

WESTFÄLISCHE WILHELMUS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

---

# Analyse laufender lokalisierter Strukturen in Systemen mit zeitverzögter Rückkopplung

---

*Autor:*  
Tobias SCHEMMELMANN

*Betreuer:*  
Prof. Dr. Uwe THIELE  
Dr. Svetlana GUREVICH

15. Juli 2016



## Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Experimentelle Umsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Modellbeschreibung ohne Rückkopplung</b>	<b>4</b>
<b>3 Erweiterung des Modells um Rückkopplung</b>	<b>5</b>
3.1 Betrachtung der stationären Lösungen . . . . .	6
3.2 Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	6
3.3 Zerlegung der Störung in Eigenfunktionen . . . . .	7
3.4 Eigenwertproblem mit Rückkopplung . . . . .	8
<b>4 Numerische Behandlung</b>	<b>9</b>
4.1 Simulationsablauf . . . . .	10
4.1.1 Injektion . . . . .	10
4.1.2 Rückkopplung . . . . .	10
4.2 Schwerpunktsbestimmung . . . . .	10
<b>5 Destabilisierung stationärer lokalizierter Strukturen</b>	<b>11</b>
5.1 Drift . . . . .	12
5.2 Oszillation . . . . .	14
5.3 Oszillation und Drift . . . . .	17
5.4 Periodenverdopplung . . . . .	19
5.5 Schwebung . . . . .	20
<b>6 Parameterscan</b>	<b>21</b>
6.1 Analyse . . . . .	21
6.2 Schnitt bei $\varphi = 0.0$ . . . . .	23
6.3 Schnitt bei $\eta = 0.02$ . . . . .	26
6.4 Schnitt bei $\tau = 150$ . . . . .	29
<b>7 Stabilisierung driftender lokalizierter Strukturen</b>	<b>32</b>
7.1 Stationäre lokalisierte Struktur . . . . .	32
7.2 Oszillation . . . . .	33
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>34</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>36</b>
<b>Anhang</b>	<b>38</b>
A: Simulation - Quellcode . . . . .	38
<b>Danksagung</b>	<b>42</b>
<b>Erklärung zur Bachelorarbeit</b>	<b>43</b>



## Einleitung

Lokalisierte Strukturen in dissipativen Medien sind bereits in einer Vielzahl unterschiedlicher experimenteller und theoretischer Systeme beobachtet worden. In optischen Systemen treten diese zum Beispiel als lokalisierte Lichtpunkte in nichtlinearen Resonatoren auf [1, 2], während es sich in chemischen und biologischen Systemen um Punkte mit deutlich erhöhter Konzentration handelt [3, 4, 5]. Lokalisierte Strukturen treten in Form von einzelnen Wellen in dissipativen Flüssigkeiten auf [6] und als Strömungsfäden in Gasentladungssystemen [7]. Aufgrund des Fortschritts im Bereich der Halbleitertechnologie sind bisher vor allem lokalisierte Strukturen in der transversalen Ebene eines elektrisch gepumpten Oberflächenemitters experimentell erzeugt und untersucht worden [8]. In diesen Systemen konnten lokalisierte Strukturen sowohl unter [8] als auch über [9] der Lasing-Schwelle beobachtet werden. Das Interesse an lokalisierten Strukturen in nichtlinearen Lasersystem ist im großen Gebiet der möglichen Anwendungen begründet. Diese umfassen lokalisierte Strukturen in Oberflächenemittern als komplett optische Verzögerungsleitung [10] und optische Logikgatter [11]. Lokalisierte Strukturen in Lasersystemen eignen sich für solche Aufgaben besonders, da die Reaktionszeit der Halbleiter sehr gering ist. Zur praktischen Umsetzung dieser Aufgaben ist es nötig die lokalisierten Strukturen in Oberflächenemittern zu kontrollieren, weshalb ein hinreichendes theoretisches Verständnis der lokalisierten Strukturen, sowie deren Dynamik notwendig ist.

In [12, 13] wurde gezeigt, dass lokalisierte Strukturen in Oberflächenemittern mit gesättigtem Absorber nicht unbedingt stationär sein müssen, sondern sich spontan bewegen können, wenn das Verhältnis der Lebensdauern der Ladungsträger im aktiven und passiven Lasermedium bestimmte Werte annimmt. Neben sehr komplexen Bewegungsmustern der lokalisierten Strukturen konnte zusätzlich eine Atmung (engl. "breathing") der Struktur, sowie weitere komplexe Verhaltensmuster beobachtet werden. Außerdem wurde gezeigt, dass die Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur von den Parametern des Systems eindeutig bestimmt wird. Eine solche Bewegung wird als intrinsischer Drift bezeichnet. Spontane Bewegungen von sonst stationären lokalisierten Strukturen können durch thermische Effekte hervorgerufen werden [14, 15].

Unter dem Einfluss von zeitverzögerter optischer Rückkopplung ist es ebenfalls möglich stationäre lokalisierte Strukturen in einem Oberflächenemitter mit gesättigtem Absorber zu bewegen. In [16] wird gezeigt, dass bei Erhöhung der Rückkopplungsstärke in einem solchen System die Dynamik der lokalisierten Struktur von Periodenverdopplung ins Chaos übergeht. Der Einfluss der Rückkopplungsphase auf den Bifurkationspunkt der Driftinstabilität der lokalisierten Strukturen wurde in [17] untersucht.

Ziel dieser Arbeit ist die theoretische Untersuchung der Dynamik von lokalisierten Strukturen in einem Oberflächenemitter mit gesättigtem Absorber unter dem Einfluss von optischer zeitverzögerter Rückkopplung. In Kapitel 1 wird eine mögliche experimentelle Realisierung des betrachteten Systems diskutiert. Ein theoretisches Modell zur Beschreibung von Oberflächenemittern mit gesättigtem Absorber wird in Kapitel 2 vorgestellt. Außerdem werden die Lösungen des Modells analysiert und diskutiert. Die Erweiterung des Modells zur Beschreibung von Oberflächenemittern mit optischer zeitverzögerter Rückkopplung geschieht in Kapitel 3. Mit Hilfe des Modells und der geschickten Wahl eines Ansatzes, lassen sich explizit zeitlich stationäre lokalisierte Strukturen finden. Diese werden einer linearen Stabilitätsanalyse unterzogen und es wird eine Bedingung für den Schwellwert der Driftbifurkation vorgestellt. In Kapitel 4 wird die Umsetzung einer numerischen Simulation des Modells diskutiert, während in Kapitel 5 die Ergebnisse der Simulationen betrachtet werden. Dabei zeigt sich, dass die Dynamik der lokalisierte Struktur mit Hilfe der zeitverzögerten Rückkopplung

in der Lage ist sehr komplexen Bewegungsmustern zu folgen. Zusätzlich wird gezeigt, dass es für entsprechende Parameter gezielt möglich ist unterschiedliche Bewegungsmoden auch einzeln zu destabilisieren. In Kapitel 6 wird der durch die Einführung der zeitverzögerten Rückkopplung entstandene Parameterraum systematisch untersucht und diskutiert. Der darauffolgende Teil der Arbeit beschäftigt sich mit lokalisierten Strukturen, welche intrinsisch driften. Es wird gezeigt, dass diese Strukturen mit Hilfe der zeitverzögerten Rückkopplung stabilisiert werden können.

# 1 Experimentelle Umsetzung

Lokalisierte Strukturen können in sogenannten Oberflächenemittern (engl. “vertical-cavity surface-emitting lasers”, kurz VCSELs) experimentell erzeugt und beobachtet werden. Im Folgenden wird ein Halbleiterlaser betrachtet, welcher als Oberflächenemitter fungiert. Die beiden Braggreflektoren bilden einen optischen Resonator innerhalb dessen sich das aktive und das passive Lasermedium befinden. Der emittierte Laserstrahl wird auf einen Spiegel mit von Null verschiedenem Transmissionskoeffizienten geleitet. Dieser Spiegel ist in einem Abstand  $L_{\text{ext}}$  so positioniert, dass der reflektierte Anteil des Strahls wieder in den Oberflächenemitter eingespeist wird. Dadurch wird das Signal mit einer Zeitverzögerung  $\tau \propto L_{\text{ext}}$  wieder in das System eingekoppelt. In Abbildung 1 ist ein solcher Aufbau schematisch dargestellt [16].

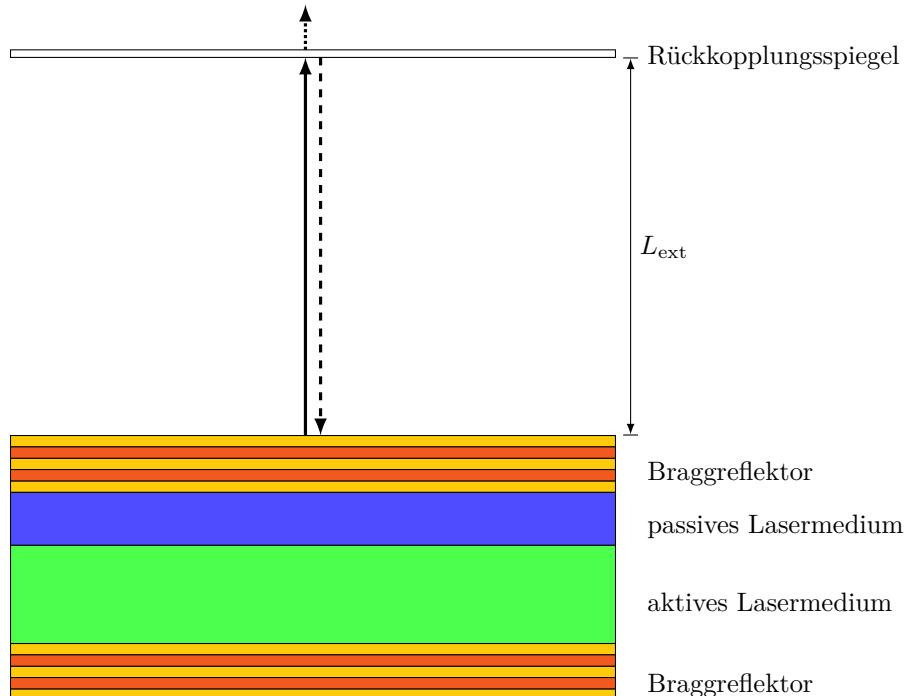


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines oberflächenemittierenden Halbleiterlasers mit zeitverzögter Rückkopplung. Zur Realisierung der zeitverzögerten Rückkopplung wird ein teilweise transmissiver Rückkopplungsspiegel im Abstand  $L_{\text{ext}}$  zum Laser so platziert, dass dieser den reflektierten Strahlanteil wieder in den Resonator zurückleiten kann. Die durchgehende Linie repräsentiert den aus dem System ausgekoppelten Strahl, die gestrichelte Linie den vom Rückkopplungsspiegel reflektierten und die gepunktete Linie den transmittierten Strahlanteil.

Da es sich um einen Oberflächenemitter handelt, wird der Laserstrahl nicht parallel zur Grenzfläche der beiden Medien, sondern orthogonal dazu ausgekoppelt.

Die lokalisierten Strukturen, welche in dieser Arbeit betrachtet werden, sind Lichtpunkte die in der transversalen Ebene des Lasers entstehen. Zur Erzeugung der lokalisierten Strukturen ist keine Rückkopplung nötig und der Rückkopplungsspiegel kann entfernt werden. Sobald die lokalisierte Struktur entstanden ist, kann der Rückkopplungsspiegel in

den Strahlengang eingeführt werden um den Einfluss der zeitverzögerten Rückkopplung zu untersuchen.

## 2 Modellbeschreibung ohne Rückkopplung

Zur Beschreibung der Dynamik in der transversalen Ebene eines Oberflächenemitters werden die Maxwell-Bloch Gleichungen verwendet. Unter der Annahme, dass sich bei einer Rotation des elektrischen Feldvektors in der komplexen Ebene der Betrag des Vektors nur langsam ändert, kann man ein System von partiellen Differentialgleichungen erhalten [13]:

$$\partial_t E(\mathbf{x}, t) = ((1 - i\alpha)N + (1 - i\beta)n - 1 + i\nabla^2) E(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

$$\partial_t N(\mathbf{x}, t) = b_1 (\mu - N(1 + |E|^2)) \quad (2.2)$$

$$\partial_t n(\mathbf{x}, t) = -b_2 (\gamma + n(1 + s|E|^2)) \quad (2.3)$$

Dabei entspricht  $E(\mathbf{x}, t)$  dem elektrischen Feld,  $\mathbf{x} = (x, y)$  der Position in der transversalen Ebene des Oberflächenemitters,  $N(\mathbf{x}, t)$  (bzw.  $n(\mathbf{x}, t)$ ) einer Größe proportional zur Ladungsträgerdichte des aktiven (passiven) Mediums,  $\alpha$  ( $\beta$ ) dem  $\alpha$ -Faktor des aktiven (passiven) Lasermediums,  $\nabla$  dem Nabla Operator in der räumlichen Dimension von  $\mathbf{x}$ ,  $\mu$  der Pumprate,  $\gamma$  dem Absorptionskoeffizienten und  $s$  dem Sättigungsparameter.  $b_1$  ( $b_2$ ) entspricht dem Verhältnis von Photonlebensdauer zur Ladungsträgerlebensdauer im aktiven (passiven) Lasermedium.

Dieses Gleichungssystem besitzt drei unterschiedliche Lösungen [12]: Eine homogene nicht lasing Lösung, eine lasing Lösung, sowie lokalisierte Strukturen. Die homogene Lösung zeichnet sich durch folgende Form aus

$$E = 0, \quad N = \mu, \quad n = -\gamma. \quad (2.4)$$

Bei der lasing Lösung breitet sich eine stehende Welle über das gesamte Lasermedium aus

$$E = \sqrt{I_0} e^{i\omega t}, \quad N = \frac{\mu}{1 + I_0}, \quad n = -\frac{\gamma}{1 + sI_0}. \quad (2.5)$$

Dabei bezeichnet  $I_0 = |E|^2$  die Intensität des elektrischen Feldes. Man kann zeigen [12], dass in der Region der Koexistenz von Gleichung (2.4) und Gleichung (2.5)

$$\frac{(\sqrt{s-1} + \sqrt{\gamma})^2}{s} < \mu < 1 + \gamma \quad (2.6)$$

stabile lokalisierte Strukturen existieren. Diese können sowohl stationär sein, als auch eine Driftbewegung ausführen [12] oder eine komplexere Dynamik zeigen [13]. In Abbildung 2 sind die Existenzbereiche der oben genannten Lösungen auf der  $(\mu, |E|^2)$ -Ebene angegeben.

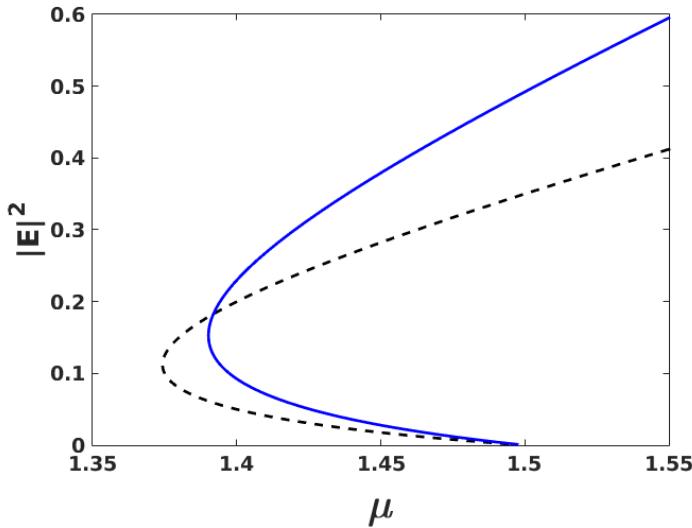


Abbildung 2: Lösungäste der Lösungen von der Modellgleichung Gleichung (2.1) bis Gleichung (2.3) auf der von  $\mu$  und  $|E|^2$  aufgespannten Ebene. Aufgetragen ist jeweils das Maximum von  $|E|^2$ . Die gestrichelte schwarze Linie repräsentiert die lasing Lösung (2.5), während die durchgezogene blaue Linie für die lokalisierten Strukturen steht. Beide Äste sind instabil für negative Steigungen. Die homogene nicht lasing Lösung (2.4) ist über eine subkritische Bifurkation bei  $\mu = 1 + \gamma$  mit den anderen beiden Lösungen verbunden.

Die homogene Lösung (2.4) ist bis zu einem Schwellwert von  $\mu = 1 + \gamma$  stabil. An diesem Schwellwert entspringen die Äste der beiden anderen möglichen Lösungen. Stabile lokale Strukturen existieren nur in einem Bereich, in dem der obere Ast der lokalen Strukturen mit der homogenen nicht lasing Lösung koexistiert (2.6).

