

FELIX ZANTOW

**Der photonische Sektor in niedrigster Ordnung der  
elektromagnetischen Kopplung im Rahmen einer  
systematisch erweiterten Störungstheorie für die  
Quantenchromodynamik (QCD)**

Institut für Theoretische Physik I  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

März 2000







**Der photonische Sektor in niedrigster Ordnung der  
elektromagnetischen Kopplung im Rahmen einer  
systematisch erweiterten Störungstheorie für die  
Quantenchromodynamik (QCD)**

als Diplomarbeit<sup>1</sup> vorgelegt von  
Felix Zantow

März 2000

Institut für Theoretische Physik I  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

---

<sup>1</sup>Diese Fassung beinhaltet geringfügige Korrekturen an Formeln und Rechtschreibung und entspricht daher nicht mehr im Detail der dem Prüfungsamt vorgelegten Arbeit. Der Inhalt bleibt von diesen Korrekturen unberührt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>8</b>
<b>1 Grundlagen der Kontinuums-QCD</b>	<b>11</b>
1.1 Die QCD-Eichtheorie . . . . .	11
1.2 Renormierung der QCD . . . . .	13
1.3 Die spontane $\Lambda$ -Skala . . . . .	15
1.4 Die Einbeziehung des photonischen Sektors in die QCD . . . . .	17
<b>2 Die systematisch erweiterte Störungstheorie der QCD</b>	<b>19</b>
2.1 Die Vertexfunktionen auf Basis einer Operator- Produkt-Entwicklung . . . . .	19
2.2 Definition der systematisch erweiterten Störungstheorie . . . . .	21
2.3 Ansätze für die Vertexfunktionen in beliebiger Eichung . . . . .	23
2.3.1 Der Fermion-Propagator . . . . .	23
2.3.2 Der Gluon-Propagator . . . . .	24
2.3.3 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex . . . . .	25
2.3.4 Der Fermion-Photon-Vertex . . . . .	26
2.4 Die Systematik der erweiterten Störungstheorie . . . . .	27
2.4.1 Formulierung des Selbstkonsistenzproblems . . . . .	27
2.4.2 Der $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus . . . . .	28
2.4.3 Die Systematik der kompensierenden Pole in beliebiger Eichung . . .	30
2.4.4 Folgen für die Vertexapproximanten . . . . .	35
2.4.5 Das Selbstkonsistenz-Gleichungssystem . . . . .	38
<b>3 Die Propagatoren</b>	<b>41</b>
3.1 Die genäherte Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Fermion-Propagator	41
3.2 Die transversal-projizierte Fermion-Gluon-Schleife . . . . .	42
3.3 Die longitudinal-projizierte Fermion-Gluon-Schleife . . . . .	47
3.4 Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichungen in $r = 1$ . . . . .	51
3.5 Die exakte Dyson-Schwinger-Gleichung in $r = 0$ . . . . .	53

3.6	Bemerkungen zum inversen Photon-Propagator . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Der Quark-Antiquark-Photon-Vertex</b>	<b>56</b>
4.1	Näherung der Bethe-Salpeter-resummierten DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex . . . . .	56
4.2	Berechnung der Schleifenintegrale der transversal-projizierten Schleife . . . . .	58
4.3	Das longitudinal-projizierte Schleifenintegral . . . . .	79
4.4	Ableitung der Selbstkonsistenzgleichungen in $r=1$ . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Auswertung der Gleichungen</b>	<b>96</b>
5.1	Diskussion der divergenten Defektterme . . . . .	96
5.2	Diskussion der konvergenten Defektterme . . . . .	97
5.2.1	Die perturbativen Divergenzen des inversen Fermion-Propagators . .	97
5.2.2	Die perturbativen Divergenzen des Quark-Photon-Vertex . . . . .	97
5.3	Die resultierenden Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen für $r = 1$ . . . . .	99
5.4	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	101
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Funktionale Methoden</b>	<b>105</b>
A.1	Die euklidische Wirkung . . . . .	105
A.2	Der Funktionalintegralformalismus . . . . .	107
A.3	Definition der Feynman-Regeln . . . . .	109
<b>B</b>	<b>Dyson-Schwinger-Gleichungen</b>	<b>112</b>
B.1	Der photonische Kanal . . . . .	112
B.1.1	DS-Gleichung für den inversen Photonpropagator . . . . .	113
B.1.2	Der Fermion-Antifermion-Photon-Vertex im photonischen Kanal . .	115
B.2	Der fermionische Kanal . . . . .	116
B.2.1	Der inverse Fermion-Propagator . . . . .	116
B.2.2	Der Fermion-Antifermion-Photon-Vertex im fermionischen Kanal . .	117
B.3	Der gluonische Kanal . . . . .	119
B.3.1	Der inverse Gluon-Propagator . . . . .	119
B.3.2	DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex . . . . .	121
<b>C</b>	<b>Die Algebra der Dirac-Matrizen</b>	<b>123</b>
<b>D</b>	<b>Berechnung von Schleifenintegralen</b>	<b>125</b>
D.1	Feynman-Parametrisierung . . . . .	125

D.1.1	Die transversale Fermion-Gluon-Schleife . . . . .	126
D.1.2	Die longitudinale Fermion-Gluon-Schleife . . . . .	128
D.2	Symmetrische Integration und Standardformel . . . . .	129
D.3	Speziell: Berechnung rein logarithmisch divergenter Integrale . . . . .	130
D.4	Die verwendeten Basisintegrale des Quark-Photon-Vertex . . . . .	132
D.4.1	Berechnung der Basisintegrale von Kapitel 4.2 . . . . .	132
D.4.2	Basisintegrale der longitudinalen Schleife . . . . .	133
<b>E</b>	<b>Umrechnungen der Vertexparameter</b>	<b>135</b>
E.1	Der transversale Quark-Gluon-Vertex . . . . .	135
E.2	Der longitudinale Quark-Gluon-Vertex . . . . .	136
E.3	Der Quark-Photon-Vertex . . . . .	136
<b>F</b>	<b>Bethe-Salpeter-Resummation der DS-Gleichung des     Quark-Photon-Vertex</b>	<b>138</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>140</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>142</b>



# Einleitung

Nach heutigem Kenntnisstand lassen sich Elementarteilchen und ihre fundamentalen Wechselwirkungen durch quantisierte Feldtheorien beschreiben. In einer Feldtheorie werden die Teilchen mit Feldern identifiziert, die an  $D$ -dimensionale Raum-Zeit-Punkte gebunden sind. Die mathematische Beschreibung der Feldtheorie kann im Lagrange-Formalismus erfolgen, in der die Lagrange-Dichte die definierende Größe der Theorie ist. Ein Verständnis der Feldtheorie als Eichtheorie ist hilfreich, da aufgrund des Noetherschen Theorems die Suche nach Erhaltungsgrößen vereinfacht wird. Darüber hinaus kann über die Eichfelder ein mathematischer Zusammenhang zwischen den Materiefeldern der Theorie konstruiert werden, so daß Eichfelder in der Lage sind Teilchen zu beschreiben, welche als Austausch- teilchen Kräfte vermitteln.

Theoretische Grundlage der vorliegenden Arbeit bildet die Quantenchromodynamik (QCD). Sie ist die quantisierte Feldtheorie, welche im Rahmen des von Glashow, Salam und Weinberg entwickelten  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Standardmodells der Elementarteilchen-Theorie zur mathematischen Formulierung des stark wechselwirkenden Sektors herangezogen wird. Sie ist als nicht-abelsche Eichtheorie mit Eichgruppe  $SU(3)$  eine asymptotisch freie Theorie und kann daher störungstheoretisch behandelt werden. Die Einführung der elementaren Begriffe der störungstheoretischen Approximation der QCD und die Definition der dieser Arbeit zugrundeliegenden Lagrange-Dichte ist Gegenstand des ersten Kapitels. In einer Störungstheorie werden die fundamentalen Größen der Theorie, die Vertexfunktionen, in einer Entwicklung im Quadrat der Kopplung angesetzt. Die sehr gut bewährte störungstheoretische Behandlung der Feldtheorien erweist sich jedoch in ihrer Anwendung auf die QCD als unbefriedigend. Zum Beispiel sind in jeder endlichen Ordnung der störungstheoretischen Entwicklung die freien Teilchen der Theorie die Quarks und Gluonen, was dem experimentellen Befund des Confinement widerspricht. Die Verwendung von nicht-perturbativen Approximationsschemata wird daher notwendig.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit wird den Arbeiten [Sti 86, Sti 96, Sti 97] folgend ein analytisches nicht-perturbatives Approximationsschema für die Vertexfunktionen vorgestellt, das im folgenden als systematisch erweiterte Störungstheorie bezeichnet wird. Dieses Schema orientiert sich an der strukturellen Darstellung der Vertexfunktionen in einer Operator-Produkt-Entwicklung, in der die Vertexfunktionen neben der Entwicklung im Quadrat der Kopplung zusätzlich im Quadrat der Renormierungsgruppen-invarianten Massenskala  $\Lambda$  entwickelt werden. In der erweiterten Störungstheorie werden die Vertexfunktionen in eine Doppelsequenz entwickelt, die sowohl eine nicht-perturbative Richtung als auch eine perturbative Richtung verfolgt. Es werden in [Sti 96] für die QCD rationale

Approximanten der Vertexfunktionen mit ungeradem Approximationsgrad  $r$  vorgeschlagen, da diese in der Lage sind, kurzreichweitige Propagatoren auszubilden und damit der Forderung nach Confinement genügen. Durch die der allgemeinen QCD-Eichtheorie zugrundeliegenden dynamischen Gleichungen (z.B. Dyson-Schwinger-Gleichungen) wird ein Selbstkonsistenz-Gleichungssystem für die Koeffizienten der rationalen Approximanten definiert, welches bereits für die gluonischen und fermionischen Vertexkoeffizienten für  $N_F = 2$  masselose Fermionen auf der niedrigsten Stufe der rationalen Approximation behandelt wurde [Sti 97].

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des photonischen Sektors im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie. Grundlage der Untersuchungen bilden die Dyson-Schwinger-Gleichungen auf dem Ein-Schleifen-Niveau und in niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung, also die DS-Gleichungen des inversen Fermionen-Propagators und die des Quark-Photon-Vertex im photonischen und fermionischen Kanal.

Der inverse Fermion-Propagator ist in Landau-Eichung der QCD bereits in [Kuh 97] ausführlich behandelt worden. Es werden auch Anmerkungen zum Quark-Photon-Vertex gegeben, denen zufolge der DS-Schleifenbeitrag zum Quark-Photon-Vertex in Landau-Eichung verschwindet. Durch diese Behauptung motiviert, werden die Betrachtungen in dieser Arbeit stets in beliebiger Eichfixierung  $\alpha$  der QCD gehalten. Primäres Ziel soll es dabei sein, in direktem Anschluß an [Kuh 97] die Selbstkonsistenz-Gleichungen (SK-Gleichungen) für den inversen Fermion-Propagator und den Quark-Photon-Vertex in beliebiger Eichfixierung aufzustellen und somit den photonischen Sektor in niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung in das bestehende SK-Gleichungssystem zu integrieren. Da die in der erweiterten Störungstheorie inbegriffene sog. Systematik der kompensierenden Pole bisher in Landau-Eichung etabliert wurde [Sti 97], ist es notwendig diese für Betrachtungen in beliebiger Eichung zu prüfen und gegebenenfalls zu modifizieren.

In den folgenden beiden Kapiteln dieser Arbeit (Kapitel 3 und Kapitel 4) werden die Dyson-Schwinger-Gleichungen des inversen Fermion-Propagator und des Quark-Photon-Vertex mit dem Ziel untersucht, SK-Gleichungen für die Vertexparameter des photonischen Sektors zu gewinnen.

Schließlich wird im fünften Kapitel dieser Arbeit eine Auswertung der abgeleiteten Gleichungen versucht und diskutiert.

# Kapitel 1

## Grundlagen der Kontinuums-QCD und Formulierung ihrer grundsätzlichen Probleme

Gegenstand dieses ersten Kapitels ist die Einführung in die störungstheoretische Behandlung der Kontinuums-QCD. Es werden in den ersten beiden Abschnitten die Grundbegriffe im Lagrange-Formalismus erläutert und auf die Problematik der störungstheoretischen Beschreibung des Quark-Confinement hingewiesen. Im zweiten Teil des ersten Kapitels wird die Renormierungsgruppen(RG)-invariante Massenskala definiert und ihr nicht-perturbativer Charakter dargestellt. Das Kapitel schließt mit der Angabe der Lagrange-Dichte der QCD unter Einbeziehung der Wechselwirkungen zwischen Quarks und Photonen, auf die sich die späteren Rechnungen stützen.

### 1.1 Die QCD-Eichtheorie

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist im Rahmen des  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Standard-Modells der Elementarteilchenphysik die quantenfeldtheoretische Beschreibung der starken Wechselwirkung. Die Materiefelder der QCD sind die Dirac-Felder der Quarks. Die natürliche (minimale) Kopplung der Quarks an die Gluonen führt auf eine Yang-Mills-Theorie mit der Eichgruppe  $SU(N_c)$  mit  $N_c = 3$  Farb-Ladungen und  $N_F$  Quark-Flavours. Die zugehörige *Lagrange-Dichte* [Bel 91, Mut 87] im euklidischen  $D$ -dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum mit beliebiger kovarianter Eichfixierung  $\alpha$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E(x) = & \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu}(x) G_a^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu B_a^\mu(x))^2 + (\partial^\mu \bar{C}_a(x)) [\partial^\mu \delta_{ab} + \tilde{g}_0 f_{abc} B_c^\mu(x)] C_b(x) \\ & + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left[ -i \not{\partial} \delta^{ij} + m_{(f)0} \delta^{ij} + \tilde{g}_0 T_a^{ij} \gamma^\mu B_a^\mu(x) \right] \psi_{(f)}^j(x) \quad (1.1) \end{aligned}$$

definiert die QCD-Feldtheorie. Dabei bezeichnet  $T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$  die Generatoren der fundamentalen Darstellung der  $SU(3)$  und  $G_a^{\mu\nu}(x)$  den nicht-abelschen Feldstärketensor des

Eichfeldes:

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu B_a^\nu(x) - \partial^\nu B_a^\mu(x) + \tilde{g}_0 f_{abc} B_b^\mu(x) B_c^\nu(x) . \quad (1.2)$$

Durch Integration der Lagrange-Dichte (1.1) über das gesamte Raum-Zeit-Kontinuum ergibt sich das euklidische *Wirkungs-Funktional* der QCD:

$$S_E[B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] = \int d^D x \left( \mathcal{L}_E(x) \right) . \quad (1.3)$$

Aus ihm lassen sich mittels funktionaler Methoden (siehe Anhang A) die zusammenhängenden, amputierten und Ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Greensfunktionen, die *vollen* euklidischen Vertex-Funktionen  $\Gamma_N$ , mit N äußeren Beinen im Impulsraum gewinnen. Die störungstheoretischen Vertex-Funktionen nullter Ordnung, die *nackten* Vertexfunktionen  $\Gamma_N^{(0)pert}$ , lassen sich an der Wirkung im Impulsraum ablesen (Anhang A.1). Die Dynamik der durch die Lagrange-Dichte definierten Theorie kann jedoch auch ohne Bezug auf Störungsmethoden zu nehmen mittels sog. *dynamischer Gleichungen* (z.B. Dyson-Schwinger-Gleichungen, exakte Renormierungsgruppen-Differentialgleichungen,...) beschrieben werden. Diese stellen exakte Beziehungen zwischen den existierenden Vertexfunktionen her, die immer Schleifenintegrale über alle Impulsgrößenordnungen beinhalten. Mit ihnen lassen sich die Vertexfunktionen auf analytischem Wege bestimmen. In der Störungstheorie werden die vollen Vertexfunktionen in einer Entwicklung nach dem Kopplungsquadrat angesetzt<sup>1</sup>:

$$\Gamma_N^{pert} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[p]pert}; \quad \Gamma_N^{[p]pert} = \Gamma_N^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p \left( \frac{\tilde{g}}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{(p')pert} . \quad (1.4)$$

Die nackten Vertexfunktionen  $\Gamma_N^{(0)pert}$  bilden im Sinne dieser Entwicklung die *Feynman-Regeln* der Störungstheorie (siehe Anhang A). Um eine (semi-)konvergente<sup>2</sup> Darstellung der Vertexfunktionen zu erhalten, muß die Kopplung als Entwicklungsparameter hinreichend klein gewählt werden, anderenfalls entstehen unendlich große Werte für die Vertexfunktionen. Aufgrund der Semikonvergenz der Darstellung ist ein Abbruch nach einer endlichen Ordnung der Entwicklung immer notwendig. Eine störungstheoretische Beschreibung der QCD hat den großen Nachteil, daß in jeder endlichen Ordnung der Entwicklung die asymptotisch freien Teilchen die Quarks und Gluonen sind. Dieses widerspricht aber dem experimentellen Befund, wonach die Quarks und Gluonen keine frei detektierbaren Teilchen sind, sondern stets zu “Paketen” zusammengeschlossen bleiben. Dieser für die QCD charakteristische Zusammenschluß von Quarks und Gluonen wird *Confinement* genannt. Als ein grundlegendes Problem der störungstheoretischen Behandlung der QCD wird notiert:

---

<sup>1</sup>Die in  $\tilde{g}^2$  polynomialen Approximanten, d.h. die Teilsummen p-ter Ordnung, werden durch einen in eckige Klammern gesetzten Index gekennzeichnet.

<sup>2</sup>Mit dem Begriff semikonvergente Entwicklungen werden in der Physik mathematisch divergente Reihendarstellungen bezeichnet, die bis zu einer Entwicklungsordnung zu konvergieren scheinen, dann aber für höhere Entwicklungsordnungen wieder divergieren.

Eine störungstheoretische Behandlung der QCD widerspricht dem experimentellen Befund des Quark-Confinement, da in jeder endlichen Ordnung der Entwicklung die freien Teilchen die Quarks und Gluonen sind.

In dieser Arbeit werden die *Dyson-Schwinger-Gleichungen* (DS-Gleichungen) zur analytischen Bestimmung der Vertexfunktionen herangezogen. Sie bilden ein unendliches hierarchisches System gekoppelter Integral-Differentialgleichungen für die Vertexfunktionen  $\Gamma_N$  und  $\Gamma_N^{(0)pert}$ , welche auch *außerhalb* der Störungstheorie ihre Gültigkeit beibehalten. Ihre allgemeine Darstellung ist die folgende [DS 49, Riv 87]:

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi \left[ \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \Gamma_{N+2} \right] \quad (1.5)$$

Dabei bezeichnet  $\Phi$  das Dyson-Schwinger-Funktional, welches durch Schleifenintegrale definiert wird<sup>3</sup>. Beim Berechnen der Schleifenintegrale stößt man auf ein Problem, das im folgenden Abschnitt behandelt wird: Die Schleifenintegrale divergieren für große Impulsbeträge; man sagt, sie divergieren ultraviolett.

## 1.2 Renormierung der QCD

Die Beseitigung der UV-Divergenzen in Schleifenberechnungen erfolgt in zwei Schritten: Im ersten Schritt wird das divergente Integral *regularisiert*. Anschließend wird der Integrand *renormiert*, das heißt, derart neu definiert, daß auch nach Zurücknehmen der Regularisierung endliche Integralwerte verbleiben. Dieses allgemein als *Renormierungsprozeß* bezeichnete Verfahren kann in jeder Ordnung der Störungstheorie erfolgreich angewendet werden [KUG 97]. In dieser Arbeit wird die *dimensionelle* Regularisierung [TV 72] verwendet, bei der die Dimension ( $D = 4$ ) kontinuierlich verringert wird:  $D \rightarrow D = 4 - 2\varepsilon$ . Hierdurch wird die nackte Kopplung  $\tilde{g}_0$  dimensionsbehaftet und durch eine dimensionslose Kopplung  $g_0$  ersetzt, indem die gesamte Dimensionsabhängigkeit auf eine willkürliche aber feste Massenskala  $\nu_0$  verlagert wird:

$$\tilde{g}_0 = g_0 \nu_0^\varepsilon. \quad (1.6)$$

Dem dimensionellen Regularisierungsschema entsprechend, wird im Kontinuum ein dimensionelles und für die Parameter der Theorie *multiplikatives* Renormierungsschema, das  $\overline{MS}$ -Schema (minimal subtraction), verwendet. Hierin wird u.a die nackte Kopplung durch eine renormierte ersetzt:

$$g_0^2 \nu_0^{2\varepsilon} = g^2(\nu) \nu^{2\varepsilon} Z_\alpha(g^2(\nu); \varepsilon) \quad (1.7)$$

Dabei bezeichnet  $\nu$  im Gegensatz zum  $\nu_0$  von (1.6) eine frei variierbare *Renormierungsskala* (oder Massenskala) und

$$Z_\alpha(g^2(\nu); \varepsilon) = 1 - \frac{g^2(\nu)}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \beta_0 + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.8)$$

---

<sup>3</sup>Die in dieser Arbeit verwendeten DS-Gleichungen sind in Anhang B hergeleitet.

ist die Kopplungs-Renormierungskonstante auf Ein-Schleifen-Niveau. Mit

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_F \quad (1.9)$$

wird der erste Koeffizient einer Renormierungsgruppenfunktion, der  $\beta$ -Funktion, bezeichnet, welche durch die Differentialgleichung

$$\beta(g(\nu)) := \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} \quad (1.10)$$

definiert wird. In dimensioneller Regularisierung hat sie folgende Gestalt [TV 72]:

$$\beta(g(\nu), \varepsilon) = -g(\nu) \left( \varepsilon + \beta_0 \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \right). \quad (1.11)$$

Bemerkenswert ist an dieser Stelle, daß bereits *eine* Kopplungsrenormierung (1.7) ausreichend ist, obwohl in der Lagrange-Dichte (1.1) verschiedene Wechselwirkungsterme auftreten. Der Ausdruck (1.7) ist im Zusammenhang mit (1.1) die mathematische Formulierung der *Universalität der starken Kopplung*. Insgesamt werden im Zuge der multiplikativen Renormierung alle in der Lagrange-Dichte auftretenden Größen (Kopplung, Massen, Eichparameter und Felder) durch ihre renormierten Größen ersetzt. Die QCD ist eine renormierbare Theorie in dem Sinne, daß die bei dieser Ersetzung entstehenden *endlich vielen* und *lokalen* Gegenterme zur Beseitigung aller Ultraviolettdivergenzen, Ordnung für Ordnung in  $g^2$ , genügen [TV 72a, Kug 97]. Die Renormierungskonstanten können an den perturbativen Divergenzen der Vertices abgelesen werden.

In dieser Arbeit wird die perturbative Divergenz des inversen Fermion-Propagator auf dem Ein-Schleifen-Niveau und in beliebiger Eichung benötigt [Mut 87]:

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{\Gamma_{F\bar{F}}}^{l_1 l_2}(q; \varepsilon) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \delta^{l_1 l_2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \not{q} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \alpha \right. \\ &\quad \left. + m_{(f)} \left( 3 \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} + \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \alpha \right) \right) + \mathcal{O}(g_0^4; \varepsilon^0). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Der Zusammenhang zwischen dem nackten und renormierten Fermion-Feld (bzw. Antifermion-Feld) wird durch die zugehörige Renormierungskonstante beschrieben und kann ebenfalls [Mut 87] entnommen werden:

$$\bar{\Psi}_{(f)}^i = Z_{F\bar{F}}^{1/2}(g^2; \varepsilon) \bar{\Psi}_{(f)}^{ren\ i} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{(f)}^i = Z_{F\bar{F}}^{1/2}(g^2; \varepsilon) \Psi_{(f)}^{ren\ i}. \quad (1.13)$$

Dabei sind mit  $\Psi^{ren\ i}$ ,  $\bar{\Psi}^{ren\ i}$  die renormierten Fermion-Felder bezeichnet. Die Gestalt der Renormierungskonstanten läßt sich an (1.12) ablesen:

$$Z_{F\bar{F}}^{1/2} = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \alpha + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) + \mathcal{O}(g^4). \quad (1.14)$$

Die renormierten Felder und Kopplungen einer Theorie gelten im Gegensatz zu den nicht-renormierten Größen als physikalisch. Um aber mit einer renormierten Theorie physikalische Effekte beschreiben zu können, ist es erforderlich, Größen einzuführen, die unabhängig von der Renormierungsskala sind. Bevor auf diesen Sachverhalt im folgenden Abschnitt

näher eingegangen wird, wird für die Erläuterung des sog.  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus (siehe Kapitel 2.4.2) notwendige Integraldarstellung der Kopplungs-Renormierungskonstante  $Z_\alpha$  angegeben. Durch Ausnutzen der Unabhängigkeit der nackten Kopplung  $g_0$  von der Renormierungsskala  $\nu$  gelangt man zu

$$Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) = \exp \left( - \int_0^\alpha d\alpha' \frac{1}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'} \right) \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{g^2(\nu)}{4\pi}. \quad (1.15)$$

(An dieser Stelle darf der Eichparameter, der auch mit  $\alpha$  bezeichnet wird, nicht mit der quadratischen Kopplung in (1.15) verwechselt werden.) Durch Abspalten des in  $\varepsilon = 0$  regulären Anteils

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'} =: \frac{1}{4\pi\varepsilon f(0) + \alpha'} + \varepsilon \rho_\alpha(\alpha', \varepsilon) \quad \text{mit} \quad \rho_\alpha(0, \varepsilon) = 0 \quad (1.16)$$

kann ihr Verschwinden nach Zurücknehmen der Regularisierung ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) gezeigt werden:

$$Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) = \frac{\frac{4\pi\varepsilon}{\beta_0}}{\frac{4\pi\varepsilon}{\beta_0} + \alpha} \exp \left( - \varepsilon \int_0^\alpha d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \varepsilon) \right) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

### 1.3 Die spontane $\Lambda$ -Skala

Die renormierten Parameter und die Renormierungskonstanten der Theorie sind von der Renormierungsskala  $\nu$  abhängig (siehe z.B. (1.14)). Im Gegensatz dazu weisen physikalische Meßgrößen keine solche Abhängigkeiten mehr auf. Die Abhängigkeit von der Renormierungsskala verschwindet von der meßbaren Bildfläche. Der Grund hierfür ist, daß die Skalenabhängigkeiten in einer masselosen Theorie auf einen dimensionsbehafteten Parameter projiziert werden können, der invariant unter Skalentransformationen bleibt. Dieser fundamentale Parameter der Theorie wird *spontane* oder, seiner Eigenschaft wegen, *Renormierungsgruppen-invariante Massenskala*  $\Lambda$  genannt<sup>4</sup>. Die Einführung dieser Massenskala kann über die  $\beta$ -Funktion erfolgen. Durch Separation der Variablen und anschließender Integration von (1.10) erhält man:

$$\ln \frac{\nu}{\nu_1} = \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} =: \Psi(g(\nu)) - \Psi(g_1) \quad (1.18)$$

Die Integrationskonstanten beider Seiten werden zusammengefaßt zu

$$\ln \nu - \Psi(g(\nu)) := \text{konst} \quad (1.19)$$

und definieren so die RG-invariante Größe, die als spontane Massenskala  $\Lambda$  bezeichnet wird:

$$\ln \Lambda(g(\nu), \nu) := \ln \nu - \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')}. \quad (1.20)$$

<sup>4</sup>In einer massiven Theorie kann zusätzlich zu  $\Lambda$  die RG-invariante Strommasse  $\hat{m}$  über die Renormierungsgruppenfunktion  $\gamma_m$  eingeführt werden. Sie besitzt aber keine Kopplungsabhängigkeiten und gilt daher als "triviale" RG-Invariante [Mut 87, Kuh 97].

Die Abhängigkeit der spontanen Massenskala vom zugrundeliegenden Renormierungsschema kann durch Fixieren der unteren Integrationsgrenze ausgedrückt werden:

$$\Lambda^2(g(\nu), \nu) = \nu^2 \exp \left( -2 \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right) \quad (1.21)$$

$$= \nu^2 \exp \left( -\frac{1}{\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(g^2)) \right), \quad (D=4). \quad (1.22)$$

Dabei bezeichnet  $g_1$  den Wert der laufenden Kopplung  $g(\nu)$  bei der Skala  $\Lambda = \nu$ . Durch die Abhängigkeit von  $g_1$  und von den höheren Koeffizienten  $\beta_n$  mit  $n > 1$  der  $\beta$ -Funktion wird  $\Lambda$  abhängig vom Renormierungsschema; aus experimentellen Daten ist sie erst durch Vergleich mit dem Zwei-Schleifen(Zwei-Loop)-Ausdruck bestimmbar. Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema kann ein gemittelter Wert [Sch 96] entnommen werden:

$$\Lambda_{QCD}^{\overline{\text{MS}}} \approx 287(\pm 31) \text{ MeV}. \quad (1.23)$$

Im Zuge des Renormierungsprozesses wird mit Einführung der Massenskala die dimensionslose nackte Kopplung in einen Parameter mit Massendimension transformiert. Diese Art der Transformation, bei der eine dimensionslose Größe auf eine dimensionsbehaftete Größe abgebildet wird, nennt man *dimensionelle Transmutation* [Col 84].

Für sehr hohe Energien kann die Skalenabhängigkeit der *effektiven Kopplung*  $\bar{g}$  durch eine Analyse der  $\beta$ -RG-Funktion (1.10) angegeben werden:

$$\bar{g}^2(Q^2) \approx \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad \text{für } \frac{Q^2}{\Lambda^2} \gg 1. \quad (1.24)$$

Dieser Darstellung der effektiven Kopplung ist direkt anzusehen, daß sie für  $\beta_0 > 0$  (d.h. nach (1.9) für  $N_F < 16$ ) und große Impulsskalen  $\frac{Q^2}{\Lambda^2}$  verschwindet (eine negative Kopplung widerspricht dem physikalischen Bild). Das Verschwinden der effektiven Kopplung für große Impulsbeträge hat zur Folge, daß die beschriebenen Teilchen bei hohen Energien näherungsweise als freie Teilchen angesehen werden können. Man sagt, die QCD sei eine *asymptotisch freie* Theorie. Darüber hinaus offenbart (1.22) eine schwerwiegende Unzulänglichkeit der Störungstheorie:

In einer störungstheoretischen Entwicklung der Vertexfunktionen in  $g^2$  können polynomiale oder allgemeiner *rationale*  $\Lambda$ -Abhängigkeiten der Vertexfunktionen aufgrund des nicht-analytischen Zusammenhangs (1.22) prinzipiell nicht erfaßt werden.

Die RG-invariante Massenskala ist also eine “echt” nicht-perturbative Größe der Theorie. Eine Rekonstruktion der Vertexfunktionen, in der die  $\Lambda$ -Abhängigkeiten vollständig erfaßt werden, ist ein wesentliches Forschungsziel sog. *nicht-perturbativer* Theorien. Es besteht die Vermutung, daß die unzulängliche Beschreibung physikalischer Effekte im Rahmen der Störungstheorie, wie z. B. des Confinement, auf die mangelhafte Berücksichtigung der  $\Lambda$ -Skala zurückzuführen ist. Die vorliegende Arbeit basiert auf einer nicht-perturbativen Theorie, der sog. *systematisch erweiterten Störungstheorie*, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird. Doch zuvor wird die dieser Arbeit zugrundeliegende Lagrange-Dichte erläutert.



## 1.4 Die Einbeziehung des photonischen Sektors in die QCD

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von photonischen Wechselwirkungen in der QCD. Eine quantenfeldtheoretische Beschreibung dieser Wechselwirkungen zwischen Photonen und geladenen Teilchen bietet die Quantenelektrodynamik (QED), in der die Materiefelder die Dirac-Felder der elementaren Leptonen sind (z.B. die Elektronen und Positronen), die über das Eichfeld der Photonen wechselwirken. Die QED ist wie auch die QCD Teil des Standardmodells der Elementarteilchenphysik mit Eichgruppe  $U(1)$ . Die definierende Größe der QED-Eichtheorie ist die Lagrange-Dichte [Bec 95, Ryd 97, PS 95]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\xi} \left( \partial^\mu A^\mu(x) \right)^2 \\ & + \bar{\psi}^i(x) \left[ -i\gamma^\mu \partial^\mu \delta^{ij} + m_0 \delta^{ij} + \bar{e} \gamma^\mu A^\mu(x) \right] \psi^j(x) \end{aligned} \quad (1.25)$$

mit dem (abelschen) Maxwellischen Feldstärketensor<sup>5</sup>:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad (1.26)$$

Dabei ist  $m_0$  die nackte Masse der mit  $e$  geladenen Leptonen mit nacktem Feld  $\psi^i(x)$ . Das Photon als Eichfeld  $A^\nu(x)$  ist selbst masselos und ungeladen. Die oberflächlich divergenten Vertices der QED sind die beiden inversen Propagatoren der elementaren Felder und der Lepton-Photon-Vertex.

