren Hotspots zeigt ein driftendes Verhalten, welches jedoch abnimmt sobald diese sich auf äquidistanten Abständen befinden.

Zusätzlich wurden Oszillationen von Hotspots gezeigt. Bei diesen wurden Hinweise für die Existenz einer Hopfbifurkation gefunden. Um diese Existenz zu bestätigen sind jedoch numerische Simulationen nicht ausreichende.

Zuletzt wurde die numerische Lineare Stabilitätsanalyse vorgestellt und angewandt. Durch diese können nun räumlich inhomogene Zustände wie der Ein-Hotspot Zustand untersucht werden. Zuerst wurde die Stabilität einer Ein-Hotspot Lösung gezeigt. Danach wurde die Analyse auf den Hotspot Zustand angewandt, der in [12] ein driftendes Verhalten aufweisen sollte. Dieser Zeigt sich wie erwartete jedoch als Stationär. Zuletzt wurde das System, durch Variation eines Parameters und ein Vergleich der Eigenwertspektren der Linearisierung des Systems, auf die vorher vermutete Hopfbifurkation untersucht. Dabei wurde nicht das erwartete Verhalten gefunden, dass zu einer Hopfbifurkation führt. Trotzdem wurde gezeigt welchen Einfluss der Parameter D , auf die komplexe konjugierten Eigenwerte des mit der linearen Stabilitätsanalyse gewonnenen Spektrums. Eine Erhöhung von D scheint somit zu einem snaking der komplexe konjugierten Eigenwerte zu führen.

Als direkter Anschluss sollte ein alternatives Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems benutzt werden, um zu vergleichen ob die numerischen Instabilitäten bei der Simulation hoher ϵ wie bei Parametersatz III A.3 auftreten.

Weitergehend bestünde die Option mit der Linearen Stabilitätsanalyse die Bistabilitäten aus Kapitel 5 zu untersuchen. Die Veränderung der Eigenwertspektren könnte Aufschluss über die Bifurkationen geben. Neben der Stabilität der Zustände, kann untersucht werden, welche Form Störungen haben sollten um den Zustand des Systems in einen Anderen zu überführen. Diese Störungen wären durch einen Einsatz von Polizeimaßnahmen in der Anwendung realisierbar. Somit führt dieses Wissen zu einem größerem Maß an Kontrolle über die Kriminalität.

Außerdem ist eine analytische Betrachtung notwendig. Erst durch diese kann bestimmt werden, welche Bifurkationen in dem Modell wirklich auftreten.

Allgemein ist die Implementierung einer Verbrechensbekämpfung in das Modell ein Schritt der den Nutzen des Modells in der Anwendung erhöhen würde. Ein Beispiel dafür findet sich in [19] bei dem Polizeipräsenz als Verringerung der Attraktivität implementiert wurde. Alternativ lässt sich Polizeipräsenz auch als dritte Variable im System realisieren. Dies wurde in [5], einem Modell das Piraterie beschreibt, implementiert. Dieses Modell zeigt den weiteren Forschungstrang auf, das Modell auf unterschiedliche Umgebungen anzupassen. Während die eindimensionale Betrachtung die in dieser Arbeit durchgeführt wurde, bspw. eine Straße beschreiben könnte, so werden für komplexere Umgebungen zwei räumliche Dimensionen benötigt. Zur Darstellung der Umgebung besteht zum einen die Möglichkeit die statische Komponente der Attraktivität α räumlich inhomogen zu gestalten. So könnten z.B. unterschiedliche Bezirke einer Stadt dargestellt werden. Auch könnte der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen getestet werden. Durch diese Anpassung an Umgebungen kann getestet werden, ob das Modell wirklich die Realität beschreibt.

Erst die Antwort auf die Frage über die Gültigkeit des Modells, kann darüber aufklären ob weitere wissenschaftliche Ressourcen in die theoretische Erforschung des Modells investiert werden sollten, oder ob ein neues Modell entwickelt werden muss. Denn der Nutzen, den ein Verständnis über die Entstehung und Dynamik von kriminellen Hotspots erbringen würde, ist unbestreitbar.