### 3 Erweiterung des Modells um Rückkopplung

Das vorhandene Modell (2.1) - (2.3) soll nun erweitert werden um auch ein System wie in Abbildung 1 dargestellt zu beschreiben. Durch den Spiegel wird optisch wieder ein Teil des elektrischen Feldes in das System eingespeist. Aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit vergeht die Zeit  $\tau$  bis der Laserstrahl wieder in den Oberflächenemitter eingespeist wird, welche proportional zum Abstand  $L_{\text{ext}}$  zwischen Laser und Rückkopplungsspiegel ist. Dementsprechend wird das elektrische Feld  $E(\mathbf{x}, t - \tau)$  mit einer Verzögerung  $\tau$  in das System eingestrahlt. Beim Durchgang des Laserstrahls durch den transmissiven Spiegel wird ein Großteil des Strahls reflektiert und dadurch aus dem System ausgekoppelt. Der Anteil des Strahls, welcher den Spiegel passiert und infolgedessen wieder in das System eingespeist wird, wird mit der Rückkopplungsstärke  $\eta$  beschrieben. Bei der Reflexion, sowie beim Passieren des Spiegels kann es zu Phasenverschiebungen  $\varphi$  kommen, welche im Modell ebenfalls berücksichtigt wird. Zur Erweiterung der bisherigen Gleichungen (2.1)-(2.3) werden die oben beschriebenen Terme zu (2.1) hinzugefügt. Die Ladungsträgerdichten der Lasermedien sind

von der Rückkopplung nicht beeinflusst, weswegen deren Zeitentwicklung unverändert bleibt.

$$\partial_t E(\mathbf{x}, t) = ((1 - i\alpha)N + (1 - i\beta)n - 1 + i\nabla^2) E(\mathbf{x}, t) + \eta e^{i\varphi} E(\mathbf{x}, t - \tau) \quad (3.1)$$

$$\partial_t N(\mathbf{x}, t) = b_1 (\mu - N(1 + |E|^2)) \quad (3.2)$$

$$\partial_t n(\mathbf{x}, t) = -b_2 (\gamma + n(1 + s|E|^2)) \quad (3.3)$$

### 3.1 Betrachtung der stationären Lösungen

Da lokalisierte Strukturen betrachtet werden sollen, wird ein Ansatz gewählt, welcher die Amplitude des elektrischen Feldes von der komplexen Rotation des Vektors trennt [18]:

$$E(\mathbf{x}, t) = E_0(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad N = N_0(\mathbf{x}), \quad n = n_0(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Mit Hilfe dieses Ansatzes werden lokalisierten Strukturen in Oberflächenemittern ohne Rückkopplung ( $\eta = 0$ ) zu stationären Lösungen des Modells (3.1) - (3.2):

$$0 = ((1 - i\alpha)N_0 + (1 - i\beta)n_0 - 1 + i\omega + i\nabla^2) E_0(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

$$0 = b_1 (\mu - N_0(1 + |E_0|^2)) \quad (3.6)$$

$$0 = -b_2 (\gamma + n_0(1 + s|E_0|^2)). \quad (3.7)$$

Um lokalisierte Strukturen in einem Oberflächenemitter mit Rückkopplung zu betrachten wird  $\eta > 0$  gewählt:

$$0 = ((1 - i\alpha)N_0 + (1 - i\beta)n_0 - 1 + i\omega + i\nabla^2) E_0(\mathbf{x}) + \eta e^{i\theta} E_0(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

$$0 = b_1 (\mu - N_0(1 + |E_0|^2)) \quad (3.9)$$

$$0 = -b_2 (\gamma + n_0(1 + s|E_0|^2)). \quad (3.10)$$

Hierbei entspricht  $\theta = \omega\tau + \varphi$  der effektiven Phase des elektrischen Feldes, welches wieder in das System eingekoppelt wird.

### 3.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Zur vereinfachten Betrachtung der Stabilitätsanalyse wird zunächst das System (3.1)-(3.3) verallgemeinert dargestellt [18]:

$$\partial_t \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{L}_\nabla(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) + \eta B_\varphi \mathbf{q}(\mathbf{x}, t - \tau). \quad (3.11)$$

Dabei entspricht  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  dem Systemzustand,  $\mathfrak{L}_\nabla$  beschreibt einen nichtlinearen Operator von (3.1)-(3.3) und  $B_\varphi$  eine Rotationsmatrix für das elektrische Feld um den Winkel  $\varphi$ :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \text{Re}(E) \\ \text{Im}(E) \\ N \\ n \end{pmatrix} \quad B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Ähnlich wie in Unterkapitel 3.1, sei  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = (e^{-i\omega t}, e^{-i\omega t}, 1, 1)^T \cdot \mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  eine stationäre lokalisierte Struktur, welche folgende Gleichung erfüllt

$$0 = \mathfrak{L}_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x})) + \eta B \mathbf{q}_0(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Dabei ist  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) = (\text{Re}(E_0), \text{Im}(E_0), N_0, n_0)^T$ ,  $B$  eine Rotationsmatrix für das elektrische Feld um den Winkel  $\theta = \omega\tau + \varphi$  und  $\mathfrak{L}_\nabla$  ein nichtlinearer Operator von (3.8) - (3.10). Es soll das Verhalten des Systems analysiert werden, wenn es sich in einem Zustand in der Nähe der stationären Lösung befindet. Dazu wird zur stationären Lösung eine kleine Störung  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  addiert. Dies wird in (3.11) eingesetzt:

$$\partial_t \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{L}_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)) + \eta B(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x}, t - \tau)). \quad (3.14)$$

Gleichung (3.14) wird in  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  linearisiert:

$$\partial_t \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathfrak{L}_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x})) + \eta B \mathbf{q}_0(\mathbf{x})}_{= 0} + \mathfrak{L}'_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x})) \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) + \eta B \mathbf{p}(\mathbf{x}, t - \tau). \quad (3.15)$$

Dabei entspricht  $\mathfrak{L}'_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}))$  dem linearen Operator, den man bei der Linearisierung von  $\mathfrak{L}_\nabla(\mathbf{q}(\mathbf{x}), t)$  um  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  erhält. Unter Berücksichtigung von (3.13) folgt aus (3.15)

$$\partial_t \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{L}'_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x})) \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) + \eta B \mathbf{p}(\mathbf{x}, t - \tau). \quad (3.16)$$

### 3.3 Zerlegung der Störung in Eigenfunktionen

Um Aussagen über die Stabilität treffen zu können, ist es nötig die Störung  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  in Eigenfunktionen  $\psi_k(\mathbf{x})$  des linearen Operators  $\mathfrak{L}'_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}))$  zu zerlegen

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k e^{\lambda_k t} \psi_k(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Dabei sind  $a_k$  der Amplitudenfaktor der jeweiligen Eigenfunktion und  $\lambda_k$  der zur Eigenfunktion  $\psi_k$  korrespondierende Eigenwert. Ohne Rückkopplung, also mit  $\eta = 0$ , erhält man damit aus (3.16) folgendes Eigenwertproblem mit den Eigenwerten  $\lambda_k$

$$0 = (\mathfrak{L}'_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x})) - \mathbb{1}\lambda_k) \psi_k. \quad (3.18)$$

Dabei entspricht  $\mathbb{1}$  der Einheitsmatrix mit der Dimension von  $\mathfrak{L}'_\nabla(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}))$ .

Die Lösung  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  ist stabil, solange für jeden Eigenwert gilt  $\text{Re}(\lambda_k) < 0$ . Ist diese Bedingung erfüllt, verschwindet aufgrund des exponentiellen Abfalls jeder Summand von  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  für große Zeiten  $t$ . Dadurch ist sichergestellt, dass das System trotz der Störung wieder in die stabile Lösung  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  relaxiert.

Sobald für einen Eigenwert  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$  gilt, wächst die Störung mit fortlaufender Zeit exponentiell an. Die lineare Stabilitätsanalyse verliert dann ihre Gültigkeit, da die zunächst als klein angenommene Störung wächst. In diesem Fall kann im Rahmen der linearen Stabilitätsanalyse keine Aussage über die Stabilität des Systems getroffen werden.

Gilt  $\text{Re}(\lambda_k) \leq 0$  und existiert mindestens ein Eigenwert mit  $\lambda_k = 0$ , so kann keine Aussage über die Stabilität der Lösung  $\mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  getroffen werden. Innerhalb der linearen Stabilitätsanalyse wird die Störung der dazugehörigen Eigenfunktion mit fortlaufender Zeit weder zerfallen noch anwachsen. Daher bezeichnet man solche Lösungen als neutral-stabil. Über das Überleben oder Sterben der Lösung entscheiden in diesem Fall Terme höherer Ordnungen von  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ , welche man in Gleichung (3.15) berücksichtigen müsste. Betrachtet man in (3.15) auch Terme höherer Ordnungen, so handelt es sich nicht mehr um eine lineare Stabilitätsanalyse, sondern um eine nichtlineare Stabilitätsanalyse.

Bei Systemen, welche Symmetrieeigenschaften besitzen (z. B. Translationssymmetrie), gibt es mindestens einen Eigenwert mit  $\lambda = 0$ . Dieser Eigenwert gehört zu einer sogenannten

Goldstone-Mode, welche eine neutral-stabile Eigenfunktion des Systems ist. Für den Fall, dass die größten Eigenwerte mit  $\lambda_k = 0$  zu sogenannten Goldstone-Moden gehören (siehe [19]), lassen sich auch ohne nichtlineare Stabilitätsanalyse Aussagen über die Stabilität treffen. In diesem Fall ist das System neutral-stabil gegenüber Störungen in Form jener Moden.

### 3.4 Eigenwertproblem mit Rückkopplung

Das in (3.18) dargestellte Eigenwertproblem wird für  $\eta \neq 0$  zu einem transzendenten Eigenwertproblem

$$0 = (\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0(\mathbf{x})) - \lambda_k \mathbb{1} + \eta B e^{-\lambda_k \tau}) \psi_k. \quad (3.19)$$

Ohne weitere Berechnung sind zunächst nur 2 Eigenwerte mit  $\lambda_k = 0$  bekannt. Da der Operator  $\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0(\mathbf{x}))$  invariant gegenüber einer Translation, sowie einer Rotation der Phase ist, besitzt er die jeweils dazugehörige Goldstone-Mode. Die Translationsmode ist hierbei durch  $\psi_{\text{Tr}} = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  gegeben, während die der Rotation der Phase zugehörige Eigenmode durch  $\psi_{\text{Ph}} = (i, i, 0, 0)^T \cdot \mathbf{q}_0(\mathbf{x})$  gegeben ist.

Es handelt sich bei den Goldstone-Moden um neutral-stabile Störungen, welche die Stabilität der betrachteten Lösung zunächst nicht beeinflussen. Kommt es jedoch bei der Variation von Kontrollparametern dazu, dass eine weitere Eigenmode, die die Form einer Goldstone-Mode besitzt, instabil wird, so wird die stationäre Lösung destabilisiert.

Besitzt eine Eigenmode  $\psi$  ebenfalls den Eigenwert  $\lambda = 0$  für einen bestimmten Wert des Kontrollparameters, wird das Eigenwertproblem degeneriert. Dadurch muss die Basis von Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda = 0$  um die generalisierte Eigenfunktion erweitert werden. Mit diesem Vorwissen, lassen sich Bedingungen für die Bifurkationspunkte der Goldstone-Moden bestimmen. Besonderes Interesse gilt dabei der Driftbifurkation, da diese an lokalierten Strukturen besonders gut beobachtbar ist. Die Herleitung ist sowohl für die Translationsmode, als auch für die Mode der Rotation der Phase gleich. Zunächst wird das Eigenwertproblem (3.19) in der Nähe des Bifurkationspunktes betrachtet

$$\lambda = 0 + \varepsilon, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.20)$$

$\psi_0$  ist hierbei die Eigenmode einer Goldstone-Mode. Beim Einsetzen in (3.19) wird die Exponentialfunktion durch ihre Reihendarstellung bis zur ersten Ordnung angenähert

$$0 = (\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0) + \eta B) \psi_0 + (\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0) + \eta B) \varepsilon \psi_1 - (\mathbb{1} + \eta B \tau)(\psi_0 + \varepsilon \psi_1) \varepsilon. \quad (3.21)$$

Durch das Sortieren von (3.21) nach Ordnungen von  $\varepsilon$  erhält man 2 Gleichungen:

$$\varepsilon^0 : \quad (\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0) + \eta B) \psi_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon^1 : \quad (\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0) + \eta B) \psi_1 = (\mathbb{1} + \eta \tau B) \psi_0. \quad (3.23)$$

Gleichung (3.22) zeigt, dass die Goldstone-Mode  $\psi_0$  mit  $\lambda_0 = 0$  das Eigenwertproblem in (3.19) löst. Für  $\eta = 0$  beschreibt die Gleichung die Definition der generalisierten Eigenfunktion  $\psi_0$ . Gleichung (3.23) definiert die generalisierte Eigenfunktion  $\psi_1$ . Nach der Fredholmschen Alternative der linearen Algebra existiert von Gleichung (3.23) eine eindeutige nicht triviale Lösung, wenn gilt:

$$\langle \psi_0^\dagger | \mathbb{1} + \eta \tau B | \psi_0 \rangle = 0. \quad (3.24)$$

Dabei entspricht  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  dem Skalarprodukt in Form von kompletter Integration über das betrachtete Gebiet und  $\psi_0^\dagger$  der neutralen Eigenfunktion des adjungierten Operators  $(\mathcal{L}'_{\nabla}(\mathbf{q}_0) +$

$\eta B)^\dagger$ . Aus dieser Lösbarkeitsbedingung erhält man eine Bedingung für den Bifurkationspunkt der Driftbifurkation und der Bifurkation der Rotation der Phase:

$$\eta\tau = -\frac{\langle\psi_0^\dagger|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0^\dagger|B|\psi_0\rangle}. \quad (3.25)$$

Dabei ist zu beachten, dass (3.25) explizit von den beiden Rückkopplungsparametern  $\tau$  und  $\eta$  abhängt, während es von dem Phasenfaktor  $\varphi$  nur implizit abhängt. Dies liegt daran, dass die Rotationsmatrix  $B$  sich auf den Winkel  $\theta = \omega\tau + \varphi$  bezieht.

## 4 Numerische Behandlung

Die in (3.1) bis (3.3) vorgestellten Differentialgleichungen werden numerisch direkt gelöst. Das Problem wird in einer Dimension betrachtet auf einem Grundgebiet der Größe  $L_x$  mit  $N_x$  Stützstellen. Um eine Interaktion der lokalisierten Struktur mit den Rändern des Grundgebiets zu vermeiden, werden periodische Randbedingungen verwendet.

Die vorkommenden räumlichen Ableitungen werden mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens berechnet [20]. Hierbei wird der entsprechende Term mit einer schnellen Fouriertransformation (kurz, engl. "FFT") in den Fourierraum transformiert. Die räumliche Ableitung entspricht im Fourierraum einer Multiplikation mit dem  $k$ -Vektor und ist daher exakt, im Gegensatz zur numerischen Berechnung der Ableitung im Realraum

$$\mathcal{F}[\partial_x u] = ik\mathcal{F}[u]. \quad (4.1)$$

Hierbei ist  $\mathcal{F}$  die Fouriertransformation der räumlichen Ableitung  $\partial_x$  des Systems  $u$ . Nach der Multiplikation wird der Term wieder in den Realraum zurücktransformiert, in dem die restlichen Berechnungen stattfinden.

Die Berechnung des Zeitschritts wird mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta Verfahrens (oder Runge-Kutta 4) durchgeführt. Das Runge-Kutta Verfahren ermöglicht die Berechnung eines Systems  $\mathbf{x}(t_{n+1})$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ , wenn der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t_n$  bekannt ist. Sei

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}(t)) \quad (4.2)$$

$$t_{n+1} - t_n = h \quad (4.3)$$

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}(t_n)) \quad (4.4)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t_n) + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (4.5)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t_n) + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (4.6)$$

$$k_4 = f(t_n + h, \mathbf{x}(t_n) + hk_3). \quad (4.7)$$

Nach Runge-Kutta gilt dann

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (4.8)$$

Die numerische Simulation wurde mit Hilfe eines Python Programms umgesetzt. Der Quellcode der Simulation befindet sich in Anhang A.