Benutzt man die Quantenelektrodynamik zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen den Quarks an Stelle der Leptonen und dem Photon, so muß lediglich die Masse des Leptons  $m_0$  durch die Masse der Quarks mit Flavour  $f$  ersetzt werden und analog wird die elektromagnetische Kopplung des Leptons durch die der Quarks  $e_f$  ersetzt. Da die QCD insgesamt  $N_F$  Quarkfelder beschreibt, wird entsprechend summiert. Die Lagrange-Dichte der QCD mit Einbeziehung des photonischen Sektors  $\mathcal{L}_{QCD+PS}(x)$  lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD+PS}(x) = & \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu}(x) G_a^{\mu\nu}(x) \\ & + \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\alpha} \left( \partial^\mu B_a^\mu(x) \right)^2 + \frac{1}{2\xi} \left( \partial^\mu A^\mu(x) \right)^2 \\ & + (\partial^\mu \bar{C}_a(x)) \left[ \partial^\mu \delta_{ab} + \tilde{g}_0 f_{abc} B_c^\mu(x) \right] C_b(x) \\ & + \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left[ -i\gamma^\mu \partial^\mu \delta^{ij} + m_{0(f)} \delta^{ij} + \tilde{g}_0 T_a^{ij} \gamma^\mu B_a^\mu(x) \right. \\ & \quad \left. + \bar{e}_f \gamma^\mu A^\mu(x) \right] \psi_{(f)}^j(x) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Durch die Einführung des Photonfeldes wird der bestehende Satz der oberflächlich divergenten Vertices der QCD um den Photon-Propagator und den Quark-Photon-Vertex

<sup>5</sup>Im Gegensatz dazu wird der nichtabelsche Feldstärketensor (z. B. der der QCD) als *verallgemeinerter* Maxwellischer Feldstärketensor bezeichnet.

erweitert. Die nackten Größen dieser Vertices lauten in nullter störungstheoretischer Ordnung:

$$\Gamma_{AA}^{(0)pert\mu_1\mu_2}(q) = -\left(\delta^{\mu_1\mu_2}q^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)q^{\mu_1}q^{\mu_2}\right) \quad (1.28)$$

$$\Gamma_{F\bar{F}A(f)}^{(0)pert\mu_3} = \gamma^{\mu_3} \quad (1.29)$$

Für die folgenden Betrachtungen (Kapitel 3 bis Kapitel 5) wird stets (1.27) als Lagrange-Dichte verwendet, so daß auf die Indizierung QCD+PS an der Lagrange-Dichte im weiteren verzichtet wird.

## Kapitel 2

# Die systematisch erweiterte Störungstheorie der QCD

Gegenstand dieses Kapitels ist die Motivierung der systematisch erweiterten Störungstheorie anhand der Wilsonschen Operator-Produkt-Entwicklung, wie sie in [Sti 96] vorgeschlagen wird. Dabei wird der Versuch unternommen, die Wilsonsche Approximation mit der Theorie der resurgenten Funktionen [Mal 85] in Zusammenhang zu setzen. Anschließend werden die rationalen Approximanten der Vertexfunktionen angegeben und das Selbstkonsistenz-Problem wird am Beispiel der Dyson-Schwinger-Gleichungen formuliert. Dieses führt auf den  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus, der die selbstkonsistente Bestimmung der rationalen Approximanten ermöglicht. Nachfolgend wird die bestehende Systematik der sog. kompensierenden Pole für Berechnungen in beliebiger Eichung ausgedehnt, was eine Neuerung gegenüber den bisherigen Rechnungen ist. Abschließend werden die aus der Systematik kompensierender Pole resultierenden Konsequenzen für die Vertexapproximanten diskutiert.

### 2.1 Die Vertexfunktionen auf Basis einer Operator-Produkt-Entwicklung

Ein Ziel der erweiterten Störungstheorie ist, ein analytisches Berechnungsverfahren zur Rekonstruktion der Vertexfunktionen bereitzustellen, dessen Gültigkeitsbereich sich über die gesamte Energieskala erstreckt. Da sich die reine Störungstheorie für hohe Energien sehr gut bewährt hat, wird stets gefordert, daß die erweiterte Theorie im Limes großer Viererimpulse die Resultate der Störungstheorie reproduziert. Die Erschließung des Niederenergiebereiches unter der formulierten Nebenbedingung im Rahmen der erweiterten Störungstheorie kann man sich als in zwei Schritten erfolgend vorstellen. Die Hypothese nach Wilson bildet die Grundlage für den ersten Schritt zur systematisch erweiterten Störungstheorie. Nach dieser Hypothese sind die Vertexfunktionen in einer renormierbaren, aber nicht super-renormierbaren Theorie ( $D = 4$ ) in eine Doppelsequenz entwickelbar

(Operator-Produkt-Entwicklung (OPE))[Kug 96]:

$$\Gamma_N(k^2, g^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma^{(r,p)}(g^2)^p \left( \frac{\Lambda^2}{k^2} \right)^r, \quad (2.1)$$

wobei  $\Lambda$  die aus Kapitel 1 bekannte renormierungsgruppeninvariante Skala ist:

$$\Lambda^2(g, \nu) = \nu^2 \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g} \right)^2 \right] [1 + \mathcal{O}(g^2)] \right\}. \quad (2.2)$$

Sie kommt dadurch herein, daß die in der OPE auftretenden Vakuumkondensate in einer ansonsten masselosen Theorie Vielfache von Potenzen dieser Skala sind. Im Falle von  $r = 0$  stimmt diese Doppelentwicklung mit der perturbativen Entwicklung überein. Bei Hinzunahme der Wilsonschen Terme mit  $r > 0$  hat sie nach (2.2) die allgemeine Form

$$\Gamma_N = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\gamma}^{(r,p)}(k^2) [g^2(\nu)]^p \left[ e^{-\frac{1}{\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g} \right)^2} \right]^r, \quad (2.3)$$

welche die typische Form der asymptotischen Entwicklung einer sog. *resurgenten*<sup>1</sup> Funktion ist. Obwohl diese Entwicklung im allgemeinen in beiden Richtungen nur semikonvergent ist, kann aus ihr, und dies ist für die Erschließung des Niedrigenergiebereiches von zentraler Bedeutung, dennoch die “wahre” Funktion durch eine geeignete Erweiterung der Borel-Transformation im Prinzip rekonstruiert werden. Die dafür nötigen Analytizitätsvoraussetzungen sind wesentlich schwächer als für Borel-summierbare Einfachreihen [Sti 00].

Von der Frage der prinzipiellen Rekonstruierbarkeit begrifflich verschieden, aber praktisch nicht völlig zu trennen ist das in der Feldtheorie vordringlichere Problem, die resurgente Doppelentwicklung oder eine dazu äquivalente Approximantenfolge überhaupt erst einmal aus den zugrundeliegenden dynamischen Gleichungen (in der Theorie der resurgenten Funktionen sind dies in der Regel Differential- oder Differenzgleichungen, im vorliegenden Falle aber die divergenzbehafteten und hierarchisch verkoppelten DS-Integralgleichungen) zu bestimmen. Hierfür ist die OPE (2.1) leider nicht der geeignete Ausgangspunkt, da sie nur eine asymptotische Entwicklung um  $k^2 = \infty$  darstellt. In dynamischen Gleichungen, die immer Schleifenintegrale über den *gesamten* Impulsbereich bis hin zu  $k^2 = 0$  enthalten, kann sie daher nicht verwendet werden. Dies ist der Grund dafür, daß die OPE zwar eine tiefliegende *strukturelle* Aussage, aber keine Basis einer dynamischen Theorie darstellt. Sie ist nicht in der Lage, die in ihr auftretenden Vakuumkondensate theoretisch zu bestimmen.

Die Entwicklung (2.3) zeigt aber, daß die Vertexfunktionen über eine  $\Lambda$ -Abhängigkeit verfügen. Diese ist nicht-störungstheoretischer Natur, da sie in der Entwicklung um  $g^2$ , wegen der Nichtanalytizität von (2.2), nicht erfaßt werden kann (siehe auch Kapitel 1). Um die  $\Lambda$ -Abhängigkeit rekonstruieren zu können, sucht man Ansätze für die Vertexfunktionen, die eine *Vorsummation in  $r$ -Richtung* realisieren und daher als analytische

<sup>1</sup>Der Begriff der Resurgenz wurde durch den französischen Mathematiker J. Ecalle geprägt und bezeichnet Funktionen, deren Verhalten sich in der Nähe von Singularitäten in der komplexen Ebene stets wiederholt.

Fortsetzung der Wilson-Approximation (OPE) hin zu kleinen Impulsen  $k$  verstanden werden können. Dieses rein mathematische Problem wird beispielsweise gelöst, wenn man die Vertexfunktionen als rationale Funktionen in ihren Impulsen ansetzt. Diese leisten wegen ihrer Analytizität die Fortsetzung zu kleinen Impulsen und können daher in Schleifenintegralen verwendet werden.

## 2.2 Definition der systematisch erweiterten Störungstheorie

In Anlehnung an die OPE wird an dieser Stelle die systematisch erweiterte Störungstheorie eingeführt:

$\Lambda^2$  und  $g^2$  werden als formal unabhängige Parameter betrachtet, so daß die Vertexfunktionen als Doppelsequenz in diesen Parametern angesetzt werden:

$$\Gamma_N(\{k\}, g(\nu), \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}, g(\nu), \nu)$$

Mit:

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}, g(\nu), \nu) = \Gamma_N^{[r,0]}(\{k\}, \Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{(r,p')}(\{k\}, \Lambda, \nu) \quad (2.4)$$

Die auf dieser Doppelentwicklung basierende Theorie wird hier als systematisch erweiterte Störungstheorie bezeichnet.

Die Annahme,  $\Lambda$  und  $g$  seien formal unabhängig voneinander behandelbar und auch die Vertexfunktionen seien von daher in einer Doppelsequenz (nach dem Vorbild der OPE) unabhängiger Entwicklungsparameter darstellbar, hat sicherlich axiomatischen Charakter, so daß (2.4) als Definitionsgleichung der systematisch erweiterten Störungstheorie bezeichnet werden kann. Dieses zeigt, daß sich die systematisch erweiterte Störungstheorie von der bekannten Störungstheorie abgrenzt. Die systematisch erweiterte Störungstheorie ist kein erweiterter perturbativer Lösungsansatz, sondern ein Versuch, die Vertexfunktionen auch im Niedrigenergiebereich durch eine semikonvergente Doppelfolge zu approximieren. Um zu verhindern, daß man an dieser Stelle in eine unphysikalische Theorie "abrutscht", wird folgendes asymptotisches Verhalten der Vertexfunktionen gefordert:

1. Die Forderung nach *perturbativer* Asymptotik:

Die nicht-perturbativ erweiterten Vertexfunktionen sollen in jeder Ordnung  $p$  in ihren perturbativen Partner übergehen, sobald die Massenskala abgeschaltet wird ( $\Lambda = 0$ ):

$$\Gamma^{(r,p)}(\Lambda = 0) = \Gamma^{(p)pert} \quad (2.5)$$

2. Die Forderung nach *naiver* asymptotischer Freiheit:

Die nicht-perturbativ erweiterten Ansätze der Vertexfunktionen mit  $p = 0$  sollen beim Hochskalieren aller äußeren Impulse in ihre perturbativen nackten Gegenstücke übergehen:

$$\Gamma^{[r,0]}(\lambda\{k\}) \rightarrow \Gamma^{(0)pert}(\lambda\{k\}) \text{ für } \lambda \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

Diese Randbedingungen sichern den Übergang zur Störungstheorie für hohe Energien und im Wesentlichen die Erhaltung der perturbativen Renormierbarkeit. Die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit ist genau genommen noch etwas strenger als (2.6) und besagt, daß die neu eingeführten Vertexfunktionen den Divergenzgrad von Schleifenintegralen nicht erhöhen dürfen. Der Divergenzgrad eines Schleifenintegrals sollte, wie in der reinen Störungstheorie, durch einfaches Abzählen der führenden Impulspotenzen (engl. power-counting) ermittelbar sein. Diese Forderungen legen die allgemeine Form der Vertexfunktionen nahe: Die Menge möglicher Vertexansätze, die die Randbedingungen (2.5) und (2.6) und das Power-Counting respektieren und darüber hinaus die Vorsummation in  $r$ -Richtung leisten, beschränkt sich auf die rationalen Funktionen in  $\Lambda$  und  $k$ . Spektraldarstellungen [Sti 90] legen nahe, bei Vertexfunktionen mit mehreren Impulsvariablen eine Nennerstruktur zu wählen, die bezüglich ihrer unterschiedlichen Impulse faktorisiert. Bei Farb-geladenen Vertices ist zu beachten, daß die Farbstruktur aufgrund der globalen Eichinvarianz bereits vollständig festgelegt ist. Nach Abspalten der Farbstruktur (hier mit  $\tilde{T}_a$  bezeichnet) wird folgende Vertexapproximation der nullten perturbativen Ordnung vorgeschlagen:

$$\Gamma_{Na}^{[r,0]\mu}(k_1, k_2, \dots) = \tilde{T}_a \Gamma_N^{[r,0]\mu}(k_1, k_2, \dots) \quad (2.7)$$

mit

$$\Gamma_N^{[r,0]\mu}(k_1, k_2, \dots, \Lambda) = \frac{P^{[r]\mu}(k_1, k_2, \dots, \Lambda)}{\prod_{s=1}^r (k_1^2 + u_s \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (k_2^2 + v_s \Lambda^2) \dots} \quad (2.8)$$

Dabei steht  $\mu$  für die Lorentz-Indexstruktur und  $P^{[r]\mu}(k_1, \dots)$  bezeichnet ein Polynom vom Grade  $r$  in  $k_1^2, \dots$ , welches den Anforderungen der Lorentz-Struktur des Vertex genügt. In [Sti 96] wird argumentiert, daß für die QCD der Grad der rationalen Approximanten  $r$  stets ungerade sein sollte. Die rationalen Approximanten der Propagatoren mit ungeradem Approximationsgrad  $r$  besitzen die Eigenschaft, Teilchen zu beschreiben, die nicht asymptotisch frei detektierbar sind. Dieses liegt darin begründet, daß für ungerade  $r$  die Parameter so gewählt werden können, daß keine Polstellen für reelle zeitartige Impusquadrate auftreten, sondern nur komplexe Propagatorpole in konjugierten Paaren, die intrinsisch kurzlebige Elementaranregungen beschreiben können. Die vorgeschlagenen Approximanten mit ungeradem  $r$  genügen demnach der Forderung nach Confinement. Diese nicht-perturbativ erweiterten rationalen Vertexapproximanten, in nullter perturbativer Ordnung ( $p=0$ ,  $r$  beliebig ungerade), bilden im Sinne der Doppelsequenz-Entwicklung (2.4) die "neuen Feynman-Regeln" der systematisch erweiterten Störungstheorie.

## 2.3 Ansätze für die Vertexfunktionen in beliebiger Eichung

Im Rahmen dieser Arbeit werden der Fermion-Propagator, der Gluon-Propagator, der Quark-Photon-Vertex und der Quark-Gluon-Vertex benötigt und in diesem Kapitel explizit angegeben. Dabei wird die folgende Notation verwendet:  $\Gamma_N^{[r,p]}$  bezeichnet die rationale Approximante von  $\Gamma_N$  in  $p$ -ter Ordnung der Kopplung und  $r$ -ter Ordnung der rationalen Approximation der  $\Lambda$ -Abhängigkeit. Spätere Berechnungen der Schleifenintegrale finden in dieser Arbeit erstmalig, gleichzeitig mit [Ewe 00], in beliebiger Eichung statt, so daß der Longitudinalanteil des Quark-Gluon-Vertex neu eingeführt werden muß. Er wird seiner longitudinal-projizierten Slavnov-Taylor-Identität angepaßt. Alle angegebenen Approximanten müssen die beiden Forderungen (2.5) und (2.6) erfüllen.

### 2.3.1 Der Fermion-Propagator

Der Fermion-Propagator mit Flavourindex  $f$  trägt nur triviale Farbstruktur und kann daher, analog zu (2.8), sofort angegeben werden:

$$S_{(f)}^{[r,0]}(\not{p}) = \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} + \kappa_{r,s+}^{(f)}) (\not{p} + \kappa_{r,s-}^{(f)})} . \quad (2.9)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Forderung nach naiver Asymptotik und für die entsprechende Vertexfunktion  $S_{(f)}^{[r,0]}(\not{p}) = -\left(\Gamma_{F\bar{F}(f)}^{[r,0]}(\not{p})\right)^{-1}$  gilt:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{F\bar{F}(f)}^{[r,0]}(\not{p}) &= \not{p} + \kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})} \\ &= \not{p} \left( 1 - \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(p^2 + (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2)} \right) + \mathbb{I} \left( \kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{\kappa_{r,2s}^{(f)} (\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(p^2 + (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2)} \right) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dabei gelten für jeden ungeraden Approximationsgrad  $r = 1, 3, \dots$  folgende Beziehungen zwischen den komplex-konjugierten Größen:  $\kappa_{r,2s+2}^{(f)} = \kappa_{r,2s}^{(f)*}$  und  $\kappa_{r,2s+3}^{(f)} = \kappa_{r,2s+1}^{(f)*}$ , sowie  $\kappa_{r,s+}^{(f)} = \kappa_{r,s-}^{(f)*}$ . Hierbei wird mit  $2s$  immer der gerade Index  $2s = 2, 4, 6, \dots, r-1$  bezeichnet. Die Abhängigkeit vom Flavour-Index  $f$  wird im folgenden nicht mehr explizit mitgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Fermionen als masselos betrachtet<sup>2</sup>, ihre Pole werden direkt proportional zur Massenskala  $\Lambda$  gesetzt:

$$\kappa_{r,1} = w_{r,1} \Lambda \quad (2.11)$$

---

<sup>2</sup>In einer massiven Theorie werden die Parameter zusätzlich noch proportional zur Strommasse  $\hat{m}$  gesetzt:  $\kappa = w\Lambda + v\hat{m}$ . Eine selbstkonsistente Behandlung dieser Konstruktion ist bisher nicht gelungen [Kuh 97], da gerade bei sehr massiven Quarks (z.B. Top-Quark) die Strommassen nicht mehr vernachlässigbar klein sind, und daher die Ausbildung eines Faktors  $\Lambda^{-2\epsilon}$  versagt; dieser Faktor ist allerdings essentiell für den  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus (siehe dazu Kapitel 2.4.2).

$$\kappa_{r,2s} = w_{r,2s}\Lambda \quad (2.12)$$

$$\kappa_{r,2s+1}^2 = w_{r,2s+1}\Lambda^2 \quad (2.13)$$

Die Residuen der Vertexfunktionen können durch die Pole des Propagators ausgedrückt werden:

$$w_{r,2t+1} = \frac{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (w_{r,s+} - w_{r,2t}) (w_{r,s-} - w_{r,2t})}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})}, \quad t = 1, \dots, r \quad (2.14)$$

Zudem wird häufig die Beziehung

$$\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} = \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \quad (2.15)$$

verwendet, um die komplexen Skalen  $\kappa_{r,s+}$ ,  $\kappa_{r,s-}$  auf die reellen Skalen  $\kappa_{r,2s}$  umzurechnen. Sie kann aus dem Vietaschen Wurzelsatz gewonnen werden.

### 2.3.2 Der Gluon-Propagator

Der Gluon-Propagator lautet in beliebiger Eichung:

$$D^{[r,0]\mu\nu}(q) = t^{\mu\nu}(q)D_T^{[r,0]}(q^2) + l^{\mu\nu}(q)D_L^{[r,0]}(q^2) \quad (2.16)$$

mit dem Transversalprojektor

$$t^{\mu\nu}(q) = \delta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} = \delta^{\mu\nu} - l^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Nach heutigem Kenntnisstand wird der Longitudinalanteil aufgrund seiner Slavnov-Taylor-Identität (STI) auf den störungstheoretischen Beitrag eingeschränkt:

$$D_L^{[r,0]}(q^2) = \frac{\alpha}{q^2}, \quad (2.18)$$

wobei  $\alpha$  den gluonischen Eichfixierungsparameter bezeichnet. Dagegen wird der Transversalanteil durch keine Identität eingeschränkt. Der allgemeine Ansatz als rationale Approximation lautet:

$$D_T^{[r,0]}(q^2) = \frac{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(q^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \quad (2.19)$$

und sein negativ-Inverses:

$$-\Gamma_T^{[r,0]}(q^2) = q^2 + u_{r,1}\Lambda^2 + \sum_{s=1}^r \frac{u_{r,2s+1}(\Lambda^2)^2}{(q^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}. \quad (2.20)$$



Wieder ist  $r$  ungerade und  $u_{r,1}, u_{r,2}, u_{r,3}$  reellwertig, sowie  $u_{r,2s+2} = u_{r,2s}^*$  bzw.  $u_{r,2s+3} = u_{r,2s+1}^*$  wobei  $s = 2, 4, 6, \dots, r-1$  und  $u_{r,s+} = u_{r,s-}$ . Zwischen den komplex-konjugierten Polen und den Residuen der Vertexapproximanten besteht der Zusammenhang:

$$u_{r,2t+1} = \frac{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (u_{r,s+} - u_{r,2t})(u_{r,s-} - u_{r,2t})}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \quad (t = 1, \dots, r) \quad (2.21)$$

Außerdem gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz:

$$u_{r,1} + \sum_{s=1}^r u_{r,2s} = \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (u_{r,s+} + u_{r,s-}) \quad (2.22)$$

### 2.3.3 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Die Farbstruktur des Fermion-Gluon-Vertex kann aufgrund der globalen Eichinvarianz absepariert werden:

$$\Gamma_{F\bar{F}V_a}^{[r,0]ij\nu}(-p_1, p_2, q) = \left(\frac{1}{2}\lambda_a\right)^{ij} \Gamma_{F\bar{F}V}^{[r,0]\nu}(-p_1, p_2, q) \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{F\bar{F}V}^{[r,0]\nu}(-p_1, p_2, q) = t^{\nu\sigma}(q) \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\sigma}(-p_1, p_2, q) + l^{\nu\sigma}(q) \Gamma_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\sigma}(-p_1, p_2, q) \quad (2.24)$$

Die allgemeinste Struktur des transversal-projizierten Vertex beinhaltet acht matrixwertige Vektoren [BC 80]. Die Approximante in beliebiger rationaler Stufe  $r$  lautet:

$$\Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\sigma}(-p_1, p_2, q) = \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \not{\kappa}'_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r]\sigma}(\not{p}_1, \not{p}_2, q^2)}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s}' \Lambda^2)} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \not{\kappa}'_{r,2s})} \quad (2.25)$$

mit

$$N_{F\bar{F}V_T}^{[r]\sigma}(\not{p}_1, \not{p}_2, q^2) = \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+2m+n+l, 4r} (q^2)^m (\not{p}_1)^n \left( C_{\lambda m n l}^{[r]} \gamma^\sigma + D_{\lambda m n l}^{[r]} \frac{r^\sigma}{2\Lambda} \right) (\not{p}_2)^l \quad (2.26)$$

wobei  $r^\sigma = (p_1 + p_2)^\sigma$ .

Die Reihenfolge der Dirac-Matrizen ist zu beachten. Die Forderung nach perturbativer Asymptotik (2.5) führt auf

$$D_{\lambda m n l}^{[r]} = 0 \text{ für } \lambda = 0, 1 \quad (2.27)$$

und

$$C_{\lambda m n l}^{[r]} = 1 \text{ für } \lambda = 0, m = n = l = r. \quad (2.28)$$

Aus der Ladungskonjugationssymmetrie (siehe dazu [Kuh 97]) folgen die Beziehungen

$$C_{\lambda mnl}^{[r]} = C_{\lambda mln}^{[r]} \text{ und } D_{\lambda mnl}^{[r]} = D_{\lambda mln}^{[r]}. \quad (2.29)$$

Die Parameterzahl wird durch die Randbedingungen stark reduziert. Zusätzlich kann im Rahmen der Behandlung der kompensierenden Pole gezeigt werden, daß die Lorentz-Struktur proportional zu  $D_{\lambda mnl}^{[r]}$  verschwindet (siehe Kapitel 2.4.4).

Es folgt die Konstruktion des longitudinal-projizierten Quark-Antiquark-Gluon-Vertex (kurz: Quark-Gluon-Vertex). Als Vorbild dient seine Slavnov-Taylor-Identität [Sla 72, ST 71], die eine exakte Beziehung zwischen der Drei-Punkt-Funktion und (im Wesentlichen) der fermionischen Zwei-Punkt-Funktion herstellt. Es liegt also nahe, auf eine Modifikation des Gluon-Beines zu verzichten. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz des longitudinal-projizierten Quark-Gluon-Vertex lautet:

$$\Gamma_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\sigma}(-p_1, p_2, q) = \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa'_{r,2s})} N_{F\bar{F}V_L}^{[r]\sigma}(\not{p}_1, \not{p}_2, q^2) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa'_{r,2s})} \quad (2.30)$$

mit

$$\begin{aligned} N_{F\bar{F}V_L}^{[r]\sigma}(\not{p}_1, \not{p}_2, q^2) &= \sum_{\lambda=0}^{2r} \Lambda^\lambda \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+n+l, 2r} \\ &\quad (\not{p}_1)^n \left( \tilde{C}_{\lambda mnl}^{[r]} \gamma^\sigma + \tilde{D}_{\lambda mnl}^{[r]} \frac{r^\sigma}{2\Lambda} + \tilde{E}_{\lambda nl}^{[r]} \frac{q^\sigma}{2\Lambda} \right) (\not{p}_2)^l \end{aligned} \quad (2.31)$$

wobei  $r^\sigma = (p_1 + p_2)^\sigma$ . Der Grenzübergang  $\Lambda \rightarrow 0$  (perturbative Limes) erfordert

$$\tilde{C}_{0rr}^{[r]} = 1, \quad (2.32)$$

$$\tilde{D}_{0rr}^{[r]} = \tilde{D}_{1nl}^{[r]} = 0, \quad (2.33)$$

$$\tilde{E}_{0rr}^{[r]} = \tilde{E}_{1nl}^{[r]} = 0. \quad (2.34)$$

Die Ladungskonjugationssymmetrie reduziert ebenfalls die Anzahl der freien Parameter:

$$\tilde{C}_{\lambda nl}^{[r]} = \tilde{C}_{\lambda ln}^{[r]}, \quad \tilde{D}_{\lambda nl}^{[r]} = \tilde{D}_{\lambda ln}^{[r]}, \quad \tilde{E}_{\lambda nl}^{[r]} = \tilde{E}_{\lambda ln}^{[r]}. \quad (2.35)$$

Analog zum transversal-projizierten Quark-Gluon-Vertex kann in Kapitel 2.4.4 gezeigt werden, daß mit der Einführung der kompensierenden Pole die Lorentz-Strukturen proportional zu  $\tilde{D}_{\lambda nl}^{[r]}$  und  $\tilde{E}_{\lambda nl}^{[r]}$  den Divergenzgrad in Schleifenintegralen so stark erhöhen können, daß sie nach Kapitel 2.2 verschwinden müssen.

Abschließend wird die rationale Approximante des Quark-Antiquark-Photon-Vertex angegeben.

### 2.3.4 Der Fermion-Photon-Vertex

Die allgemeinste Lorentz-Struktur wird analog zum Quark-Gluon-Vertex durch zwölf matrixwertige Vektoren gebildet. Ein Vergleich mit der Ward-Takahashi-Identität [Ryd 97]

legt nahe, wie beim longitudinalen Quark-Gluon-Vertex lediglich eine faktorisierende Nennerstruktur bezüglich der fermionischen Beine anzusetzen:

$$\Gamma_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu}(-p_1, p_2, q) = (t^{\nu\sigma}(q) + l^{\nu\sigma}(q)) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa''_{r,2s})} N_{F\bar{F}A}^{[r]\sigma}(\not{p}_1, \not{p}_2, q^2) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa''_{r,2s})} \quad (2.36)$$

mit:

$$N_{F\bar{F}A}^{[r]\sigma}(\not{p}_1, \not{p}_2, q^2) = \sum_{\eta=0}^{2r} \Lambda^\eta \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \delta_{\eta+i+j, 2r} (\not{p}_1)^i \left( F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^\sigma + G_{\eta ij}^{[r]} \frac{r^\sigma}{2\Lambda} + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{q^\sigma}{\Lambda} \right) (\not{p}_2)^j \quad (2.37)$$

wobei  $r^\sigma = (p_1 + p_2)^\sigma$ . In der Abwesenheit nicht-perturbativer Struktur bezüglich  $q^2$  spiegelt sich die Tatsache wider, daß das Photon in nullter Ordnung in der elektromagnetischen Kopplung  $e_f$  nicht an der starken Wechselwirkung teilnimmt. Die Forderung der Reproduzierbarkeit der Störungstheoretischen Vertexfunktion in jeder Stufe der rationalen Approximation bewirkt

$$F_{0rr}^{[r]} = 1, \quad (2.38)$$

$$G_{0ij}^{[r]} = G_{1ij}^{[r]} = 0, \quad (2.39)$$

$$H_{0ij}^{[r]} = H_{1ij}^{[r]} = 0 \quad (2.40)$$

und die Ladungskonjugationssymmetrie verlangt

$$F_{\eta ij}^{[r]} = F_{\eta ji}^{[r]}, \quad G_{\eta ij}^{[r]} = G_{\eta ji}^{[r]}, \quad H_{\eta ij}^{[r]} = H_{\eta ji}^{[r]}. \quad (2.41)$$

Da die Ansätze den störungstheoretischen Divergenzgrad nicht erhöhen dürfen (siehe Kapitel 2.2), werden weitere Restriktionen an die Vertexapproximante gestellt, die in Kapitel 2.4.4 nach Einführung der kompensierenden Pole angegeben werden.

Damit sind sämtliche rationalen Approximanten dieser Arbeit konstruiert. Für die übrigen Ansätze der Basisvertices wird auf [Sti 96] und [Kuh 97] verwiesen. Im folgenden wird die Systematik der erweiterten Störungstheorie erläutert.

## 2.4 Die Systematik der erweiterten Störungstheorie

### 2.4.1 Formulierung des Selbstkonsistenzproblems

Für konkrete Berechnungen physikalischer Größen im Rahmen der erweiterten Störungstheorie ist es notwendig, daß die neu eingeführten Vertexparameter  $u_{r,2s}$ ,  $w_{r,2s}$ , ... aus Kapitel 2.3 bekannt sind. Ihre Bestimmung ist Gegenstand aktueller Rechnungen<sup>3</sup>. Allen

<sup>3</sup>Tatsächlich ist in [Voi 99] erstmalig im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie eine physikalische Größe, nämlich die  $\rho$ -Mesonenmasse, berechnet worden; allerdings nur in Verbindung mit der SVZ-Entwicklung [SVZ 79].

bisher angewendeten Bestimmungsverfahren liegen dynamische Gleichungen der QCD-Eichtheorie zugrunde, aus denen man durch ein noch zu erläuternden “Filtermechanismus” Gleichungssysteme für die Vertexparameter gewinnen kann. Diese Gleichungssysteme (sog. *Selbstkonsistenz-Gleichungen*) sind allerdings nur sehr schwer lösbar, da sie zum einen über viele Variablen verfügen und zum anderen in der Regel stark nicht-linear sind. In dieser Arbeit wird das Selbstkonsistenz-Problem im Rahmen der DS-Gleichungen behandelt. Der erste Iterationsschritt einer Dyson-Schwinger-Gleichung (1.5) mit Funktional  $\Phi$  lautet (vergleiche Kapitel 1.1):

$$\left\{ \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_N[\Gamma^{[r,0]}] \right\}_{R,\nu} = \Gamma_N^{[r,0]} - \Gamma_N^{(0)pert} + \mathcal{O}(g^2(\nu); e(r+1)) \quad (2.42)$$

Dabei bezeichnet  $e(r+1)$  den Fehler, der sich durch die endliche, globale Approximation in  $r$  ergibt und  $\mathcal{O}(g(\nu))$  bezeichnet den Approximationsfehler der perturbativen Entwicklung. Der nicht-perturbative Fehler kann nicht durch einen “kleinen” Parameter [Sti 96] abgeschätzt werden, so daß (2.42) nur an endlich vielen Stellen im Impulsraum erfüllt sein kann. Diese Impuls-Stützdaten sind prinzipiell frei wählbar, werden aber mit Einführen “kompensierender Pole” in [Kuh 97, Dri 97] auf die Polstellen und Residuen der Vertexapproximanten gesetzt. Hierdurch sind die Stützdaten durch die Approximanten festgelegt. Die Bestimmung der Vertexparameter erfolgt im Rahmen dieser Arbeit über (2.42). Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn der Vorfaktor vor dem Dyson-Schwinger-Funktional kompensiert wird. Die linke Seite von (2.42) muß demnach auch kopplungsunabhängige Terme (Terme der Ordnung  $g^0$ ) erzeugen können. Da die Dyson-Schwinger-Funktionale durch Schleifenintegrale definiert sind, übertragen sich diese Anforderungen ganz allgemein auf Schleifenintegrale:

Die Erfüllung dynamischer Gleichungen und damit die selbstkonsistente Bestimmung der Vertexparameter mittels dieser Gleichungen ist nur möglich, wenn Schleifenintegrale, mit rationalen Approximanten als Input, einen Faktor  $\frac{1}{g^2}$  produzieren können. Darüber hinaus muß die resultierende kopplungsunabhängige Größe endlich sein, damit sie mit  $\Gamma_N^{[r,0]}$  vergleichbar ist.