Anhang A

Anhang

Tabelle A.1: Parametersatz I

Parameter	Numerischer Wert
α	0.05
γ	0.2
ϵ	0.2
D	1

Tabelle A.2: Parametersatz II

Parameter	Numerischer Wert
α	1
γ	2
ϵ	0.07
D	-

Tabelle A.3: Parametersatz III

Parameter	Numerischer Wert
α	0.05
γ	0.10
ϵ	0.3
D	-

Tabelle A.4: Parametersatz IV

Parameter	Numerischer Wert
α	0.05
γ	0.10
ϵ	0.09
D	1

Tabelle A.5: Parametersatz X

Parameter	Numerischer Wert
α	0.05
γ	0.20
ϵ	0.30
D	13

Literaturverzeichnis

- [1] John H. Argyris, Gunter Faust, Maria Haase, and Rudolf Friedrich. *Die Erforschung des Chaos: eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme*. Springer, Heidelberg, zweite edition, 2010.
- [2] M. Gupta B.A. Frigyik, S. Srivastava. An introduction to functional derivatives. Technical report, Department of Electrical Engineering, University of Washington, Seattle, 2008.
- [3] John P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Mineola, NY, second edition, 2001.
- [4] F.H. Busse and M. Bestehorn. *Hydrodynamik und Strukturbildung: Mit einer kurzen Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [5] Giuseppe Maria Coclite, Mauro Garavello, and Laura V. Spinolo. A mathematical model for piracy control through police response. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 24(4), Jul 2017.
- [6] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern Formation Outside of Equilibrium. *Rev. Modern Phys.*, 65(3):851–1112, 1993.
- [7] E. Fehlberg. Klassische runge-kutta-formeln vierter und niedrigerer ordnung mit schrittweiten-kontrolle und ihre anwendung auf wärmeleitungsprobleme. *Computing*, 6(1), Mar 1970.
- [8] Adolf Fick. Ueber diffusion. *Annalen der Physik*, 170(1):59–86, 1855.
- [9] Dirk Horstmann. From 1970 until present: The keller-segel model in chemotaxis and its consequences, 2003.
- [10] Rebecca Hoyle. *Pattern Formation: An Introduction to Methods*. Cambridge University Press, 2006.
- [11] Steven G. Johnson. Notes on fft-based differentiation. Technical report, MIT Applied Mathematics, 2011.
- [12] Theodore Kolokolnikov, Michael Ward, and Juncheng Wei. The stability of steady-state hot-spot patterns for a reaction-diffusion model of urban crime. *arXiv preprint arXiv:1201.3090*, 2012.
- [13] David J.B. Lloyd and Hayley O'Farrell. On localised hotspots of an urban crime model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 253:23 – 39, 2013.

- [14] J.D. Logan. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.
- [15] V. Nekorkin and M.G. Velarde. *Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos*. Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [16] H.-G. Purwins, H.U. Bödeker, and A.W. Liehr. *Dissipative Solitons in Reaction-Diffusion Systems*, pages 267–308. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [17] M. B. Short, A. L. Bertozzi, and P. J. Brantingham. Nonlinear patterns in urban crime: Hotspots, bifurcations, and suppression. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 9(2):462–483, 2010.
- [18] M. B. Short, M. R. D’Orsogna, V. B. Pasour, G. E. Tita, P. J. Brantingham, A. L. Bertozzi, and L. B. Chayes. A statistical model of criminal behavior. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(supp01):1249–1267, 2008.
- [19] Martin B. Short, P. Jeffrey Brantingham, Andrea L. Bertozzi, and George E. Tita. Dissipation and displacement of hotspots in reaction-diffusion models of crime. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(9):3961–3965, 2010.
- [20] Hira Affan Siddiqui. *Spatio-Temporal Patterns in Systems far from Equilibrium*. PhD thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011.
- [21] J. Stoer and R. Bulirsch. *Numerische Mathematik 2: Eine Einführung - unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F.L.Bauer*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [22] SH Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering, 2001.
- [23] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237(641):37–72, 1952.