## 4.1 Simulationsablauf

### 4.1.1 Injektion

Zu Beginn der Simulation wird die lokalisierte Struktur in das System injiziert. Die Injektion wird numerisch folgendermaßen simuliert. Zu Beginn wird das elektrische Feld innerhalb jedes Simulationsschrittes auf seinem Anfangswert festgehalten. Der Anfangswert des elektrischen Feldes ist so gewählt, dass dieser einer lokalisierten Struktur ähnlich ist. Durch das Fixieren des elektrischen Feldes auf einen bestimmten Wert, bekommen das aktive, sowie das passive Medium die Möglichkeit sich daran anzupassen. Die Lasermedien werden gesättigt. Nach 1 % der gesamten Simulationsdauer wird der Wert des elektrischen Feldes nicht mehr fixiert und kann sich den gewählten Parametern anpassen. Durch das fixieren des elektrischen Feldes ist sichergestellt, dass die lokalisierte Struktur überlebt.

### 4.1.2 Rückkopplung

Die verwendete Simulation bietet die Möglichkeit nach einer gewissen Dauer die Rückkopplung einzuschalten. Das heißt der Wert von  $\eta$  wird von 0 auf einen Wert  $\eta > 0$  geändert. Dadurch lässt sich der Unterschied zwischen einem System mit und ohne Rückkopplung beobachten.

Die Rückkopplung wird numerisch folgendermaßen realisiert. Es wird ein Array erstellt, welches den Verlauf des elektrischen Feldes über die Dauer der Rückkopplungszeit  $\tau$  speichern soll. Bei der Berechnung des Runge-Kutta Schritts, wird der Zustand des elektrischen Feldes zum Zeitpunkt  $t - \tau$  aus dem Array ausgelesen und als zusätzlicher Parameter übergeben. In jedem Simulationsschritt, wird nach der Berechnung des Runge-Kutta Schritts der aktuelle Zustand des elektrischen Feldes in das eben ausgelesene Feld des Arrays geschrieben und der Laufindex um eins erhöht. Sobald der Laufindex des Arrays das Ende erreicht hat, wird dieser wieder zurückgesetzt, sodass das Array wieder von neuem ausgelesen und befüllt werden kann.

Nach Beendigung der Injektionsphase wird das Array komplett mit Nullen befüllt, damit keine Artefakte aus der Injektionsphase die Rückkopplung beeinflussen. Das heißt, dass die Simulation nach der Injektionsphase noch mindestens  $\frac{\tau}{h}$  Zeitschritte laufen muss, um einen Rückkopplungseffekt zu beobachten.  $h$  entspricht dabei der gewählten Zeitschrittweite.

## 4.2 Schwerpunktsbestimmung

Zur Analyse des Systems wird außerdem die Position des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur in jedem Simulationsschritt ermittelt. Dadurch lassen sich Aussagen über die Bewegung der Struktur treffen.

Die Bestimmung des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur betrachtet den Betrag des elektrischen Feldes. Zunächst wird im Grundgebiet auf dem die Simulation durchgeführt wird das Maximum des elektrischen Feldes gesucht. Da die meisten lokalisierten Strukturen einer gaußschen Glockenfunktion ähneln wird das Array so verschoben, dass der Maximalwert sich in der Mitte des Grundgebiets befindet. Mit Hilfe eines gewichteten Mittelwertes wird dann der Schwerpunkt der lokalisierten Struktur berechnet. Danach wird die Struktur wieder an die ursprüngliche Position zurückverschoben. Durch dieses Vorgehen wird sichergestellt, dass die periodischen Randbedingungen bei der Berechnung des Schwerpunktes keine Probleme verursachen, wenn die Struktur sich am Rand des Grundgebiets befindet.

Kommt es dazu, dass sich eine lokalisierte Struktur über die Grenzen des Grundgebiets hinweg bewegt und dadurch wieder am anderen Ende des Grundgebiets erscheint, so führt dies

zu Problemen bei der korrekten Bestimmung der Bewegung der Struktur. Dies kann erst in der Nachbearbeitung entfernt werden.

## 5 Destabilisierung stationärer lokalisierter Strukturen

Im folgenden Kapitel sollen die Ergebnisse der direkten Numerik präsentiert werden. Dazu wird mit Hilfe der Simulation zunächst eine lokalisierte Struktur in einem Oberflächenemitter ohne Rückkopplung simuliert. Die Parameter des Oberflächenemitters werden für die folgenden Simulationen nicht geändert und sind daher an dieser Stelle angegeben:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.0 & \beta &= 0.0 & b_1 &= 0.9 \\ b_2 &= 1.0 & \gamma &= 2.0 & s &= 10.0 \\ \mu &= 2.06 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die Simulation wird auf einem Grundgebiet  $L_x = [-50, 50]$  ausgeführt mit einer Stützstellenanzahl  $N_x = 128$ . Die Schrittweite eines Simulationsschrittes beträgt  $h = 0.01$ . Mit dieser Parameterwahl lässt sich eine stationäre lokalisierte Struktur erzeugen, wie sie in Abbildung 3 dargestellt ist.

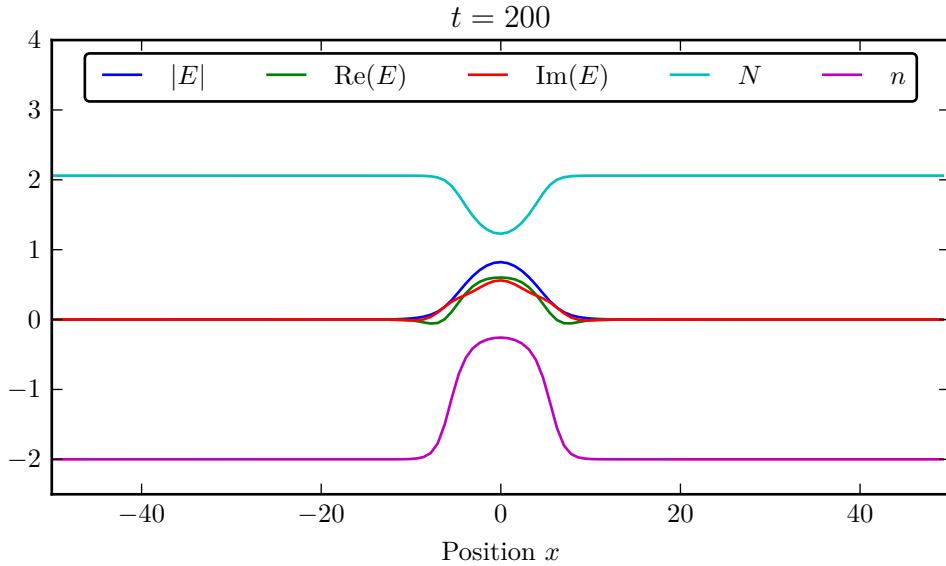


Abbildung 3: Lokalisierte Struktur zum Zeitpunkt  $t = 200$  mit den Parametern aus (5.1). Die Injektion wurde zum Zeitpunkt  $t = 36$  beendet. Dargestellt sind die Zahlenwerte der numerischen Simulation des Betrages des elektrischen Feldes (blau), sowie dessen Real- und Imaginärteil (grün und rot). Ebenso die Werte der Ladungsträgerdichten im aktiven (cyan) und passiven (lila) Lasermedium. Dabei sind der Betrag des elektrischen Feldes, sowie die beiden Ladungsträgerdichten zeitlich konstant, während Real- und Imaginärteil des elektrischen Feldes mit der Frequenz  $\omega$  rotieren.

Nachdem sich eine stabile stationäre lokalisierte Struktur gebildet hat, wird die Rückkopplung aktiviert. Es wird dann die Reaktion der lokalisierten Struktur auf die Rückkopplung

beobachtet.

Zur Beobachtung der Bewegung der lokalisierten Struktur ist die Positionsangabe des Schwerpunktes ein gutes Maß, da für die meisten der Rückkopplungsparameter die lokalisierte Struktur formstabil bleibt. Durch die Beschränkung der Angabe auf die Schwerpunktusbewegung lässt sich diese deutlich besser nachvollziehen. Außerdem lässt sich die Positionsangabe so nachbearbeiten, dass der Effekt der periodischen Randbedingungen nicht mehr sichtbar ist.

### 5.1 Drift

Wie bereits erläutert muss das System aufgrund seiner Translationsinvarianz eine Drifteigenmode besitzen. Durch das Aktivieren der Rückkopplung ist es möglich, dass es zur Destabilisierung einer Eigenmode kommt, welche die Form einer neutral-stabilen Goldstonemode besitzt. Dieser Effekt konnte zum Beispiel für die Rückkopplungsparameter  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.0072$ ,  $\varphi = 0$  beobachtet werden.

Um die zeitliche Entwicklung des Systems darzustellen, wird ein sogenanntes Raumzeitdiagramm verwendet. In Abbildung 4 ist ein solches Diagramm dargestellt.

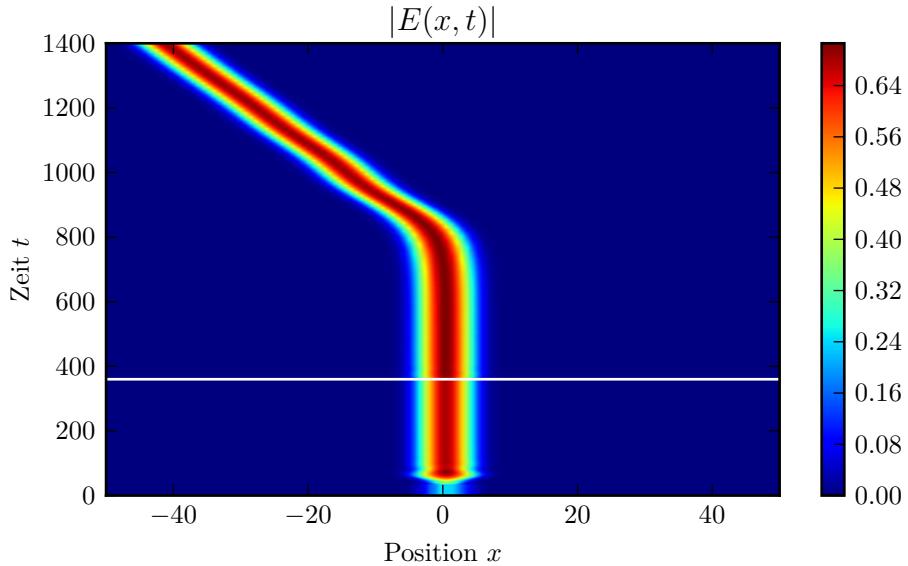


Abbildung 4: Raumzeitdiagramm  $|E(x, t)|$  einer driftenden lokalisierten Struktur. Simulation mit den Parameterwerten  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.0072$ ,  $\varphi = 0$ . Die Rückkopplung wird bei  $t = 360$  eingeschaltet (weißer Balken).

Nach Einschalten der Rückkopplung bleibt die lokalisierte Struktur zunächst stationär, bis bei ungefähr  $t = 800$  der Drift einsetzt. Nach einer kurzen Einschwingphase bleibt die Geschwindigkeit auf einem konstanten Wert (siehe Abbildung 5). Instantan reagiert die Struktur auf die Rückkopplung, indem sich ihre Form leicht ändert. Dabei erhöht sich der Peak der Glockenfunktion und die Breite verringert sich marginal.

Betrachtet man die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur, so ist eindeutig zu sehen, dass diese zunächst nicht konstant ist. Erst nach einer Einschwingphase erreicht diese einen konstanten Wert. Um dies zu erkennen, wurde bei gleichen Parametern die Simulation verlängert und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur bestimmt (siehe Abbildung 5).

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der lokalisierten Struktur wird mit Hilfe der Vorwärtsdifferenziermethode bestimmt. Da es kurz nach Beendigung der Injektionsphase zu kleineren Sprüngen der lokalisierten Struktur kommen kann, wird die Geschwindigkeit für Zeiten  $t$  bevor die Rückkopplung aktiviert ist auf den Wert  $v = 0$  gesetzt.

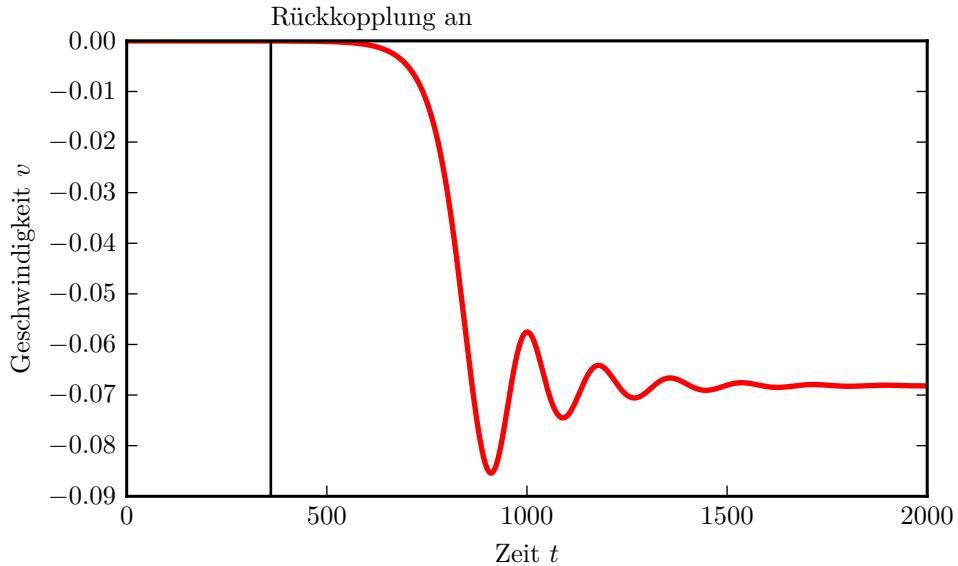


Abbildung 5: Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur in Abhängigkeit der Zeit. Simulation mit den Parameterwerten  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.0072$ ,  $\varphi = 0$ . Die Rückkopplung wird bei  $t = 360$  eingeschaltet (schwarzer Balken). Eine Negative Geschwindigkeit bedeutet, dass sich die lokalisierte Struktur nach links bewegt (in Richtung negativer  $x$ -Werte).

In Abbildung 5 ist eindeutig zu erkennen, dass die lokalisierte Struktur nicht instantan mit einer Bewegung auf die Rückkopplung reagiert, sondern erst nach einer Einschwingphase eine konstante Geschwindigkeit erreicht wird.

Durch das Einschalten der Rückkopplung kommt es bei diesem Parametersatz von  $\tau$ ,  $\eta$  und  $\varphi$  zur Destabilisierung einer Driftmode. Der zur instabilen Driftmode zugehörige Eigenwert  $\lambda$  hat die Eigenschaft  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . Nach der linearen Stabilitätsanalyse wächst die korrespondierende Eigenmode mit fortschreitender Zeit exponentiell an und müsste irgendwann das System dominieren. Da die Geschwindigkeit hier jedoch einen konstanten Wert erreicht, muss dieses exponentielle Wachstum gedämpft sein. Dies geschieht durch die nichtlinearen Eigenschaften des Systems, welche bei der linearen Stabilitätsanalyse vernachlässigt werden. Damit lässt sich auch die Einschwingphase erklären, da das Wachstum der Driftmode durch nichtlineare Effekte gedämpft wird.

Zur oszillierenden Bewegung der Struktur während der Einschwingphase können auch stabile

Eigenwerte ( $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ) mit  $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$  beitragen. Die korrespondierenden Eigenfunktionen klingen zwar mit der Zeit ab, aber bringen zu Beginn Relaxationsoszillationen in das System.

## 5.2 Oszillation

Anstatt eines Driftes kann es nach dem Einschalten der Rückkopplung auch zu einer Oszillation in der Position der lokalisierten Struktur kommen. Wählt man die Parameter  $\tau = 150$ ,  $\eta = 0.0072$ ,  $\varphi = 0$  ist dieser Effekt zu beobachten. In Abbildung 6 ist die Position des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen.