Da diese Forderung an die Schleifenintegrale gebunden ist, hat diese Problemstellung fundamentalen Charakter für die Etablierung der systematisch erweiterten Störungstheorie. Diese Problematik wird im folgenden Abschnitt aufgegriffen.

#### 2.4.2 Der $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus

Es existiert ein Mechanismus, der das “Aufessen” [Sti 96] des  $g^2$ -Faktors bewirkt. Es wird gezeigt, daß die divergenten Anteile eines Schleifenintegrals mit *nicht-perturbativem* Charakter zusammen mit dem Vorfaktor  $\left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2$  aus (2.42) eine kopplungsunabhängige und sogar divergenzfreie Größe ausbilden. Dieser sog.  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus ist eine eigenständige Konsequenz der systematisch erweiterten Störungstheorie. In Anhang D wird gezeigt, daß divergente Anteile von Schleifenintegralen über die rationalen Approximanten neben der

Divergenz  $\frac{1}{\varepsilon}$  zusätzlich eine gebrochene Potenz  $\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\varepsilon}$  produzieren. Dies hat zur Folge, daß sie auf dem Ein-Schleifen-Niveau<sup>4</sup> die Größe

$$\Pi(\varepsilon) = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\varepsilon} \quad (2.43)$$

ausbilden. Im folgenden wird gezeigt, daß diese Größe im Renormierungsprozeß nach Fallenlassen der Regularisierung ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) exakt kopplungsunabhängig und endlich ist. Nach einfachen Umformungen erhält man aus (1.21)

$$\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\varepsilon} = \frac{\alpha_1}{\alpha(\nu)} \exp \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha(\nu)} \frac{d\alpha'}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'} \right\} \quad (2.44)$$

und schließlich mit der Integraldarstellung der Renormierungskonstanten (1.15):

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\varepsilon} \exp \left\{ \int_{\alpha_1}^0 \frac{d\alpha'}{4\pi\varepsilon f(\alpha') + \alpha'} \right\}. \quad (2.45)$$

Dieser Darstellung kann man direkt die Unabhängigkeit von der Kopplung entnehmen, das heißt, daß die Schleifenintegrale den Vorfaktor in (2.42) kompensieren. Daß  $\Pi(\varepsilon)$  darüber hinaus eine endliche Größe ist, entnimmt man nach Abspalten des in  $\varepsilon = 0$  regulären Anteils der Darstellung:

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\varepsilon} \frac{\frac{1}{\beta_0} 4\pi\varepsilon}{\frac{1}{\beta_0} 4\pi\varepsilon + \alpha_1} \exp \left\{ -\varepsilon \int_0^{\alpha_1} d\alpha' \rho_{\alpha'}(\alpha', \varepsilon) \right\} \quad (2.46)$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhält man mit  $\rho_\alpha(0, \varepsilon) = 0$ :

$$\Pi(\varepsilon \rightarrow 0) = \frac{1}{\beta_0} \quad (2.47)$$

Dadurch, daß der  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus Terme der Ordnung  $g^0$  entwickelt, wird die störungstheoretische Gleichheit von Schleifenordnung und Ordnung bezüglich der  $g^2$ -Entwicklung aufgehoben. Es können also prinzipiell Graphen mit beliebig hoher Schleifenzahl die nullte störungstheoretische Ordnung modifizieren.

Da als Randbedingung die Reproduzierbarkeit der perturbativen Vertexfunktionen gefordert wird, kann die Anwendung des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus nicht auf jede beliebige Divergenz eines Schleifenintegrals erfolgen. Die Divergenzen müssen je nach Anwendbarkeit des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus klassifiziert werden. Eine einfache Einteilung der Divergenzen in zwei Klassen kann auf folgende Weise geschehen [Dri 97, Voi 99]:

---

<sup>4</sup>Die Berechnungen der vorliegenden Arbeit beschränken sich auf das Ein-Schleifen-Niveau.

Divergenzen mit rein *nicht-perturbativem* Charakter sind dadurch gekennzeichnet, daß sie eine positive Potenz von  $\Lambda$  als Faktor mitführen und daher im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  verschwinden. Nach Anwendung des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus sind diese Divergenzen im Rahmen der zugrunde liegenden dynamischen Gleichung selbstkonsistent behandelbar.

Divergenzen mit rein *perturbativem* Charakter sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  nicht verschwinden. Auf diese Divergenzen kann der  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus nicht angewendet werden; diese Divergenzen sind mit den rein störungstheoretischen Divergenzen zu vergleichen, wodurch eventuell weitere Bedingungen an die Vertexparameter entstehen.

Damit ist der in Kapitel 2.4.1 erwähnte Mechanismus zum “Herausfiltern” der Selbstkonsistenz-Gleichungen (SK-Gleichungen) dargestellt: Die Vertexparameter der nicht-perturbativen Divergenzen mit gleicher Potenz in  $\Lambda$  bilden nach Anwendung des  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus die SK-Gleichungen. Für das Auswerten der SK-Gleichungen ist die Endlichkeit von  $\Pi(\varepsilon)$  von Bedeutung, da anderenfalls unendliche Größen mit einer endlichen verglichen würden. Damit ist auch verständlich, daß eine selbstkonsistente Bestimmung der neu eingeführten Vertexparameter nur dann möglich ist, wenn die Schleifenintegrale nicht-perturbative Divergenzen erzeugen. Dieses können nur die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen der betrachteten Theorie, so daß sich die selbstkonsistenten Betrachtungen auf einen endlichen Satz, zumindest in einer renormierbaren Theorie, von SK-Gleichungen beschränken. In diesem Sinne wird durch die Forderung nach Selbstkonsistenz (Kapitel 2.4.1) ein endlicher Satz von SK-Gleichungen aus dem an sich unendlichen DS-Gleichungssystem ausgekoppelt, ohne daß dazu die üblichen “Entkopplungsnaherungen” notwendig wären.

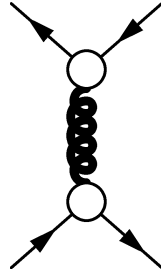
### 2.4.3 Die Systematik der kompensierenden Pole in beliebiger Eichung

Beim Aufstellen von dynamischen Gleichungen mit den erweiterten Feynman-Regeln stößt man auf ein Problem, das bereits von Jackiw und Johnson sowie Cornwall und Norton [JJ 73] erwähnt wurde. Auf internen Linien dynamischer Gleichungen propagieren scheinbar mehr Teilchen als in der physikalischen Realität. Während bei Propagator-DS-Gleichungen diese überflüssigen Teilchenpole herausgekürzt werden können, ist in den höheren DS-Gleichungen ein komplizierterer Mechanismus wirksam, der die Kompensation der unphysikalischen Pole bewirkt. Seine Systematik und Wirkungsweise wird an dieser Stelle [Sti 97] und [Kuh 97] folgend vorgestellt. Es wird gezeigt, daß der Mechanismus auch außerhalb der Landau-Eichung auf den transversalen Anteil beschränkt bleibt<sup>5</sup>. Der Gluon-Austausch zwischen zwei Quarks als Teil der  $T_{F\bar{F}F\bar{F}}$ -Amplitude (siehe Anhang A) dient als Beispiel für die Erläuterung der Systematik kompensierender Pole in beliebiger Eichung (die gra-

---

<sup>5</sup>In [Sti 97] ist gezeigt, daß der Mechanismus in Landau-Eichung im transversalen Sektor vollständige Kompensation gewährleistet.

phische Darstellung der Vertices und Propagatoren wird in Anhang A eingeführt):



$$= t^{\mu\nu}(k) \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]} D_T^{[r,0]} \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]} + l^{\mu\nu}(k) \Gamma_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]} D_L^{[r,0]} \Gamma_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]} \quad (2.48)$$

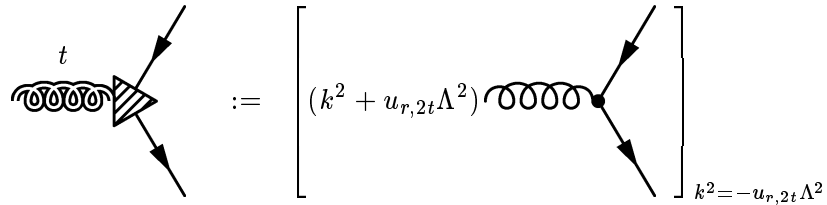
Die folgenden Betrachtungen beziehen sich zunächst auf den transversal-projizierten, anschließend auf den longitudinal-projizierten Austauschgraphen. Grundlage des Mechanismus bilden Beziehungen zwischen den Residuen der Propagator- und Vertex-DS-Gleichungen: die Residuen der  $T'$ -Amplituden sind durch die Residuen der Propagator-DS-Gleichungen bestimmt. Um dieses zu zeigen, werden zunächst die Residuen der DS-Gleichung für den *Quark-Gluon-Vertex* berechnet. In partialbruchzerlegter Form lautet dieser:

$$\Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]}(-p_1, p_2, k) = \sum_{t=1}^r \frac{R_t^{[r]}(p_1, p_2)}{k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} + R_0^{[r]}(p_1, p_2) + [\text{Terme in } (k^2)^1, (k^2)^2, \dots, (k^2)^r] \quad (2.49)$$

Das Residuum bezüglich des Gluonimpulses kann an (2.49) abgelesen werden:

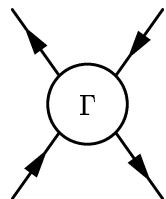
$$\text{Res } \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]}(-p_1, p_2, k) \Big|_{k^2 = -u_{r,2t}\Lambda^2} = R_t^{[r]}, \quad (t = 1, \dots, r) \quad (2.50)$$

Da das Residuum in den folgenden Diagrammberechnungen (Kapitel 4) häufig Verwendung findet, wird ein neues Diagramm (für das Residuum) eingeführt:



$$:= \left[ (k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2) \text{ (diagram of gluon loop with quark line) } \right]_{k^2 = -u_{r,2t}\Lambda^2}$$

Für den angestrebten Residuenvergleich wird schließlich noch das Residuum der rechten Seite der DS-Gleichung (Anhang B, B.27) benötigt. Der Einfachheit halber wird nur die Quark-Schleife betrachtet<sup>6</sup>. Hilfreich ist an dieser Stelle ein allgemeines Theorem über Korrelationsfunktionen, dem zufolge die  $T'_{F\bar{F}F\bar{F}}$ -Amplitude über einem Mandelstam-Pol faktorisiert werden kann [ZIM 60]. Da gerade  $k^2 = s_E$  die euklidische Mandelstam-Variable im horizontalen Kanal der  $T'$ -Amplitude ist, kann man schreiben:



$$= \frac{\Psi_t^T(-q_1, q_2) \Psi_t(-p_1, p_2)}{[s_E + u_{r,2t}\Lambda^2]} + [\text{in } k^2 \text{ reguläre Terme}] \quad (2.51)$$

<sup>6</sup>DS-Gleichungen sind von Natur aus hierarchisch strukturiert, so daß die folgenden Rechnungen auf die übrigen Diagrammteile verallgemeinert werden können.

Durch Residuenvergleich von (2.50) und (2.51) erhält man folgende Proportionalitäten:

$$\Psi_t^T(-q_1, q_2) = M_t^T R_t^{[r]}(-q_1, q_2) \quad (2.52)$$

$$\Psi_t(-p_1, p_2) = M_t R_t^{[r]}(-p_1, p_2) . \quad (2.53)$$

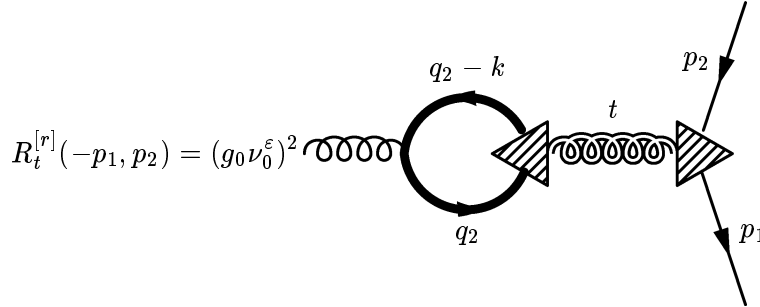
Dabei sind mit  $M_t$  ( $t = 1, \dots, r$ ) die (evtl. matrixwertigen) Proportionalitätskonstanten bezeichnet, die im Folgenden zu bestimmen sind. Mit (2.52, 2.53) folgt für die Zerlegung der Amplitude (2.51):

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A circle labeled } \Gamma \text{ with four external lines (two incoming, two outgoing).} \end{array} = \frac{R_t^{[r]}(-q_1, q_2) M_t^T M_t R_t^{[r]}(-p_1, p_2)}{[s_E + u_{r,2t} \Lambda^2]} + [\text{in } k^2 \text{ reguläre Terme}] . \quad (2.54)$$

Setzt man (2.54) in den Teil der DS-Gleichung ein, der die entsprechende Amplitude enthält, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_t^{[r]}(-p_1, p_2) &= \left\{ (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} S^{[r,0]}(\not{q}_2) \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)pert} S^{[r,0]}(\not{q}_2 - \not{k}) R_t^{[r]}(k - q_2, q_2) \right\} \\ &\quad M_t^T M_t R_t^{[r]}(-p_1, p_2) . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Der graphischen Notation dieser Gleichung



entnimmt man, daß der Term in den Klammern von (2.55) bereits durch die Selbstkonsistenzbedingung für den inversen Gluon-Propagator<sup>7</sup> festgelegt ist. Der Term in (2.55) ist das Residuum der Propagator-DS-Gleichung bezüglich  $k^2$ . Das entsprechende Residuum des inversen Gluon-Propagators  $-\Gamma_T^{[r,0]}$  kann berechnet werden:

$$\text{Res } \Gamma_T^{[r,0]}(k^2) = -u_{r,2t+1} \Lambda^4, \quad (t = 1, \dots, r) . \quad (2.56)$$

Dem zufolge sind die Proportionalitätskonstanten durch die DS-Gleichung der nächst niedrigeren Ordnung festgelegt:

$$M_t^T M_t = (-u_{r,2t+1} \Lambda^4)^{-1} \quad (t = 1, \dots, r) \quad (2.57)$$

<sup>7</sup> Auch hier wird nur die Quark-Schleife betrachtet. Ihr Beitrag zu  $D_T^{-1} = -\Gamma_T$  erhält das übliche Minuszeichen, so daß die geschweifte Klammer in (2.55) den Beitrag zu  $\Gamma_T$  darstellt.



Insgesamt folgt schließlich für die Amplitude (2.51):

$$\Gamma = \text{Diagram} + [\text{in } k^2 \text{ reguläre Terme}].$$

Es bietet sich an, für den sog. *Schatten-Pol* ein neues Diagramm einzuführen:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \frac{-(u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{s_E + u_{r,2t}\Lambda^2}$$

Da dieses Schattenpol-Diagramm keinen Austausch eines physikalischen Gluons beschreibt, kann es auch nicht als Teilchen-reduzibel gelten [Sti 97]. Darüber hinaus wird durch seinen reellen Pol aufgrund des negativen Residuums kein physikalischer Bindungszustand beschrieben. Es gibt also kein physikalisches Argument, welches das Auftreten dieser Schattenpole in  $T_4'$ -Amplituden verbietet [Kuh 97]. Insgesamt sind im s-Kanal  $r$  Schattenpole enthalten, so daß für die Summe aller Schattenpole ein neues Diagramm eingeführt werden kann<sup>8</sup>:

$$\text{Diagram} = \sum_{t=1}^r \text{Diagram} \frac{-(u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{s_E + u_{r,2t}\Lambda^2}$$

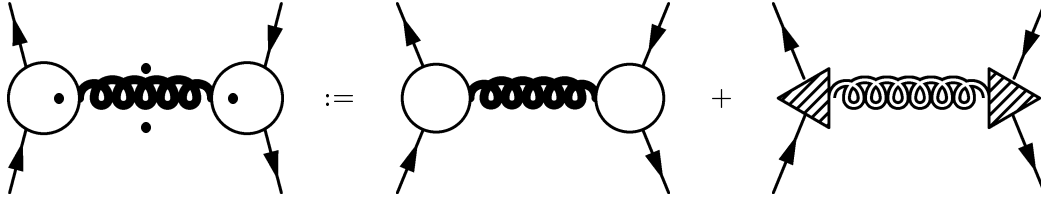
Für die Mandelstam-Variable im s-Kanal  $s_E$  wird künftig wieder die ursprüngliche Impulsvariable  $k^2$  verwendet. Die auftretenden  $r$  Schattenpole besitzen die wichtige Eigenschaft, die unphysikalischen reellen Pole  $(k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)^{-1}$  im reduzierbaren Austausch-Diagramm zu kompensieren (diese Pole treten im reduzierbaren Austausch-Diagramm mit umgekehrten, positiven Vorzeichen auf [Sti 97]):

$$= \frac{\prod_{s=1}^r (\not{q}_1 + \kappa_{r,2s})}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \frac{N_{FFVT}^{[r]\mu}(\not{q}_1, \not{q}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (\not{q}_2 + \kappa_{r,2s})} \frac{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (k^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)}$$

<sup>8</sup>An dieser Stelle wird die Konvention von [Kuh 97] der von [Sti 97] vorgezogen, in der das negative Vorzeichen im Diagramm enthalten ist. So fallen die Vorzeichenüberlegungen beim Ausmultiplizieren von Schleifendiagrammen mit Schattenlinien weg.

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{q}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r]\mu}(\not{q}_1, \not{q}_2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (u_{r,2s}\Lambda^2 - u_{r,2t}\Lambda^2)} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{q}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
& \frac{(-u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (u_{r,2s}\Lambda^2 - u_{r,2t}\Lambda^2)} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
& = \sum_{n=+,-} \sum_{t=1}^{\frac{r+1}{2}} \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\mu}(-q_1, q_2, k^2) \Big|_{k^2 = -u_{r,tn}\Lambda^2} \frac{1}{k^2 + u_{r,tn}\Lambda^2} \\
& \quad \left( (k^2 + u_{r,tn}\Lambda^2) D_T^{[r,0]}(k^2) \right) \Big|_{k^2 = -u_{r,tn}\Lambda^2} \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\mu}(-p_1, p_2, -k^2) \Big|_{k^2 = -u_{r,tn}\Lambda^2} \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt nach einer langen Rechnung, auf die hier nicht näher eingegangen wird<sup>9</sup>. Der letzten, kompakteren Form der Gleichung kann entnommen werden, daß keine Pole an den Stellen  $k^2 = -u_{r,2s}\Lambda^2$  existieren. Die Schattenpole kompensieren die unphysikalischen Pole und werden daher als *kompensierende Pole* bezeichnet. Diese kompensierenden Pole treten in gleicher Weise in den übrigen Kanälen der  $T'_{F\bar{F}F\bar{F}}$ -Amplitude auf, so daß die Einführung eines neuen, *entschärften* Ein-Teilchen-Austausch-Diagrammes für die weiteren Rechnungen vorteilhaft ist:



Betrachtet man dagegen das longitudinal-projizierte Austausch-Diagramm (2.48) und setzt direkt die eingeführten Approximanten ein,

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram} = \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{q}_1 + \kappa_{r,2s})} N_{F\bar{F}V_L}^{[r]\mu}(\not{q}_1, \not{q}_2, k^2) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{q}_2 + \kappa_{r,2s})} \frac{\alpha}{k^2} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \\
& \quad N_{F\bar{F}V_L}^{[r]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

so sieht man, daß gar keine überflüssigen Pole auftreten. Der Grund für das Fehlen der überflüssigen Pole liegt in den in dieser Arbeit als ungebrochen gültig postulierten

<sup>9</sup>Die notwendigen Schritte dieser Rechnung sind in [Kuh 97] angegeben.

Slavnov-Taylor-Identitäten, die eine rationale Approximation des longitudinalen Gluon-Propagators verbieten und darüber hinaus nahe legen, bezüglich des Gluon-Beines keine Modifikation des longitudinal projizierten Quark-Gluon-Vertex vorzunehmen. Das heißt, daß durch die STI nicht-perturbativ erweiterte Ansätze für den longitudinalen Gluon-Sektor nahe gelegt werden, in denen sich eine Kompensation der überflüssigen Pole erübrigt. Es ist zu betonen, daß in [JJ 73] das Phänomen kompensierender Pole, allerdings in einer abelschen Theorie, im longitudinalen Sektor auftaucht. Auch vom phänomenologischen Standpunkt betrachtet ist das Nichtkompensieren nicht ersichtlich. Zwar erscheint es einleuchtend, daß eine unphysikalische Linie<sup>10</sup> nicht von überflüssigen physikalischen Polen befreit werden muß, aber es ist sicherlich nicht ohne Weiteres einzusehen, daß eine unphysikalische Linie nicht von unphysikalischen Polen befreit werden muß. Das aufgezeigte Phänomen ist aus diesem Grund nicht trivial, sondern es erscheint nur als solches, weil die Propagatoren und Vertex-Ansätze nach dem Leitfaden der STI konstruiert sind. In [Ewe 00] wird durch explizites Berechnen der STI gezeigt, daß diese Identitäten, die Ausdruck der Eich- bzw. BRS-Invarianz sind, im Rahmen der erweiterten Störungstheorie für die  $\Lambda^n$ -Terme gebrochen sein können. Konsequenter Weise ist dann eine nicht-perturbative Modifikation des longitudinalen Gluon-Sektors nicht ausgeschlossen. Je nach Form der nicht-störungstheoretischen Modifikation kann dieses zu großen Schwierigkeiten in der Systematik kompensierender Pole führen. Die Konstruktion eines neuen Gluon-Sektors ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, so daß bei den folgenden Rechnungen an den in Kapitel 2.3 eingeführten Konstruktionen festgehalten wird.

Abschließend wird die Systematik der kompensierenden Pole, wie sie in [Kuh 97] formuliert ist, erweitert:

Je zwei volle Vertexfunktionen verbindet eine entschärfte Linie. Davon ausgeschlossen ist der Austausch eines longitudinalen Gluons.

Dieses ist ein wesentliches Resultat dieser Arbeit und bestätigt auch in beliebiger Eichung das bereits in [Sti 97] formulierte Ergebnis, daß das Phänomen kompensierender Pole im gluonischen Sektor auf den Transversalanteil beschränkt bleibt. Hierdurch wird die Möglichkeit eröffnet, Diagrammberechnungen außerhalb der Landau-Eichung durchzuführen. Damit folgt aber auch, daß die resultierenden SK-Gleichungen den Eichparameter enthalten, wodurch die Vertexparameter explizit Eichparameter-abhängig werden. Da bisher noch keine Vertexparameter außerhalb der Landau-Eichung bestimmt wurden, enthalten die in dieser Arbeit aufgestellten SK-Gleichungen (siehe Kapitel 5) ausschließlich unbekannte Parameter.

#### 2.4.4 Folgen für die Vertexapproximanten

Mit der Einführung kompensierender Pole werden die invarianten Funktionen der Vertexapproximanten teilweise auf konstante Werte gesetzt. Dadurch ist es möglich, daß die verbleibende Impulsstruktur der Vertexapproximanten innerhalb eines Schleifenintegrals den Divergenzgrad der Schleife erhöht und dem zufolge über Randbedingung (2.6) zusätzlich Einschränkungen an die Vertexapproximanten entstehen. In Kapitel 4.2 ist mit der

<sup>10</sup>Die longitudinale Gluon-Linie ist unphysikalisch.

Systematik der kompensierenden Pole folgendes Integral zu berechnen:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\sigma}(q) \left\{ \frac{1}{q^2 + u_{r,t''n_3} \Lambda^2} \left[ C_{\lambda mnl}^{[r]} \gamma^\mu + D_{\lambda mnl}^{[r]} \frac{(2p-q)^\mu}{2\Lambda} \right] \right. \\ \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,tn_1}} \left[ F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^\nu + G_{\eta ij}^{[r]} \frac{(2p-2q-k)^\nu}{2\Lambda} + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda} \right] \\ \left. \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,t'n_2}} \left[ C_{\delta m' n' l'}^{[r]} \gamma^\sigma + D_{\delta m' n' l'}^{[r]} \frac{(2p-2k-q)^\sigma}{2\Lambda} \right] \right\} \quad (2.60)$$

Das rein störungstheoretische Integral ist logarithmisch divergent. Die in (2.60) auftretenden Divergenzen sind je nach Kombination der Vertexstrukturen logarithmisch, linear, quadratisch und kubisch divergent<sup>11</sup> Um eine Erhöhung des störungstheoretischen Divergenzgrades zu vermeiden, muß gelten:

$$D_{\lambda mnl}^{[r]} = 0 \quad \text{für alle } \lambda, m, n, l, \quad (2.61)$$

$$G_{\eta ij}^{[r]} = 0 \quad \text{für alle } \eta, i, j \quad (2.62)$$

(Der Schluß (2.61) (und genauso (2.62)) ist wegen des  $t^{\mu\sigma}(q)$  aus Integral (2.60) schlecht zu begründen, wenn auch im allgemeinen wohl richtig. Er würde sofort folgen, wenn man eine für beide Gluon-Typen *einheitliche* Parametrisierung postulieren würde.) Der transversalprojizierte Quark-Gluon-Vertex wird durch die Einführung der kompensierenden Pole auf seine störungstheoretische Lorentz-Struktur beschränkt. Auch der Quark-Photon-Vertex wird nach dem selben Argument stark eingeschränkt.

In gleicher Weise führt das Abzählen der Impulspotenzen bei folgendem Diagramm in Verbindung mit der Forderung nach Beibehaltung des störungstheoretischen Divergenzgrad zu starken Einschränkungen der Lorentz-Strukturen der beteiligten Vertices:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\sigma}(q) \left\{ \frac{\alpha}{q^2} \left[ \tilde{C}_{\lambda nl}^{[r]} \gamma^\mu + \tilde{D}_{\lambda nl}^{[r]} \frac{(2p-q)^\mu}{2\Lambda} + \tilde{E}_{\lambda nl}^{[r]} \frac{q^\mu}{\Lambda} \right] \right. \\ \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,tn_1}} \left[ F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^\nu + G_{\eta ij}^{[r]} \frac{(2p-2q-k)^\nu}{2\Lambda} + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda} \right] \\ \left. \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,t'n_2}} \left[ \tilde{C}_{\delta n' l'}^{[r]} \gamma^\sigma + \tilde{D}_{\delta n' l'}^{[r]} \frac{(2p-2k-q)^\sigma}{2\Lambda} + \tilde{E}_{\delta n' l'}^{[r]} \frac{q^\sigma}{\Lambda} \right] \right\} \quad (2.63)$$

Die Erhöhung des Divergenzgrades der Schleife kann nur vermieden werden, wenn gilt:

$$\tilde{D}_{\lambda nl}^{[r]} = 0 \quad \text{für alle } \lambda, n, l, \quad (2.64)$$

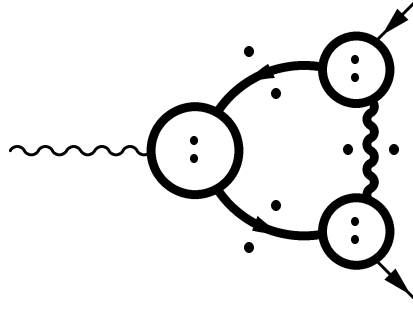
$$\tilde{E}_{\lambda nl}^{[r]} = 0 \quad \text{für alle } \lambda, n, l, \quad (2.65)$$

$$G_{\eta ij}^{[r]} = 0 \quad \text{für alle } \eta, i, j \quad (2.66)$$

<sup>11</sup>Die Divergenzen werden wie folgt bezeichnet: Ein Integral heißt in D=4 Dimensionen

logarithmisch divergent, wenn bezgl. d. Integrationsimpulses gilt: Zählergrad = Nennergrad - 4,  
linear divergent, wenn bezgl. d. Integrationsimpulses gilt: Zählergrad = Nennergrad - 3,  
quadratisch divergent, wenn bezgl. d. Integrationsimpulses gilt: Zählergrad = Nennergrad - 2,  
kubisch divergent, wenn bezgl. d. Integrationsimpulses gilt: Zählergrad = Nennergrad - 1 .

Der longitudinal-projizierte Quark-Gluon-Vertex wird ebenfalls auf seine störungstheoretische Lorentz-Struktur reduziert. Dagegen kann an die Lorentz-Struktur  $H_{ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  des Quark-Photon-Vertex keine Forderung gestellt werden, da seine Struktur nicht am Integrationsimpuls beteiligt ist. Um die durch Einführung kompensierender Pole gewinnbaren Restriktionen des Quark-Photon-Vertex voll auszuschöpfen, müssen weitere Diagramme betrachtet werden.



Dabei ist im vorliegenden Fall das Austausch-Boson ein Photon und die Punkte an *allen* inneren Linien deuten an, daß der Graph vollständig von überflüssigen Polen entschärft ist. (Im Prinzip ist eine Entschärfung der inneren Photon-Linie unnötig.) Der maximale störungstheoretische Divergenzgrad dieser Schleife ist logarithmisch. Hierdurch wird angedeutet, daß mit der Systematik kompensierender Pole eine Lorentz-Struktur proportional zu  $q''$ , mit  $q$  als Integrationsimpuls unter anderem einen festen, linear divergenten Beitrag liefern würde. Eine Bestätigung dieser Vermutung führt in Verbindung mit Randbedingung (2.6) dazu, alle Terme des Quark-Photon-Vertex proportional zu  $q''$  auf Null zu setzen, d.h.

$$H_{ij}^{[r]} = 0 \quad \text{für alle } \eta, i, j. \quad (2.67)$$

Da aber dieses Diagramm von der Ordnung  $e_f^3$  in der elektromagnetischen Kopplung ist, kann es aus Konsistenzgründen nicht berücksichtigt werden. Im Rahmen der Rechnungen zum Quark-Photon-Vertex kann die Vermutung analytisch untermauert werden: es wird am Beispiel des Quark-Photon-Vertex gezeigt, daß alleine die Forderung nach Reproduzierbarkeit der perturbativen Divergenz, ausreichend ist, die Lorentz-Struktur der Vertexapproximanten auf die perturbative Struktur einzuschränken. Es muß an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß es kein physikalisches Prinzip gibt, welches eine Modifikation der Koeffizienten der perturbativen Divergenzen im Rahmen der erweiterten Störungstheorie verbietet, solange die Eigenschaft  $\beta_0 > 0$  der Betafunktion gewahrt bleibt; erst wenn die Divergenzgrade höher als die perturbativen würden, wäre der Rahmen einer im üblichen Sinne renormierbaren Theorie verlassen. Es erscheint lediglich als physikalisch sinnvoll, die Reproduzierbarkeit der perturbativen Divergenz zu fordern, da hierdurch die Nähe zur Störungstheorie auf einfache Weise gewahrt bleibt<sup>12</sup>.

<sup>12</sup>In [Kuh 97] werden die auftretenden perturbativen Divergenzen, welche nicht den störungstheoretischen Koeffizienten aufweisen, als Defektterme bezeichnet und als solche zum Verschwinden gebracht. Dieses entspricht der Forderung nach Reproduzierbarkeit der perturbativen Divergenz.