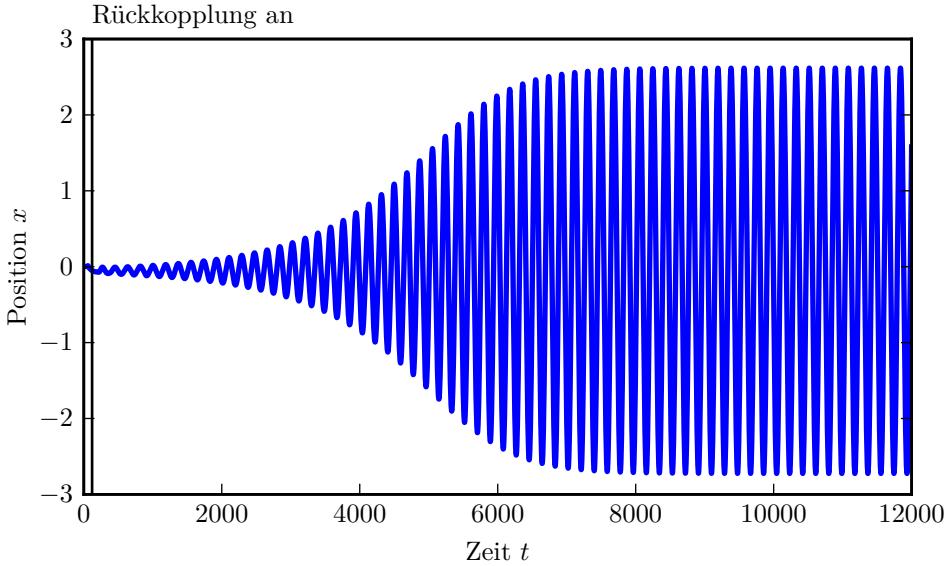


Abbildung 6: Die Position  $x$  des Schwerpunktes von  $|E(x, t)|$  wird gegenüber der Zeit  $t$  in diesem Diagramm aufgetragen. Die Rückkopplung wurde bei  $t = 120$  eingeschaltet (Rückkopplungsparameter:  $\tau = 150$ ,  $\eta = 0.0072$ ,  $\varphi = 0$ ).

Nach dem Einschalten der Rückkopplung beginnt die lokalisierte Struktur zunächst nur mit einer sehr kleinen Amplitude zu schwingen. Diese wächst an, bis sie bei ungefähr  $t \approx 8000$  einen Grenzwert erreicht. Während den Zeiten mit  $t \lesssim 8000$  befindet sich das System in einer Einschwingphase.

Die hier dargestellte komplexe Oszillationsmode wächst deutlich langsamer an, als die Driftmode aus Unterkapitel 5.1, da höchstwahrscheinlich  $\operatorname{Re}(\lambda)$  deutlich kleiner ist. In Abbildung 6 ist sehr schön zu erkennen, dass zunächst lineare Effekte dominieren und die Amplitude der Oszillation (also die Mode) exponentiell anwächst.

Da in Abbildung 6 erkennbar ist, dass sich die Entwicklung der Oszillationsmode im Bereich für  $0 \leq t \leq 8000$  abspielt, wird im folgenden Raumzeitdiagramm nur noch dieser Bereich gezeigt.

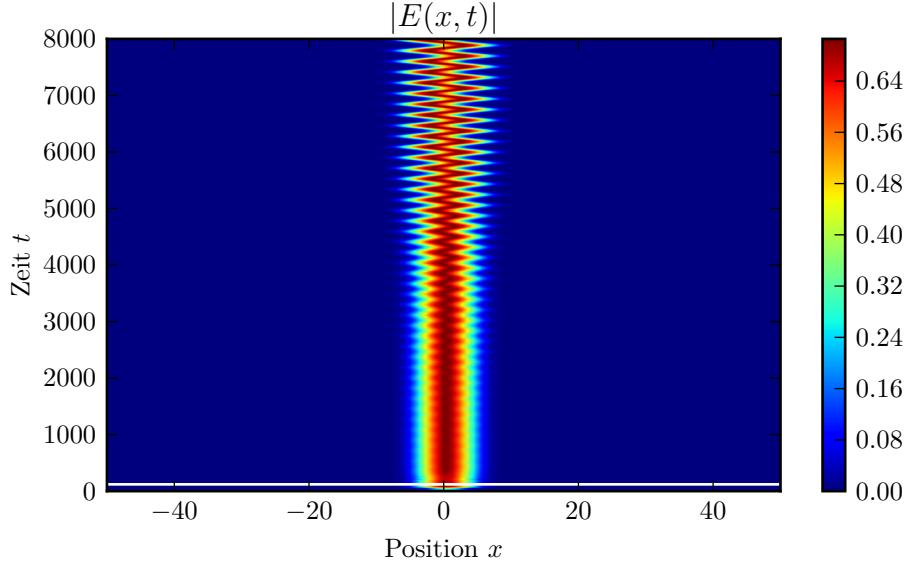


Abbildung 7: Raumzeitdiagramm von  $|E(x, t)|$  einer in der Position oszillierenden lokalisierten Struktur ( $\tau = 150$ ,  $\eta = 0.0072$ ,  $\varphi = 0$ ). Die Rückkopplung wird bei  $t = 120$  (weißer Balken) aktiviert.

Nach Aktivierung der Rückkopplung beginnt die lokalisierte Struktur in Abbildung 7 mit einer sehr kleinen Amplitude zu schwingen, welche zunächst nur sehr langsam anwächst. Bei  $t \approx 8000$  erreicht die Amplitude der Oszillation einen stabilen Grenzwert. An diesem Diagramm ist außerdem zu erkennen, dass die lokalisierte Struktur trotz der oszillierenden Bewegung formstabil bleibt.

Betrachtet man die Fouriertransformierte der Schwerpunktsbewegung, so ist deutlich erkennbar, dass es sich um eine Oszillation mit einer bestimmten Frequenz handelt. Dazu wird die FFT der Schwerpunktsbewegung gebildet in dem Bereich  $8000 \leq t \leq 12000$  in dem sich Oszillation eingependelt hat. Das Maximum der Fouriertransformierten befindet sich

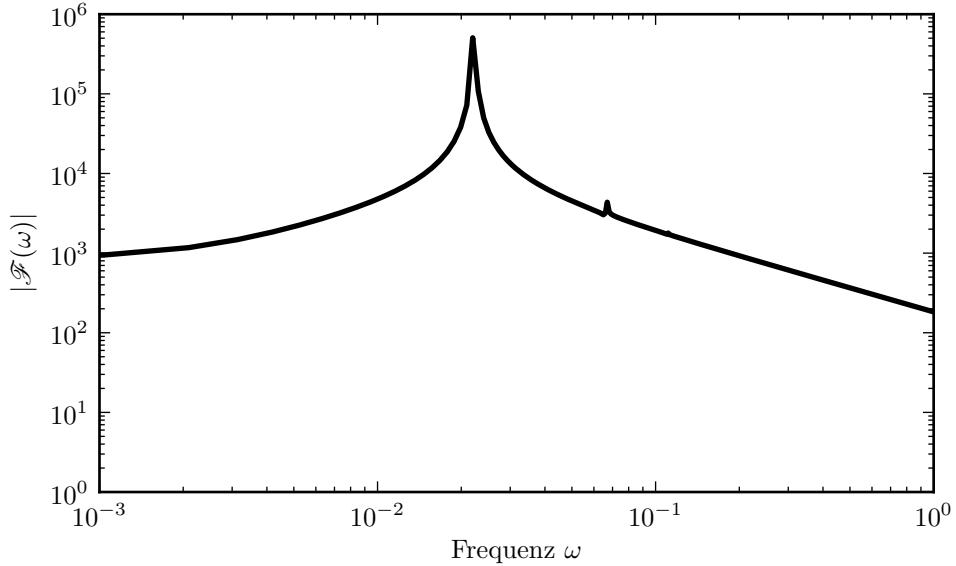


Abbildung 8: Fouriertransformierte der Schwerpunktsbewegung im Bereich  $8000 \leq t \leq 12000$ . Der betrachtete Zeitbereich wurde so gewählt, damit die Einschwingphase der Bewegung keinen Einfluss auf das Spektrum hat.

bei einer Frequenz von  $\omega = 0.0330$ . Dabei ist zu beachten, dass keine weiteren nennenswerten Maxima im Spektrum zu finden sind und daher die Schwerpunktsbewegung tatsächlich nur aus der Schwingung mit einer festen Frequenz bestehen muss. Deshalb kann davon ausgegangen werden, dass durch das Einschalten der Rückkopplung bei diesen Parametern nur ein komplexes Paar Eigenwerte destabilisiert wurde.

Diese Mode ist ungerade, da die lokalisierte Struktur sonst nicht in der Position oszillieren würde. Höchstwahrscheinlich gehört die Mode zu einem komplexen Ast von Eigenwerten ausgehend von  $\lambda = 0$  (siehe [18]).

### 5.3 Oszillation und Drift

Sowohl eine Drift-, als auch eine Oszillationsmode können gleichzeitig destabilisiert werden. Diese beiden können koexistieren und es kommt zu einer Überlagerung der beiden Bewegungsformen. Dies lässt sich bei einer Parameterwahl von  $\tau = 320$ ,  $\eta = 0.005$ ,  $\varphi = 0$  beobachten.

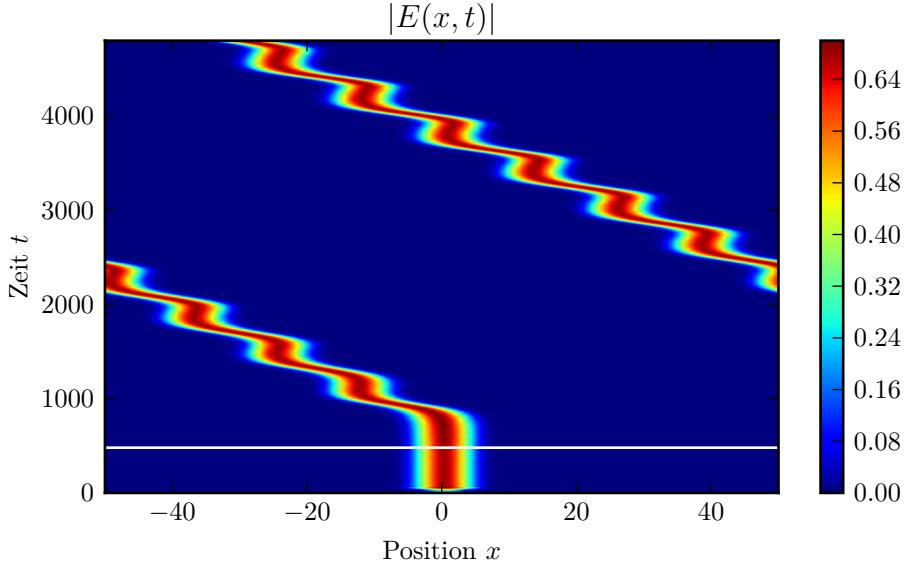


Abbildung 9: Raumzeitdiagramm  $|E(x, t)|$  einer in der Position oszillierenden und driften den lokalierten Struktur bei den Rückkopplungsparametern  $\tau = 320$ ,  $\eta = 0.005$ ,  $\varphi = 0$ . Rückkopplung wird bei  $t = 480$  aktiviert (weißer Balken).

Wie bereits bei den vorherigen Bewegungsmoden bleibt die lokalisierte Struktur nach einschalten der Rückkopplung zunächst stationär und beginnt danach zu Laufen. In diesem Diagramm sind die periodischen Randbedingungen mit denen die Simulation durchgeführt wurde deutlich zu erkennen. Bei  $t \approx 2500$  setzt die lokalisierte Struktur ihre Bewegung am rechten Rand des Grundgebiets fort.

Betrachtet man nur die Bewegung des Schwerpunktes ist noch deutlicher zu erkennen, dass es sich um die Überlagerung einer Driftmode und einer Oszillationsmode handelt. In Abbildung 10 ist sowohl die Position des Schwerpunktes (links) als auch dessen Geschwindigkeit (rechts) in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

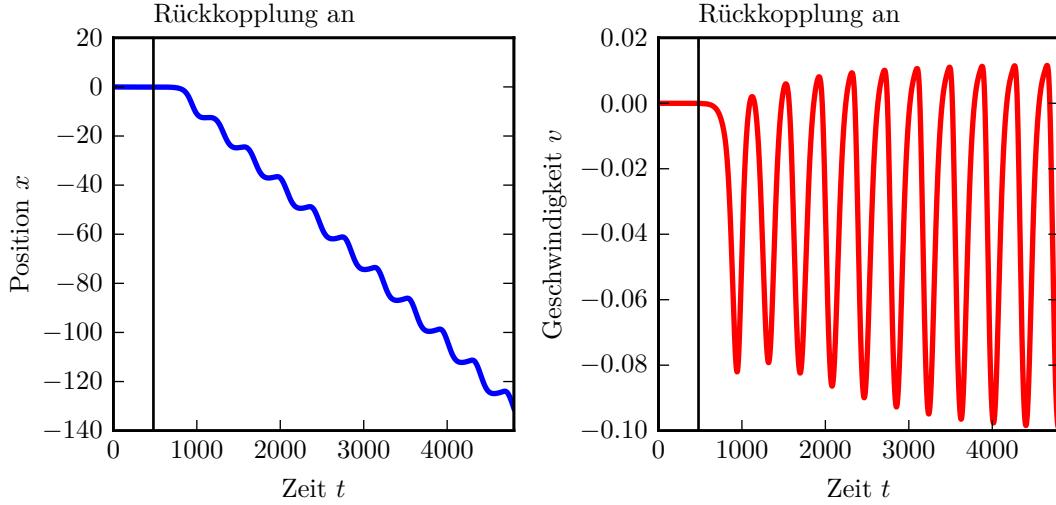


Abbildung 10: Simulation mit Rückkopplungsparametern:  $\tau = 320$ ,  $\eta = 0.005$ ,  $\varphi = 0$  und aktivierter Rückkopplung bei  $t = 480$ . Links: Position des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ . Rechts: Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

Hier ist sehr eindeutig zu erkennen, dass die lokalisierte Struktur zunächst ruht, und nach Aktivierung der Rückkopplung, sowohl einen konstanten Drift, als auch eine Schwingung ausführt. Links in Abbildung 10 ist der Effekt der Nachbearbeitung zu sehen, da die Schwerpunktsposition außerhalb des ursprünglichen Grundgebiets liegt.

Die Position des Schwerpunktes wurde so nachbearbeitet, dass der Effekt der periodischen Randbedingungen verschwindet und es wird ein unendlich großes Grundgebiet simuliert. Deswegen sind auch Positionen mit  $x < -50$  und  $x > 50$  möglich. Durch diese Nachbearbeitung kann die Bewegung der lokalisierten Struktur korrekt dargestellt werden. Ohne diesen Arbeitsschritt würde die lokalisierte Struktur, sobald sie den Wert bei  $x = -50$  überschreitet, einen Sprung zu  $x = 50$  machen. Dies würde die Auswertung der Daten deutlich erschweren.

Betrachtet man die Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur (in Abbildung 10 rechts), so kann man die Schwingung deutlich erkennen, da der Driftanteil nur noch als Konstante im Diagramm auftaucht. Das die Struktur zusätzlich driftet, ist in diesem Diagramm daran zu erkennen, dass der Mittelpunkt der Schwingung bei  $v \neq 0$  liegt. Die Amplitude der Schwingung erreicht nach genügend langer Simulationsdauer einen Grenzwert.

## 5.4 Periodenverdopplung

Für die Rückkopplungsparameter  $\tau = 320$ ,  $\eta = 0.025$ ,  $\varphi = 0$  kann eine Periodenverdopplung beobachtet werden. Dies lässt auf zwei instabile Oszillationsmoden schließen. In Abbildung 11 ist links die Position der lokalierten Struktur und rechts deren Geschwindigkeit gegen die Zeit dargestellt.

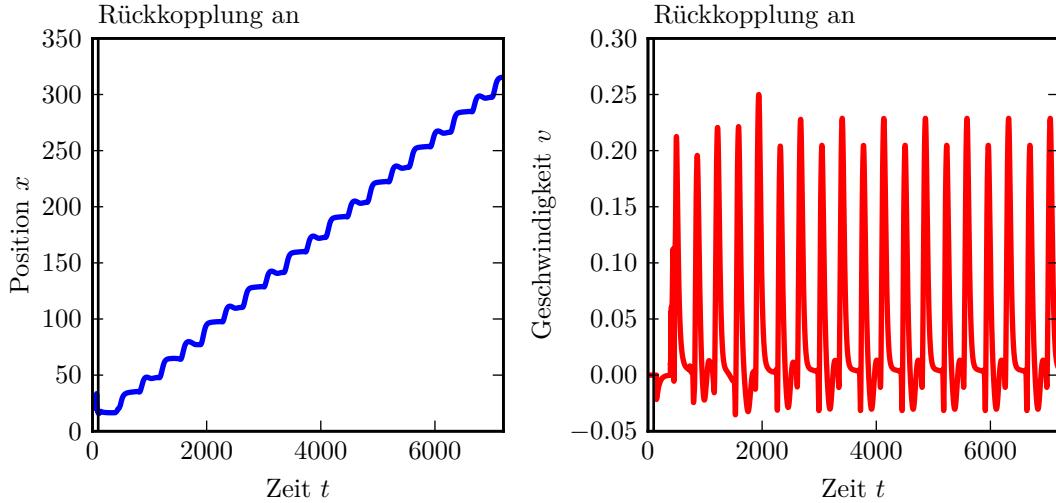


Abbildung 11: Simulationsergebnisse bei Rückkopplungsparametern  $\tau = 320$ ,  $\eta = 0.025$ ,  $\varphi = 0$ . Bei  $t = 100$  wird die Rückkopplung eingeschaltet. Links: Position des Schwerpunkts der lokalisierten Struktur, rechts: Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisier-ten Struktur in Abhängigkeit von der Zeit.

Wie bei den anderen Simulationen braucht die lokale Struktur zunächst eine Einschwingphase bis sich eine periodische Bewegung einstellt.

Die Periodenverdopplung ist links in Abbildung 11 daran zu erkennen, dass nach jedem Anstieg abwechselnd ein Plateau erreicht wird oder die Struktur ein wenig zurückfällt. Dieses Bewegungsmuster setzt sich periodisch fort, weswegen man von einer Periodenverdopplung spricht.

Da die Position des Schwerpunktes ansteigt mit fortlaufender Zeit  $t$  muss zusätzlich zu den Oszillationsmoden auch noch eine Driftmode instabil geworden sein.

Der Blick auf das Geschwindigkeitsdiagramm in Abbildung 11 bestätigt die Vermutung, dass zwei Schwingungen an der Bewegung beteiligt sind. Nach der Einschwingphase ist deutlich zu erkennen, dass es zwei lokale Maxima mit unterschiedlicher Höhe gibt, welche sich periodisch wiederholen. Dies ist ein eindeutiges Indiz dafür, dass mindestens zwei Oszillationsmoden instabil sind.

## 5.5 Schwebung

In Unterkapitel 5.4 wurde der Effekt von einer instabilen Driftmode und mehrerer instabiler Oszillationsmoden diskutiert. Es ist jedoch auch möglich die Rückkopplungsparameter so zu wählen, dass ausschließlich Oszillationsmoden instabil werden. Dabei kommt es zu einer Schwebung, der Überlagerung mehrerer Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz. In unserem Fall führt die lokalisierte Struktur bei den Rückkopplungsparametern  $\tau = 370$ ,  $\eta = 0.018$ ,  $\varphi = 0$  eine solche Bewegung aus. In Abbildung 12 ist die Schwerpunktsbewegung der Struktur für diesen Parametersatz dargestellt.

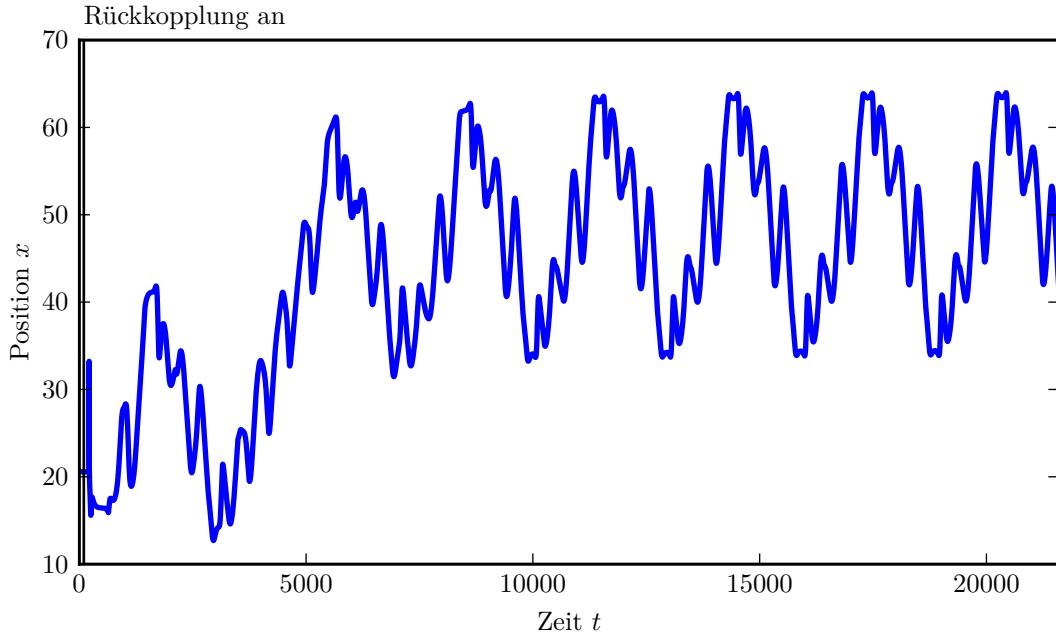


Abbildung 12: Position des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur bei für die Rückkopplungsparameter  $\tau = 370$ ,  $\eta = 0.018$ ,  $\varphi = 0$ . Die Rückkopplung wurde bei  $t = 100$  eingeschaltet.

In Abbildung 12 erkennt man, dass nach einer Einschwingphase die lokalisierte Struktur eine periodische Bewegung mit einer Periodendauer von  $T \approx 2500$  ausführt. Zusätzlich zu dieser sehr niedrig-frequenten Schwingung haben auch Oszillationsmoden mit höheren Frequenzen Einfluss auf die Bewegung. Da sich die lokalisierte Struktur in eine Bewegung mit einem Mittelpunkt bei  $x \approx 50$  eingeschwungen hat, ist sichergestellt, dass an der Bewegung ausschließlich Oszillationsmode beteiligt sind und alle Driftmoden weiterhin stabil sind.

## 6 Parameterscan

Da die einfachsten möglichen Reaktionen des Systems auf die Rückkopplung bekannt sind, sollen die Grenzen zwischen den verschiedenen Verhaltensmustern bestimmt werden. Dafür wird sich hauptsächlich auf den Übergang von stationären zu laufenden lokalisierten Strukturen, sowie der Übergang zu einer oszillierenden Bewegung der lokalisierten Struktur konzentriert. Diese Bifurkationsgrenzen werden mit Hilfe der direkten Numerik bestimmt. Dazu wird der Parameterraum von  $\tau$ ,  $\eta$  und  $\varphi$  systematisch gescannt. Es werden jeweils Simulationen mit einer Simulationsdauer von  $t_{\text{gesamt}} = 8000$  durchgeführt. Die Injektionsphase wird immer zum Zeitpunkt  $t_1 = 80$  beendet und die Rückkopplung wird immer zum Zeitpunkt  $t_2 = 160$  eingeschaltet.

### 6.1 Analyse

Zur Analyse der Simulationsergebnisse wird im Folgenden immer die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur im Zeitraum  $t_{\min} \leq t_B \leq t_{\max}$  betrachtet, also nachdem sich die lokalisierte Struktur eingeschwungen hat. Zur Unterscheidung der unterschiedlichen Bewegungsformen, werden sowohl der Mittelwert  $\bar{v}$ , als auch die Standardabweichung  $\sigma_v$  der Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur im Bereich  $t_B$  verwendet

$$\bar{v} = \frac{h}{t_{\max} - t_{\min}} \sum_{t_i=t_{\min}}^{t_{\max}} v(t_i) \quad (6.1)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{\frac{t_{\max}-t_{\min}}{h} - 1} \sum_{t_i=t_{\min}}^{t_{\max}} (v(t_i) - \bar{v})^2}. \quad (6.2)$$

$t_i$  entspricht einem Zeitschritt, während  $h$  die Zeitschrittweite repräsentiert. In den folgenden Simulationen wird  $t_{\min} = 6000$  und  $t_{\max} = 8000$  gewählt.

Mit Hilfe des Mittelwertes kann unterschieden werden, ob die Struktur läuft oder stationär bleibt. Ist der Mittelwert der Geschwindigkeit sehr klein, so kann davon ausgegangen werden, dass die Struktur stationär ist. Wird der Mittelwert jedoch von 0 verschieden, folgt daraus, dass die Struktur läuft und daher mindestens eine Driftmode instabil ist.

Ähnlich kann mit Hilfe der Standardabweichung die Instabilität von Oszillationsmoden gezeigt werden. Überschreitet die Standardabweichung eine gewisse Grenze, kann davon ausgegangen werden, dass die Bewegung der lokalisierten Struktur oszilliert. Aus einer geringen Standardabweichung folgt jedoch, dass die Struktur keine oszillierenden Bewegung ausführt und daher keine Oszillationsmoden instabil sind.

$ \bar{v} $	$\sigma_v$	instabile Moden
$\approx 0$	$\approx 0$	-
$\approx 0$	$> 0$	Oszillation der Position
$> 0$	$\approx 0$	Drift
$> 0$	$> 0$	Oszillation der Position und Drift

Tabelle 1: Unterscheidung der Bewegungsformen der lokalisierten Struktur anhand des Betrags des Mittelwertes der Geschwindigkeit  $|\bar{v}|$  und der Standardabweichung  $\sigma_v$ . Für unterschiedliche Kombinationen der beiden Werte lässt sich auf die Stabilität und die Instabilität der verschiedenen Moden schließen.

In Tabelle 1 sind die oben genannten Fälle dargestellt und die daraus folgenden instabilen Moden genannt. Für den Fall  $\sigma_v > 0$  kann die Anzahl der instabilen Oszillationsmoden mit dieser Methode nicht bestimmt werden. Aufgrunddessen inkludiert zum Beispiel die Kategorie Oszillation auch die Instabilität mehrerer Oszillationsmoden, welches dann einer Schwebung entsprechen würde.

Als Nächstes werden nun Schnitte durch den von  $\tau = [4, 400]$ ,  $\eta = [0, 0.0303]$  und  $\varphi = [0, 2\pi)$  aufgespannten Parameterraum gezogen. Dazu wird einer der drei Parameter fixiert und die anderen beiden werden systemmatisch variiert. Die Ergebnisse der Simulationen werden wie oben beschrieben analysiert. Die Berechnungen der Simulationen wurden auf dem Morfeus Grid des Instituts für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster mit HTCondor[21] durchgeführt.

## 6.2 Schnitt bei $\varphi = 0.0$

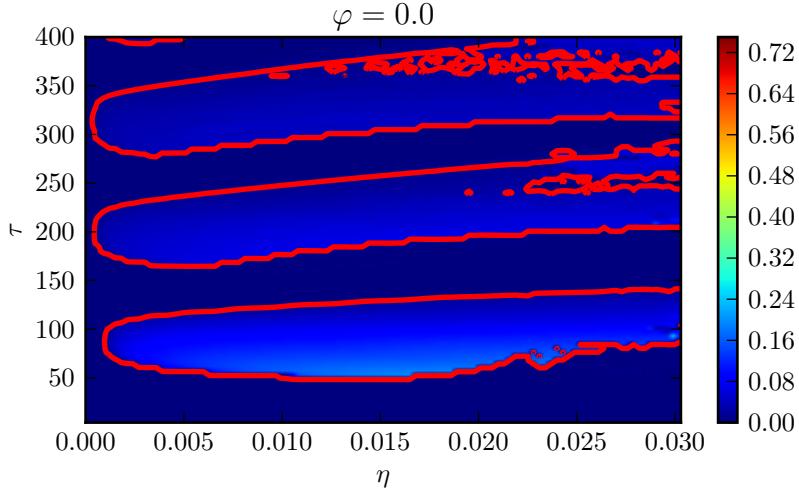
In Abbildung 13 wird die Phase bei  $\varphi = 0.0$  fixiert und die Parameter  $\tau$  und  $\eta$  werden variiert.

Wie zu erwarten war, werden für  $\eta = 0$  keine Driftmoden instabil. In Abbildung 13(a) ist deutlich zu erkennen, dass es nur für bestimmte Bereiche in  $\tau$  instabile Driftmoden gibt. Für Werte von  $\tau \lesssim 50$  und  $\tau \approx 140$  bleiben im betrachteten Bereich von  $\eta$  alle Driftmoden stabil. Außerdem kann man beobachten, dass die Bereiche mit instabilen Driftmoden für höhere  $\tau$  bei immer kleineren  $\eta$  beginnen. Dies hängt höchstwahrscheinlich damit zusammen, dass in den Gleichungen der linearen Stabilitätsanalyse fast ausschließlich das Produkt von  $\eta$  und  $\tau$  auftritt.

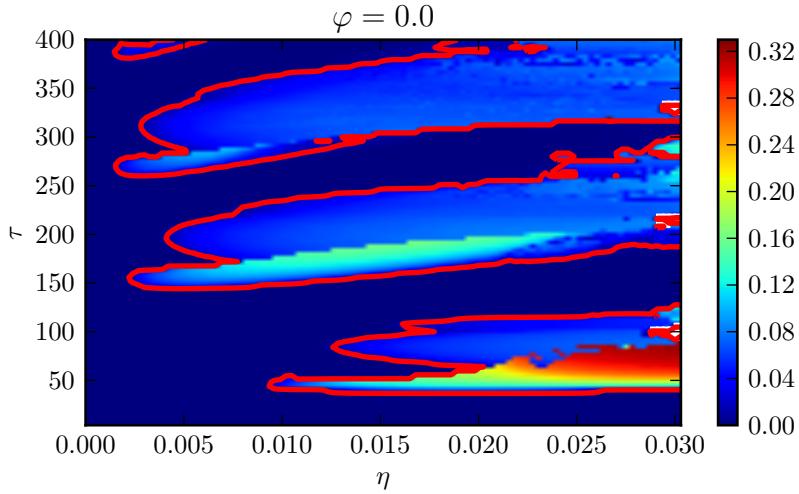
Bei der Betrachtung der Standardabweichung in Abbildung 13(b) ist wie bereits bei den Mittelwerten zu beobachten, dass mit steigenden  $\tau$  die instabilen Bereiche bereits bei kleineren  $\eta$ -Werten beginnen. Ebenso kann man erkennen, dass das System für kleine Rückkopplungszeiten stabil gegenüber den Oszillationsmoden ist. In Verbindung mit Abbildung 13(a) ergibt sich, dass für  $\tau \lesssim 20$  und  $0 \leq \eta \leq 0.0303$  bei  $\varphi = 0.0$  die lokalisierte Struktur trotz eingeschalteter Rückkopplung stationär bleibt und weder Drift- noch Oszillationsmode instabil werden.

Innerhalb der instabilen Bereiche (rot markiert) sind teilweise abrupte Übergänge zu beobachten. Diese Übergänge entstehen dadurch, dass zunächst mehrere Oszillationsmoden instabil sind und daher die Standardabweichung einen sehr hohen Wert annimmt (es ist keine Driftmode instabil). Ändert sich einer der Parameter  $\tau$  oder  $\eta$  kann es passieren, dass eine der instabilen Oszillationsmoden plötzlich in eine instabile Driftmode übergeht. Dadurch sinkt die Standardabweichung abrupt ab, bleibt jedoch aufgrund der anderen weiterhin instabilen Oszillationsmoden auf einem von 0 verschiedenen Wert. Betrachtet man die Mittelwerte in Abbildung 13(a) innerhalb dieses Bereiches, erkennt man, dass die rote Linie genau die Kontur des abrupten Übergangs besitzt. Dies zeigt, dass genau an dieser Stelle eine Driftmode instabil wird.

Abbildung 13: Parameterscan bei fester Rückkopplungsphase  $\varphi = 0.0$ . Ausgewertet wird die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur im Bereich  $t_B$ . In (a) ist der Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit dargestellt, während in (b) die Standardabweichung jener gezeigt ist.



(a) Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur  $|\bar{v}|$ . Die roten Linien sind Höhenlinien für einen Wert von 0.01. Dadurch markieren sie Bereiche in denen davon auszugehen ist, dass mindestens eine Drifteigenmode instabil ist.



(b) Standardabweichung der Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur  $\sigma_v$ . Die weiß markierten Flecken wurden von der Analyse ausgeschlossen, da aufgrund der großen Rückkopplungsstärke die lokalisierten Strukturen in Chaos übergehen. Ähnlich wie in (a) sind hier mit roten Linien Bereiche markiert, in denen die Standardabweichung einen Wert von 0.01 überschreitet. Es kann davon ausgegangen werden, dass in diesen Bereichen mindestens eine Oszillationsmode instabil ist.

Die Ergebnisse aus Abbildung 13 werden gemeinsam in Abbildung 14 dargestellt. Dazu wird jeder Parametersatz auf Basis des Bewegungsmusters der lokalisierten Struktur einer Kategorie nach Tabelle 1 zugeordnet. Durch diese Darstellungsmethode ist es möglich die Bereiche zu erkennen, in denen sich die Gebiete mit instabilen Driftmoden mit denen der instabilen Oszillationsmoden überlappen.