### 2.4.5 Das Selbstkonsistenz-Gleichungssystem

Wie bereits in Kapitel (2.4.2) erörtert wird aufgrund der Selbstkonsistenzforderung das unendliche und hierarchische DS-Gleichungssystem entkoppelt, wodurch ein endliches SK-Gleichungssystem, beschränkt auf die sieben Basisvertices, definiert wird. Dieses algebraische Gleichungssystem für die Vertexparameter der Zwei- und Drei-Punkt-Vertices und des Vier-Gluonen-Vertex wird in [Sti 97] für  $r = 1$  und in Landau-Eichung angegeben und ausführlich diskutiert<sup>13</sup>. Dieses Gleichungssystem besteht aus drei SK-Gleichungen für die gluonischen Parameter  $u_1, u_2, u_3$ <sup>14</sup>

$$u_2 = u'_2 = \bar{u}_2 \quad , \quad (2.68)$$

$$u_1 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{9}{4} u_1 - \frac{33}{2} x_1 + \frac{5}{4} x_3 - 2N_F \left( w_3 + (w_1 + w_2) z_1 + z_2 - \frac{1}{3} z_3 \right) \right] \quad , \quad (2.69)$$

$$u_3 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{5}{2} u_2 (3x_1 - \frac{1}{2} x_3) + 9u_1 x_3 - 9x_4 - 2N_F \left( z_3 (w_3 + \frac{1}{2} u_2) + (w_2 - w_1) z_4 + z_5 \right) \right] \quad (2.70)$$

und aus fünf Gleichungen

$$x_1 = \frac{1}{\beta_0} \left[ -\frac{9}{4} x_1 + \frac{15}{16} x_3 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{4} x_1 x_2 - 9x_1 x_4 + x_3 x_4 \right) + \frac{2}{3} N_F \left( z_3 + \frac{1}{u_3} x_4 z_3 - \frac{1}{w_3} z_1 z_4 \right) \right] \quad , \quad (2.71)$$

$$x_2 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{2}{3} x_3^2 + \frac{1}{u_3} \left( \frac{1}{2} x_2 x_4 - 2x_4^2 - \frac{15}{2} x_1 x_5 + \frac{5}{4} x_3 x_5 \right) + \frac{2}{3} N_F \left( z_3^2 + \frac{1}{u_3} x_5 z_3 - \frac{1}{w_3} z_4^2 \right) \right] \quad , \quad (2.72)$$

$$x_3 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{u_3} \left( -\frac{37}{4} x_1 x_4 + \frac{3}{2} x_3 x_4 \right) - Z_1(\zeta) + \frac{2}{3} N_F \left( z_3 + \frac{1}{u_3} x_4 z_3 - \frac{1}{w_3} z_1 z_4 \right) \right] \quad , \quad (2.73)$$

$$x_1 = \frac{1}{\beta_0} \left[ -\frac{9}{4} x_1 + \frac{15}{16} x_3 + \frac{1}{u_3} \left( -\frac{31}{4} x_1 x_2 - \frac{5}{4} x_1 x_4 + \frac{5}{4} x_2 x_3 \right) - Z_1(\zeta) + \frac{2}{3} N_F \left( z_3 + \frac{1}{u_3} x_2 z_3 - \frac{1}{w_3} z_1 z_4 \right) \right] \quad , \quad (2.74)$$

$$x_4 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{3}{2} x_3^2 + \frac{1}{u_3} \left( -\frac{1}{4} x_2 x_4 - \frac{5}{4} x_4^2 + \frac{15}{2} x_1 x_5 + \frac{5}{4} x_3 x_5 \right) - Z_2(\zeta) + \frac{2}{3} N_F \left( z_3^2 + \frac{1}{u_3} x_5 z_3 - \frac{1}{w_3} z_4^2 \right) \right] \quad , \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

<sup>13</sup>Details zu den Gleichungssystemen der gluonischen Zwei- und Drei-Punkt-Vertices befinden sich in [Dri 97] und mit Einbeziehung des Vier-Gluonen-Vertex in [Dri 98]. Der gesamte fermionische Sektor wird in [Kuh 97] abgehandelt.

<sup>14</sup>In dieser Notation wird der Index  $r = 1$  nicht mitgeführt

für die Vertexparameter des Drei-Gluon-Vertex  $x_1, x_2, \dots, x_5$ . Dabei werden mit  $Z_1, Z_2$  zwei Kombinationen aus dem Satz der Vertexkoeffizienten des Vier-Gluonen-Vertex bezeichnet, die nur schwach an das übrige Gleichungssystem koppelt. Die fermionischen SK-Gleichungen für die Selbstenergie- und Vertexparameter  $w_1, w_2, w_3$  und  $z_1, z_2, \dots, z_5$  lauten:

$$w_2 = w_2' \quad , \quad (2.77)$$

$$w_1 = \frac{1}{\beta_0} \left[ 4w_1 - 4z_1 \right] \quad , \quad (2.78)$$

$$w_3 = \frac{1}{\beta_0} \left[ 4w_1 z_1 - 4z_2 \right] \quad , \quad (2.79)$$

$$z_1 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{9}{4} z_1 - \frac{9}{4} \frac{1}{w_3} z_1 z_2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right) z_4 + \frac{2}{3} N_F \frac{1}{u_3} z_3 z_4 \right] \quad , \quad (2.80)$$

$$z_2 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{9}{4} z_1 - \frac{9}{4} \frac{1}{w_3} z_2^2 - \frac{1}{u_3} \left( \frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right) z_5 + \frac{2}{3} N_F \frac{1}{u_3} z_3 z_5 \right] \quad , \quad (2.81)$$

$$z_1 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{9}{4} z_1 - \frac{9}{4} \frac{1}{u_3} x_1 z_4 \right] \quad , \quad (2.82)$$

$$z_3 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{9}{4} x_3 - \frac{9}{4} \frac{1}{u_3} x_4 z_3 \right] \quad , \quad (2.83)$$

$$z_4 = \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{9}{4} x_3 z_1 - \frac{9}{4} \frac{1}{u_3} x_4 z_4 \right] \quad . \quad (2.84)$$

Das nicht-lineare Gleichungssystem (2.68-2.84) verfügt über außergewöhnliche Eigenschaften, von denen eine an dieser Stelle erwähnt werden sollte, da von dieser Eigenschaft bei der Auswertung der Gleichungen (Kapitel 5) Gebrauch gemacht wird. Man erkennt, daß das Gleichungssystem skalierbar ist: Prinzipiell kann jeder von Null verschiedene Vertexparameter aus dem Gleichungssystem entfernt werden, wenn man die anderen Parameter und die Massenskala  $\Lambda$  durch geeignete Potenzen dieses Parameters teilt. Die Ursache für diese Skalierungsfreiheit, die für nichtlineare Gleichungssysteme nicht trivial ist, liegt in der Schemaunabhängigkeit des SK-Mechanismus für die nullte Ordnung begründet [Sti 97]. Als Skalierungsparameter wird der Drei-Gluonen-Vertexparameter  $x_1$  vorgeschlagen. Der Grund dafür ist, daß  $x_1 = 0$  in die perturbative Lösung führt: alle Parameter verschwinden für  $x_1 = 0$ . Somit wird die Wahl des Lösungsraumes durch Verwendung von  $x_1$  als Skalierungsparameter nicht eingeschränkt. Die Skalierung  $\tilde{\Lambda} = x_1 \Lambda$  führt mit positiven  $x_1$  auf:

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{x_1}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{u_2}{x_1}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{x_1^2},$$

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{x_1^2}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \tilde{x}_4 = \frac{x_4}{x_1^2}, \quad \tilde{x}_5 = \frac{x_5}{x_1^3},$$

$$\tilde{Z}_1 = \frac{Z_1}{x_1}, \quad \tilde{Z}_2 = \frac{Z_2}{x_1^2},$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1 &= \frac{w_1}{\sqrt{x_1}}, & \tilde{w}_2 &= \frac{w_2}{\sqrt{x_1}}, & \tilde{w}_3 &= \frac{w_3}{x_1}, \\ \tilde{z}_1 &= \frac{z_1}{x_1}, & \tilde{z}_2 &= \frac{z_2}{x_1}, & \tilde{z}_3 &= \frac{z_3}{x_1}, & \tilde{z}_4 &= \frac{z_4}{\sqrt{x_1}^3}, & \tilde{z}_5 &= \frac{z_5}{x_1}.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Das reskalierte System, bestehend aus 14 Bedingungen für 15 Parameter und  $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2$  als außenstehende Parametersätze, hat zwei verschiedene Parametersätze zur Lösung: man kann überprüfen, daß wenn

$$\left\{ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_5, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4, \tilde{z}_5 \right\} \quad (2.86)$$

eine Lösung des Gleichungssystem ist, so ist auch mit den gleichen  $\tilde{Z}_1$  und  $\tilde{Z}_2$

$$\left\{ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, -\tilde{w}_1, -\tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_5, -\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, -\tilde{z}_4, \tilde{z}_5 \right\} \quad (2.87)$$

eine Lösung. Den Parametersatz (2.87) bezeichnet man als *gespiegelte* Lösung. Nach einer ausführlichen Diskussion der möglichen Lösungen des Gleichungssystems in [Sti 97] wird ein Parametersatz für  $N_F = 2$  masselose Fermionen und  $r = 1$  angegeben:

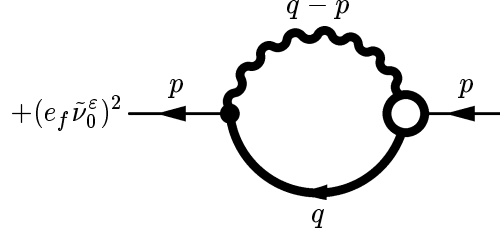
$\tilde{u}_1$	$\tilde{u}_2$	$\tilde{u}_3$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$
-0.3604	-0.4884	+0.1299	+1.0000	-8.7433	-8.9088	-3.2607	-6.2711
$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\tilde{w}_3$	$\tilde{z}_1$	$\tilde{z}_2$	$\tilde{z}_3$	$\tilde{z}_4$	$\tilde{z}_5$
+0.6749	+0.6749	+0.1202	-0.9561	-0.9356	-0.4282	+0.4094	+0.2242

Tabelle 2.1: Typische Lösungen für  $N_F = 2$

Auf einige Werte dieser Tabelle wird bei der Auswertung der SK-Gleichung für den Quark-Photon-Vertex zurückgegriffen. Es muß an dieser Stelle aber darauf hingewiesen werden, daß alle Vertexparameter in Landau-Eichung der QCD bestimmt sind. Eine Auswertung der SK-Gleichungen des Quark-Photon-Vertex gestützt auf Tabelle (2.1) kann daher nur in Landau-Eichung erfolgen (siehe Kapitel 5).



$$-(\text{thick line with arrow } p)^{-1} = -(\text{thin line with arrow } p)^{-1} + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \times (\text{loop diagram})$$



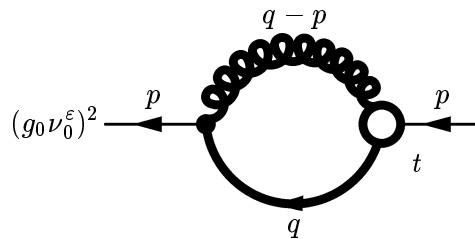
Die Betrachtungen in dieser Arbeit beschränken sich auf die niedrigste Ordnung der elektromagnetischen Kopplung  $e_f$ . Der photonische Beitrag zum inversen Fermion-Propagator ist immer mindestens von der Ordnung  $e_f^2$ , so daß der Beitrag der Quark-Photon-Schleife im Vergleich zu der stark wechselwirkenden Quark-Gluon-Schleife verschwindend gering ist. Daher wird die Fermion-Photon-Schleife in den folgenden Rechnungen vernachlässigt. Mit Hilfe der erweiterten Feynman-Regeln erhält man die analytische Form der Dyson-Schwinger-Gleichung in nullter Ordnung der elektromagnetischen Kopplung:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}}^{[r,0]}(p') &= \Gamma_{F\bar{F}}^{(0)pert}(p') + \mathcal{O}(g^2) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\lambda_a\right) \left(\frac{1}{2}\lambda_a\right) \gamma^\mu (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} S^{[r,0]}(q) \Gamma_{F\bar{F}V}^{[r,0]\nu}(-q, p, q-p) D^{[r,0]}((q-p)^2) \\
 &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\nu}(q-p) S^{[r,0]}(q) \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\nu}(-q, p, q-p) D_T^{[r,0]}((q-p)^2) \\
 &\quad + \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\nu}(q-p) S^{[r,0]}(q) \Gamma_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\nu}(-q, p, q-p) D_L^{[r,0]}((q-p)^2).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die beiden Schleifenintegrale mit transversalem bzw. longitudinalem Gluon werden im folgenden getrennt berechnet. Diese Berechnungen werden bewußt mit allen algebraischen Details vorgeführt, um eine wesentliche technische Eigenschaft der erweiterten Störungstheorie zu demonstrieren: Obwohl sämtliche Elemente der Integranden von (3.1) die stark nicht-perturbative  $\Lambda$ -Skala enthalten und damit nicht durch Potenzreihen in  $g^2$  darstellbar sind, können die etablierten Techniken der Schleifenberechnung, die oft irreführend als “perturbative” Techniken bezeichnet werden, *tatsächlich aber nur von der rationalen Impulsstruktur der Integranden abhängen*, nach wie vor im vollen Umfang angewendet werden.

### 3.2 Die transversal-projizierte Fermion-Gluon-Schleife

Zu berechnen ist folgendes Diagramm:



$$\begin{aligned}
&= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\nu} (q-p) S^{[r,0]}(q) \Gamma_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\nu}(-q, p, q-p) D_T^{[r,0]}((q-p)^2) \\
&= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{(q-p)^2} \\
&\quad \left[ \frac{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \right] \left[ \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^\nu(\not{q}, \not{p}, (p-q)^2)}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \right] \\
&\quad \left[ \frac{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((q-p)^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)((q-p)^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \right]. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Die überflüssigen Vertexpole werden herausgekürzt und die matrixwertigen Nennerprodukte werden durch Erweitern (siehe Anhang C) skalar gemacht, um eine Anwendung der Feynman-Parametrisierung zu ermöglichen:

$$\begin{aligned}
I_1(p') &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{(q-p)^2} \\
&\quad \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \\
&\quad \frac{N_{F\bar{F}V_T}^\nu(\not{q}, \not{p}, (p-q)^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((q-p)^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)((q-p)^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})} \\
&= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{(q-p)^2} \right. \\
&\quad \frac{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} - \kappa_{r,s+})(\not{q} - \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + \kappa_{r,s+}^2)(q^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \\
&\quad \left. \frac{N_{F\bar{F}V_T}^\nu(\not{q}, \not{p}, (p-q)^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((q-p)^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)((q-p)^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \right\} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Die skalaren Nennerstrukturen können mit der Methode der Feynman-Parametrisierung zusammengefaßt werden (vergleiche dazu Anhang D.1.1). Damit folgt:

$$\begin{aligned}
I_1(p') &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu \int dF_1 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{[(q-pz)^2 + R_1^2]^{2r+3}} \\
&\quad \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} - \kappa_{r,s+})(\not{q} - \kappa_{r,s-}) \left( \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+2m+n+l, 4r} (q')^n \right)
\end{aligned}$$

$$(q-p)^{2m} C_{\lambda m n l}^{[r]} \gamma^\nu (\not{p})^l \bigg) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} . \quad (3.4)$$

Für die SK-Gleichungen werden ausschließlich die divergenten Anteile des Integrals benötigt und daher im folgenden schrittweise isoliert. Allgemein heißt ein Impulsintegral divergent, wenn in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen bezüglich des Integrationsimpulses  $q$  die *Divergenzbedingung*

$$\text{Zählergrad} \geq \text{Nennergrad} - 4 \quad (3.5)$$

erfüllt ist. Ein Abzählen der Zähler- und Nenner- Impulspotenzen von  $I_1(\not{p})$  liefert, daß die Divergenzbedingung (3.5) nur für

$$n = r \wedge m = r \vee n = r - 1 \wedge m = r \quad (3.6)$$

erfüllt ist. Die divergenten Anteile des Integrals  $I_1(\not{p})$  sind auf die folgende Zählerstruktur eingeschränkt:

$$\begin{aligned} I_1(\not{p}) = & \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu \int dF_1(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{[(q-pz)^2 + R_1^2]^{2r+3}} \\ & \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q - \kappa_{r,s+})(q - \kappa_{r,s-}) \left( (q')^r \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{l=0}^r C_{r-lrrl}^{[r]} (\not{p})^l \right. \\ & \left. + (q')^{r-1} \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{l=0}^r C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} (\not{p})^l \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} + \text{KONV} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Da das Integral  $I_1(\not{p})$  maximal linear divergiert, können Divergenzen nur mit den höchsten beiden Potenzen des Zählerproduktes entstehen. Diese sind in Anhang C berechnet. Damit wird das Zählerpolynom ausmultipliziert und anschließend nach den divergenten Beiträgen sortiert. Die divergenten Anteile verbleiben in folgender Struktur:

$$\begin{aligned} I_1(\not{p}) = & (-1)^{\frac{r+1}{2}} \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu \int dF_1(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{[(q-pz)^2 + R_1^2]^{2r+3}} \\ & \left\{ q^{r+1} (q')^r \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{l=0}^r C_{r-lrrl}^{[r]} (\not{p})^l \right. \\ & + q^{r+1} (q')^{r-1} \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{l=0}^r C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} (\not{p})^l \\ & \left. + q' q^{r-1} \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) (q')^r \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{l=0}^r C_{r-lrrl}^{[r]} (\not{p})^l \right\} \\ & \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} + \text{KONV} . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Um den Nenner auf die Form  $[q^2 + R^2]^\beta$  der Standardformel der Impulsintegration (siehe dazu Anhang D.2) zu bringen, wird der Integrationsimpuls transformiert:  $q \rightarrow q + zp$  (lineare Verschiebung des Integrationsimpulses). Anschließend wird der Zähler ausmultipliziert, und die divergenten Anteile werden erneut isoliert. Dabei sind die Entwicklungen der Zählerfaktoren bis zur zweitführenden Ordnung in  $q$  ausreichend (vergleiche Anhang C). Als Resultat erhält man rein logarithmisch divergente Integrale<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
I_1(\not{p}) &= (-1)^{\frac{r+1}{2}} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int dF_1(g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q^2 + R_1^2]^{2r+3}} \\
&\quad \left\{ \left[ (q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \left( (4rz - 2r) q^{4r-2} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu qp + z q^{4r} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 2(z-1) \delta^{\mu\nu} qp - 2(z-1) q^\mu q^\nu \right) q^{4r} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \right] \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \right. \\
&\quad \left. - (D-1) q^{4r+2} \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} \not{p}^l \right. \\
&\quad \left. + (D-1) q^{4r+2} \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \right\} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \\
&\quad + \text{KONV} .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Mit Hilfe der Algebra der  $\gamma$ -Matrizen<sup>2</sup> (Anhang C) können die matrixwertigen Zählerpotenzen zu Impulsquadraten zusammengefaßt werden. Eine anschließende symmetrische Integration (vergleiche Anhang D.2) führt auf:

$$\begin{aligned}
I_1(\not{p}) &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int dF_1(g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+2}}{[q^2 + R_1^2]^{2r+3}} \left( \frac{D-1}{D} \right) \\
&\quad \left\{ \not{p} \left( 4 + 2r - 4rz - (D+2)z \right) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \right. \\
&\quad \left. + D \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} \not{p}^l \right. \\
&\quad \left. - D \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \right\} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \\
&\quad + \text{KONV} .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Alle divergenten Anteile von  $I_1$  werden also von zwei Typen logarithmisch divergenter Schleifenintegrale erzeugt, die sich nur durch ihre Feynman-Parameterintegrale unterscheiden:

$$I_{1A} = \int dF_1(g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+2}}{[q^2 + R_1^2]^{2r+3}} , \tag{3.11}$$

<sup>1</sup>Der linear divergente Anteil des Integrals ist bereits durch symmetrische Integration zum Verschwinden gebracht worden und wird daher nicht aufgeführt.

<sup>2</sup>Im folgenden wird die Kurzbezeichnung  $\gamma$ -Algebra verwendet

$$I_{1A} = \int dF_1 z (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+2}}{[q^2 + R_1^2]^{2r+3}} \quad (3.12)$$

Nach Ausführen der Feynman-Parameterintegrale (berechnet sind diese in Anhang D.1.1) und anschließender Impulsintegration mittels der Standardformel (vergleiche Anhang D) ergibt sich in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen:

$$\begin{aligned} I_1(\not{p}) &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} (D-1) \left[ \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} \not{p}^l \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \right] \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \\ &\quad + \text{KONV} \\ &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \hat{I}_1(\not{p}) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \\ &\quad + \text{KONV} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Abschließend wird gezeigt, daß es sich bei den berechneten Divergenzen (3.13) um nicht-perturbative Divergenzen handelt, die also im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  verschwinden. Dazu wird der Vietasche Wurzelsatz in der Form

$$\sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) = \kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}$$

verwendet, um die komplexen Skalen auf die reellen umzurechnen:

$$\begin{aligned} \hat{I}_1(\not{p}) &= (D-1) \left[ \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} \not{p}^l - \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \right] \\ &= (D-1) \sum_{l=0}^r \left[ \Lambda^{r-l+1} C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} - (\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}) \Lambda^{r-l} C_{r-lrrl}^{[r]} \right] \not{p}^l \\ &= (D-1) \left[ \Lambda C_{1rr-1r}^{[r]} - (\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}) C_{0rrr}^{[r]} \right] \not{p}^r + \mathcal{O}(\Lambda) \\ &= -(D-1) \Lambda (w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s}) C_{0rrr}^{[r]} \not{p}^r + \mathcal{O}(\Lambda) \\ &= \mathcal{O}(\Lambda) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da (3.13) eine nicht-perturbative Divergenz ist, kann der  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus angewendet und die dimensionelle Regularisierung fallengelassen werden

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\beta_0} . \quad (3.15)$$

In  $D = 4$  euklidischen Dimensionen verbleibt schließlich als nichtperturbativer, endlicher Term in nullter Ordnung in  $g^2$ :

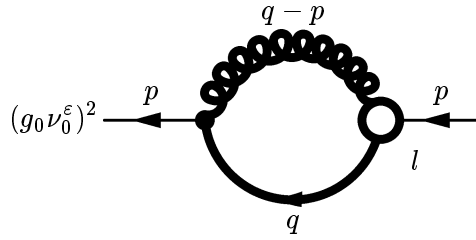
$$I_1(\not{p}) = \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} 3 \left[ \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} C_{r-l+1rr-1l}^{[r]} \not{p}^l \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\left(w_{1,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s}\right) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} C_{r-lrrl}^{[r]} \not{p}^l \left] \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \right. \\
& \left. + \text{KONV} . \right.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dieser Ausdruck kann im Rahmen des in Kapitel 2 erläuterten Verfahren selbstkonsistent behandelt werden. Anzumerken ist an dieser Stelle, daß sich keine Divergenz proportional zu  $\not{p}$  ausbildet, die als perturbative Divergenz zu identifizieren ist. Dieses liegt darin begründet, daß in  $D = 4$  Dimensionen der Term proportional zu  $\not{p}^{l+1}$  verschwindet und damit auch für  $l = r$  keine Divergenz übrig bleibt. Die transversal-projizierte Quark-Gluon-Schleife ist auch mit den störungstheoretischen Vertexansätzen divergenzfrei<sup>3</sup>. (siehe dazu auch Kapitel 5).

### 3.3 Die longitudinal-projizierte Fermion-Gluon-Schleife

Das longitudinale Schleifenintegral lautet in graphischer Notation:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\nu} (q-p) S^{[r,0]}(q) \Gamma_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\nu}(-q, p, q-p) D_L^{[r,0]}((q-p)^2) . \tag{3.17}$$

Zunächst werden die rationalen Approximanten in (3.17) eingesetzt, wobei in diesem Fall der longitudinale Gluon-Propagator und der longitudinal-projizierte Quark-Gluon-Vertex verwendet werden. Anschließend können die überflüssigen Pole herausgekürzt werden. Ein “Skalarmachen” der matrixwertigen Nennerprodukte (siehe dazu Beispiel in Anhang C) führt auf:

$$\begin{aligned}
I_2(p) &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{(q-p)^\mu (q-p)^\nu}{(q-p)^2} \frac{\alpha}{(q-p)^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + \kappa_{r,s+}^2)(q^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \right. \\
&\quad \left. \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q - \kappa_{r,s+})(q - \kappa_{r,s-}) N_{F\bar{F}V_L}^\nu(\not{q}, \not{p}, (p-q)^2) \right\} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} . \tag{3.18}
\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Dieser Sachverhalt wird bereits in [Kuh 97] geschildert.

Der skalare Nenner wird mit dem Verfahren der Feynman-Parametrisierung (vergleiche dazu Anhang D.1.2) zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
I_2(p) &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu \int dF_2 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha}{[(q - pz)^2 + R_2^2]^{r+3}} (q - p)^\mu (q - p)^\nu \\
&\quad \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} - \kappa_{r,s+}) (\not{q} - \kappa_{r,s-}) \left( \sum_{\lambda=0}^{2r} \Lambda^\lambda \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+n+l, 2r} (\not{q})^n \tilde{C}_{\lambda nl}^{[r]} \gamma^\nu (p')^l \right) \\
&\quad \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (p' + \kappa_{r,2s})} .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Im folgenden werden schrittweise die divergenten Anteile von  $I_2(p)$  isoliert. Da die Divergenzbedingung (3.5) nur für  $n \geq 2r - 1$  erfüllt ist, bleibt der maximale Divergenzgrad, analog zu (3.7), linear. Nur die höchsten beiden Zähler-Impulspotenzen der Vertexapproximanten können eine Divergenz erzeugen:

$$\begin{aligned}
I_2(p) &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu \int dF_2 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha}{[(q - pz)^2 + R_2^2]^{r+3}} (q - p)^\mu (q - p)^\nu \\
&\quad \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} - \kappa_{r,s+}) (\not{q} - \kappa_{r,s-}) \left[ (\not{q})^r \gamma^\nu \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lrl}^{[r]} (p')^l \right. \\
&\quad \left. + (\not{q})^{r-1} \gamma^\nu \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-l}^{[r]} (p')^l \right] \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (p' + \kappa_{r,2s})} + \text{KONV} .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Das Integral  $I_2(p)$  enthält noch überflüssige konvergente Anteile, die in dem Zähler-Produkt versteckt sind. Wegen der maximal linearen Divergenz des Integrals können wieder nur die höchsten beiden Potenzen des Zähler-Produktes Divergenzen erzeugen (Anhang C). Indem das Zählerpolynom ausmultipliziert wird, können die divergenten Anteile abgespalten werden:

$$\begin{aligned}
I_2(p) &= (-1)^{\frac{r+1}{2}} \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu \int dF_2 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha}{[(q - pz)^2 + R_2^2]^{r+3}} (q - p)^\mu (q - p)^\nu \\
&\quad \left\{ q^{r+1} (q)^r \gamma^\nu \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lrl}^{[r]} (p')^l \right. \\
&\quad \left. + q^{r+1} (q)^{r-1} \gamma^\nu \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-l}^{[r]} (p')^l \right. \\
&\quad \left. + q q^{r-1} \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) (q)^r \gamma^\nu \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lrl}^{[r]} (p')^l \right\}
\end{aligned}$$



$$\frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}' + \kappa_{r,2s})} + \text{KONV} . \quad (3.21)$$

Anschließend wird die lineare Transformation  $q \rightarrow q + zp$  durchgeführt. Der resultierende Zähler wird ausmultipliziert und nach führenden Impulspotenzen sortiert. Die divergenten Anteile werden von den beiden höchsten Impulspotenzen erzeugt. Das rein linear divergente Integral kann bereits mit Hilfe der symmetrischen Integration zum Verschwinden gebracht werden. Für die divergenten Anteile folgt:

$$\begin{aligned} I_2(\not{p}') &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int dF_2 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha}{[q^2 + R_2^2]^{r+3}} \\ &\quad \left\{ \left[ 2r z q^{2r-2} q p q' q' \gamma^\nu + z q^{2r} q \not{p}' q' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (z-1) 2p^\nu q^{2r} q' q' \gamma^\nu \right] \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr l}^{[r]} \not{p}'^l \right. \\ &\quad \left. - q^{2r+2} \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-1l}^{[r]} \not{p}'^l \right. \\ &\quad \left. + q^{2r+2} \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr l}^{[r]} \not{p}'^l \right\} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}' + \kappa_{r,2s})} \\ &\quad + \text{KONV} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Mit Hilfe der Algebra der Dirac-Matrizen lassen sich die matrixwertigen Impulspotenzen (soweit wie möglich) zu Impulsquadraten zusammenfassen. Anschließend führt die symmetrische Integration (siehe Anhang D.2) auf:

$$\begin{aligned} I_2(\not{p}') &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int dF_2 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2r+2}}{[q^2 + R_2^2]^{r+3}} \frac{1}{D} \\ &\quad \left\{ \not{p}' (2D - (2r + D + 2)z) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr r l}^{[r]} \not{p}'^l \right. \\ &\quad \left. + D \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-1l}^{[r]} \not{p}'^l \right. \\ &\quad \left. - D \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr r l}^{[r]} \not{p}'^l \right\} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p}' + \kappa_{r,2s})} \\ &\quad + \text{KONV} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die divergenten Anteile von  $I_2$  sind auf zwei logarithmisch divergente Schleifenintegrale zurückgeführt, die sich durch ihre Parameterintegrale unterscheiden. Im einzelnen lauten diese:

$$I_{2A} = \int dF_2 (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2r+2}}{[q^2 + R_2^2]^{r+3}}, \quad (3.24)$$

$$I_{2B} = \int dF_2 z (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2r+2}}{[q^2 + R_2^2]^{r+3}}. \quad (3.25)$$

Nachdem die Feynman-Parameterintegrale ausgeführt sind (Die Berechnung ist in Anhang D.1.2 durchgeführt) kann die Standardformel der Impulsintegration angewendet werden. In  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen und beliebigem  $r$  ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} I_2(p') &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \alpha \\ &\quad \left\{ \frac{1}{D} \left( \frac{2D(r+3) - 2(2r+D+2)}{r+3} \right) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr}^{[r]} p'^{l+1} + \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-1l}^{[r]} p'^l \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr}^{[r]} p'^l \right\} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p' + \kappa_{r,2s})} + \text{KONV} \\ &= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \alpha \hat{I}_2(p') \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p' + \kappa_{r,2s})} + \text{KONV}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die gesamte Divergenz ist proportional zum Eichfixierungsparameter  $\alpha$ . Abschließend folgt die Klassifikation der Divergenz im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{I}_2(p') &= \frac{1}{D} \left( \frac{2D(r+3) - 2(2r+D+2)}{r+3} \right) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr}^{[r]} p'^{l+1} + \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-1l}^{[r]} p'^l \\ &\quad - \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr}^{[r]} p'^l \\ &= \frac{1}{D} \left( \frac{2D(r+3) - 2(2r+D+2)}{r+3} \right) \sum_{l=0}^r \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr}^{[r]} p'^{l+1} \\ &\quad + \sum_{l=0}^r \left[ \Lambda^{r-l+1} \tilde{C}_{r-l+1r-1l}^{[r]} - \left( \kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} \kappa_{r,2s} \right) \Lambda^{r-l} \tilde{C}_{r-lr}^{[r]} \right] p'^l \\ &= \frac{1}{D} \left( \frac{2D(r+3) - 2(2r+D+2)}{r+3} \right) \tilde{C}_{0rr}^{[r]} p'^{r+1} - \left( w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) \Lambda \tilde{C}_{0rr}^{[r]} p'^r + \mathcal{O}(\Lambda) \\ &= \frac{1}{D} \left( \frac{2D(r+3) - 2(2r+D+2)}{r+3} \right) \tilde{C}_{0rr}^{[r]} p'^{r+1} + \mathcal{O}(\Lambda) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die Entwicklung von  $\hat{I}_2(p)$  nach der niedrigsten  $\Lambda$ -Potenz (3.27) zeigt, daß die divergenten Anteile von  $I_2(p)$  eine Divergenz beinhalten die nach den Ausführungen in Kapitel 2 als perturbative Divergenz identifiziert werden kann. Diese wird im folgenden aus der

Darstellung (3.27) herausgearbeitet. Dazu wird die Impulspotenz  $\not{p}^{r+1}$  in (3.27) in die Form des Nennerproduktes entwickelt

$$\begin{aligned}\not{p}^{r+1} &= \prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \kappa_{r,2s}) - \not{p}^r \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} + \mathcal{O}(\Lambda^2) \\ &= \prod_{s=1}^{r+1} (\not{p} + \kappa_{r,2s}) + \mathcal{O}(\Lambda) .\end{aligned}\quad (3.28)$$

Anschließend werden Zähler- und Nennermatrizen gegeneinander *matrixwertig gekürzt*, d.h. sie werden miteinander multipliziert, so daß  $\not{p}^{-1}\not{p} = \mathbb{1}$  ergibt. Als Rest verbleibt ein Term von nullter Ordnung in  $\Lambda$ . Das Integral über diesen Rest bildet also eine  $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenz aus:

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} . \quad (3.29)$$

In  $D = 4$  Dimensionen lautet die berechnete perturbative Divergenz mit  $\tilde{C}_{0rr}^{[r]} = 1$ :

$$\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \alpha \not{p}^{r+1} \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \alpha \not{p} + \mathcal{O}(\Lambda) \quad (3.30)$$

Die perturbative Divergenz ist direkt proportional zu  $\not{p}$  und zu  $\alpha$ . Der Ausdruck (3.30) ist mit der störungstheoretischen Divergenz der Schleife zu vergleichen. Eine Auswertung der Gleichungen befindet sich in Kapitel 5. Die Selbstkonsistenz-Gleichungen werden im folgenden Abschnitt auf Basis der nichtperturbativen Divergenzen, das sind die Terme der Ordnung  $\Lambda, \Lambda^2, \dots$ , bestimmt.

### 3.4 Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichungen in $r = 1$

Mit Hilfe der Integrale  $I_1(\not{p})$  und  $I_2(\not{p})$  werden in diesem Abschnitt die Selbstkonsistenzgleichungen (SK-Gleichungen) für den inversen Fermion-Propagator in beliebiger Eichung der QCD aufgestellt. Ausgangspunkt ist die DS-Gleichung des inversen Fermion-Propagators in der genäherten Form mit  $N_F$  masselosen Fermionen:

$$-\not{p} - \kappa_{r,1} - \sum_{s=1}^r \frac{\kappa_{r,2s+1}^2}{\not{p} + \kappa_{r,2s}} = -\not{p} + I_1(\not{p}) + I_2(\not{p}) . \quad (3.31)$$

Wie in Kapitel 2 erörtert, sind nur die nicht-perturbativen Terme selbstkonsistent behandelbar. In  $r = 1$  lauten diese

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= 3\Lambda \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \left[ C_{1101}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) C_{0111}^{[1]} \right] \not{p} \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \left[ C_{2100}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) C_{1110}^{[1]} \right] \right\} \frac{\mathbb{1}}{(\not{p} + \kappa_{1,2})} ,\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 = & \alpha \Lambda \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \left[ \tilde{C}_{110}^{[1]} + \tilde{C}_{101}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) \tilde{C}_{011}^{[1]} \right] \not{p} \right. \\ & \left. + \Lambda \left[ \tilde{C}_{200}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) \tilde{C}_{110}^{[1]} \right] \right\} \frac{\mathbb{1}}{(\not{p} + \kappa_{1,2})}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei mit  $\tilde{I}_i(\not{p})$  die rein nichtperturbativen Divergenzen des  $i$ -ten Integrals in  $r = 1$  bezeichnet sind.

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren zum Aufstellen der SK-Gleichungen besteht darin, die Dyson-Schwinger-Gleichungen in ihre matrixwertigen Komponenten zu zerlegen und die Koeffizienten mit gleicher Matrixstruktur zu vergleichen. Dieser Koeffizientenvergleich bildet die SK-Gleichungen der zugrundeliegenden dynamischen Gleichung. Dieses Verfahren wird im folgenden auf der niedrigsten Stufe der rationalen Approximation angewendet. Zunächst wird (3.31) mit  $\not{p} + \kappa_{1,2}$  multipliziert, so daß eine matrixwertige Gleichung mit skalarem Nenner resultiert (Nenner = 1). Danach wird diese Gleichung nach ihren beiden Matrixstrukturen  $\not{p}$  und  $\mathbb{1}$  geordnet. Mit  $\kappa_{1,3}^2 = w_{1,3}\Lambda^2$  und  $\kappa_{1,1} = w_{1,1}\Lambda$  folgt schließlich:

$$\begin{aligned} -w_{1,1}\Lambda \not{p} - w_{1,1}w_{1,2}\Lambda^2 - w_{1,3}\Lambda^2 = & \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \left\{ 3\Lambda^2 \left[ C_{2100}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) C_{1110}^{[1]} \right] \right. \\ & + \alpha \Lambda^2 \left[ \tilde{C}_{200}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) \tilde{C}_{110}^{[1]} \right] \\ & + 3\Lambda \left[ C_{1101}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) C_{0111}^{[1]} \right] \not{p} \\ & \left. + \alpha \Lambda \left[ \tilde{C}_{110}^{[1]} + \tilde{C}_{101}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2}) \tilde{C}_{011}^{[1]} \right] \not{p} \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Gleichung (3.34) ist nur erfüllt, wenn die Koeffizienten gleicher Matrixstruktur die Gleichung erfüllen. Aus dem Koeffizientenvergleich resultieren also zwei Gleichungen, die simultan erfüllt sein müssen. Mit den Symmetrieeigenschaften der Vertexkoeffizienten

$$C_{\lambda mn l}^{[r]} = C_{\lambda m l n}^{[r]}, \quad \tilde{C}_{\lambda n l}^{[r]} = \tilde{C}_{\lambda l n}^{[r]}, \quad (3.35)$$

sowie mit

$$C_{0rrr}^{[r]} = \tilde{C}_{0rr}^{[r]} = 1 \quad (3.36)$$

resultieren folgende Selbstkonsistenz-Gleichungen:

SK-1: (Terme proportional zu  $\not{p}$ )

$$\begin{aligned} -w_{1,1}\Lambda = & \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \Lambda \left\{ 3 \left( C_{1110}^{[1]} - w_{1,1} - w_{1,2} \right) \right. \\ & \left. + \alpha \left( 2\tilde{C}_{110}^{[1]} - w_{1,1} - w_{1,2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

SK-2: (Terme proportional zu  $\mathbb{1}$ )

$$\begin{aligned}
-(w_{1,1}w_{1,2} + w_{1,3})\Lambda^2 &= \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \Lambda^2 \left\{ 3 \left( C_{2100}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2})C_{110}^{[1]} \right) \right. \\
&\quad \left. + \alpha \left( \tilde{C}_{200}^{[1]} - (w_{1,1} + w_{1,2})\tilde{C}_{110}^{[1]} \right) \right\} \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Beide SK-Gleichungen sind lineare Gleichungen in den Koeffizienten des transversal und longitudinal-projizierten Quark-Gluon-Vertex, was bereits an der Struktur der DS-Gleichung abgelesen werden kann. Der Eichfixierungsparameter geht ebenfalls linear in beide Gleichungen ein. In Landau-Eichung  $\alpha = 0$  können die Resultate aus [Kuh 97] für verschwindende Strommassen reproduziert werden. Die bemerkenswerte Neuerung in (3.37) und (3.38) gegenüber den in [Kuh 97] formulierten SK-Gleichungen ist ihre *Abhängigkeit vom Eichfixierungsparameter*. Die Vertexkoeffizienten in (3.37) und (3.38) sind keine konstanten Größen mehr, sondern sind Funktionen von  $\alpha$ . Da die Abhängigkeit der Koeffizienten vom Eichparameter in den früheren Arbeiten (vergleiche z.B. [Kuh 97, Dri 97, Reu 89]) nicht erfaßt worden ist, verfügen (3.37) und (3.38) ausschließlich über unbestimmte Größen. Anzumerken bleibt, daß aufgrund der vollzogenen Reduktion der DS-Gleichung auf die nullte Ordnung der elektromagnetischen Kopplung *keine* Abhängigkeiten von den “photonischen” Vertexparametern in (3.37) und (3.38) auftreten.

Zum Abschluß dieses Kapitels wird die exakte DS-Gleichung, also mit Berücksichtigung der Quark-Photon-Schleife in besonderer Stufe der rationalen Approximation ( $r = 0$ ), diskutiert und es folgen einige Bemerkungen zum inversen Photon-Propagator.

### 3.5 Die exakte Dyson-Schwinger-Gleichung in $r = 0$

Bei der Behandlung der exakten Dyson-Schwinger-Gleichung stößt man bereits nach kurzer Rechnung auf ein Problem, auf das an dieser Stelle aufmerksam gemacht werden soll. Dazu wird die exakte DS-Gleichung für den inversen Fermion-Propagator mit  $N_F$  masselosen Fermionen und sehr stark vereinfachten Approximanten ( $r = 0$ ) betrachtet [Kuh 97]:

Fermion-Propagator:  $S^{[0,0]}(q) = \frac{\mathbb{1}}{q + \kappa}$  mit  $\kappa = w\Lambda$

Gluon-Propagator:  $D^{[0,0]}(q^2) = t^{\mu\nu}(q) \frac{1}{q^2 + u\Lambda^2} + l^{\mu\nu} \frac{\alpha}{q^2}$

Photon-Propagator:  $A^{[0,0]}(q^2) = t^{\mu\nu}(q) \frac{1}{q^2} + l^{\mu\nu} \frac{\xi}{q^2}$

Vertices:  $\Gamma^{[0,0]\nu} = \gamma^\nu$

Damit kann die DS-Gleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
-\not{p} - \kappa + \mathcal{O}(g^2, e^2) &= -\not{p} + \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\nu}(q-p) \frac{\mathbb{1}}{q + \kappa} \gamma^\nu \frac{1}{(q-p)^2 + u\Lambda^2} \\
&\quad + \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^\mu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\nu}(q-p) \frac{\mathbb{1}}{q + \kappa} \gamma^\nu \frac{\alpha}{(q-p)^2} \\
&\quad + \gamma^\mu (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\nu}(q-p) \frac{\mathbb{1}}{q + \kappa} \gamma^\nu \frac{1}{(q-p)^2} \\
&\quad + \gamma^\mu (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\nu}(q-p) \frac{\mathbb{1}}{q + \kappa} \gamma^\nu \frac{\xi}{(q-p)^2}
\end{aligned}$$

(3.39)

Nach der Feynman-Parametrisierung der Nennerstrukturen folgt mit den Parameterintegralen  $\int dFz = \int d\tilde{F}z = \frac{2}{3}$ :

$$\begin{aligned}
-\kappa + \mathcal{O}(g^2, e^2) = & -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{[q^2 + R^2]^3} \\
& \left\{ \not{p}' \frac{1}{D} \left( \frac{2}{3} (D^2 + D - 2) - 4D + 4 \right) + (D - 1)\kappa \right\} \\
& - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int d\tilde{F} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^2}{[q^2 + \tilde{R}^2]^3} \left\{ \not{p}' \left( 2 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \right) + \kappa \right\} \\
& - \int d\tilde{F} (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{[q^2 + \tilde{R}^2]^3} \\
& \left\{ \not{p}' \frac{1}{D} \left( \frac{2}{3} (D^2 + D - 2) - 4D + 4 \right) + (D - 1)\kappa \right\} \\
& - \int d\tilde{F} (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\xi q^2}{[q^2 + \tilde{R}^2]^3} \left\{ \not{p}' \left( 2 - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \right) + \kappa \right\}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

An dieser Stelle wird das Problem deutlich:

Betrachtet man zunächst nur die gluonischen Impulsintegrale, so führt der  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus bei Divergenzen mit nicht-perturbativem Charakter auf die Ausbildung des Faktors  $\frac{1}{\beta_0}$  und bei den perturbativen Divergenzen folgt die Divergenzstruktur der störungstheoretischen Divergenz. In gleicher Weise folgt die störungstheoretische Divergenz bei den photonischen Impulsintegralen mit perturbativem Charakter. Dagegen sind aber die photonischen Impulsintegrale mit nicht-perturbativer Divergenz nicht ohne weiteres in der Lage, einen endlichen Faktor zu produzieren: Der  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus kann nicht angewendet werden.

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten dieses Problem zu lösen: Die erste Möglichkeit besteht darin, diese Terme als reine  $e^2$ -Korrekturen aufzufassen und sie im SK-Problem nicht zu berücksichtigen. So ist bei den Schleifenberechnungen in den vorangegangenen Kapiteln verfahren worden. Die zweite Möglichkeit ist die, diese Terme mit  $(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2$  zu erweitern, so daß man Terme proportional zu  $\left( \frac{e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon}{g_0 \nu_0^\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{\beta_0}$  erhält. Dann sind diese Terme zwar selbstkonsistent behandelbar, liefern aber auch nur sehr minimale Beiträge. Es ergibt sich also eine Frage der Interpretation dieser Terme, die an dieser Stelle nicht beantwortet werden kann. Man kann aber zumindest sehen, daß, gleichgültig für welche Möglichkeit man sich entscheidet, diese Terme nur sehr kleine Beiträge liefern und es daher gerechtfertigt ist, diese Integrale vollständig zu vernachlässigen. Dieses zeigt folgendes Beispiel: Um die Terme unmittelbar vergleichbar zu machen, werden die Integrale auf  $\left( \frac{e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon}{g_0 \nu_0^\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{\beta_0}$  gesetzt, so daß anschließend  $D = 4$  gesetzt werden kann. In vollständiger Landau-Eichung ( $\alpha = \xi = 0$ ) verschwinden die Beiträge proportional zu  $\not{p}'$  und es folgt sofort:

$$-\not{p}' - \kappa = -\not{p}' - 3\kappa \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} - 3\kappa \left( \frac{e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon}{g_0 \nu_0^\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{\beta_0} \tag{3.41}$$

Und mit  $N_c = 3$  folgt schließlich:

$$\beta_0 = 4 + 3 \left( \frac{e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon}{g_0 \nu_0^\varepsilon} \right)^2 \rightarrow 4, \quad (3.42)$$

sofern die festen Skalen  $\nu_0, \tilde{\nu}_0$  von derselben Größenordnung sind und  $\frac{e_f}{g_0}$  auch im Limes der Entfernung des Regulators klein bleibt. Wie bereits in [Kuh 97] erwähnt, liefern zum einen diese stark vereinfachten Ansätze Ergebnisse der richtigen Größenordnung ( $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_F \geq 0$ ), und zum anderen zeigt dieses kleine Beispiel ganz deutlich, daß die photonischen Beiträge vernachlässigbar klein sind. Der wesentliche Punkt in diesen Überlegungen ist, daß in allen derzeit bekannten analytischen Behandlungen der QED das elektrodynamische Gegenstück zur  $\Lambda$ -Skala niemals nicht-perturbativ behandelt wird, sowohl wegen seiner enormen Größe von  $\approx m_e e^{137}$  als auch wegen der begrifflich völlig ungeklärten Rolle, die einer derartigen Skala in einer asymptotisch nicht freien Theorie wie der QED zukommt. Deshalb können sich nirgends  $(\frac{1}{e^2})$ -Faktoren ausbilden, und die “photonischen” Schleifen behalten stets ihren kleinen Vorfaktor  $\frac{e^2}{(4\pi)} \approx \frac{1}{137}$ .

### 3.6 Bemerkungen zum inversen Photon-Propagator

Die Dyson-Schwinger-Gleichung des inversen Photon-Propagators wird in Anhang B berechnet. Seine graphische Notation lautet:

$$\begin{aligned}
 -(\text{wavy line with } \leftarrow p)^{-1} &= -(\text{wavy line with } \leftarrow p)^{-1} \\
 &+ (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \text{ (diagram of a quark loop)}
 \end{aligned}$$

Da die Gleichung im Wesentlichen aus der Quark-Schleife besteht und diese bereits in [Kuh 97] berechnet worden ist, ist eine neue Berechnung dieser Gleichung überflüssig. Außerdem kann der Darstellung sofort entnommen werden, daß der Beitrag zum inversen Propagator quadratisch in der elektromagnetischen Kopplung  $e_f$  ist. Darüber hinaus besteht auch ein bezüglich der starken Kopplung nicht-störungstheoretischer Ansatz des inversen Propagators noch immer aus einer Potenzreihe in der elektromagnetischen Kopplung. Daher sind alle Beiträge zu möglichen Selbstkonsistenz-Gleichungen immer mindestens von quadratischer Ordnung in der elektromagnetischen Kopplung. Deshalb ist die Behandlung des inversen Photon-Propagators nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

# Kapitel 4

## Der Quark-Antiquark-Photon-Vertex

Eine zentrale Stellung nimmt der Quark-Antiquark-Photon-Vertex (kurz: Quark-Photon-Vertex) in dieser Arbeit ein, dessen DS-Gleichungen in diesem Kapitel auf der Ein-Schleifen-Näherung untersucht werden. Ziel ist es in diesem Kapitel, SK-Gleichungen für den Quark-Photon-Vertex zu ermitteln, die ihn in nullter Ordnung der elektromagnetischen Kopplung beschreiben. Eine selbstkonsistente Behandlung des Quark-Photon-Vertex auf Ein-Schleifen-Niveau ist nur mit den Bethe-Salpeter-resummierten DS-Gleichungen möglich, in denen der einlaufende nackte Vertex durch den entsprechenden vollen Vertex ersetzt wird. Nach einer Diskussion der Bethe-Salpeter-resummierten DS-Gleichungen im fermionischen und photonischen Kanal, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels eine geeignete Näherung auf dem Ein-Schleifen-Niveau angegeben. Es zeigt sich, daß der Ein-Gluon-Austausch die einzige geeignete Näherung für die in der photonischen DS-Gleichung enthaltene  $T'_{F\bar{F}F\bar{F}}$ -Amplitude ist. In den beiden folgenden Abschnitten werden die Schleifen-Berechnungen zu dieser Näherung in beliebiger Eichung durchgeführt, so daß auf die in Kapitel 2.4.3 dargestellte erweiterte Systematik der kompensierenden Pole zurückgegriffen werden muß. Das Kapitel schließt mit der Angabe der SK-Gleichungen auf der niedrigsten Stufe der rationalen Approximation.

### 4.1 Näherung der Bethe-Salpeter-resummierten DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex

Mit Hilfe des “Filtermechanismus” der Bethe-Salpeter-Resummation (siehe Anhang F) kann die DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex im photonischen Kanal (siehe Anhang B) exakt umgeschrieben werden:

$$(4.1)$$



Dabei enthält der Kern  $K_s$  mit Einführen der kompensierenden Pole auch bezüglich der Schattenlinien nur Ein- und Zwei-Teilchen-irreduzible Beiträge. Die elektromagnetische Kopplung  $e_f$  ist bereits herausgekürzt, so daß die linke Seite der Gleichung (4.1) mit der nullten Ordnung in  $e_f$  beginnt. Es werden im folgenden Beiträge in  $K_s$  gesucht, die Terme von nullter Ordnung in  $e_f$  und  $g$  auf der rechten Seite ergeben. Darüber hinaus soll (4.1) ausschließlich auf dem Ein-Schleifen-Niveau betrachtet werden. Eine Analyse des Kerns  $K_s$  (Anhang F) zeigt, daß unter diesen Bedingungen nur der Ein-Gluon-Austausch als Näherung des Kerns in Frage kommt. Da die nachfolgenden Schleifenberechnungen in beliebiger Eichung durchgeführt werden, ist eine Aufteilung der Schleife in eine transversal und longitudinal-projizierte Gluon-Linie sinnvoll. Mit Berücksichtigung der Systematik der kompensierenden Pole (vergleiche Kapitel 2.4.3) resultiert als eine Näherung der Bethe-Salpeter-resummierten DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex im photonischen Kanal:

$$\approx \text{tree-level vertex} - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{loop diagram} \quad (4.2)$$

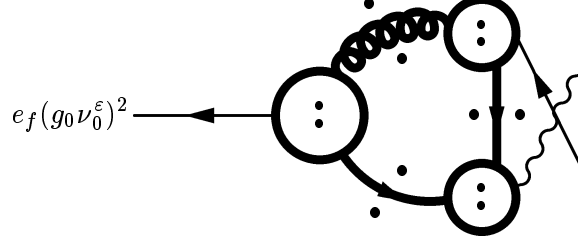
Es wird darauf hingewiesen, daß eine Entschärfung der longitudinalen Gluon-Linie aufgrund der in Kapitel 2.4.3 angeführten Argumentation entfällt. Die Näherung (4.2) beschreibt den Quark-Photon-Vertex unabhängig von der elektromagnetischen Kopplung. Betrachtet man dagegen die äquivalente Formulierung der DS-Gleichung im fermionischen Kanal (siehe Anhang B)

$$= \text{tree-level vertex} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{loop diagram with } T' \quad (4.3)$$

$$+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{loop diagram with } T', \quad (4.4)$$

so zeigt sich, daß die in ihr auftretende Amplitude  $T'_{F\bar{F}AA}$  immer mindestens von der Ordnung  $e_f^2$  ist und daher der zweite Graph, im Rahmen dieser Arbeit, vernachlässigbar kleine Beiträge liefert. Führt man eine Bethe-Salpeter-Resummation der verbleibenden DS-Gleichung mit anschließender Ein-Schleifen-Näherung durch, so kann ebenfalls eine

von  $e_f$  unabhängige Gleichung mit DS-Funktional



gewonnen werden. Diese Schleifenintegrale (gemeint sind das transversal und longitudinal-projizierte Schleifenintegral) sind identisch mit den Integralen in (4.2), so daß die gleichen SK-Gleichungen resultieren. Eine Beschreibung des Quark-Photon-Vertex in nullter Ordnung der elektromagnetischen Kopplung gelingt im fermionischen Kanal nur mit Vernachlässigung der  $T'_{F\bar{F}AA}$ -Amplitude und führt darüber hinaus in Ein-Schleifen-Näherung auf die gleichen Resultate wie (4.2). Damit beschränken sich die Möglichkeiten auf ein-Schleifen-Niveau und in nullter Ordnung der elektromagnetischen Kopplung SK-Gleichungen mit photonischen Vertexparametern zu gewinnen auf nur eine Gleichung. In dieser Arbeit stützen sich die folgenden Betrachtungen auf die Näherung im photonischen Kanal. Bei der Auswertung der SK-Gleichungen (Kapitel 5) stößt man daher auf das übliche Problem, daß wegen der Verkopplung der DS-Gleichungen kein Vertex aus “seiner” eigenen Einzelgleichung allein vollständig bestimmt werden kann.

## 4.2 Berechnung der Schleifenintegrale der transversal-projizierten Schleife

Mit Berücksichtigung der kompensierenden Pole zerfällt das (bezüglich des Gluon-Impulses) transversal-projizierte Schleifenintegral in acht unterschiedlich modifizierte Schleifenintegrale, welche alle (nach Abschnitt 2.4.4) den störungstheoretischen Divergenzgrad annehmen: Sie divergieren maximal logarithmisch. Aufgrund der in Anhang D.3 eingeführten *formalen Feynman-Parametrisierung* für rein logarithmisch divergente Integrale kann die Berechnung der divergenten Anteile der Schleifenintegrale deutlich vereinfacht werden. (Wie bereits erwähnt, können nur die divergenten Anteile die DS-Selbstkonsistenz formulieren.)

Mit Hilfe der erweiterten Feynman-Regeln (Kapitel 2.3) und Beachtung der Systematik kompensierender Pole (Kapitel 2.4) kann die diagrammatische Form der acht Schleifenin-

tegrale angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 & (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim k \rightarrow \text{[Diagram 1]} \downarrow q = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 2]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 3]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 4]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 5]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 6]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 7]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sim \text{[Diagram 8]} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Die divergenten Anteile dieser acht Schleifenintegrale bilden kompliziertere Modifikationen von zwei Integraltypen, die in dieser Arbeit als *Basisintegrale der transversalen Schleife* bezeichnet werden. Sie sind in Anhang D.4 ausführlich berechnet, so daß es an dieser Stelle ausreicht, die acht Integrale auf die Basisintegrale zurückzuführen. Da in dieser Arbeit erstmalig Lorentz-Strukturen der Form  $\frac{k^\nu}{\Lambda}$  in Schleifenintegralen mitgeführt werden, wird dem Verhalten der berechneten Divergenzen im perturbativen Limes besondere Beachtung geschenkt. Daher werden nach jeder Schleifenberechnung die niedrigsten Ordnungen der divergenten Anteile in  $\Lambda$  für  $r = 1$  entwickelt. Diese sind  $\frac{1}{\Lambda}$  und  $\Lambda^0$ . Um den Einfluß der Terme proportional zu  $\frac{k^\nu}{\Lambda}$  auf das Verhalten der Divergenzen im perturbativen Limes vollständig zu erfassen, werden *erst im Anschluß an die Analyse der Divergenzen* die in

Kapitel 2 angegebenen Identitäten

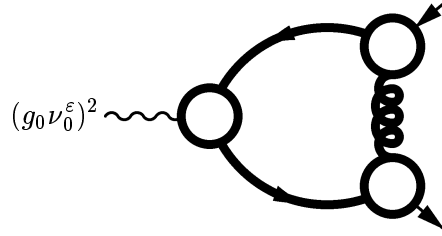
$$H_{110}^{[1]} = H_{101}^{[1]} = H_{011}^{[1]} = 0 \quad (4.6)$$

verwendet. Damit dieses Vorgehen nicht zu Verwirrungen führt, werden die Untersuchungen der Schleifen in *Berechnung des Integrals* und *Analyse der Divergenz* aufgeteilt. Die Untersuchungen der einzelnen Schleifen erfolgt in der durch (4.5) definierten Reihenfolge. Die Benennung der Impulse ist dem Diagramm der linken Seite von (4.5) angepaßt.

### ***Untersuchung der ersten Schleife:***

#### **Berechnung des Integrals:**

Zu berechnen ist folgendes Diagramm:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T1}(p, k) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.7)$$

Mit Verwendung der Approximanten der erweiterten Feynman-Regeln (siehe Kapitel 2) erhält man die analytische Darstellung des ersten Schleifenintegrals:

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{T1}(p, k) \\ &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\sigma}(q) \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\mu}(\not{p}, \not{p} - \not{q}, q^2)}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,s-})} \\ & \quad \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2s})} N_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu'}(\not{p} - \not{q}, \not{p} - \not{k} - \not{q}, k) \\ & \quad \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,s-})} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2s})} \\ & \quad \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\sigma}(\not{p} - \not{k} - \not{q}, \not{p} - \not{k}, q^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + u_{r,s+} \Lambda^2)(q^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
&= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{q^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((p-q)^2 + \kappa_{r,2s}^2)} \\
&\quad \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((p-q)^2 + \kappa_{r,s+}^2) ((p-q)^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + u_{r,s+} \Lambda^2) (q^2 + u_{r,s-} \Lambda^2)} \\
&\quad \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((p-k-q)^2 + \kappa_{r,s+}^2) ((p-k-q)^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((p-k-q)^2 + \kappa_{r,2s}^2)} \\
&\quad \left\{ \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+2m+n+l,4r} p^\lambda (q^2)^m C_{\lambda mn l}^{[r]} \gamma^\mu (p-q)^l \right\} \\
&\quad \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (p-q-\kappa_{r,s+})(p-q-\kappa_{r,s-}) \prod_{s=1}^r (p-q-\kappa_{r,2s}) \left\{ \sum_{\eta=0}^{2r} \Lambda^\eta \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \delta_{\eta+i+j,2r} (p-q)^i \right. \\
&\quad \left. \left( F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^{\nu'} + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right) (p-k-q)^j \right\} \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (p-k-q-\kappa_{r,s+})(p-k-q-\kappa_{r,s-}) \\
&\quad \prod_{s=1}^r (p-k-q-\kappa_{r,2s}) \left\{ \sum_{\delta=0}^{4r} \Lambda^\delta \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \delta_{\delta+2m'+n'+l',4r} \right. \\
&\quad \left. (p-k-q)^{n'} (q^2)^{m'} C_{\delta m' n' l'}^{[r]} \gamma^\sigma (p-k)^{l'} \right\}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Ein Abzählen der höchsten Nenner- und Zähler-Impulspotenzen zeigt, daß das Integral maximal logarithmisch divergieren kann. Die Divergenzbedingung (diese ist in Kapitel 3.2 eingeführt) ist nur für  $m = m' = l = i = j = n' = r$  erfüllt. Wegen der logarithmischen Divergenz ist die Methode der formalen Feynman-Parametrisierung ausreichend. Eine ausführliche Erläuterung zur Integration logarithmisch divergenter Schleifenintegrale befindet sich in Anhang D.3. Die auftretenden matrixwertigen Impulspotenzen werden nach der höchsten  $q$ -Potenz entwickelt (siehe Anhang C). Es folgt für die divergenten Anteile:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{T1}(p, k) &= \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{12r-4}}{[(q-z\bar{p})^2 + R^2]^{6r+4}} (q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma) \\
&\quad \left\{ \sum_{n=0}^r \Lambda^{r-n} C_{r-nrnr}^{[r]} p^n \gamma^\mu q \right\} q \left\{ \left( F_{0rr}^{[r]} \gamma^{\nu'} + H_{0rr}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right) q \right\} q \\
&\quad \left\{ q \gamma^\sigma \sum_{l'=0}^r \Lambda^{r-l'} C_{r-l'r r l'}^{[r]} (p-k)^{l'} \right\} + \text{KONV}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Um den Nenner auf die Form der Standardformel (Anhang D.2) zu führen, wird der Integrationsimpuls linear transformiert:  $q \rightarrow q + z\bar{p}$ . Die Divergenzen werden durch die höchste  $q$ -Potenz des Zähler-Polynoms gebildet:

$$\hat{I}_{T1}(p, k) = \sum_{n=0}^r \Lambda^{r-n} C_{r-nrnr}^{[r]} p^n \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{12r}}{[(q-z\bar{p})^2 + R^2]^{6r+4}}$$

$$\left\{ F_{0rr}^{[r]}(q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma) \gamma^\mu \not{q} \gamma^{\nu'} \not{q} \gamma^\sigma + H_{0rr}^{[r]}(q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma) \gamma^\mu \not{q} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \not{q} \gamma^\sigma \right\} \\ \sum_{l'=0}^r \Lambda^{r-l'} C_{r-l'rrl'}^{[r]} (\not{p} - \not{k})^{l'} + \text{KONV} . \quad (4.11)$$

Das Integral in (4.11) besteht aus zwei unterschiedlichen Integraltypen, die beide die Gestalt der Basisintegrale (D.42) und (D.48) aus Anhang D annehmen. Mit diesen Basisintegralen in  $D = 4 - 2\varepsilon$ -Dimensionen können die divergenten Anteile von  $I_{T1}(p, k)$  angegeben werden. Insbesondere folgt mit dem Feynman-Parameterintegral  $\int dF = 1$  das Resultat:

$$\hat{I}_{T1}(p, k) = 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\ C_{r-nrrnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} C_{r-l'rrl'}^{[r]} + \text{KONV} . \quad (4.12)$$

Die divergenten Anteile werden von der Lorentz-Struktur  $H_{\eta j}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  des Quark-Photon-Vertex erzeugt. Dagegen trägt seine Lorentz-Struktur  $F_{\eta j}^{[r]}$  nicht zur Bildung der Divergenz bei.

### Analyse der Divergenzen:

Es werden im folgenden die divergenten Anteile von  $I_{T1}(p, k)$  mit der in Kapitel 2.4 geschilderten Methode klassifiziert. Es wird nochmals angemerkt, daß bei der Analyse der divergenten Anteile nur die *niedrigsten beiden Ordnungen in  $\Lambda$*  berücksichtigt werden. Das Verfahren wird an dieser Stelle exemplarisch für die noch folgenden Rechnungen in  $r = 1$  vorgestellt:

Die divergenten Anteile von (4.12) und auch die noch zu berechnenden Divergenzen lassen sich immer in die Form

$$\hat{I} = 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=1}^r \sum_{l'}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^\nu}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} K^{[r]}(n, l') \quad (4.13)$$

bringen, wobei  $K^{[r]}(n, l')$  die Struktur der Vertexkoeffizienten bezeichnet und über keine  $\Lambda$ -Abhängigkeiten verfügt. In (4.12) ist beispielsweise  $K^{[1]}(n, l') = C_{1-n1n1}^{[1]} H_{011}^{[1]} C_{1-l'11l'}^{[1]}$ . In  $r = 1$  und mit  $t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) = \delta^{\nu\nu'}$  folgt für die divergenten Anteile:

$$I = 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left\{ \frac{\mathbb{1}}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} \Lambda k^\nu K^{[1]}(0, 0) \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} \right. \\ + \frac{\mathbb{1}}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (\not{p} - \not{k}) k^\nu K^{[1]}(0, 1) \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} + \frac{\mathbb{1}}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} \not{p} k^\nu K^{[1]}(1, 0) \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} \\ \left. + \frac{\mathbb{1}}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} \not{p} \frac{k^\nu}{\Lambda} (\not{p} - \not{k}) K^{[1]}(1, 1) \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} \right\} . \quad (4.14)$$

Werden die matrixwertigen Zähler-Impulse in (4.14) in die Form der Nenner-Impulse umgeschrieben, d.h.

$$\not{p} = (\not{p} + w_{1,2}\Lambda) - w_{1,2}\Lambda \quad (4.15)$$

und

$$\not{p} - \not{k} = (\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda) - w_{1,2}\Lambda , \quad (4.16)$$

lassen sich Nenner und Zähler matrixwertig gegeneinander kürzen<sup>1</sup>. Im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  verbleibt schließlich:

$$\begin{aligned}
 I(\Lambda \rightarrow 0) = & 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left\{ \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} K^{[1]}(0, 1) + \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} K^{[1]}(1, 0) \right. \\
 & + \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] K^{[1]}(1, 1) \\
 & \left. + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1 + \Lambda}\right) \right\}. \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Neben einem Term, der im perturbativen Limes verschwindet und daher prinzipiell selbstkonsistent behandelbar ist, werden auch nicht-verschwindende Terme produziert. Drei Beiträge in (4.17) geben endliche Resultate, die mit der störungstheoretischen Divergenz zu vergleichen sind. Darüber hinaus entwickelt das transversal-projizierte Schleifenintegral Terme, welche im perturbativen Limes divergieren. Diese Terme werden in Anlehnung an [Kuh 97] als *divergente Defekterme* bezeichnet. Sie liefern weder Beiträge zu den SK-Gleichungen, noch können sie mit der störungstheoretischen Divergenz verglichen werden. Dagegen werden Terme die einen endlichen Beitrag liefern *konvergente Defekterme* genannt. Sie modifizieren die störungstheoretische Divergenz.