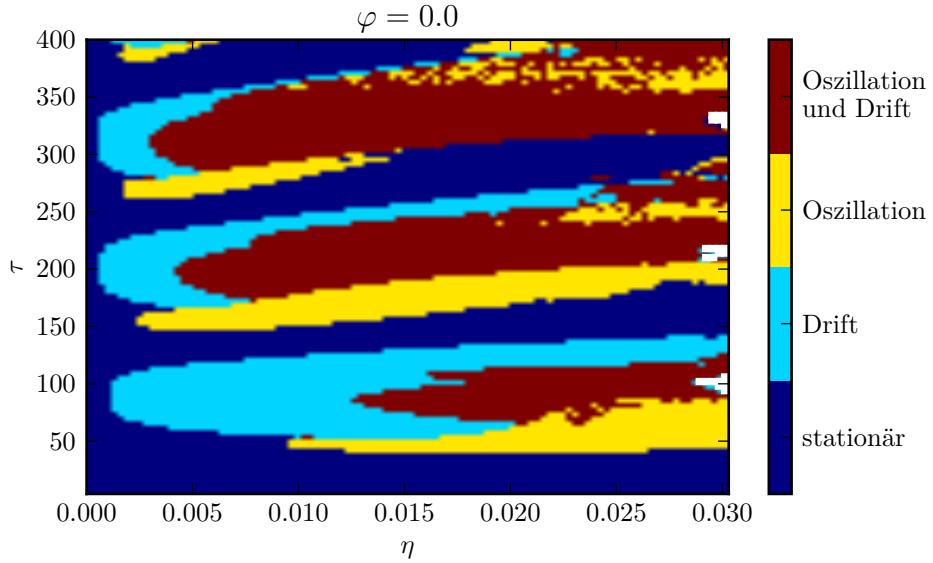


Abbildung 14: Bewegungsmuster der lokalisierten Struktur in der von  $\eta$  und  $\tau$  aufgespannten Parameterebene bei fixiertem  $\varphi$ . Die Bewegungsmuster sind nach Tabelle 1 aufgeschlüsselt. Wie in Abbildung 13(b) sind die weiß markierten Bereiche von der Analyse ausgeschlossen.

Es ist zu erkennen, dass die drei Gebiete in denen laufende lokalisierte Strukturen existieren ähnlich geformt sind. Für kleine  $\eta$  kommt es nur zu einem Drift der lokalisierten Struktur. In jedem Gebiet gibt es für kleine  $\tau$  einen Bereich mit ausschließlich oszillierenden lokalisierten Strukturen. Im restlichen Teil sind sowohl Driftmode, als auch Oszillationsmode instabil. Es lässt sich zusätzlich der Trend erkennen, dass für größere  $\tau$  mehr Moden instabil werden bei steigendem  $\eta$ . In Abbildung 14 gibt es auch für große  $\eta$  und  $\tau$  Bereiche, in denen stationäre Strukturen existieren.

### 6.3 Schnitt bei $\eta = 0.02$

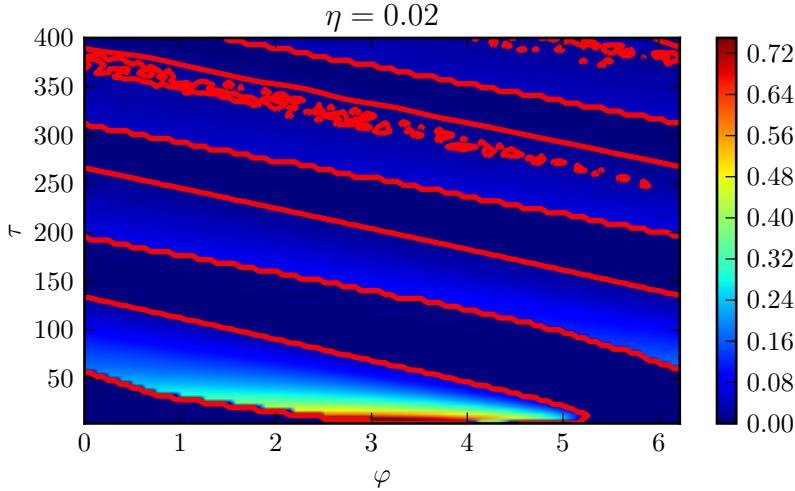
Um auch den Einfluss der Rückkopplungsphase beurteilen zu können wird  $\eta$  fixiert und eine Ebene des Parameterraums in  $\tau$  und  $\varphi$  dargestellt. In Abbildung 15 wird sowohl der Betrag des Mittelwertes, als auch die Standardabweichung der Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur betrachtet.

In Abbildung 15(a) kann man sehr gut den Einfluss der Phase auf das Verhalten der lokalisierten Struktur erkennen. Durch die Variation der Phase ist es möglich bei konstantem  $\eta$  die Grenze der Driftbifurkation so zu verschieben, dass man selbst für sehr kleine  $\tau$  eine laufende lokalisierte Struktur erhält. Im Vergleich dazu scheint es in Abbildung 13(a) nicht möglich zu sein einen Drift der lokalisierten Struktur mit  $\tau < 40$  zu erhalten. Die Verschiebung der Driftbifurkationsgrenze durch die Phase funktioniert genauso für größere Rückkopplungszeiten  $\tau$ . Da die Rückkopplungsphase  $\varphi$  in der theoretischen Betrachtung nur in einem Term der Form  $e^{i\varphi}$  vorkommt, ist zu erwarten, dass das System in  $\varphi$  periodisch sein sollte mit der Periode  $2\pi$ . Diese Vermutung wird in Abbildung 15(a) bestätigt.

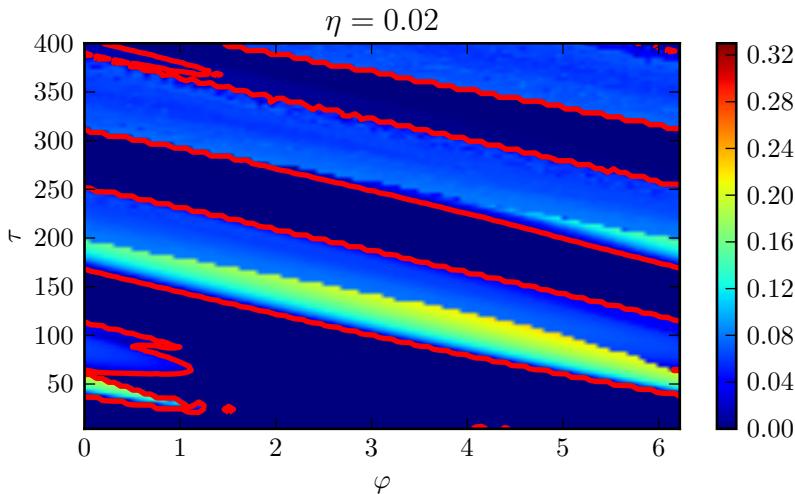
Ebenso wie Abbildung 15(a) ist auch das Diagramm der Standardabweichung in Abbildung 15(b) mit  $2\pi$  in  $\varphi$  periodisch und hat eine vergleichbare Form. Die Rückkopplungsphase hat auf die Stabilität der Oszillationsmoden einen sehr ähnlichen Einfluss wie auf die Stabilität der Driftmoden. Durch Variation von  $\varphi$  lassen sich diese bereits für deutlich kleinere Rückkopplungszeiten destabilisieren.

Ähnlich wie in Abbildung 13(b) ist wieder innerhalb des rot markierten Bereiches ein abrupter Übergang zu erkennen. Hier befindet er sich bei  $\varphi \approx 4$  bis  $\varphi \approx 5$  und  $\tau \approx 120$ . Der Grund für den Übergang ist wieder der Gleiche. Im Bereich der großen Standardabweichung sind mehrere Oszillationsmoden instabil. Werden die Parameter nur leicht verändert, so wird eine dieser Moden plötzlich zu einer instabilen Driftmode und die Standardabweichung sinkt, wird jedoch nicht 0. Betrachtet man im Parameterbereich des Übergangs die Mittelwerte in Abbildung 15(a) erkennt man, dass die Konturlinie wieder genau dem Verlauf des abrupten Übergangs folgt.

Abbildung 15: Parameterscan bei fester Rückkopplungsstärke  $\eta = 0.02$ . Ausgewertet wird die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur im Bereich  $t_B$ . In (a) ist der Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit dargestellt, während in (b) die Standardabweichung jener gezeigt ist.



(a) Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur  $|\bar{v}|$ . Bereiche instabiler Driftmoden sind wie bereits zuvor durch rote Linien bei  $|\bar{v}| = 0.01$  gekennzeichnet.



(b) Standardabweichung der Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur  $\sigma_v$ . Die mit den roten Linien ( $\sigma_v = 0.01$ ) markierten Bereiche stellen Parameterkombinationen von  $\tau$ ,  $\varphi$  und  $\eta = 0.02$  dar, in welchen mindestens eine Oszillationsmode instabil ist.

Für den betrachteten Parameterraum bei  $\eta = 0.02$  wird wieder das Bewegungsmuster der lokalisierten Strukturen nach Tabelle 1 kategorisiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 16 dargestellt.

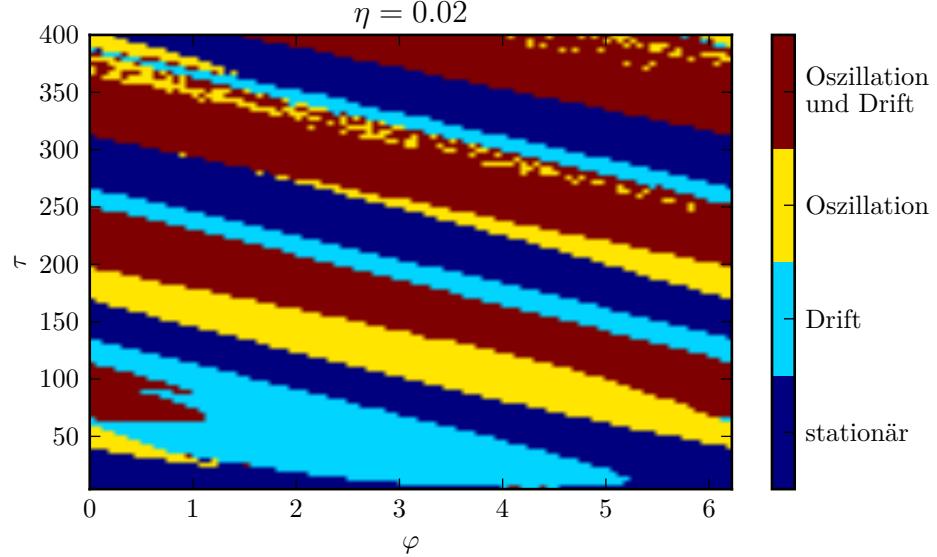


Abbildung 16: Bewegungsmuster der lokalisierten Struktur in der von  $\varphi$  und  $\tau$  aufgespannten Parameterebene bei fixiertem  $\eta = 0.02$ . Die Bewegungsmuster sind nach Tabelle 1 aufgeschlüsselt.

Offensichtlich ist es für sehr kleine  $\tau$  möglich einen Drift der lokalisierten Struktur zu erzeugen, während eine oszillierende Bewegung der lokalisierten Struktur, unabhängig von der Rückkopplungsphase  $\varphi$ , nur mit größeren  $\tau$  möglich ist.

Das aus Abbildung 14 bekannte Muster zeigt sich auch in diesem Diagramm. Für steigende  $\tau$ , bei fixierter Rückkopplungsphase  $\varphi$ , geht die Struktur von einer stationären Lösung in eine in der Position oszillierende Struktur über, gefolgt von einer driftenden und in der Position oszillierenden Struktur und einer ausschließlich driftenden Struktur.

## 6.4 Schnitt bei $\tau = 150$

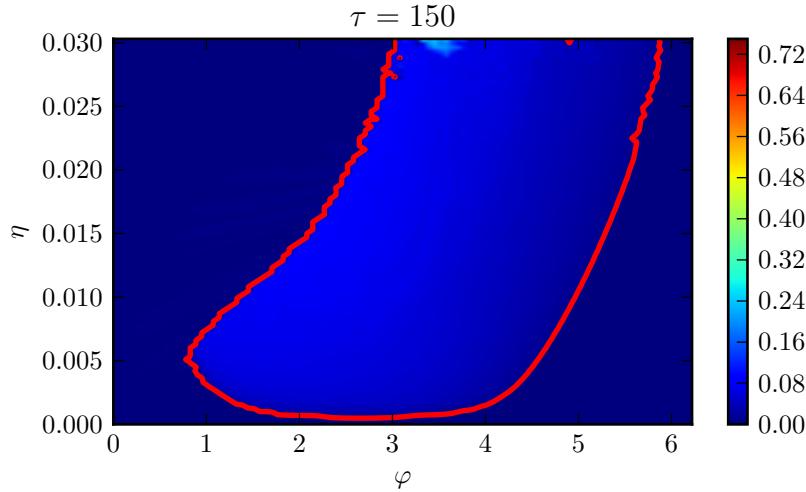
Im Folgenden wird die Rückkopplungszeit  $\tau$  bei einem Wert von 150 fixiert. Daher wird eine von  $\eta$  und  $\varphi$  aufgespannte Parameterebene vermessen. Wie bereits zuvor wird die Stabilität der Drift- und Oszillationsmoden mit Hilfe der Standardabweichung und dem Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit der lokalisierten Struktur berechnet. In Abbildung 17 sind die Ergebnisse des Parameterscans dargestellt.

Im Diagramm der Mittelwerte (Abbildung 17(a)) erkennt man, dass es einen großen zusammenhängenden Bereich gibt, in dem Driftmoden instabil sind. Hier erkennt man, dass es auch für sehr kleine Rückkopplungsstärken  $\eta$  möglich ist Driftmoden zu destabilisieren, wenn die entsprechende Phase  $\varphi$  eingestellt ist. Dies entspricht der Beobachtung aus Abbildung 15(a), dass es auch für sehr kleine  $\tau$  bei einer bestimmten Rückkopplungsphase  $\varphi$  möglich ist Driftmoden zu destabilisieren und die lokalisierte Struktur zum Laufen zu bringen.

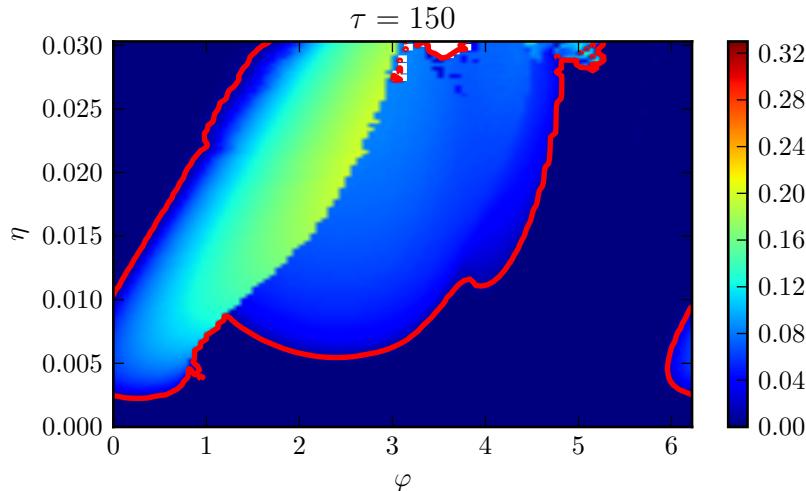
Für  $\varphi = 0$  erkennt man, dass keine Driftmode instabil ist. Dies entspricht dem Ergebnis aus Abbildung 13(a) für die Reihe bei  $\tau = 150$ . Durch Variation der Rückkopplungsphase  $\varphi$  ist es trotzdem gelungen für einen großen Bereich an Parametern  $\tau$  und  $\eta$  Driftmoden zu destabilisieren. Dies zeigt, dass auch die Rückkopplungsphase einen großen Einfluss auf das Verhalten der lokalisierten Struktur hat.

In Abbildung 17(b) zeigt sich wieder sehr deutlich, dass das System in  $\varphi$  mit  $2\pi$  periodisch ist. Dies erkennt man an der Fortsetzung der rot umrandeten Fläche von  $\varphi = 0$  in  $\varphi = 2\pi$ . Wie bereits in den anderen Diagrammen der Standardabweichung in Abbildung 13(b) und Abbildung 15(b) ist auch hier ein abrupter Übergang innerhalb des Bereiches der instabilen Oszillationsmoden zu sehen. Der Grund für den Übergang ist wieder der Gleiche. Er entsteht dadurch, dass eine der instabilen Oszillationsmoden in eine instabile Driftmode übergeht. In Abbildung 17(a) ist die Stabilität der Driftmoden dargestellt und man kann sehr deutlich erkennen, dass die rote Konturlinie genau dem Verlauf des Übergangs in diesem Diagramm folgt.