Mit (4.17) lassen sich die divergenten Anteile von (4.7) im perturbativen Limes angeben:

$$\begin{aligned}
 I_{T1}(p, k) = & 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} C_{1110}^{[1]} H_{011}^{[1]} C_{0111}^{[1]} \\
 & + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} C_{0111}^{[1]} H_{011}^{[1]} C_{1110}^{[1]} \\
 & + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c - 1} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] C_{0111}^{[1]} H_{011}^{[1]} C_{0111}^{[1]} \\
 & + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1 + \Lambda}\right). \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Das transversal-projizierte Schleifenintegral  $I_{T1}$  erzeugt Terme der Ordnung  $\frac{1}{\Lambda}$ , also Terme, die im perturbativen Limes divergieren. Es ist für den weiteren Verlauf der Betrachtungen zum Quark-Photon-Vertex von Bedeutung zu erkennen, daß diese divergenten Defekterme in  $I_{T1}(p, k)$  ausschließlich durch Terme des Integranden proportional zu  $\frac{k^\nu}{\Lambda}$  erzeugt werden. Diese sind Teil der nicht-perturbativen Approximation des Quark-Photon-Vertex und daher immer mit einem Faktor  $H_{ij}^{[r]}$  verbunden. Dagegen werden in transversaler Projektion im ersten Schleifenintegral keine Divergenzen erzeugt, die auf die Lorentz-Struktur des Quark-Photon-Vertex der Form  $F_{ij}^{[r]} \gamma^\nu$  zurückgeführt werden können.

Werden die Identitäten (4.6) in der Darstellung des perturbativen Limes (4.18) verwendet, so zeigt sich, daß das transversal-projizierte Schleifenintegral  $I_{T1}(p, k)$  in  $r = 1$  keine Divergenzen für  $\Lambda \rightarrow 0$  erzeugt. Es verbleiben auch keine Terme in den divergenten Anteilen,

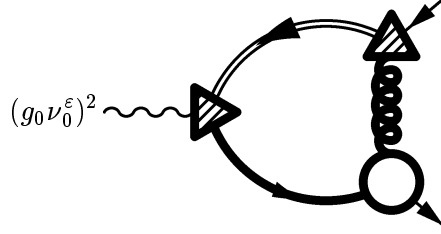
<sup>1</sup>Mit der Benennung “matrixwertiges kürzen” soll, wie schon in Kapitel 3 bemerkt, nur zum Ausdruck gebracht werden, daß es sich bei den betrachteten Größen um Matrizen handelt, die ausmultipliziert die Einheitsmatrix ergeben:  $\not{p}^{-1} \not{p} = \mathbb{1}$ .

die selbstkonsistent behandelt werden können.

### *Analyse der zweiten Schleife:*

#### Berechnung des Integrals:

Im folgenden wird das Diagramm



berechnet. Es enthält einen Schattenpol-Austausch auf der inneren fermionischen Propagator-Linie. Wegen der in dieser Arbeit gewählten Vorzeichenkonvention sollte an dieser Stelle betont werden, daß dieser Ein-Schattenpol-Graph von dem ersten Diagramm abgezogen wird. Dieses ist nicht an der graphischen Darstellung des Schleifenintegrals ersichtlich. Mit der Systematik der kompensierenden Pole aus Kapitel 2.4.3 kann die analytische Form dieses Diagramms angegeben werden:

$$I_{T2}(p, k) = \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T2}(p, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.19)$$

mit:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{T2}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{q^2} \\ &\quad \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\mu}(\not{p}, \not{p} - \not{q}, q^2)}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,s-})} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2s})} \\ &\quad N_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu'}(\not{p} - \not{q}, -\kappa_{r,2t}, k) \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2t}} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\sigma}(-\kappa_{r,2t}, \not{p} - \not{k}, q^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + u_{r,s+} \Lambda^2)(q^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \quad (4.20) \\ &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{q^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \\ &\quad \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((p-q)^2 + \kappa_{r,2s}^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((p-q)^2 + \kappa_{r,s+}^2) ((p-q)^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \\ &\quad \frac{1}{(p-k-q)^2 + \kappa_{r,2t}^2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+2m+n+l, 4r} \not{p}^n (q^2)^m C_{\lambda m n l}^{[r]} \gamma^\mu (\not{p} - \not{q})^l \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{q} - \kappa_{r,s+}) (\not{p} - \not{q} - \kappa_{r,s-}) \prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{q} - \kappa_{r,2s}) \\
 & \left\{ \sum_{\eta=0}^{2r} \Lambda^\eta \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \delta_{\eta+i+j,2r} (\not{p} - \not{q})^i \right. \\
 & \left. \left( F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^{\nu'} + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right) (-\kappa_{r,2t})^j \right\} (\not{p} - \not{k} - \not{q} - \kappa_{r,2t}) \\
 & \left\{ \sum_{\delta=0}^{4r} \Lambda^\delta \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \delta_{\delta+2m'+n'+l',4r} \right. \\
 & \left. (-\kappa_{r,2t})^{n'} (q^2)^{m'} C_{\delta m' n' l'}^{[r]} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k})^{l'} \right\} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Das Integral ist maximal logarithmisch divergent, so daß die Divergenzbedingung nur für  $m = l = i = m' = r$  erfüllt werden kann. Mit der Methode der formalen Feynman-Parametrisierung (Anhang D.3) werden die Nennerprodukte zusammengefaßt. Durch eine Entwicklung nach der höchsten Potenz des Integrationsimpulses  $q$  und mit Verwendung der elementaren Formeln der  $\gamma$ -Algebra (siehe Anhang C) können die Divergenzen von  $\hat{I}_{T2}(p, k)$  isoliert werden:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{T2}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{n=0}^r \Lambda^{r-n} \sum_{j=0}^r \Lambda^{r-j} \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n'-l'} (-\kappa_{r,2t})^{n'+j} \\
 & C_{r-nrrnr}^{[r]} C_{2r-n'-l'rn'l'}^{[r]} \not{p}^n \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{8r-2}}{[(q - z\bar{p})^2 + R^2]^{4r+4}} \\
 & (q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma) \left\{ F_{r-jrj}^{[r]} \gamma^\mu (q^2 \not{q}) \gamma^{\nu'} \not{q} \gamma^\sigma + H_{r-jrj}^{[r]} \gamma^\mu (q^2 \not{q}) \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \not{q} \gamma^\sigma \right\} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\
 & + \text{KONV} . \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Anschließend wird der Integrationsimpuls  $q$  linear transformiert  $q \rightarrow q + z\bar{p}$ . Der Nenner in (4.22) nimmt dadurch die Form des Nenners der Standardformel für die Impulsintegration an (siehe Anhang D.2). Die Divergenzen werden von der höchsten  $q$ -Potenzen gebildet. Isoliert man die Divergenzen, so kann das Integral  $\hat{I}_{T2}(p, k)$  auf die Basisintegrale zurückgeführt werden (vergleiche dazu Anhang D.4). Mit dem Feynman-Parameterintegral  $\int dF = 1$  ergeben sich schließlich die Divergenzen in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen zu:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{T2}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\
 & \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{2r-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{j+n'} C_{r-nrrnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} C_{2r-n'-l'rn'l'}^{[r]} \\
 & + \text{KONV} . \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Die divergenten Anteile werden ausschließlich von der Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  des Quark-Photon-Vertex gebildet. Im folgenden werden die niedrigsten Ordnungen in  $\Lambda$  aus (4.23) für  $r = 1$  angegeben.

### Analyse der Divergenzen:

Die Klassifikation der Divergenzen erfolgt im perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ). Die Abspaltung der nicht-verschwindenden Beiträge in  $\hat{I}_{T2}(p, k)$  erfolgt wie bereits oben beschrieben. Mit  $\kappa_{r,2s} = w_{r,2s}\Lambda$  und  $\kappa_{r,s+1}^2 = w_{r,s+1}\Lambda^2$  erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
I_{T2}(p, k) = & 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c - 1} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} \\
& (-w_{1,3})^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} C_{1110}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} \\
& (-w_{1,3})^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} C_{0111}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} C_{2-n'1n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] \\
& (-w_{1,3})^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} C_{0111}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
& + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1 + \Lambda}\right). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

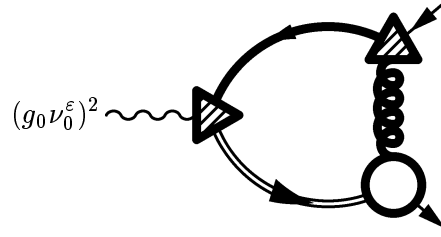
Nachdrücklich wird darauf hingewiesen, daß alle im perturbativen Limes nicht-verschwindenden Beiträge von der Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{1}{\Lambda}$  des Quark-Photon-Vertex erzeugt werden. Verwendet man die Restriktionen (4.6), so verschwindet die Divergenz auf niedrigster Approximationsstufe vollständig. Es verbleiben ebenfalls keine selbstkonsistent behandelbare Beiträge.

Die zwei folgenden Diagramme enthalten ebenfalls einen Schattenpol-Austausch auf einer innern Propagator-Linie, so daß die Systematik dieser Pole der Systematik der letzten Schleifenberechnung entspricht. Es werden daher nur die Resultate der beiden Schleifenberechnungen notiert:

### *Untersuchung der dritten Schleife:*

### Berechnung des Integrals:

Zu berechnen ist folgende Schleife:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T3}(p, k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.25)$$

Mit den divergenten Anteilen:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{T3}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\ &\quad \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2s+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \Lambda^{2r-l-i} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} C_{2r-n-lrnl}^{[r]} H_{r-ii}^{[r]} C_{2r-l'rrl'}^{[r]} \\ &\quad + KONV. \end{aligned} \quad (4.26)$$

### Analyse der Divergenzen:

Der perturbative Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  wird genau wie (4.24) von konvergenten und divergenten Defektt termen gebildet. Auch diese Terme werden ausschließlich durch die Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  geprägt:

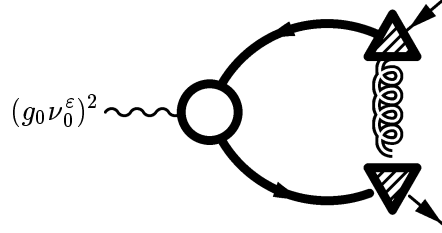
$$\begin{aligned} I_{T3}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2}{N_c - 1} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} \\ &\quad (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} C_{2-l10l}^{[1]} H_{1-ii1}^{[1]} C_{0111}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2}{N_c - 1} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} \\ &\quad (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} C_{1-l11l}^{[1]} H_{1-ii1}^{[1]} C_{1110}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2}{N_c - 1} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] \\ &\quad (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} C_{1-l11l}^{[1]} H_{1-ii1}^{[1]} C_{0111}^{[1]} \\ &\quad + KONV + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1 + \Lambda}\right) \Big\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Mit der Forderung nach Reproduzierbarkeit der perturbativen Vertexfunktionen, d.h.  $H_{011}^{[1]} = H_{110}^{[1]} = H_{101}^{[1]} = 0$ , verschwinden alle divergenten Anteile von  $I_{T3}(p, k)$  auf niedrigsten Niveau der rationalen Approximation.

### *Untersuchung der vierten Schleife:*

#### Berechnung des Integrals:

Als letztes Ein-Schattenpol-Austauschdiagramm wird



von dem ersten Diagramm abgezogen. Das Resultat der Schleifenberechnung lautet:

$$I_{T4}(p, k) = \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T4}(p, k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.28)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{I}_{T4}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\ &\quad \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2s+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{m=0}^r \sum_{m'=0}^r \Lambda^{2r-m-m'} (-\kappa_{r,2t})^{m+m'} \\ &\quad C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} C_{3r-2m'-l'm'r}^{[r]} + \text{KONV} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### Analyse der Divergenzen

Im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  bilden sich auf niedrigster Stufe der rationalen Approximation die folgenden Terme aus:

$$\begin{aligned} I_4(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} \\ &\quad (-w_{1,3})^{-1} \sum_{m=0}^1 \sum_{m'=0}^1 (-w_{1,2})^{m+m'} C_{3-2mm01}^{[1]} H_{011}^{[1]} C_{2-2m'm'11}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} \\ &\quad (-w_{1,3})^{-1} \sum_{m=0}^1 \sum_{m'=0}^1 (-w_{1,2})^{m+m'} C_{2-2mm11}^{[1]} H_{011}^{[1]} C_{3-2m'm'10}^{[1]} \end{aligned}$$

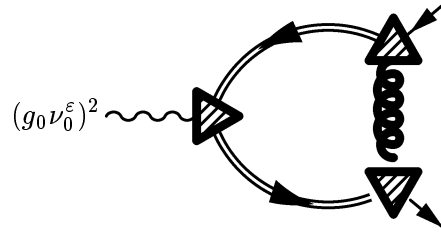
$$\begin{aligned}
 & +3\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\left[\frac{1}{\Lambda}k^\nu-\frac{w_{1,2}(2\not{p}-\not{k})}{(\not{p}+w_{1,2}\Lambda)(\not{p}-\not{k}+w_{1,2}\Lambda)}\right] \\
 & (-w_{1,3})^{-1}\sum_{m=0}^1\sum_{m'=0}^1(-w_{1,2})^{m+m'}C_{2-2mm11}^{[1]}H_{011}^{[1]}C_{2-2m'm'11}^{[1]} \\
 & +\text{KONV}+\mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

Es können analog zu den vorherigen Rechnungen, drei Strukturen als konvergente und divergente Defekttterme identifiziert werden. Alle im perturbativen Limes nicht-verschwindenden Beiträge werden von der selben Lorentz-Struktur des Quark-Photon-Vertex gebildet. Auch in dieser Schleife verbleiben in  $r = 1$  keine Divergenzen wenn die Identitäten (4.6) verwendet werden.

### Untersuchung der fünften Schleife:

#### Berechnung des Integrals:

Das folgende Diagramm enthält zwei Schattenpol-Austauschdiagramme und wird daher zum ersten Diagramm addiert. Die beiden Nennerprodukte der äußeren fermionischen Beine der Schleife lassen sich aus dem Integral herausziehen:



$$=\delta^{ij}\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\left(t^{\nu\nu'}(k)+l^{\nu\nu'}(k)\right)\frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r(\not{p}+\kappa_{r,2s})}\hat{I}_{T5}(p,k)\frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r(\not{p}-\not{k}+\kappa_{r,2s})} \tag{4.31}$$

Mit der in Kapitel 2.4.3 dargestellten Systematik der kompensierenden Pole kann die analytische Form des Integrals angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{T5}(p,k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
 & (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{q^2} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\mu}(\not{p}, -\kappa_{r,2t}, q^2)}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2t}} \\
 & N_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu'}(-\kappa_{r,2t}, -\kappa_{r,2t'}, k) \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2t'}} \frac{N_{F\bar{F}V_T}^{[r,0]\sigma}(-\kappa_{r,2t'}, \not{p} - \not{k}, q^2)}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + u_{r,s}\Lambda^2)(q^2 + u_{r,s}\Lambda^2)}. \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Geschicktes Erweitern der matrixwertigen Nennerprodukte führt auf eine skalare Nennerstruktur. Durch Abzählen der Impuls-Potenzen von Nenner- und Zählerpolynom kann der Divergenzgrad des Schleifenintegrals ermittelt werden: das Integral ist maximal logarithmisch divergent und die Divergenzbedingung ist nur für  $m = m' = r$  erfüllt. Nach Durchführung der formalen Feynman-Parametrisierung (Anhang D.3) der skalaren Nennerstruktur und der Entwicklung nach den divergenzerzeugenden Zählerpotenzen (siehe dazu Anhang C) des Integrationsimpulses  $q$  ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{T5}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \Lambda^{2r-n-l} (-\kappa_{r,2t})^n \\
&\quad \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \Lambda^{2r-i-j} (-\kappa_{r,2t})^i (-\kappa_{r,2t'})^j \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n'-l'} (-\kappa_{r,2t'})^{n'} \\
&\quad C_{2r-n-lrnl}^{[r]} C_{2r-n'-l'rnl'}^{[r]} \not{p}^n \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r}}{[(q - z\tilde{p})^2 + R^2]^{2r+4}} \\
&\quad (q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma) \left\{ \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} - \kappa_{r,2t}) \left( F_{2r-i-jij}^{[r]} \gamma^{\nu'} + H_{2r-i-jij}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right) \right. \\
&\quad \left. (\not{p} - \not{k} - \not{q} - \kappa_{r,2t'}) \gamma^\sigma \right\} (\not{p} - \not{k})^{l'} + \text{KONV} . \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Nach der linearen Transformation des Integrationsimpulses  $q \rightarrow q + z\tilde{p}$  hat der Nenner die Gestalt der Standardformel für die Impulsintegration. Die divergenten Anteile werden neu isoliert und mit Hilfe der elementaren Identitäten der euklidischen  $\gamma$ -Algebra (siehe dazu Anhang C) auf die Form der Basisintegrale (vergleiche mit Anhang D) zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{T5}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2s+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \Lambda^{2r-n-l} (-\kappa_{r,2t})^n \\
&\quad \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \Lambda^{2r-i-j} \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n'-l'} (-\kappa_{r,2t})^{n+i} (-\kappa_{r,2t'})^{n'+j} \\
&\quad C_{2r-n-lrnl}^{[r]} C_{2r-n'-l'rnl'}^{[r]} \not{p}^n \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r}}{[q^2 + R^2]^{2r+4}} \\
&\quad (q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma) \left\{ F_{2r-i-jij}^{[r]} \gamma^\mu \not{q} \gamma^{\nu'} \not{q} \gamma^\sigma + H_{2r-i-jij}^{[r]} \gamma^\mu \not{q} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \not{q} \gamma^\sigma \right\} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\
&\quad + \text{KONV} . \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Mit den Basisintegralen in  $D = 4 - 2\varepsilon$ -Dimensionen (D.44) und (D.50) erhält man die Divergenzen von  $\hat{I}_{T5}(p, k)$ . Mit dem Feynman-Parameterintegral  $\int dF = 1$  (Anhang D.1) lassen sie sich angeben:

$$\hat{I}_{T5}(p, k) = 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
 & \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} \\
 & C_{2r-n-lrnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} C_{2r-n'-l'rn'l'}^{[r]} + \text{KONV} . \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Die divergenten Anteile der Schleife werden ausschließlich von der Lorentz-Struktur des Photon-Vertex  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{1}{\Lambda}$  erzeugt.

### Analyse der Divergenzen:

Abschließend wird das Verhalten der Divergenz von  $I_{T5}(p, k)$  im perturbativen Limes untersucht. Nachdem die Impulsstrukturen des Zählers für  $r = 1$  in die entsprechenden Nennerstrukturen entwickelt sind, können Nenner und Zähler ausmultipliziert werden. Im perturbativen Limes verbleibt ein nicht-verschwindender Anteil von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
 I_{T5}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
 & \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} C_{2-l10l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
 & + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
 & \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} C_{1-l11l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} C_{2-n'1n'0}^{[1]} \\
 & + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
 & \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} C_{1-l11l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
 & + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right) . \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Die gesamte Divergenz von  $I_{T5}(pk)$  wird durch die Existenz der Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  des Quark-Photon-Vertex geformt. Den perturbativen Limes “überleben” insgesamt drei Strukturen. Da sie in diesem Limes konvergente und divergente Beiträge liefern, werden sie den konvergenten Defekttermen und entsprechend den divergenten Defekttermen zugeordnet.

Werden die Identitäten (4.6) verwendet, so verschwindet ein großer Teil von (4.36) und nur Terme proportional zu  $H_{200}^{[1]}$  sind von Null verschieden:

$$I_{T5}(p, k) = 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} C_{2-l10l}^{[1]} H_{200}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} C_{1-l11l}^{[1]} H_{200}^{[1]} C_{2-n'1n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} C_{1-l11l}^{[1]} H_{200}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
& + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

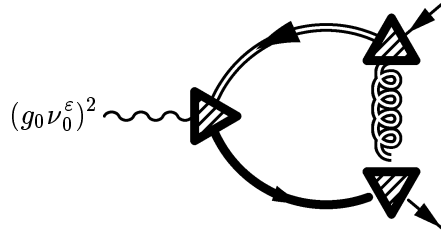
Es muß an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß in (4.37) Terme auftreten, die selbstkonsistent behandelbar sind. Diese unterliegen keiner Restriktion und werden in den SK-Gleichungen berücksichtigt.

Die beiden folgenden Diagramme enthalten jeweils zwei Schattenpol-Linien und werden in gleicher Weise wie  $I_{T5}(p, k)$  berechnet. Daher werden an dieser Stelle nur die Ergebnisse der Schleifenberechnungen präsentiert:

#### **Analyse der sechsten Schleife:**

##### **Berechnung der Schleife:**

Zu berechnen ist folgendes Schleifenintegral:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T6}(p, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \tag{4.38}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{T6}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\
& \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t'+1}\Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (u_{r,2s}\Lambda^2 - u_{r,2t'}\Lambda^2)^2}
\end{aligned}$$



$$\sum_{m=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{6r-2m-2m'-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{n'+j} (-u_{r,2t} \Lambda^2)^{m+m'} \\ C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} C_{4r-2m'-n'-l'm'n'l'}^{[r]} + \text{KONV} . \quad (4.39)$$

### Analyse der Divergenzen:

Im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  findet man die Strukturen:

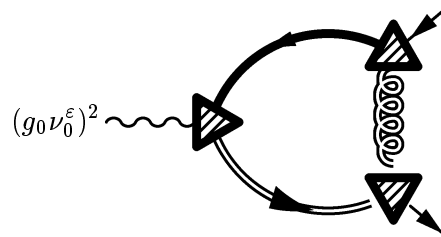
$$I_{T6}(p, k) = 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\ \sum_{m=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{n'+j} (-u_{1,2})^{m+m'} C_{3-2mm0}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\ + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\ \sum_{m=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{n'+j} (-u_{1,2})^{m+m'} C_{2-2mm11}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} C_{4-2m'-n'm'n'0}^{[1]} \\ + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\ \sum_{m=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{n'+j} (-u_{1,2})^{m+m'} C_{2-2mm11}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\ + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right) . \quad (4.40)$$

Es bleiben drei Terme im perturbativen Limes bestehen, die alle als divergente bzw. konvergente Defektterme identifiziert werden können. Alle im perturbativen Limes von Null verschiedenen Beiträge werden durch die Lorentz-Struktur proportional zu  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{1}{\Lambda}$  gebildet. Die gleiche Erkenntnis kann auch aus der folgenden Schleife gewonnen werden:

### *Untersuchung der siebten Schleife:*

#### Berechnung des Integrals:

Als letztes Diagramm mit zwei Schattenpolen auf den internen Linien wird folgendes Diagramm berechnet.



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T7}(p, k) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.41)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{I}_{T7}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\ &\quad \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t'+1} \Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (u_{r,2s} \Lambda^2 - u_{r,2t'} \Lambda^2)^2} \\ &\quad \sum_{m=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{l'=0}^r \sum_{m'=0}^r \Lambda^{6r-2m-2m'-l-i} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-u_{r,2t'} \Lambda^2)^{m+m'} \\ &\quad C_{4r-2m-n-lmnl}^{[r]} H_{r-ii}^{[r]} C_{3r-2m'-l'm'r'l'}^{[r]} + \text{KONV} \end{aligned} \quad (4.42)$$

### Analyse der Divergenz:

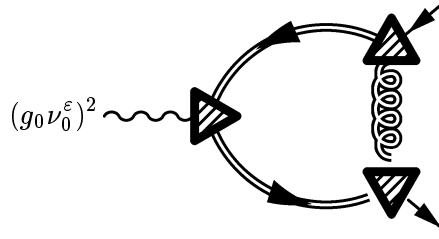
Den perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  bilden die folgenden Strukturen:

$$\begin{aligned} I_{T7}(p, k) &= 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\ &\quad \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{l'=0}^1 \sum_{m'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-u_{1,2})^{m+m'} C_{4-2m-lm0l}^{[1]} H_{1-ii1}^{[1]} C_{2-2m'm'11}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\ &\quad \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{l'=0}^1 \sum_{m'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-u_{1,2})^{m+m'} C_{3-2m-lm1l}^{[1]} H_{1-ii1}^{[1]} C_{3-2m'm'10}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\ &\quad \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{l'=0}^1 \sum_{m'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-u_{1,2})^{m+m'} C_{3-2m-lm1l}^{[1]} H_{1-ii1}^{[1]} C_{2-2m'm'11}^{[1]} \\ &\quad + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

### *Untersuchung der achten Schleife:*

### Berechnung des Integrals:

Zu berechnen bleibt schließlich noch folgendes Diagramm:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{T8}(p, k) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.44)$$

Die Nennerprodukte als Modifikation der äußeren fermionischen Beine der Quark-Gluon-Vertices lassen sich aus dem Integral herausziehen (siehe oben). Auf allen inneren Linien propagieren Schattenpole. Das Diagramm wird vom ersten Diagramm subtrahiert. Mit Beachtung der in Kapitel 2 eingeführten Systematik der kompensierenden Pole lautet die analytische Form des Schleifenintegrals:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{T8}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\ &\quad \sum_{t''=1}^r \frac{(-u_{r,t''}\Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t''}^r (u_{r,2s}\Lambda^2 - u_{r,2t''}\Lambda^2)^2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{q^2} \\ &\quad N_{FFV_T}^{[r,0]\mu}(\not{p}, -\kappa_{r,2t}, -u_{r,2t''}\Lambda^2) \frac{\mathbb{I}}{\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2t}} N_{FFA}^{[r,0]\nu'}(-\kappa_{r,2t}, -\kappa_{r,2t'}, k) \\ &\quad \frac{\mathbb{I}}{\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2t'}} \frac{N_{FFV_T}^{[r,0]\sigma}(-\kappa_{r,2t'}, \not{p} - \not{k}, -u_{r,2t''}\Lambda^2)}{(q^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nach Durchführung der formaler Feynman-Parametrisierung (siehe dazu Anhang D.3) des skalaren Nenners können die divergenten Anteile des Integrals mit Verwendung der Identitäten der Algebra der  $\gamma$ -Matrizen (Anhang C) auf die Basisintegrale zurückgeführt werden (vergleiche mit Anhang D.4). Mit den Basisintegralen (D.45) und (D.51) ergibt sich schließlich in  $D = 4 - 2\epsilon$ -Dimensionen:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{T8}(p, k) &= 3\Pi(\epsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\ &\quad \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \sum_{t''=1}^r \frac{(-u_{r,2t''+1}\Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t''}^r (u_{r,2s}\Lambda^2 - u_{r,2t''}\Lambda^2)^2} \\ &\quad \sum_{m=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{8r-2m-2m'-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} (-u_{r,2t''}\Lambda^2)^{m+m'} \\ &\quad C_{4r-2m-n-lmnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} C_{4r-2m'-n'-l'm'n'l'}^{[r]} \\ &\quad + \text{KONV.} \end{aligned} \quad (4.46)$$

### Analyse der Divergenz:

Abschließend wird das Verhalten der berechneten Divergenz im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  untersucht. Nach dem oben beschriebenen Verfahren können die Terme in niedrigster Ordnung in  $\Lambda$  (d.h. Terme der Ordnung  $\frac{1}{\Lambda}$  und  $\Lambda^0$ ) abgespalten werden:

$$\begin{aligned}
I_{T8}(p, k) = & 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} (-u_{1,2}w)^{m+m'} \\
& C_{4-2m-lm0l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} (-u_{1,2})^{m+m'} \\
& C_{3-2m-lm1l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} C_{4-2m'-n'm'n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& (-u_{1,3})^{-1} \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} (-u_{1,2})^{m+m'} \\
& C_{3-2m-lm1l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\
& + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

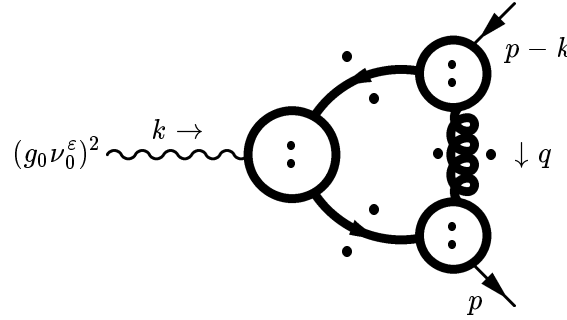
Verwendet man die Identitäten (4.6) in (4.47), so verbleiben schließlich nur noch die Terme proportional zu  $H_{200}^{[1]}$ :

$$\begin{aligned}
I_{T8}(p, k) = & 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} (-u_{1,2}w)^{m+m'} \\
& C_{4-2m-lm0l}^{[1]} H_{200}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} (-u_{1,2})^{m+m'} \\
& C_{3-2m-lm1l}^{[1]} H_{200}^{[1]} C_{4-2m'-n'm'n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-u_{1,3})^{-1} \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} (-u_{1,2})^{m+m'} \\
 & C_{3-2m-lm1l}^{[1]} H_{200}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\
 & + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Anzumerken ist an dieser Stelle, daß genau wie in  $I_{T5}(p, k)$  divergente Anteile enthalten sind, die selbstkonsistent behandelt werden können.

Als erstes Zwischenergebnis der Schleifenberechnungen zum Quark-Antiquark-Photon-Vertex wird an dieser Stelle die Divergenz der transversal-projizierten Schleife auf der Stufe beliebiger rationaler Approximation vollständig angegeben:



$$I_T(p, k) = \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_T(p, k) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \tag{4.49}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_T = & 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \left\{ C_{r-nrnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} C_{r-l'rrl'}^{[r]} \right. \\
 & + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2s+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{2r-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{j+n'} C_{r-nrnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} C_{2r-n'-l'rn'l'}^{[r]} \\
 & + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2s+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \Lambda^{2r-l-i} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} C_{2r-n-lrnl}^{[r]} H_{r-iir}^{[r]} C_{2r-l'rrl'}^{[r]} \\
 & + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2s+1})^{-1} \Lambda^2}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (u_{r,2s} \Lambda^2 - u_{r,2t} \Lambda^2)^2} \sum_{m=0}^r \sum_{m'=0}^r \Lambda^{2r-m-m'} (-u_{r,2t} \Lambda^2)^{m+m'} \\
 & C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} C_{3r-2m'-l'm'rl'}^{[r]} \\
 & + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} \\
& C_{2r-n-lrnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} C_{2r-n'-l'rnl'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t'+1} \Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (u_{r,2s} \Lambda^2 - u_{r,2t'} \Lambda^2)^2} \\
& \sum_{m=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{6r-2m-2m'-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{n'+j} (-u_{r,2t'} \Lambda^2)^{m+m'} \\
& C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} C_{4r-2m'-n'-l'm'n'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t'+1} \Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (u_{r,2s} \Lambda^2 - u_{r,2t'} \Lambda^2)^2} \\
& \sum_{m=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{6r-2m-2m'-l-i} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-u_{r,2t'} \Lambda^2)^{m+m'} \\
& C_{4r-2m-n-lmnl}^{[r]} H_{r-iiir}^{[r]} C_{3r-2m'-l'm'n'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
& \sum_{t''=1}^r \frac{(-u_{r,2t''+1} \Lambda^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t''}^r (u_{r,2s} \Lambda^2 - u_{r,2t''} \Lambda^2)^2} \sum_{m=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{8r-2m-2m'-l-i-j-n'} \\
& (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} (-u_{r,2t''} \Lambda^2)^{m+m'} \\
& C_{4r-2m-n-lmnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} C_{4r-2m'-n'-l'm'n'l'}^{[r]} \Bigg\} \\
& + \text{KONV.}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Als Zwischenergebnis der Schleifenberechnung wird notiert:

Alle ultraviolett divergenten Anteile des transversal-projizierten Schleifenintegrals werden durch eine Lorentz-Struktur der Form  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  erzeugt. Diese Struktur ist Teil der nicht-perturbativen Erweiterung des Quark-Photon-Vertex im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie. Darüber hinaus werden aufgrund dieser Struktur Divergenzen ausgebildet, die zusätzlich im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  divergieren. Dagegen liefert eine Lorentz-Struktur des Quark-Photon-Vertex der Form  $F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^\nu$  in der transversalen Schleife keinen ultraviolett divergenten Beitrag. Es ist prinzipiell möglich einige Terme der berechneten Divergenzen selbstkonsistent zu behandeln. Für  $r = 1$  sind dieses die Beiträge proportional zu  $H_{200}^{[1]}$ . Es muß aber auch bemerkt werden, daß diese Terme ebenfalls an der Ausbildung von divergenten und konvergenten Defekttermen beteiligt sind.

Bevor eventuelle Konsequenzen aus einem Vergleich der divergenten Anteile mit der rein störungstheoretischen Divergenz gezogen werden, wird das longitudinale Schleifenintegral berechnet. Anschließend werden auf Basis der perturbativen Divergenzen die SK-

Gleichungen angegeben.

### 4.3 Das longitudinal-projizierte Schleifenintegral

Die Berechnung des longitudinal-projizierten Schleifenintegrals ist mit deutlich weniger Aufwand verbunden, da eine Entschärfung der longitudinalen Gluon-Linie entfällt (siehe dazu Abschnitt 2.4.3). Auch hier nehmen alle Integralmodifikationen, die durch die Kompensation der unphysikalischen Pole entstehen, den störungstheoretischen Divergenzgrad an. Die formale Feynman-Parametrisierung der Nennerstrukturen ist daher ausreichend. Die der longitudinal-projizierten Schleife zugrundeliegenden Basisintegrale sind in Anhang D.4 berechnet, so daß es an dieser Stelle ausreicht, die Schleifenintegrale auf diese Basisintegrale zurückzuführen.

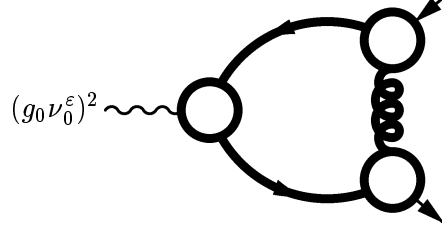
Die diagrammatische Form der Schleife mit Berücksichtigung der kompensierenden Pole lautet:

$$\begin{aligned}
 & (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \sim k \rightarrow \text{[Diagram 1]} = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \sim \text{[Diagram 2]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \sim \text{[Diagram 3]} + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \sim \text{[Diagram 4]} \\
 & + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \sim \text{[Diagram 5]} \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Der Ablauf der Schleifenberechnungen gleicht dem des vorangegangenen Abschnitts: Die Untersuchung der einzelnen Schleifen gliedert sich in die Berechnung des Schleifenintegrals und in die Analyse der divergenten Anteile bezüglich ihrem Verhalten im perturbativen Limes. Das Interesse gilt auch hier wieder nur den niedrigsten Ordnungen in  $\Lambda$ , also den Termen der Ordnung  $\Lambda^0$  (sog. konvergente Defektterme) und den Beiträgen der Ordnung  $\frac{1}{\Lambda}$  (sog. divergente Defektterme). Die Schleifen werden in der Reihenfolge von (4.51) berechnet.

*Untersuchung der ersten Schleife:***Berechnung des Integrals:**

Das erste Diagramm:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{L1}(p, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.52)$$

mit:

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{L1}(p, k) \\ &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\sigma}(q) \frac{\alpha}{q^2} N_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\mu}(\not{p}, \not{p} - \not{q}) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{q} - \kappa_{r,s-})} \\ & \quad \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2s})} N_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu'}(\not{p} - \not{q}, \not{p} - \not{k} - \not{q}, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{k} - \not{q} - \kappa_{r,s-})} \\ & \quad \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2s})} N_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\sigma}(\not{p} - \not{k} - \not{q}, \not{p} - \not{k}) \\ &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^\mu q^\sigma}{q^2} \frac{\alpha}{q^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((p-q)^2 + \kappa_{r,s+}^2)((p-q)^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((p-q)^2 + \kappa_{r,2s}^2)} \\ & \quad \frac{1}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} ((p-k-q)^2 + \kappa_{r,s+}^2)((p-k-q)^2 - \kappa_{r,s-}^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((p-k-q)^2 + \kappa_{r,2s}^2)} \\ & \quad \left\{ \sum_{\lambda=0}^{2r} \Lambda^\lambda \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+n+l, 2r} \not{p}^n \tilde{C}_{\lambda n l}^{[r]} \gamma^\mu (\not{p} - \not{q})^l \right\} \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{q} - \kappa_{r,s-}) \\ & \quad \prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2s}) \left\{ \sum_{\eta=0}^{2r} \Lambda^\eta \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \delta_{\eta+i+j, 2r} (\not{p} - \not{q})^i \left[ F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^{\nu'} + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right] (\not{p} - \not{k} - \not{q})^j \right\} \\ & \quad \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{p} - \not{k} - \not{q} - \kappa_{r,s-}) \prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2s}) \end{aligned}$$



$$\left\{ \sum_{\delta=0}^{2r} \Lambda^\delta \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \delta_{\delta+n'+l', 2r} (\not{p} - \not{k} - \not{q})^{n'} \tilde{C}_{\delta n' l'}^{[r]} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k})^{l'} \right\}. \quad (4.53)$$

Abzählen der Nenner- und Zählerpotenzen ergibt, daß das Integral höchstens logarithmisch divergiert. Die Divergenzbedingung ist nur für  $l = i = j = n' = r$  erfüllt. Nach Durchführung der formalen Feynman-Parametrisierung des skalaren Nenners (siehe dazu Anhang D.3) und Entwicklung nach den divergenten Anteilen (vergleiche Anhang C) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{L1} &= \sum_{\lambda=0}^r \Lambda^{r-n} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} \sum_{l'=0}^r \Lambda^{r-l'} \tilde{C}_{r-l' r l'}^{[r]} \not{p}^n \int dF (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{8r} \alpha}{[(q - z\tilde{p})^2 + R^2]^{4r+4}} \\ &\quad \left\{ q^\mu q^\sigma \gamma^\mu \not{q} \left( F_{0rr}^{[r]} \gamma^{\nu'} + H_{0rr}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right) \not{q} \gamma^\sigma \right\} (\not{p} - \not{k})^{l'} + \text{KONV}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Der Integrationsimpuls  $q$  wird linear transformiert  $q \rightarrow q + z\tilde{p}$ , so daß der Nenner in (4.54) die Form des Nenners der Standardformel der Impulsintegration annimmt. Mit den elementaren Identitäten der  $\gamma$ -Algebra können die divergenzerzeugenden Anteile auf die Gestalt der Basisintegrale gebracht werden. Mit den Basisintegralen (D.54) und (D.58), sowie mit dem Feynman-Parameterintegral  $\int dF = 1$ , können die divergenten Anteile in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{L1} &= \alpha \Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k})^{l'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{0rr}^{[r]} \tilde{C}_{r-l' r l'}^{[r]} \\ &\quad \alpha \Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} \tilde{C}_{r-l' r l'}^{[r]} \\ &\quad + \text{KONV}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die divergenten Anteile sind direkt proportional zum Eichfixierungsparameter. Im Falle von  $I_{L1}$  ist neben der Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]}(p, k)$  auch die Lorentz-Struktur  $F_{\eta ij}^{[r]}(p, k)$  an der Bildung der Divergenz beteiligt.

#### Analyse der Divergenz:

Abschließend wird das Verhalten der Divergenz im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  untersucht. Dazu wird die Projektion ausgeführt ( $\nu' = \nu$ ) und  $\kappa_{r,2s} = w_{r,2s} \Lambda$  gesetzt. Die Nenner-Produkte werden gegen die Zähler-Impulspotenzen nach dem im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Verfahren gekürzt. Den Limes überstehen schließlich folgende Terme:

$$\begin{aligned} I_{L1}(p, k) &= \alpha \Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \gamma^\nu \tilde{C}_{011}^{[1]} F_{011}^{[1]} \tilde{C}_{011}^{[1]} \\ &\quad + 3\alpha \Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2} \Lambda} \tilde{C}_{101}^{[1]} H_{011}^{[1]} \tilde{C}_{011}^{[1]} \\ &\quad + 3\alpha \Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2} \Lambda} \tilde{C}_{011}^{[1]} H_{011}^{[1]} \tilde{C}_{110}^{[1]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\alpha\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2 - 1}{2N_c}e_f\left[\frac{1}{\Lambda}k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})}{(\boldsymbol{p} + w_{1,2}\Lambda)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} + w_{1,2}\Lambda)}\right]\tilde{C}_{011}^{[1]}H_{011}^{[1]}\tilde{C}_{011}^{[1]} \\
& + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1 + \Lambda}\right)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Bemerkenswert ist, daß im longitudinal-projizierten Schleifenintegral  $I_{L1}(p, k)$  auch eine Divergenz proportional zu  $F_{\eta ij}^{[r]}\gamma^\nu$  enthalten ist und als perturbative Divergenz angesehen werden muß. Der Eichfixierungsparameter geht linear in die Divergenzen ein. Mit den Identitäten

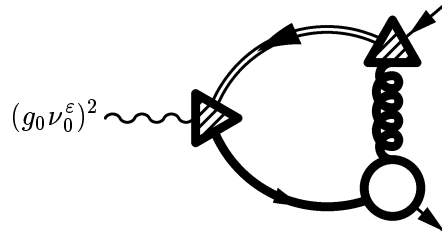
$$H_{101}^{[1]} = H_{110}^{[1]} = H_{011}^{[1]} = 0 \tag{4.57}$$

verschwinden alle Divergenzen proportional zu  $H_{\eta ij}^{[1]}$ .

### Untersuchung der zweiten Schleife:

#### Berechnung des Integrals:

Zu berechnen ist folgendes Diagramm:



Die äußeren Fermion-Beine an den Quark-Gluon-Vertices können in Form der Nenner-Produkte aus dem Integral gezogen werden. Mit der in Kapitel 2.4.3 eingeführten Systematik der kompensierenden Pole lautet das Schleifenintegral:

$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\kappa}_{r,2s})} \hat{I}_{L2}(p, k) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\kappa}_{r,2s})} \tag{4.58}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{L2}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\sigma}(q) \frac{\alpha}{q^2} N_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\mu}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \\
&\quad \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\kappa}_{r,s+})(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\kappa}_{r,s-})} \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\kappa}_{r,2s})} N_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu'}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}, k) \\
&\quad \frac{\mathbb{I}}{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\kappa}_{r,2t})} N_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\sigma}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Der Nenner wird durch entsprechendes Erweitern skalar gemacht. Anschließend wird mit Hilfe der Methode der formalen Feynman-Parametrisierung (Anhang D.3) die skalare Nen-

nerstruktur zusammengefaßt. Das Abspalten der divergenten Anteile führt nach der linearen Transformation  $q \rightarrow q + z\tilde{p}$  des Integrationsimpulses auf die Form:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{L2}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-\kappa_{r,2t})^{n'+j} \\ &\quad \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'r'l'}^{[r]} \not{p}^n \int dF(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r} \alpha}{[q^2 + R^2]^{2r+4}} \\ &\quad \left\{ q^\mu q^\sigma \gamma^\mu \not{q} F_{r-jrj}^{[r]} \gamma^{\nu'} \not{q} \gamma^\sigma + q^\mu q^\sigma \gamma^\mu \not{q} H_{r-jrj}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \not{q} \gamma^\sigma \right\} (\not{p} - \not{k})^{l'} \\ &\quad + \text{KONV.} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die divergenten Anteile von  $I_{L2}(p, k)$  haben die Form der Basisintegrale (vergleiche mit Anhang D.4). Mit (D.55) und (D.59) erhält man schließlich die divergenten Beiträge in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{L2}(p, k) &= \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\ &\quad \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{2r-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{j+n'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{r-jrj}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n'-l'n'l'}^{[r]} \\ &+ \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\ &\quad \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{2r-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{j+n'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n'-l'n'l'}^{[r]} \\ &\quad + \text{KONV.} \end{aligned}$$

Die divergenten Anteile sind direkt proportional zum Eichfixierungsparameter  $\alpha$  und an der Ausbildung der Divergenz sind beide Lorentz-Strukturen des Quark-Photon-Vertex beteiligt.

#### Analyse der Divergenz:

Im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  ergibt sich mit  $\kappa_{r,2s} = w_{r,2s} \Lambda$  und  $\kappa_{r,2s+1}^2 = w_{r,2s+1} \Lambda^2$  das Verhalten der Divergenz (4.61) zu:

$$\begin{aligned} I_{L2}(p, k) &= \alpha \Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \gamma^\nu (-w_{1,3})^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{011}^{[1]} F_{1-j1j}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2} \Lambda} (-w_{1,3})^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{101}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\ &\quad + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2} \Lambda} (-w_{1,3})^{-1} \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{011}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \end{aligned}$$

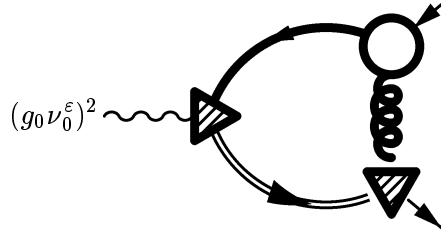
$$\begin{aligned}
& +3\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\left[\frac{1}{\Lambda}k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p}-\not{k})}{(\not{p}+w_{1,2}\Lambda)(\not{p}-\not{k}+w_{1,2}\Lambda)}\right](-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{011}^{[1]} H_{1-j1j}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& +\text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Genau wie in der vorangegangenen Rechnung bilden sich im perturbativen Limes vier Strukturen aus. Davon sind zwei Terme als perturbative Divergenz proportional zu  $k^\nu$  zu identifizieren und ein Beitrag zur perturbativen Divergenz wird von der Lorentz-Struktur  $F_{\eta ij}^{[r]}\gamma^\nu$  des Quark-Photon-Vertex erzeugt. Zusätzlich werden aufgrund der Lorentz-Struktur  $\frac{k^\nu}{\Lambda}$  für  $\Lambda \rightarrow 0$  divergente Defekttterme gebildet. Alle auftretenden Divergenzen von  $I_{L2}(p, k)$  sind direkt proportional zum Eichfixierungsparameter  $\alpha$ . Mit den Identitäten (4.6) liefert nur der konvergente Defekttterm proportional zu  $F_{\eta ij}^{[1]}$  einen Beitrag in  $r = 1$ .

### Untersuchung der dritten Schleife:

#### Berechnung des Integrals:

Da das dritte Diagramm in gleicher Weise wie (4.58) berechnet werden kann, wird an dieser Stelle lediglich das Resultat der Schleifenberechnung angegeben:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2-1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{L4}(p, k) \frac{\mathbb{I}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \tag{4.62}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{L3}(p, k) &= \Pi(\varepsilon)\alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\
& \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \Lambda^{2r-l-i} (-\kappa_{r,2t})^{i+l} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} F_{r-ii}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} \\
& + \Pi(\varepsilon)\alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\
& \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \Lambda^{2r-i-l} (-\kappa_{r,2t})^{i+l} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} H_{r-ii}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} + \text{KONV} \tag{4.63}
\end{aligned}$$

**Analyse der Divergenz:**

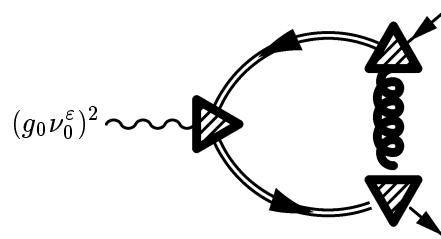
Im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  ergibt sich mit  $\kappa_{r,2s} = w_{r,2s}\Lambda$  sowie  $\kappa_{r,2s+1}^2 = w_{r,2s+1}\Lambda^2$  und Kürzen der führenden matrixwertigen Nenner-Potenzen das Verhalten zu:

$$\begin{aligned}
I_{L3}(p, k) = & \alpha\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\gamma^\nu(-w_{1,3})^{-1}\sum_{l=0}^1\sum_{i=0}^1(-w_{1,2})^{l+i}\tilde{C}_{1-l1l}^{[1]}F_{1-ii1}^{[1]}\tilde{C}_{011}^{[1]} \\
& +3\alpha\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\frac{k^\nu}{\not{p}+w_{1,2}\Lambda}(-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1\sum_{i=0}^1(-w_{1,2})^{i+l}\tilde{C}_{2-l0l}^{[1]}H_{1-ii1}^{[1]}\tilde{C}_{011}^{[1]} \\
& +3\alpha\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\frac{k^\nu}{\not{p}-\not{k}+w_{1,2}\Lambda}(-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1\sum_{i=0}^1(-w_{1,2})^{i+l}\tilde{C}_{1-l1l}^{[1]}H_{1-ii1}^{[1]}\tilde{C}_{110}^{[1]} \\
& +3\alpha\Pi(\varepsilon)\frac{N_c^2-1}{2N_c}e_f\left[\frac{1}{\Lambda}k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p}-\not{k})}{(\not{p}+w_{1,2}\Lambda)(\not{p}-\not{k}+w_{1,2}\Lambda)}\right](-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1\sum_{i=0}^1(-w_{1,2})^{i+l}\tilde{C}_{1-l1l}^{[1]}H_{1-ii1}^{[1]}\tilde{C}_{011}^{[1]} \\
& +\text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right) \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Im perturbativen Limes sind drei Beiträge als Modifikation der störungstheoretischen Divergenz enthalten. Die divergenten Defektterme werden durch die Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]}\frac{k^\nu}{\Lambda}$  ausgebildet. Anzumerken ist, daß auch die Lorentz-Struktur  $F_{\eta ij}^{[r]}\gamma^\nu$  an der Ausbildung der perturbativen Divergenz beteiligt ist. Der Eichfixierungsparameter  $\alpha$  geht linear in die divergenten Anteile von  $I_{L3}(p, k)$  ein. Analog zu den vorangestellten Berechnungen verschwinden in  $r = 1$  mit den Identitäten (4.6) alle Beiträge proportional zu  $H_{\eta ij}^{[1]}$ .

**Untersuchung der vierten Schleife:****Berechnung des Integrals:**

Zu berechnen bleibt schließlich noch folgendes Diagramm:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_{L4}(p, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \quad (4.65)$$

mit:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{L4}(p, k) &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} l^{\mu\sigma}(q) \frac{\alpha}{q^2} \\ &\quad N_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\mu}(\not{p}, -\kappa_{r,2t}) \frac{\mathbb{1}}{(\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2s})} N_{F\bar{F}A}^{[r,0]\nu'}(-\kappa_{r,2t}, -\kappa_{r,2t'}, k) \frac{\mathbb{1}}{(\not{p} - \not{k} - \not{q} + \kappa_{r,2t'})} \\ &\quad N_{F\bar{F}V_L}^{[r,0]\sigma}(-\kappa_{r,2t'}, \not{p} - \not{k}) \\ &= \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^\mu q^\sigma}{q^2} \frac{\alpha}{q^2} \\ &\quad \frac{1}{((p-q)^2 + \kappa_{r,2t}^2)} \frac{1}{(p-k-q)^2 + \kappa_{r,2t'}^2} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{2r} \Lambda^\lambda \sum_{n=0}^r \sum_{l=0}^r \delta_{\lambda+n+l, 2r} \not{p}^n \bar{C}_{\lambda nl}^{[r]} \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. (-\kappa_{r,2t})^l \right\} (\not{p} - \not{q} + \kappa_{r,2t}) \left\{ \sum_{\eta=0}^{2r} \Lambda^\eta \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \delta_{\eta+i+j, 2r} (-\kappa_{r,2t})^i \left[ F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^{\nu'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} \right] (-\kappa_{r,2t})^j \right\} (\not{p} - \not{k} - \not{q} - \kappa_{r,2t'}) \\ &\quad \left\{ \sum_{\delta=0}^{2r} \Lambda^\delta \sum_{n'=0}^r \sum_{l'=0}^r \delta_{\delta+n'+l', 2r} (-\kappa_{r,2t})^{n'} \bar{C}_{\delta n' l'}^{[r]} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k})^{l'} \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Nach Durchführung der formalen Feynman-Parametrisierung (siehe dazu Anhang D.3) der skalaren Nennerstruktur des Integranden werden die divergenten Anteile isoliert. Anschließend führt die lineare Transformation  $q \rightarrow q + z\bar{p}$  des Integrationsimpulses und wiederholtes Abspalten der divergenten Anteile auf die Basisintegrale (D.56) und (D.60) (vergleiche mit Anhang D.4). Damit kann der divergente Beitrag von  $I_{L4}(p, k)$  angegeben werden:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{L4}(p, k) &= \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\ &\quad \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} \\ &\quad \bar{C}_{2r-n-l nl}^{[r]} F_{2r-i-j ij}^{[r]} \bar{C}_{2r-n-l' n' l'}^{[r]} \\ &\quad + \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} \\
& \quad \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'n'l'}^{[r]} .
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Die divergenten Anteile werden von den beiden Lorentz-Strukturen  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  und  $F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^\nu$  des Quark-Photon-Vertex getragen. Wie es bereits in den ersten drei Diagrammen der Fall ist, geht der Eichparameter linear in die divergenten Anteile von  $I_{L4}(p, k)$  ein.

#### Analyse der Divergenz:

Im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  ergibt sich mit  $\kappa_{r,2s} = w_{r,2s} \Lambda$  und  $\kappa_{r,2s+1}^2 = w_{r,2s+1} \Lambda^2$  das Verhalten zu:

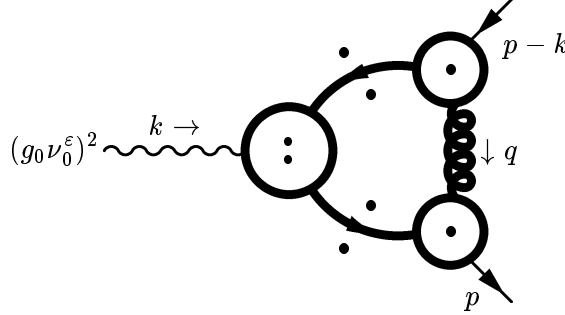
$$\begin{aligned}
I_{L4}(p, k) &= \alpha \Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^{\nu'} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \quad \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} F_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \quad \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{2-l0l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \quad \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \quad \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} H_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1 + \Lambda}\right) .
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Die divergenten Anteile von  $I_{L4}(p, k)$  bilden sowohl konvergente als auch divergente Defektterme im perturbativen Limes aus. Dabei werden die divergenten Defektterme wie schon in den vorangestellten Rechnungen von der Lorentz-Struktur  $H_{\eta ij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  erzeugt. Verwendet man die Identitäten (4.6) so zeigt sich, daß durchaus Terme proportional zu  $H_{200}^{[1]}$  selbstkonsistent behandelbar sind. Allerdings ist der Vertexkoeffizient auch an der Bildung von konvergenten und divergenten Defekttermen beteiligt. Mit den Identitäten (4.6) ergibt sich:

$$I_{L4}(p, k) = \alpha \Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \gamma^{\nu'} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} F_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{2-l0l}^{[1]} H_{200}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} H_{200}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left[ \frac{1}{\Lambda} k^\nu - \frac{w_{1,2}(2\not{p} - \not{k})}{(\not{p} + w_{1,2}\Lambda)(\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda)} \right] (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} H_{200}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + \text{KONV} + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\right). \tag{4.69}
\end{aligned}$$

Abschließend werden die divergenten Anteile der longitudinalen Schleife auf beliebigem rationalen Approximationsgrad  $r$  vollständig zusammengestellt:



$$= \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'}(k) \right) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \hat{I}_L(p, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \tag{4.70}$$

Mit:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_L &= \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k})^{l'} \left\{ \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{0rr}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} \right. \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{2r-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{j+n'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{r-jrj}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'r'l'}^{[r]} \\
& \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \Lambda^{2r-l-i} (-\kappa_{r,2t})^{i+l} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} F_{r-iir}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
& \left. \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} F_{2r-i-jij}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'n'l'}^{[r]} \right\} \\
& + \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} p^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (p - k)^{l'} \left\{ \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{0rr}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'rl'}^{[r]} \right. \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{2r-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{j+n'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'rl'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \Lambda^{2r-i-l} (-\kappa_{r,2t})^{i+l} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} H_{r-iir}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'rl'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
& \left. \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r \Lambda^{4r-l-i-j-n'} (-\kappa_{r,2t})^{l+i} (-\kappa_{r,2t'})^{j+n'} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'n'l'}^{[r]} \right\} \\
& + \text{KONV} .
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Als Zwischenergebnis der Schleifenberechnungen in diesem Abschnitt wird notiert:

Die divergenten Anteile des longitudinal-projizierten Schleifenintegrals werden von den beiden Lorentz-Strukturen des Quark-Photon-Vertex getragen. Der Eichfixierungsparameter geht linear in die divergenten Anteile ein. Eine Analyse des Verhaltens der Divergenzen im perturbativen Limes zeigt, daß die longitudinal-projizierte Schleife Terme entwickelt, die selbstkonsistent behandelbar sind. Bemerkenswert ist, daß die auftretenden divergenten Defektterme ausschließlich von der Lorentz-Struktur  $H_{\eta j}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  getragen werden. Dagegen ist die Lorentz-Struktur  $F_{\eta ij}^{[r]} \gamma^\nu$  nur an der Bildung der konvergenten Defekttermen beteiligt und darüber hinaus selbstkonsistent behandelbar.

Im nun folgenden Abschnitt werden auf Basis der perturbativen Divergenzen der longitudinal und transversal-projizierten Schleife die SK-Gleichungen abgeleitet.

## 4.4 Ableitung der Selbstkonsistenzgleichungen in r=1

Ziel dieses Kapitels ist die Angabe der SK-Gleichungen für r=1. Auf dem Niveau niedriger rationaler Approximation ist es ratsam, auf die Herleitung der SK-Gleichungen durch matrixwertige Residuenbildung zu verzichten: Für  $r = 1$  ist es mit deutlich weniger Aufwand verbunden die SK-Gleichungen an der nach Matrixstrukturen sortierten DS-Gleichung abzulesen. Mit den berechneten Schleifenintegralen  $I_T(p, k)$  und  $I_L(p, k)$  lautet die vollständige

ge DS-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'} \right) e_f \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} N^{[r]\nu'}(\not{p}, \not{p} - \not{k}, k) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} - e_f \gamma^\nu \\
& = -\delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \left( t^{\nu\nu'}(k) + l^{\nu\nu'} \right) \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \left\{ \hat{I}_T(p, k) + \tilde{I}_L(p, k) \right\} \\
& \quad \frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s})} \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Es wird nochmals darauf hingewiesen, daß beide Seiten der DS-Gleichung in der elektromagnetischen Kopplung von gleicher Größenordnung sind; die lineare Abhängigkeit der Gleichung von  $e_f$  kann einfach herausgekürzt werden, so daß (4.72) effektiv nicht von der elektromagnetischen Kopplung abhängt. Nach Ausführen der Projektion  $t^{\nu\nu'} + l^{\nu\nu'} = \delta^{\nu\nu'}$  kann durch links- und rechtsseitiges Heranmultiplizieren mit den jeweiligen Nennerprodukten aus (4.72) eine matrixwertige Gleichung mit skalarem Nenner gewonnen werden:

$$\begin{aligned}
N_{F\bar{F}A}^{[r]\nu}(\not{p}, \not{p} - \not{k}, k) & - \prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s}) \gamma^\nu \prod_{s=1}^r (\not{p} - \not{k} + \kappa_{r,2s}) \\
& = -\delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \left\{ \hat{I}_T(p, k) + \hat{I}_T(p, k) \right\} \tag{4.73}
\end{aligned}$$

Mit

$$N_{F\bar{F}A}^{[r]\nu}(\not{p}, \not{p} - \not{k}, k) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \Lambda^{2r-i-j} \not{p}^i \left\{ F_{2r-i-jij}^{[r]} \gamma^\nu + H_{2r-i-jij}^{[r]} \frac{k^\nu}{\Lambda} \right\} (\not{p} - \not{k})^j \tag{4.74}$$

und den beiden Integralen  $I_T(p, k)$  und  $I_L(p, k)$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_T & = 3\Pi(\varepsilon) \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \left\{ C_{r-nrnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} C_{r-l'rrl'}^{[r]} \right. \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2s+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{j+n'} C_{r-nrnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} C_{2r-n'-l'rrn'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2s+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r (-w_{r,2t})^{l+i} C_{2r-n-lrnl}^{[r]} H_{r-iir}^{[r]} C_{2r-l'rrl'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2s+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{m=0}^r \sum_{m'=0}^r (-u_{r,2t})^{m+m'} C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} H_{0rr}^{[r]} C_{3r-2m'-l'm'rl'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-w_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t'})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{l+i} (-w_{r,2t'})^{j+n'} C_{2r-n-lrnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} C_{2r-n'-l'rn'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})^2} \\
& \sum_{m=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{n'+j} (-u_{r,2t'})^{m+m'} C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} C_{4r-2m'-n'-l'm'n'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})^2} \\
& \sum_{m=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{l'=0}^r \sum_{m'=0}^r (-w_{r,2t})^{l+i} (-u_{r,2t'})^{m+m'} C_{4r-2m-n-lmnl}^{[r]} H_{r-iiir}^{[r]} C_{3r-2m'-l'm'r'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-w_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t'})^2} \sum_{t''=1}^r \frac{(-u_{r,2t''+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t''}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})^2} \\
& \sum_{m=0}^r \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{m'=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{l+i} (-w_{r,2t'})^{j+n'} (-u_{r,2t''})^{m+m'} \\
& \left. C_{4r-2m-n-lmnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} C_{4r-2m'-n'-l'm'n'l'}^{[r]} \right\} \\
& + \text{ KONV}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

und

$$\begin{aligned}
\hat{I}_L &= \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} p^n \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k})^{l'} \left\{ \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{0rr}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} \right. \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{j+n'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{r-jrj}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'r'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r (-w_{r,2t})^{i+l} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} F_{r-iiir}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-w_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t'})^2} \\
& \left. \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{l+i} (-w_{r,2t'})^{j+n'} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} F_{2r-i-jij}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'n'l'}^{[r]} \right\} \\
& + \Pi(\varepsilon) \alpha \sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} p^n \frac{k^{\nu'}}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'} \left\{ \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} F_{0rr}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'r'l'}^{[r]} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{j+n'} \tilde{C}_{r-nnr}^{[r]} H_{r-jrj}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'r'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r (-w_{r,2t})^{i+l} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} H_{r-ii}^{[r]} \tilde{C}_{r-l'l'l'}^{[r]} \\
& + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \sum_{t'=1}^r \frac{(-w_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{s=1, s \neq t'}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t'})^2} \\
& \quad \left. \sum_{l=0}^r \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r \sum_{n'=0}^r (-w_{r,2t})^{l+i} (-w_{r,2t'})^{j+n'} \tilde{C}_{2r-n-lnl}^{[r]} H_{2r-i-jij}^{[r]} \tilde{C}_{2r-n-l'n'l'}^{[r]} \right\} \\
& + \text{KONV}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

kann nun nach Matrixstrukturen sortiert werden: die Matrixstrukturen der Integralterme  $\hat{I}_T$  und  $\hat{I}_L$  und ihre  $\Lambda$ -Abhängigkeiten sind in den Darstellungen (4.75) und (4.76) soweit zusammengefaßt, daß sie alleine durch die Summen

$$\sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \gamma^\nu (\not{p} - \not{k})^{l'}$$

und

$$\sum_{n=0}^r \sum_{l'=0}^r \Lambda^{2r-n-l'} \not{p}^n \frac{k^\nu}{\Lambda} (\not{p} - \not{k})^{l'}$$

erzeugt werden. In  $r = 1$  werden demnach insgesamt acht Matrixstrukturen ausgebildet, von denen nur vier Strukturen mindestens von der Ordnung  $\Lambda^1$  sind. Auf Basis der DS-Gleichung (4.72) erhält man also insgesamt vier skalare Selbstkonsistenzgleichungen, die simultan erfüllt sein müssen. Mit den Symmetrieeigenschaften der Koeffizienten

$$C_{\lambda mnl}^{[r]} = C_{\lambda mln}^{[r]}, \quad \tilde{C}_{\lambda nl}^{[r]} = \tilde{C}_{\lambda ln}^{[r]}, \quad \text{sowie } F_{\eta ij}^{[r]} = F_{\eta ji}^{[r]}, \tag{4.77}$$

und den Randbedingungen

$$C_{0rrr}^{[r]} = \tilde{C}_{0rr}^{[r]} = F_{0rr}^{[r]} = 1 \tag{4.78}$$

können sie schrittweise zu kompakteren Formen zusammengefaßt werden:

SK-3 (Terme proportional zu  $\gamma^\nu$ )<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
(F_{200} - w_{1,2}) \Lambda^2 &= -\alpha \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \Lambda^2 \left\{ \tilde{C}_{110}^2 \right. \\
&\quad \left. - (w_{1,3})^{-1} \left[ \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{110}^{[1]} F_{1-jj1}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \right] \right\}
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Die SK-Gleichungen werden in dieser Arbeit fortlaufend nummeriert.