Abbildung 17: Parameterscan bei fester Rückkopplungsstärke  $\tau = 150$ . Ausgewertet wird die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur im Bereich  $t_B$ . In (a) ist der Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit dargestellt, während in (b) die Standardabweichung jener gezeigt ist.



(a) Betrag des Mittelwertes der Geschwindigkeit des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur  $|\bar{v}|$ . Der von den roten Linien markierte Bereich überschreitet einen Schwellwert ( $|\bar{v}| = 0.01$ ) und lässt daher auf die Instabilität von mindestens einer Driftmode schließen.



(b) Standardabweichung der Geschwindigkeit der Schwerpunktsposition der lokalisierten Struktur  $\sigma_v$ . Innerhalb der roten Linien befinden sich die Bereiche in denen die Standardabweichung einen Schwellwert ( $\sigma_v = 0.01$ ) überschreitet und daher mindestens eine Oszillationsmode instabil ist. An den weiß markierten Stellen im Diagramm geht die lokalisierte Struktur aufgrund der hohen Rückkopplungsstärke nach der Injektionsphase ins Chaos über, weswegen diese Werte von der Auswertung ausgeschlossen sind.

Es wird wieder das Bewegungsmuster der lokalisierten Strukturen nach Tabelle 1 kategorisiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 18 dargestellt.

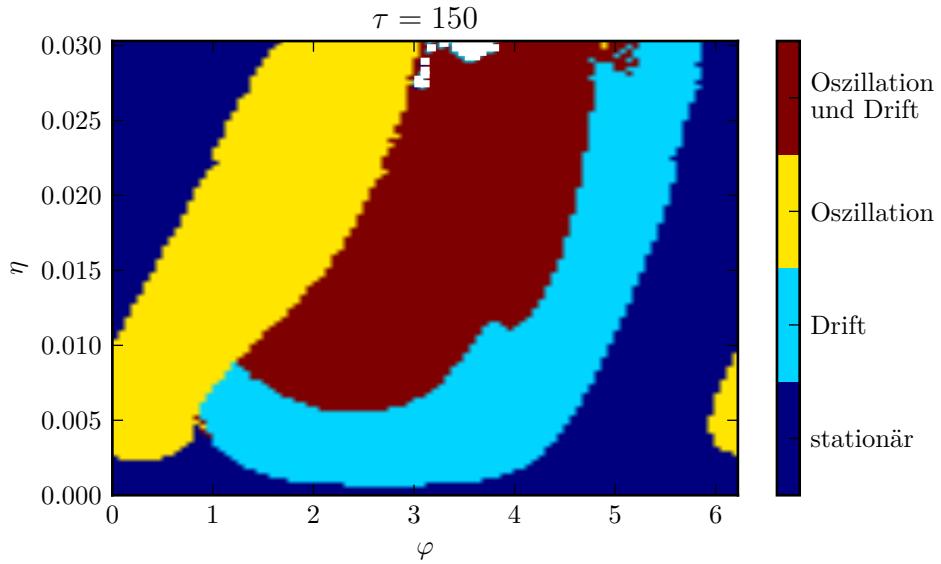


Abbildung 18: Bewegungsmuster der lokalisierten Struktur in der von  $\varphi$  und  $\eta$  aufgespannten Parameterebene bei fixiertem  $\tau = 150$ . Die Bewegungsmuster sind nach Tabelle 1 aufgeschlüsselt. Die weiß markierten Bereiche sind wie in Abbildung 17(b) von der Analyse ausgeschlossen.

Es lassen sich in diesem Diagramm sehr genau die Bereiche der unterschiedlichen Bewegungsmuster unterscheiden. Während für sehr kleine Werte von  $\eta$ , bei entsprechender Rückkopplungsphase  $\varphi$ , eine driftende lokalisierte Struktur möglich ist, treten in der Position oszillierende Strukturen nur für größere  $\eta$  auf.

Der bereits diskutierte abrupte Übergang von einer lokalisierten Struktur die eine Bewegung in Form einer Schwebung ausführt zu einer lokalisierten Struktur, welche zusätzlich noch einer Driftbewegung folgt, ist deutlich zu erkennen.

## 7 Stabilisierung driftender lokalisierte Strukturen

Die Betrachtung beschränkte sich bisher auf stationäre lokalisierte Strukturen, welche mit Hilfe von zeitverzögerter Rückkopplung zu komplexen Bewegungen gebracht wurden. Lokalisierte Strukturen in Oberflächenemittern können auch ohne den Einfluss von zeitverzögerten Rückkopplungen driften (intrinsischer Drift) [12, 13]. Im Folgenden soll der Einfluss von zeitverzögerten Rückkopplungen auf lokalisierte Strukturen mit intrinsischem Drift betrachtet werden. Dazu wird die in Kapitel 5 bereits genutzte Simulation mit Parametern des Halbleiterlasers verwendet, welche eine lokalisierte Struktur mit intrinsischem Drift erzeugen.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.0 & \beta &= 0.0 & b_1 &= \frac{1}{0.7} \\ b_2 &= \frac{1}{0.3} & \gamma &= 2.0 & s &= 10.0 \\ \mu &= 2.06 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Die in (7.1) angegebenen Parameter werden für die folgenden Simulationen nicht geändert.

### 7.1 Stationäre lokalisierte Struktur

Bei den Rückkopplungsparametern  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.02$ ,  $\varphi = 2.094$  kann beobachtet werden, dass eine intrinsisch driftende Struktur unter dem Einfluss der zeitverzögerten Rückkopplung in eine stationäre Struktur übergeht. In Abbildung 19 ist das Raumzeitdiagramm einer solchen lokalisierten Struktur dargestellt.

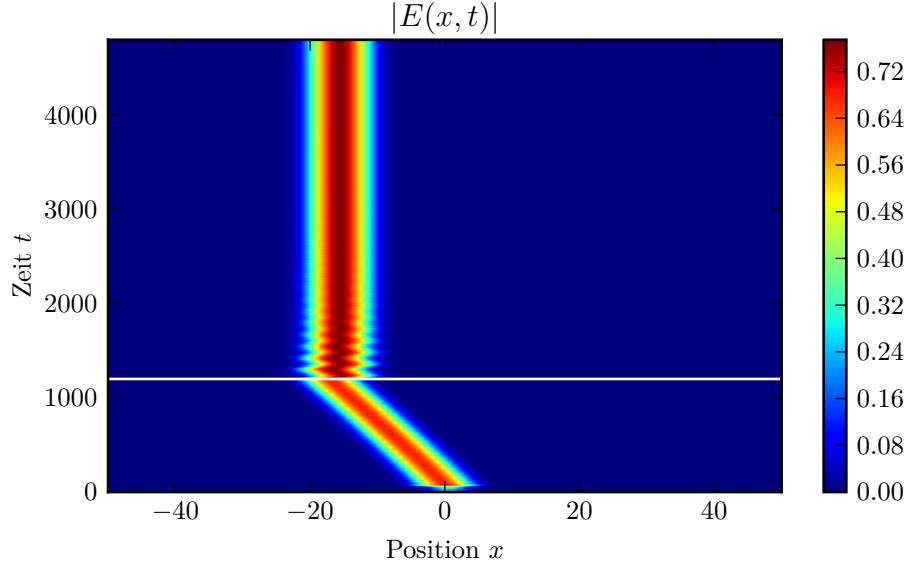


Abbildung 19: Stabilisierung einer laufenden lokalisierter Struktur durch zeitverzögerte Rückkopplung. Raumzeitdiagramm  $|E(x, t)|$  einer lokalisierter Struktur (Rückkopplungsparameter:  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.02$ ,  $\varphi = 2.094$ ). Die Rückkopplung wird bei  $t = 1200$  (weißer Balken) aktiviert.

Für  $t \leq 1200$  ist deutlich zu erkennen, dass die lokalisierte Struktur driftet. Nach Aktivierung der Rückkopplung wird die lokalisierte Struktur stationär. Begleitet wird dies von einer Oszillation der Position der Struktur, deren Amplitude jedoch schnell abfällt. Im Vergleich zu Unterkapitel 5.1 ist das hier gezeigte Verhalten deutlich anders. Hier reagiert die Struktur sehr schnell auf die Aktivierung der Rückkopplung, während in Unterkapitel 5.1 die lokalisierte Struktur erst nach einer gewissen Einschwingphase reagiert.

Bei genauerer Betrachtung von Abbildung 19 kann man erkennen, dass sich die Form der lokalisierten Struktur leicht ändert. Unter dem Einfluss der zeitverzögerten Rückkopplung ist der Maximalwert von  $|E|$  größer.

## 7.2 Oszillation

Für die Rückkopplungsparameter  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.02$ ,  $\varphi = 3.032$  geht eine intrinsisch driftende lokalisierte Struktur in eine in der Position oszillierende Struktur über. In Abbildung 20 ist ein solcher Prozess dargestellt.

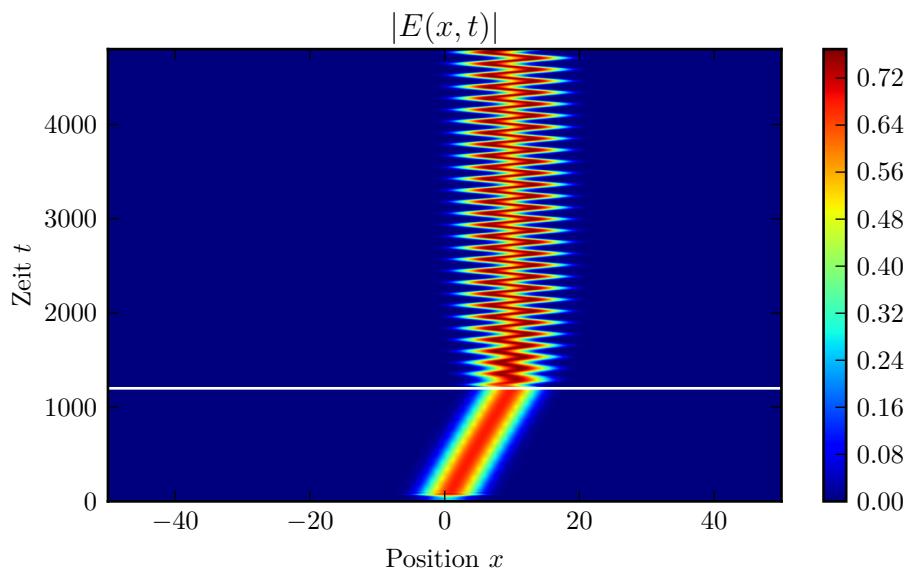


Abbildung 20: Eine laufende lokalisierte Struktur geht aufgrund von zeitverzögelter Rückkopplung in eine lokalisierte Struktur mit oszillierender Position über. Raumzeitdiagramm  $|E(x, t)|$  einer lokalisierten Struktur (Rückkopplungsparameter:  $\tau = 100$ ,  $\eta = 0.02$ ,  $\varphi = 3.032$ ). Die Rückkopplung wird bei  $t = 1200$  (weißer Balken) aktiviert.

In diesem Diagramm wird der Drift der lokalisierten Struktur durch die Aktivierung der Rückkopplung ebenso abrupt abgebrochen wie in Abbildung 19. Die Amplitude der von der lokalisierten Struktur ausgeführten Schwingung erreicht einen Grenzwert. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten ist, dass durch die Aktivierung der Rückkopplung ein weiterer Eigenwert destabilisiert wird, welcher die Position des Eigenwerts der intrinsischen Driftmode einnimmt. Das Eigenwertproblem wird dadurch entartet und es entsteht ein komplexes Eigenwertpaar, welches für die Oszillation in der Position verantwortlich ist.

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Auswirkung von zeitverzögerter Rückkopplung auf lokalisierte Strukturen betrachtet. Dies wurde exemplarisch für Lichtpunkte in einem oberflächenemittierenden Halbleiterlaser durchgeführt.

In Kapitel 1 wurde zunächst eine mögliche experimentelle Umsetzung zur Erzeugung von Lichtpunkten in Oberflächenemittern diskutiert. Außerdem wurde beschrieben, wie man den Aufbau erweitern kann um den Einfluss der zeitverzögerten Rückkopplung zu analysieren. Das Vorgehen bei der theoretischen Beschreibung folgte einem sehr ähnlichen Ablauf. Zunächst wurde der Halbleiterlaser ohne Rückkopplung untersucht. Zur Beschreibung eines solchen Halbleiterlasers wurde ein mathematisches Modell vorgestellt und analysiert. Es stellte sich heraus, dass nur in bestimmten Parameterbereichen Lichtpunkte oder lokalisierte Strukturen im Laser entstehen können. Der Ast der lokalisierten Strukturen koexistiert mit dem der homogenen nicht lasing Lösung.

In Kapitel 3 wurde das Modell erweitert um die zeitverzögerte Rückkopplung beschreiben zu können. Das Modell konnte so umgeschrieben werden, dass lokalisierte Strukturen stationäre Lösungen sind. Mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse wurde die Stabilität dieser lokalisierten Strukturen in einer Dimension untersucht. Aufgrund der zeitverzögerten Rückkopplung erhält man ein transzendentes Eigenwertproblem. Durch die Symmetrieeigenschaften des Systems konnten zwei neutrale Eigenwerte identifiziert werden, welche jeweils zu den neutral-stabilen Goldstonemoden gehören. In der Nähe dieses Bifurkationspunktes konnte dann eine Bedingung für die Destabilisierung der Goldstonemoden vorgestellt werden.

Im darauf folgenden Kapitel wurde die zuvor analytisch behandelte Theorie numerisch in einer Dimension umgesetzt. Zur Berechnung der räumlichen Ableitungen wurde das Pseudospektralverfahren verwendet. Die Zeitentwicklung des Systems wurde mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta Verfahrens vierter Ordnung bestimmt. Gerechnet wurde auf einem Grundgebiet mit periodischen Randbedingungen. Um experimentelle Umsetzungen möglichst realistisch zu simulieren, wurde die Simulation in mehrere Phasen unterteilt. In der Injektionsphase wird zunächst die lokalisierte Struktur mit Hilfe eines weiten Lasers optisch in den Oberflächenemitter injiziert. Dabei wird die Form des elektrischen Feldes fixiert, sodass sich die Lasermedien daran anpassen können. Nach der Injektion der lokalisierten Struktur wird das System zunächst ohne Rückkopplung betrachtet. Dadurch kann festgestellt werden, ob die lokalisierte Struktur stationär oder instabil ist. Danach wird die zeitverzögerte Rückkopplung aktiviert werden. Außerdem wurde ein Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes der lokalisierten Struktur, sowie dessen Geschwindigkeit, implementiert. In Kapitel 5 wurde die Reaktion der lokalisierten Struktur auf die Rückkopplung untersucht. Hierbei stellte sich heraus, dass die Bewegung der lokalisierten Struktur unter Einfluss der zeitverzögerten Rückkopplung hauptsächlich durch zwei unterschiedliche Bewegungsmuster bestimmt wird. Dazu gehörten sowohl der bereits vorhergesagte Drift, als auch eine Oszillation in der Position. Aus der unterschiedlichen Kombination dieser beiden Muster können sehr komplexe Bewegungen entstehen. Durch Variation der Rückkopplungsparameter  $\eta$ ,  $\tau$  und  $\varphi$  ist es möglich diese jeweils zu destabilisieren. Außerdem hat sich gezeigt, dass es möglich ist auch mehrere Oszillationsmoden zu destabilisieren.

Nach der Analyse der unterschiedlichen Bewegungsmöglichkeiten der lokalisierten Struktur wurde in Kapitel 6 der von den Rückkopplungsparametern aufgespannte Raum systematisch untersucht. Dazu wurde zunächst ein System vorgestellt mit dem es möglich ist das Bewegungsmuster der lokalisierten Struktur automatisiert zu bestimmen. Im darauffolgenden Abschnitt wurden dann die Ergebnisse in Form von Schnitten durch den Parameterraum präsentiert. Dabei lässt sich deutlich zwischen stationären und laufenden Strukturen unter-

scheiden. Bei den laufenden Strukturen ist die Unterscheidung zwischen driftenden, oszillierenden und einer Kombination aus beiden möglich. Es ist gelungen Bereiche zu separieren in denen die jeweiligen Bewegungsmuster auftreten und daher die entsprechenden Moden instabil werden. Zusätzlich wurde das Phänomen beobachtet, dass bei mehreren instabilen Oszillationsmoden teilweise schon kleine Parameteränderungen reichen, um eine Driftmode zu destabilisieren.

In Kapitel 7 wurden lokalisierte Strukturen mit intrinsischem Drift betrachtet, also Strukturen, die ohne zeitverzögerte Rückkopplung driften. Es wurde der Einfluss der zeitverzögerten Rückkopplung auf diese Strukturen untersucht. Dabei hat sich gezeigt, dass es möglich ist, intrinsisch driftende lokalisierte Strukturen durch Aktivierung der zeitverzögerten Rückkopplung zu stabilisieren. Eine Oszillation der Position der lokalisierten Struktur nach der Unterbindung des Driftes konnte ebenfalls beobachtet werden. Im Gegensatz zu den in Kapitel 5 beobachteten Phänomenen, reagierten die lokalisierten Strukturen schnell auf die Aktivierung der Rückkopplung.

Wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, können lokalisierte Strukturen in Oberflächenemittern komplexen Bewegungsmustern folgen. Mit Hilfe der zeitverzögerten Rückkopplung ist es sowohl möglich, stabile lokalisierte Strukturen zu destabilisieren als auch instabile lokalisierte Strukturen zu stabilisieren. Im Falle der Stabilisierung von lokalisierten Strukturen wäre ein Parameterscan, des von den Rückkopplungsparametern  $\eta$ ,  $\tau$  und  $\varphi$  aufgespannten Raumes, wie in Kapitel 6 erstrebenswert.

Ebenso wäre ein Vergleich der Ergebnisse der direkten Numerik mit der in Gleichung (3.25) vorgestellten Bifurkationsgrenze der Driftbifurkation wünschenswert. Zur Berechnung der Eigenwerte und -funktionen in partiellen Differentialgleichungssystemen mit zeitverzögelter Rückkopplung lässt sich ein in [22] vorgestelltes Matlab Paket verwenden.

In der transversalen Ebene des Oberflächenemitters können auch schnelle Kavitätssolitonen erzeugt werden. Dabei handelt es sich ebenfalls um lokalisierte Strukturen, welche sich jedoch deutlich von denen, welche in dieser Arbeit betrachtet wurden, unterscheiden. Diese schnellen Kavitätssolitonen haben ein größeres Intensitätsmaximum und wurden nur laufend beobachtet. Die Kontrolle dieser schnellen Kavitätssolitonen durch zeitverzögerte Rückkopplung ist noch nicht untersucht.

Zur besseren Beschreibung experimenteller Umsetzung ist eine Erweiterung der direkten numerischen Simulation auf ein zweidimensionales Grundgebiet notwendig.

## Literaturverzeichnis

### Literatur

- [1] F.Tito Arecchi, Stefano Boccaletti, and PierLuigi Ramazza. Pattern formation and competition in nonlinear optics. *Physics Reports*, 318(1–2):1 – 83, 1999.
- [2] H. Vahed, F. Prati, M. Turconi, S. Barland, and G. Tissoni. Periodic and chaotic solitons in a semiconductor laser with saturable absorber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2027), 2014.
- [3] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 237(641):37–72, 1952.
- [4] Alexander S. Mikhailov and Kenneth Showalter. Control of waves, patterns and turbulence in chemical systems. *Physics Reports*, 425(2–3):79 – 194, 2006.
- [5] Adrian Ankiewicz Nail Akhmediev, editor. *Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine*, volume 751. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] O. Lioubashevski, H. Arbell, and J. Fineberg. Dissipative solitary states in driven surface waves. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3959–3962, May 1996.
- [7] Mami Suzuki, Takao Ohta, Masayasu Mimura, and Hideo Sakaguchi. Breathing and wiggling motions in three-species laterally inhibitory systems. *Phys. Rev. E*, 52:3645–3655, Oct 1995.
- [8] Stephane Barland, Jorge R. Tredicce, Massimo Brambilla, Luigi A. Lugiato, Salvador Balle, Massimo Giudici, Tommaso Maggipinto, Lorenzo Spinelli, Giovanna Tissoni, Thomas Knodl, Michael Miller, and Roland Jager. Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities. *Nature*, 419(6908):699–702, Oct 2002.
- [9] X. Hachair, F. Pedaci, E. Caboche, S. Barland, M. Giudici, J. R. Tredicce, F. Prati, G. Tissoni, R. Kheradmand, L. A. Lugiato, I. Protsenko, and M. Brambilla. Cavity solitons in a driven vcsel above threshold. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12(3):339–351, May 2006.
- [10] F. Pedaci, S. Barland, E. Caboche, P. Genevet, M. Giudici, J. R. Tredicce, T. Ackemann, A. J. Scroggie, W. J. Firth, G.-L. Oppo, G. Tissoni, and R. Jäger. All-optical delay line using semiconductor cavity solitons. *Applied Physics Letters*, 92(1), 2008.
- [11] Adrian Jacobo, Damià Gomila, Manuel A Matías, and Pere Colet. Logical operations with localized structures. *New Journal of Physics*, 14(1):013040, 2012.
- [12] F. Prati, G. Tissoni, L. A. Lugiato, K. M. Aghdami, and M. Brambilla. Spontaneously moving solitons in a cavity soliton laser with circular section. *Eur. Phys. J. D*, 59(1):73–79, 2010.
- [13] S. Fedorov, A. Vladimirov, G. Khodova, and N. Rosanov. Effect of frequency detunings and finite relaxation rates on laser localized structures. *Phys. Rev. E*, 61:5814–5824, 2000.

- [14] Lorenzo Spinelli, Giovanna Tisconi, Luigi A. Lugiato, and Massimo Brambilla. Thermal effects and transverse structures in semiconductor microcavities with population inversion. *Phys. Rev. A*, 66:023817, Aug 2002.
- [15] A. J. Scroggie, J. M. McSloy, and W. J. Firth. Self-propelled cavity solitons in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. E*, 66:036607, Sep 2002.
- [16] Krassimir Panajotov and Mustapha Tlidi. Chaotic behavior of cavity solitons induced by time delay feedback. *Opt. Lett.*, 39(16):4739–4742, 2014.
- [17] A. Pimenov, A. G. Vladimirov, S. V. Gurevich, K. Panajotov, G. Huyet, and M. Tlidi. Delayed feedback control of self-mobile cavity solitons. *Phys. Rev. A*, 88:053830, Nov 2013.
- [18] D. Puzyrev, A. G. Vladimirov, S. V. Gurevich, and S. Yanchuk. Modulational instability and zigzagging of dissipative solitons induced by delayed feedback. *Phys. Rev. A*, 93:041801, Apr 2016.
- [19] Felix Tabbert. Dynamik lokalisierter strukturen mit zeitverzögerung. Master's thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, November 2014.
- [20] John P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*. Dover Publications, 2000.
- [21] Todd Tannenbaum Douglas Thain and Miron Livny. Distributed computing in practice: The condor experience. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 17(2-4):323–356, Februar-April 2005.
- [22] Zhen Wu and Wim Michiels. Reliably computing all characteristic roots of delay differential equations in a given right half plane using a spectral method. *J. Comput. Appl. Math.*, 236(9):2499–2514, March 2012.

## Anhang

### A: Simulation - Quellcode

Im Folgenden ist der Quellcode zur numerischen Berechnung meiner Ergebnisse gezeigt. Er funktioniert unter Python Version 2.7.9. Das in Zeile 6 importierte Modul enthält nur Variablen. Mit Hilfe dieses Moduls und eines Bash-Skriptes lässt sich die Simulation leichter für verschiedene Parameter automatisieren.

```
1  #
2  # necessary python modules
3  import numpy as np , matplotlib.pyplot as plt
4  #
5  # python module used to vary parameters in multiple runs
6  import curr_param as prm
7
8
9  #
10 # delay parameters
11 tau , eta , phi = prm.tau , prm.eta , prm.phi
12
13 #
14 # laser parameters
15 a , b , b1 , b2 , g , s , u = prm.a , prm.b , prm.b1 , prm.b2 , prm.g , prm.
16   s , prm.u
17
18 # uncomment for live output
19 # plt.ion()
20
21 #
22 # numerical constants
23 h = 0.01
24 Tmax = 3600.
25 Nsteps = int(Tmax/h)
26 Ndelay = int(tau/h)
27
28 #
29 # video parameters (make sure to have same amount of pictures per video to
30   make them comparable)
31 picnum = Tmax/12.
32
33 #
34 # spacial discretization
35 Nx = 128
36 Lx = 100.
37 x = ( np.arange( Nx ) - Nx/2 ) *Lx / Nx
38
39 #
40 # initialise array to track center of mass position
41 com_abs = np.zeros( Nsteps + 1 )
42
43 #
44 # initialise contour plot array
45 c_plot = np.zeros((Nsteps + 1, Nx),)
46
47 #
48 # initial condition
49 Einit = np.zeros((Nx,), dtype=np.complex128) + .5*np.exp(-x*x/20.0)+0.03*(np.
  random.random((Nx))-0.5) # + np.arange(128)/256. + (np.arange(128)/256.)*1
```

```

      j
50 Ninit = np.zeros((Nx,), dtype=np.complex128) + u + 0.03*(np.random.random((Nx))
51     -0.5) # + np.arange(128)/256.
52 ninit = np.zeros((Nx,), dtype=np.complex128) -g - 0.03*(np.random.random((Nx))
53     -0.5) # - np.arange(128)/256.
54 #
55 # delay data
56 Eold = np.zeros( ( Ndelay , Nx ) , dtype=np.complex128 )
57 j = 0
58 Y = np.array([ Einit , Ninit , ninit ])
59 #
60 #
61 # system definition
62 def rhs( Y , Eold ) :
63     E = Y[0]
64     N = Y[1]
65     n = Y[2]
66     delE = del2(E)
67     dE = ( (1.-1j*a)*N + (1.-1j*b)*n - 1.)*E + 1j*delE + eta*np.exp(1j*phi)*
68     Eold
69     dN = b1*( u - N*(1. + np.abs(E)*np.abs(E)) )
70     dn = -b2*( g + n*(1. + s*np.abs(E)*np.abs(E)) )
71     return np.array( [ dE , dN , dn ] )
72 #
73 # spectral derivative
74 k = np.fft.fftfreq( Nx , Lx/Nx/2./np.pi )
75 def del2( y ) :
76     return np.fft.ifft( -k*k * np.fft.fft(y) )
77 #
78 #
79 # calculate center of mass
80 def com(x, E ) :
81     max_index = np.argmax(E)
82     half_dom_size = int(np.size(x)/2.)
83     E_max_middle = np.roll(E, half_dom_size - max_index)
84     return np.average(x, weights=E_max_middle)-(half_dom_size-max_index)*Lx/np
85     .size(x)
86 #
87 #
88 #
89 # function to remove clipping (for example from center of mass array)
90 def rmv_clppng2(com, i=0) :
91     com_max = np.nanmax(com)
92     com_min = np.nanmin(com)
93     half_dom_size = 20.
94     while i <= np.size(com)-2 :
95         if np.abs(com[i+1] - com[i]) > half_dom_size :
96             peakdiff = np.abs(com[i+1] - com[i]) + np.abs(com[i-1] - com[i])
97             if np.sign(com[i+1]-com[i]) > 0 :
98                 for j in range(1,np.size(com)-i) :
99                     com[i+j] = com[i+j] - peakdiff
100                elif np.sign(com[i+1]-com[i]) < 0 :
101                    for j in range(1,np.size(com)-i) :
102                        com[i+j] = com[i+j] + peakdiff
103
104    i += 1
105
106    return com

```

```
107
108
109 #
110 # feedback constants, turns on feedback after 2 % of total timesteps
111 eta1 = eta
112 eta = 0.
113 #
114 #
115 #
116 # simulation
117 cnt=0
118 plt.figure(figsize=(8,5))
119 for i in range( Nsteps + 1 ) :
120 # RK4
121     k1 =rhs( Y , Eold[j] )
122     k2 =rhs( Y+0.5*h*k1 , Eold[j] )
123     k3 =rhs( Y+0.5*h*k2 , Eold[j] )
124     k4 =rhs( Y+h*k3 , Eold[j] )
125     Y = Y + (h/6.)*(k1 + 2.*k2 + 2.*k3 + k4)
126 # delay
127     Eold[j] = Y[0]
128     j = (j + 1) % Ndelay
129 # inject soliton
130     if i<int(0.01*Nsteps) :
131         Y[0] = Einit
132     if i == int(0.01*Nsteps) :
133         Eold*=0
134 # turn on feedback
135     if i>int(0.1*Nsteps) :
136         eta = eta1
137 # output
138     if picnum*i % Nsteps == 0 : # number of frames
139         plt.cla()
140         plt.plot(x,np.abs(Y[0])*np.abs(Y[0]),'b',linewidth=2.0,label="abs(E)")
141         plt.plot(x,Y[0].real,'g',linewidth=2.0,label="real(E)")
142         plt.plot(x,Y[0].imag,'r',linewidth=2.0,label="imag(E)")
143         plt.plot(x,np.real(Y[1]),'c',linewidth=2.0,label="N")
144         plt.plot(x,np.real(Y[2]),'m',linewidth=2.0,label="n")
145         plt.title("eta = {0:6.4f}".format(eta))
146         plt.legend(loc='upper left')
147         plt.xlim((-50,50))
148         plt.ylim((-2.5,8.))
149 # choose output
150 #     plt.draw() # live output with plt.io()
151     plt.savefig('video_curr/img-{0:06d}.png'.format(cnt)) # output image
152     cnt+=1
153     print 100.*i/(1.*Nsteps),'%'
154
155 # insert center of mass
156     com_abs[i] = com( x, np.abs(Y[0])*np.abs(Y[0]) )
157 # insert contour plot
158     c_plot[i] = np.abs(Y[0])*np.abs(Y[0])
159
160 ##### end of for loop #####
161
162 #
163 #
164 # remove clipping from center of mass array
165 com_abs = rmv_clppng2(com_abs,int(Nsteps*0.02))
166 #
167 #
168 # save data for further processing (e.g. FFT)
```

```

169 np.save('Center_of_Mass',com_abs)
170 np.save('Contour',c_plot)
171 #
172 # make plot for center of mass movement
173 plt.close()
174 plt.figure(figsize=(16,10))
175 plt.plot(np.arange(Nsteps + 1),com_abs,'b',linewidth=2.0)
176 plt.xlim((0, ( Nsteps + 1 )))
177 plt.xlabel("Timestep")
178 plt.ylabel("Position")
179 plt.title("Position of CoM / Feedback turned on Timestep: {0:06d}".format(int(
180     Nsteps*0.02)))
181 plt.savefig('Center_of_Mass.png')
182 #
183 # calculate velocity of center of mass, due to a little disturbance in the
184 # beginning set all values to zero before 5 % simulation time
185 com_abs_velo = np.zeros( Nsteps )
186 for i in range ( Nsteps ):
187     if i < int(Nsteps*0.05) :
188         com_abs_velo[i] = 0
189     else :
190         com_abs_velo[i] = np.abs((com_abs[i+1] - com_abs[i])/h)
191 #
192 # plot velocity of center of mass
193 plt.clf()
194 plt.plot(np.arange(Nsteps),com_abs_velo,'r',linewidth=2.0)
195 plt.xlim((0, Nsteps))
196 #plt.ylim((-50,50))
197 plt.xlabel("Timestep")
198 plt.ylabel("Velocity")
199 plt.title("Velocity of CoM / Feedback turned on Timestep: {0:06d}".format(int(
200     Nsteps*0.02)))
201 plt.savefig('Center_of_Mass_velocity.png')
202 #
203 # make contour plot
204 plt.clf()
205 plt.cla()
206 plt.imshow(c_plot, interpolation='spline16', aspect='auto', extent=(-50,50,0,
207     np.shape(c_plot)[0]*h), cmap=plt.cm.jet, origin='lower')
208 plt.colorbar()
209 plt.savefig('Contour_Plot.png')

```

## Danksagung

Ich möchte mich am Ende dieser Bachelorarbeit bei mehreren Personen für ihre Unterstützung bedanken.

Dr. Svetlana Gurevich und Felix Tabbert möchte ich für die engagierte und freundliche Betreuung danken, da sie sich immer viel Zeit für meine Anliegen genommen haben. Außerdem möchte ich ihnen für das Korrekturlesen dieser Arbeit danken.

Ebenso möchte ich mich bei Catharina Hargens für das Korrekturlesen meiner Arbeit bedanken.

Mein Dank gilt außerdem der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. Dr. Uwe Thiele für die nette Zeit und die vielen kleinen Ratschläge und Hinweise die ich von den Mitgliedern erhalten habe.

Besonderen Dank möchte ich meinen Eltern aussprechen, die mich während meines Studiums sehr unterstützt haben. Ebenfalls möchte ich mich bei ihnen für das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanken.

## **Erklärung zur Bachelorarbeit**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel "Analyse laufender lokalisierter Strukturen in Systemen mit zeitverzögerter Rückkopplung" selbstständig verfasst habe, und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, den 15. Juli 2016