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} \tilde{C}_{2-ll0}^{[1]} F_{1-ii1}^{[1]} \tilde{C}_{110}^{[1]} \Big] \\
& + (w_{1,3}^2)^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i+j+n'} \tilde{C}_{2-ll0}^{[1]} F_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \Big\}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Ausführen der Summationen und Ausnutzen der oben angegebenen Symmetrien für  $r = 1$  führt auf:

$$\begin{aligned}
(F_{200} - w_{1,2}) w_{1,3}^2 &= -\alpha \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \Big\{ \tilde{C}_{110}^2 w_{1,3}^2 \\
& - 2w_{1,3} \tilde{C}_{110}^{[1]} (F_{110}^{[1]} - w_{1,2}) (\tilde{C}_{200}^{[1]} - w_{1,2} \tilde{C}_{110}^{[1]}) \\
& + (F_{200}^{[1]} - w_{1,2} F_{110}^{[1]} + w_{1,2}^2) (\tilde{C}_{200}^{[1]} - w_{1,2} \tilde{C}_{110}^{[1]})^2 \Big\}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

SK-4 (Terme proportional zu  $\not{p}\gamma^\nu$ ):

$$\begin{aligned}
(F_{110} - w_{1,2}) \Lambda &= -\alpha \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \Pi(\varepsilon) \Lambda \Big\{ \tilde{C}_{110} \\
& - (w_{1,3})^{-1} \Big[ \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} F_{1-jj1}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \\
& + \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} \tilde{C}_{1-ll1}^{[1]} F_{1-ii1}^{[1]} \tilde{C}_{110}^{[1]} \Big] \\
& + (w_{1,3}^2)^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i+j+n'} \tilde{C}_{1-ll1}^{[1]} F_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \Big\}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Nach Ausführen der Summationen und Ausnutzen der Symmetrien (4.77) und (4.78) erhält man:

$$\begin{aligned}
(F_{110}^{[1]} - w_{1,2}) w_{1,3}^2 &= -\alpha \delta^{ij} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{1}{\beta_0} \Big\{ w_{1,3}^2 \tilde{C}_{110} \\
& - w_{1,3} (F_{110}^{[1]} - w_{1,2}) (\tilde{C}_{200}^{[1]} - 2w_{1,2} \tilde{C}_{110}^{[1]} + \tilde{C}_{110}^{[1]2}) \\
& + (F_{200}^{[1]} - 2w_{1,2} F_{110}^{[1]} + w_{1,2}^2) (\tilde{C}_{200}^{[1]} - w_{1,2} \tilde{C}_{110}^{[1]}) \\
& (\tilde{C}_{110}^{[1]} - w_{1,2}) \Big\}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

SK-5 (Terme proportional zu  $\gamma^\nu(\not{p} - \not{k})$ ):

$$\begin{aligned}
\left(F_{101} - w_{1,2}\right)\Lambda &= -\alpha\delta^{ij}\frac{N_c^2 - 1}{2N_c}\Pi(\varepsilon)\Lambda\left\{\tilde{C}_{110}\right. \\
&\quad - (w_{1,3})^{-1}\left[\sum_{j=0}^1\sum_{n'=0}^1(-w_{1,2})^{j+n'}\tilde{C}_{110}^{[1]}F_{1-jj1}^{[1]}\tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^1\sum_{i=0}^1(-w_{1,2})^{l+i}\tilde{C}_{2-ll0}^{[1]}F_{1-ii1}^{[1]}\right] \\
&\quad \left. + (w_{1,3}^2)^{-1}\sum_{l=0}^1\sum_{i=0}^1\sum_{j=0}^1\sum_{n'=0}^1(-w_{1,2})^{l+i+j+n'}\tilde{C}_{2-ll0}^{[1]}F_{2-i-jij}^{[1]}\tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]}\right\}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Nach Ausführen der Summationen und Ausnutzen der Symmetrien (4.77) und (4.78) erhält man:

$$\begin{aligned}
\left(F_{110}^{[1]} - w_{1,2}\right)w_{1,3}^2 &= -\alpha\delta^{ij}\frac{N_c^2 - 1}{2N_c}\frac{1}{\beta_0}\left\{w_{1,3}^2\tilde{C}_{110}\right. \\
&\quad - w_{1,3}\left(F_{110}^{[1]} - w_{1,2}\right)\left(\tilde{C}_{200}^{[1]} - 2w_{1,2}\tilde{C}_{110}^{[1]} + \tilde{C}_{110}^{[1]2}\right) \\
&\quad + \left(F_{200}^{[1]} - 2w_{1,2}F_{110}^{[1]} + w_{1,2}^2\right)\left(\tilde{C}_{200}^{[1]} - w_{1,2}\tilde{C}_{110}^{[1]}\right) \\
&\quad \left.\left(\tilde{C}_{110}^{[1]} - w_{1,2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Eine besondere Stellung nimmt die SK-Gleichung mit dem photonischen Parameter  $H_{200}^{[1]}$  ein: Setzt man die Vertexkoeffizienten

$$H_{011}^{[1]} = H_{110}^{[1]} = H_{101}^{[1]} = 0, \tag{4.85}$$

so resultiert als einzige SK-Gleichung mit dem photonischen Parameter  $H_{200}^{[1]}$ .

SK-6 (Terme proportional zu  $k^\nu$ ):

$$\begin{aligned}
H_{200}^{[1]} \Lambda = & -3\Pi(\varepsilon)\Lambda\delta^{ij}\frac{N_c^2-1}{2N_c}\left\{C_{1110}^{[1]2}\right. \\
& + (w_{1,3}^2)^{-1}\sum_{l=0}^1\sum_{n'=0}^1(-w_{1,2})^{l+n'}C_{2-l1l0}^{[1]}H_{200}^{[1]}C_{2-n'1n'0}^{[1]} \\
& - (w_{1,3}^2u_{1,3})^{-1}\sum_{m=0}^1\sum_{l=0}^1\sum_{n'=0}^1\sum_{m'=0}^1(-w_{1,2})^{l+n'}(-u_{1,2})^{m+m'} \\
& \quad \left.C_{4-2m-lml0}^{[1]}H_{200}^{[1]}C_{4-2m'-n'm'n'0}^{[1]}\right\} \\
& - \alpha\Pi(\varepsilon)\Lambda\delta^{ij}\frac{N_c^2-1}{2N_c}\left\{\tilde{C}_{110}^2\right. \\
& \quad \left.+ (w_{1,3}^2)^{-1}\sum_{l=0}^1\sum_{n'=0}^1(-w_{1,2})^{l+n'}\tilde{C}_{2-l1l0}^{[1]}H_{200}^{[1]}\tilde{C}_{2-n'1n'0}^{[1]}\right\}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Die resultierenden SK-Gleichungen sind lineare Gleichungen in den photonischen Parametern. Alle Gleichungen sind vom Eichfixierungsparameter abhängig, wodurch die Parameter selbst Funktionen des Eichfixierungsparameters werden. Offensichtlich sind die Gleichungen (4.82) und (4.84) aufgrund der Symmetrieeen der Koeffizienten identisch.

Damit ist ein wesentliches Ziel dieser Arbeit erreicht worden. Im folgenden Kapitel wird der Versuch unternommen die abgeleiteten SK-Gleichungen auszuwerten und eventuelle Restriktionen an die Vertexparameter zu formulieren.

## Kapitel 5

# Auswertung der Gleichungen

Gegenstand dieses Kapitels ist die Diskussion der erarbeiteten Selbstkonsistenz-Gleichungen mit dem primären Ziel eine Lösung des Gleichungssystems angeben zu können. Wie schon in den vorangegangenen Kapiteln erwähnt, liegt die Schwierigkeit der Auswertung des Gleichungssystems nicht in seiner Komplexität begründet, sondern darin, daß es über sehr viele unbekannte Parameter verfügt. Es werden in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels zunächst die divergenten und die konvergenten Defektterme mit dem Ziel diskutiert, mögliche Bedingungen an die Vertex-Parameter zu finden, um ihre Anzahl möglicherweise zu reduzieren. Im Anschluß daran wird das SK-Gleichungssystem auf die reellen Vertexparameter umgerechnet (siehe Anhang E) und zusammengestellt. Eine mögliche Lösung wird in Landau-Eichung angegeben und diskutiert.

### 5.1 Diskussion der divergenten Defektterme

Die bei den Schleifenberechnungen (Kapitel 4) abgespalteten divergenten Defektterme stellen keine Modifikation der störungstheoretischen Divergenz dar und können auch nicht selbstkonsistent behandelt werden. Es wird daher ihr Verschwinden gefordert, wodurch sich Einschränkungen an die Vertexkoeffizienten ergeben. Da die berechneten divergenten Defektterme über unterschiedliche Lorentz-Strukturen verfügen bindet sich die Forderung nach "Verschwinden der divergenten Defektterme" an die Terme mit gleicher Lorentz-Struktur. Die mathematische Formulierung dieser Forderung führt mit Hinzunahme der Identitäten

$$H_{110}^{[1]} = H_{101}^{[1]} = H_{011}^{[1]} = 0 \quad (5.1)$$

für die transversal-projizierte Schleife auf folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 = & H_{200}^{[1]} \left[ \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} C_{1-l11l}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \right. \\ & \left. + (-u_{1,3})^{-1} \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} (-u_{1,2})^{m+m'} \right] \end{aligned}$$



$$C_{3-2m-lm1l}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \Big] \quad (5.2)$$

In gleicher Weise führt die Argumentation bei der longitudinal-projizierten Schleife auf die Nebenbedingung:

$$0 = H_{200}^{[1]} \left[ \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \right] \quad (5.3)$$

Beide Gleichungen stellen eine starke Einschränkung an die Vertexkoeffizienten dar. Eine einfache Lösung dieser Bedingungen wäre  $H_{200}^{[1]} = 0$ . Mit mathematischer Strenge kann aber an dieser Stelle kein Beweis dieser Behauptung geführt werden. Im nächsten Abschnitt werden ähnliche Bedingungen an die Parameter geknüpft die ebenfalls die "triviale" Lösung zulassen.

## 5.2 Diskussion der konvergenten Defektterme

### 5.2.1 Die perturbativen Divergenzen des inversen Fermion-Propagators

Die rein störungstheoretische Divergenz des inversen Fermion-Propagators auf dem Ein-Schleifen-Niveau in beliebiger Eichung und ohne fermionische Massen lautet (siehe Kapitel 1):

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_{F\bar{F}}(\not{p}, \varepsilon) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \not{p} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \alpha + O(g_0^4, \varepsilon^0) \quad (5.4)$$

Dagegen liefern die Schleifenberechnungen im dritten Kapitel folgendes Resultat:

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \not{p} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \alpha + O(g_0^4, \varepsilon^0) \quad (5.5)$$

Beide Divergenzen sind identisch. Bemerkenswert ist, daß bei einer Berechnung der Divergenz mit den erweiterten Ansätzen in Landau-Eichung, dieses entspricht der transversalen Schleife, keine Divergenzen auftreten, welche als perturbative Divergenzen klassifiziert werden können. Das gleiche Ergebnis liefert eine Rechnung mit den rein störungstheoretischen Vertices und Propagatoren.

### 5.2.2 Die perturbativen Divergenzen des Quark-Photon-Vertex

Es werden die berchneten perturbativen Divergenzen mit dem störungstheoretischen Resultat verglichen. Die rein störungstheoretische Divergenz des Quark-Photon-Vertex auf Basis der DS-Gleichung in niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung erhält man nach kurzer Rechnung (nur das longitudinale Schleifenintegral bildet eine von null verschiedene Divergenz aus):

$$\begin{aligned} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \alpha (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^2} l^{\mu\sigma}(q) \gamma^\mu \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{q}} \gamma^\nu \frac{\mathbb{1}}{\not{p} - \not{k} - \not{q}} \gamma^\sigma \frac{\alpha}{q^2} \\ = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \alpha \gamma^\nu + \text{KONV.} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die störungstheoretische Rechnung liefert für die transversal-projizierte Schleife keine Divergenz. Dagegen bildet die transversal-projizierte Schleife mit den erweiterten Ansätzen Divergenzen aus, die aufgrund der Forderung nach Reproduzierbarkeit der perturbativen Divergenz verschwinden müssen. Die mathematische Formulierung dieser Forderung kann direkt aus den Analysierungen der Divergenzen in Kapitel 4.2 abgelesen werden:

$$\begin{aligned}
0 = & H_{200}^{[1]} \left[ 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \right. \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} C_{2-l10l}^{[1]} C_{1-n'1n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} C_{1-l11l}^{[1]} C_{2-n'1n'0}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} (-u_{1,2}w)^{m+m'} \\
& C_{4-2m-lm0l}^{[1]} C_{3-2m'-n'm'n'1}^{[1]} \\
& + 3\Pi(\varepsilon) \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} e_f \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3}^{-1} (-w_{1,3})^{-1} (-u_{1,3})^{-1} \\
& \sum_{m=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m'=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} (-u_{1,2})^{m+m'} \\
& C_{3-2m-lm1l}^{[1]} C_{4-2m'-n'm'n'0}^{[1]} \left. \right] \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Diese Forderung läßt die Lösung  $H_{200}^{[1]} = 0$  zu.

Ein Vergleich der berechneten perturbativen Divergenzen aus Kapitel 4.3 mit der longitudinal-projizierten störungstheoretischen Divergenz (5.6) führt auf die Forderung:

$$\begin{aligned}
0 = & \gamma^\nu \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{011}^{[1]} F_{1-j1j}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + \gamma^\nu \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} F_{1-ii1}^{[1]} \tilde{C}_{011}^{[1]} \\
& + \gamma^{\nu'} (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} F_{2-i-jij}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + 3 \frac{k^\nu}{\not{p} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{2-l0l}^{[1]} H_{200}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
& + 3 \frac{k^\nu}{\not{p} - \not{k} + w_{1,2}\Lambda} (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} H_{200}^{[1]} \tilde{C}_{2-n'n'0}^{[1]} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung über unterschiedliche Matrixstrukturen verfügt, bindet sich diese Forderung an die einzelnen Matrixstrukturen. Die störungstheoretische Divergenz kann also nur reproduziert werden, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{011}^{[1]} F_{1-j1j}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \\
 & + \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} F_{1-ii1}^{[1]} \tilde{C}_{011}^{[1]} \\
 & + (-w_{1,3})^{-1} \sum_{l=0}^1 \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} F_{2-i-ij}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

$$0 = H_{200}^{[1]} \left[ \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+n'} \tilde{C}_{2-l0l}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \right] \quad (5.10)$$

$$0 = H_{200}^{[1]} \left[ \sum_{l=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-w_{1,2})^{l+i} (-w_{1,2})^{j+n'} \tilde{C}_{1-l1l}^{[1]} \tilde{C}_{1-n'n'1}^{[1]} \right] \quad (5.11)$$

Insgesamt wird durch die Nebenbedingungen (5.2, 5.3, 5.7) und (5.9-5.11) ein Gleichungssystem für die Vertexparameter definiert welches prinzipiell ausgewertet werden kann. Es ergeben sich dann Bedingungen an die Vertexkoeffizienten, wodurch die Anzahl der freien Parameter eingeschränkt werden kann. Eine exakte Auswertung dieser Gleichungen kann im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden. Es soll aber darauf hingewiesen werden, daß  $H_{200}^{[1]} = 0$  mit der Nebenbedingung (5.9) eine mögliche Lösung des Gleichungssystem darstellt.

### 5.3 Die resultierenden Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen für $r = 1$

Abschließend werden die Selbstkonsistenz-Gleichungen zusammengestellt. Dabei werden die Nebenbedingungen (5.2, 5.3, 5.7) und (5.9-5.11) und die SK-Gleichung (4.86) nicht mehr explizit mitgeführt. Sie gehören aber mit zu dem SK-Gleichungssystem dieser Arbeit, werden aber von den folgenden Überlegungen nicht berührt. Im folgenden werden die übrigen SK-Gleichungen in  $r = 1$  auf die Vertexparameter umgerechnet und zusammengestellt<sup>1</sup>.

Die SK-Gleichungen des inversen Fermionen-Propagators ( $N_c = 3$ ):

SK-1:

$$-\beta_0 w_{1,1} = \frac{4}{3} \left\{ 3(z_1 - w_{1,1}) + \alpha(2\bar{z}_1 + w_{1,2} - w_{1,1}) \right\} \quad (5.12)$$

---

<sup>1</sup>Die Notation der Vertexparameter ist Anhang E entsprechend gewählt.

SK-2:

$$\begin{aligned}
-\beta_0(w_{1,1}w_{1,2} + w_{1,3}) &= \frac{3}{4} \left\{ 3(z_2 + z_1(w_{1,2} - w_{1,1}) - w_{1,1}w_{1,2}) \right. \\
&\quad \left. + \alpha(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_1(w_{1,2} - w_{1,1}) - w_{1,1}w_{1,2}) \right\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Die SK-Gleichungen des Quark-Photon-Vertex ( $N_c = 3$ ):

SK-3:

$$\begin{aligned}
\beta_0 w_{1,3}^2 x_2 &= -\alpha \frac{3}{4} \left\{ w_{1,3}^2 (\tilde{z}_1 + w_{1,2})^2 - 2x_1 w_{1,3} (\tilde{z}_1 + w_{1,2})(w_{1,2}\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) \right. \\
&\quad \left. + (w_{1,2}x_1 + x_2 + w_{1,2}^2)(w_{1,2}\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)^2 \right. \\
&\quad \left. - \beta_0 w_{1,3}^2 (w_{1,2}^2 - w_{1,3} + 2w_{1,2}x_1) \right\}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

SK-4:

$$\begin{aligned}
\beta_0 w_{1,3}^2 x_1 &= -\alpha \frac{3}{4} \left\{ w_{1,3}^2 (\tilde{z}_1 + w_{1,2}) + x_1 w_{1,3} (\tilde{z}_2 - w_{1,2}^2 + (\tilde{z}_1 + w_{1,2})^2) \right. \\
&\quad \left. + x_2 \tilde{z}_1 (w_{1,2}\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) \right\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Man erhält einen Satz von vier SK-Gleichungen mit einer Nebenbedingung für insgesamt 9 freie Parameter. Da bereits alle photonischen DS-Gleichungen in niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung ausgeschöpft sind, ist eine Lösung der SK-Gleichungen (5.12)-(5.15) in niedrigster Ordnung in  $e_f$  unmöglich. Eine Lösung ist nur in Sicht, wenn die benötigten gluonischen Vertexparameter mit ihrer Eichabhängigkeit vollständig bestimmt sind. Wie obiges Gleichungssystem zeigt, werden sämtliche Vertexparameter bei Rechnungen außerhalb der Landau-Eichung explizit vom Eichfixierungsparameter abhängig. Deshalb können die in [STI 97] aufgelisteten Vertexparameter nicht verwendet werden; ihre Eichabhängigkeit ist "weggeeeicht". Sämtliche SK- Gleichungen sind lineare Gleichungen in den photonischen Parametern.

Da die Parameter des gluonischen Sektors für  $r = 1$  und in Landau-Eichung bereits bestimmt sind, wird eine Lösung der photonischen Vertexparametern in Landau Eichung angegeben: An den SK-Gleichungen SK-3 und SK-4 kann die Lösung in Landau-Eichung direkt abgelesen werden. Die reskalierten Vertexparameter des Quark-Photon-Vertex lauten in Landau-Eichung der QCD:

$$x'_1 = 0 \tag{5.16}$$

$$x'_2 = 0 \tag{5.17}$$

In Landau-Eichung, in niedrigster Ordnung in  $e_f$  und auf dem Ein-Schleifen-Niveau erhält also der Quark-Photon-Vertex durch die starke Wechselwirkung der Quarks *keine* nicht-perturbative Modifikation nullter Ordnung. Dieses Ergebnis ist ein wesentliches Resultat dieser Arbeit. Diese Werte können der Tabelle (2.1) zugefügt werden. Anzumerken bleibt noch, daß die angegebene Lösung in Landau-Eichung effektiv die Lösung folgender Gleichung ist:

$$\Gamma_{F\bar{F}A}^{[1]\nu} = \gamma^\nu \quad (5.18)$$

Es ist also sehr viel Aufwand betrieben worden um eine relativ einfache Gleichung zu lösen. Es folgt zum Schluß dieser Arbeit eine Diskussion der gewonnenen Resultate.

## 5.4 Diskussion der Ergebnisse

Die Schwierigkeit beim Lösen des SK-Gleichungssystems in beliebiger Eichung liegt darin begründet, daß die enthaltenen Vertex-Parameter vom Eichfixierungsparameter abhängen und daher bisher unbestimmt sind. Dieser Sachverhalt kann bereits an den zur Verfügung stehenden DS-Gleichungen abgelesen werden. Sämtliche Parameter des longitudinalen Quark-Gluon-Vertex sind unbestimmt. Eine Lösung der SK-Gleichungen in beliebiger Eichfixierung ist nur zu erwarten, wenn auch die reinen QCD-Vertexgleichungen in allgemeiner Eichfixierung behandelt oder wenn Terme in höherer Ordnung der elektromagnetischen Kopplung berücksichtigt werden. Bereits in der quadratischen Ordnung der elektromagnetischen Kopplung können SK-Gleichungen mit photonischen Parametern aus dem inversen Photon-Propagator und dem inversen Fermion-Propagator gewonnen werden. Auch die Ein-Schleifen-Näherungen der beiden DS-Gleichungen des Quark-Photon-Vertex liefern dann unterschiedliche SK-Gleichungen. Dieses zeigt, daß eine Behandlung des Quark-Photon-Vertex auf dem Ein-Schleifen-Niveau und in *niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung* nur eine sehr beschränkte Analyse zuläßt. Wenn keine weiteren Restriktionen durch Einbeziehung anderer Gesichtspunkte gestellt werden, wie z.B. durch die Ward-Takahashi-Identitäten, ist nur eine Lösung in Landau-Eichung möglich. Anlaß zur Diskussion bietet sicherlich auch die Lorentz-Struktur  $\frac{k^\nu}{\Lambda}$  des Quark-Photon-Vertex. Diese Struktur ist dafür verantwortlich, daß bei den Schleifen-Berechnungen im vierten Kapitel Terme entwickelt werden, die zum einen eine Modifikation der störungstheoretischen Divergenz bewirken und daher als konvergente Defektterme gelten, und zum anderen sogar Terme produzieren welche im perturbativen Limes divergieren. Hierauf begründen sich die vielen Nebenbedingungen die an die Vertexparameter gestellt werden. Allen Bedingungen gemeinsam ist, daß  $H_{200}^{[1]}$  ihre "triviale" Lösung ist. Es ist also zu vermuten, daß eine nicht-störungstheoretische Modifikation des Quark-Photon-Vertex der Form  $H_{\eta ij}^{[1]} \frac{k^\nu}{\Lambda}$  allgemein abgelehnt werden muß. Dafür sprechen zum einen die Überlegungen in Kapitel 2.4.4 und ein Vergleich mit dem Quark-Gluon-Vertex, der als "Verwandter" des Quark-Photon-Vertex betrachtet werden kann.

Setzt man voraus, daß der Quark-Photon-Vertex auf seine störungstheoretische Lorentz-Struktur eingeschränkt sei, so folgt aus (5.9) als Nebenbedingung an die photonischen Vertex-Parameter:

$$0 = x_2 \tilde{z}_1^2 - 2w_{1,3} \tilde{z}_1 x_1 \quad (5.19)$$

Diese Bedingung wäre dann zumindest in Landau-Eichung exakt erfüllt.

# Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Kapitel dieser Arbeit sind die Grundlagen der störungstheoretischen Behandlung der QCD eingeführt und die Notwendigkeit eines nicht-störungstheoretischen Lösungsansatzes erläutert worden. Darauf aufbauend wurde im zweiten Kapitel in die systematisch erweiterte Störungstheorie nach [Sti 96] eingeführt. Im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie ist es in dieser Arbeit gelungen, die in der erweiterten Störungstheorie gültige Systematik der kompensierenden Pole für Schleifenberechnungen mit beliebiger Eichfixierung bereitzustellen. Die Überlegungen dazu basierten auf der Struktur der Vertexapproximanten, die an die durch die Slavnov-Taylor-Identitäten empfohlene Struktur angepaßt wurden. Hierdurch ist die Möglichkeit eröffnet worden dynamische Gleichungen mit kompensierenden Polen außerhalb der Landau-Eichung zu behandeln und somit einen tieferen Einblick in die Struktur der Vertexparameter zu gewinnen. Dieses kann als ein wesentliches Resultat dieser Arbeit gelten.

Gegenstand des dritten Kapitels dieser Arbeit war die Untersuchung des inversen Fermion-Propagators in beliebiger Eichfixierung. Es konnten SK-Gleichungen auf niedrigster Stufe der rationalen Approximation angegeben werden, die in Landau-Eichung die Resultate in [Kuh 97] reproduzieren. Darüber hinaus ist gezeigt worden, daß die auftretenden Vertexparameter vom Eichfixierungsparameter abhängen, was an in Landau-Eichung bestimmten Vertexparametern nicht abgelesen werden kann. Die Vertexparameter werden außerhalb der Landau-Eichung zu Funktionen des Eichfixierungsparameters, so daß sich die Frage stellt, wie SK-Gleichungen zu behandeln sind, die über eine Abhängigkeit vom Eichfixierungsparameter verfügen. An den störungstheoretischen Divergenzen kann abgelesen werden, daß der Eichfixierungsparameter auf dem Ein-Schleifen-Niveau linear in die SK-Gleichungen eingeht, was natürlich nicht bedeutet, daß die Vertexkoeffizienten lineare Funktionen des Eichfixierungsparameter sind. Um diese Funktionen bestimmen zu können, muß ein geeignetes Verfahren entwickelt werden. Ein mögliches, aber sehr aufwendiges Verfahren kann darin bestehen, für verschiedene Eichfixierungen die Vertexkoeffizienten zu bestimmen und anschließend durch Interpolation dieser Werte auf die Eichfixierungsabhängigkeit zu schließen.

Die Ausführungen im vierten Kapitel der vorliegenden Arbeit zeigten, daß zur selbstkonsistenten Behandlung des Quark-Photon-Vertex in niedrigster Ordnung und auf dem Ein-Schleifen-Niveau nur eine Näherung seiner DS-Gleichung zur Verfügung steht. Dieser Sachverhalt stellt im Rahmen dieser Arbeit eine wichtige Erkenntnis dar und zeigt, daß in der beschriebenen Näherung eine selbstkonsistente Behandlung des photonischen Sektors nur auf einer DS-Gleichung basiert. Um genügend SK-Gleichungen bereitstellen zu können

müssen entweder höhere Ordnungen in der elektromagnetischen Kopplung mit in Betracht gezogen werden, oder es werden andere Restriktionen an die Vertexparameter gefunden, z.B. über die Ward-Takahashi-Identitäten.

Im Zuge der Schleifenberechnungen zum Quark-Photon-Vertex im vierten Kapitel konnte die in [Kuh 97] aufgestellte Behauptung bestätigt werden, daß das DS-Funktional der Vertexgleichung in Landau-Eichung keinen Beitrag nullter Ordnung liefert, wenn die störungstheoretische Lorentz-Struktur verwendet wird. Die SK-Gleichungen des Quark-Photon-Vertex sind in beliebiger Eichung auf dem Niveau niedrigster Stufe der rationalen Approximation aufgestellt und darüber hinaus im fünften Kapitel in Landau-Eichung gelöst worden. Auch diese Vertexparameter verfügen über eine in Landau-Eichung verborgene Abhängigkeit vom Eichfixierungsparameter.

Bei den Schleifenberechnungen im vierten Kapitel sind erstmalig Lorentz-Impulsstrukturen der allgemeinen Form  $H_{ij}^{[1] \frac{k^\nu}{\Lambda}}$  berücksichtigt worden. Diese sind Teile der nicht-perturbativen Erweiterung des Quark-Photon-Vertex, welche in *niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung* nicht den störungstheoretischen Divergenzgrad erhöhen und daher durch keine Randbedingungen erfaßt werden können. Es konnte am Beispiel des Quark-Photon-Vertex gezeigt werden, daß diese Terme die störungstheoretische Divergenz modifizieren und sogar im perturbativen Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  divergente Beiträge liefern. Durch die Forderung nach der Reproduzierbarkeit der störungstheoretischen Divergenz konnte ein Gleichungssystem für die Vertexparameter abgeleitet werden, das zumindest  $H_{ij}^{[1]} = 0$  als eine mögliche und plausible Lösung besitzt. Dieses Gleichungssystem deutet an, daß ein tieferer Zusammenhang zwischen der Forderung nach *Reproduzierbarkeit der störungstheoretischen Vertexfunktion* im perturbativen Limes und der Forderung nach *Reproduzierbarkeit der störungstheoretischen Divergenz* im perturbativen Limes besteht. Eine mathematische Untersuchung dieses Gleichungssystems konnte in dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden und steht daher noch aus.



# Anhang A

## Funktionale Methoden

Im Folgenden wird ein Überblick über die in dieser Arbeit verwendete Notation gegeben:

$A(x)$  Photonfeld mit Quelle  $S$

$B(x)$  Gluonfeld mit Quelle  $J$

$C, \bar{C}$  Geist-, Antigeistfeld mit Quelle  $\omega, \bar{\omega}$

$\psi, \bar{\psi}$  Fermion-, Antifermionfeld mit Quelle  $\eta, \bar{\eta}$

$F^{\mu\nu}(x)$  photonischer Feldstärketensor

$G_a^{\mu\nu}(x)$  gluonischer Feldstärketensor

$\xi$  photonischer Eichparameter

$\alpha$  gluonische-Eichparameter

$\Gamma_{F, \bar{F}, A, V, \dots}^{(0) \text{pert}}$  bezeichnet die Vertexfunktionen 0. Ordnung. Dabei bezeichnen  $\{F, \bar{F}, A, V, \dots\}$  das Fermion, das Antifermion, das Photon, das Gluon, ... .

### A.1 Die euklidische Wirkung

Die euklidische Wirkung der QCD mit Einbeziehung des photonischen Sektors lautet im Ortsraum:

$$\begin{aligned} S_E[A, B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] = & \int d^4x \left( \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu}(x) G_a^{\mu\nu}(x) \right. \\ & + \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\alpha} \left( \partial^\mu B_a^\mu(x) \right)^2 + \frac{1}{2\xi} \left( \partial^\mu A^\mu(x) \right)^2 \\ & + (\partial^\mu \bar{C}_a(x)) \left[ \partial^\mu \delta_{ab} + \tilde{g}_0 f_{abc} B_c^\mu(x) \right] C_b(x) \\ & \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left[ -i\gamma^\mu \partial^\mu \delta^{ij} + m_{0(f)} \delta^{ij} + \tilde{g}_0 T_a^{ij} \gamma^\mu B_a^\mu(x) + \tilde{e}_f \gamma^\mu A^\mu(x) \right] \psi_{(f)}^j(x) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Die acht Matrizen  $T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$  sind die Erzeugenden der fundamentalen Darstellung der  $SU(3)$ .

Die nackte, euklidische Wirkung im Impulsraum erhält man durch entsprechende Fourier-

Transformation der Felder mit anschließender partieller Integration. In  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen hat sie die Form:

$$\begin{aligned}
S_E[A, B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] = & \\
& -\frac{1}{2} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{VVa_1 a_2}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2} B_{a_1}^{\mu_1}(q_1) B_{a_2}^{\mu_2}(q_2) \\
& + \frac{1}{3!} g_0 \nu_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2 \mu_3}(q_1, q_2, q_3) B_{a_1}^{\mu_1}(q_1) B_{a_2}^{\mu_2}(q_2) B_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
& - \frac{1}{4!} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_4}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
& \quad \Gamma_{4V a_1 a_2 a_3 a_4}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} B_{a_1}^{\mu_1}(q_1) B_{a_2}^{\mu_2}(q_2) B_{a_3}^{\mu_3}(q_3) B_{a_4}^{\mu_4}(q_4) \\
& - \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{G\bar{G}a_1 a_2}^{(0) \text{pert}}(q_2^2) \bar{C}_{a_1}(q_1) C_{a_2}(q_2) \\
& + g_0 \nu_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{(0) \text{pert} \mu_3}(q_1) \bar{C}_{a_1}(q_1) C_{a_2}(q_2) B_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
& - \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}(f)}^{(0) \text{pert} ij}(q_2) \psi_{(f)}^j(q_2) \\
& + g_0 \nu_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}V(f)a_3}^{(0) \text{pert} ij \mu_3} \psi_{(f)}^j(q_2) B_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
& - \frac{1}{2} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{AA}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2} A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) \\
& + e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}V(f)a_3}^{(0) \text{pert} ij} \psi_{(f)}^j(q_2) A^{\mu_3}(q_3)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Die eingeführten Vertexfunktionen 0. Ordnung  $\Gamma^{(0) \text{pert}}$  werden so definiert, daß die Fouriertransformierte Wirkung positiv definit bleibt; sie können dann direkt aus der transformierten Wirkung abgelesen werden:

$$\Gamma_{VVa_1 a_2}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2}(q) = -\delta_{a_1 a_2} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} q^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) q^{\mu_1} q^{\mu_2} \right) \tag{A.3}$$

$$\Gamma_{G\bar{G}a_1 a_2}^{(0) \text{pert}}(q^2) = -\delta_{a_1 a_2} q^2 \tag{A.4}$$

$$\Gamma_{F\bar{F}(f)}^{(0)pertij}(q) = -\delta^{ij}(q + m_0^{(f)}) \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{AA}^{(0)pert\mu_1\mu_2}(q) = -\left(\delta^{\mu_1\mu_2}q^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)q^{\mu_1}q^{\mu_2}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{(0)pert\mu_1\mu_2\mu_3}(q_1, q_2, q_3) = & if_{a_1 a_2 a_3} \left( \delta^{\mu_1\mu_2}(q_1 - q_2)^{\mu_3} \right. \\ & + \delta^{\mu_2\mu_3}(q_2 - q_3)^{\mu_1} \\ & \left. + \delta^{\mu_3\mu_1}(q_3 - q_1)^{\mu_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{(0)pert\mu_3}(q) = if_{a_1 a_2 a_3} q^{\mu_3} \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{F\bar{F}V(f)a_3}^{(0)pertij\mu_3} = T_{a_3}^{ij} \gamma^{\mu_3} \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{F\bar{F}A(f)}^{(0)pert\mu_3} = \gamma^{\mu_3} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{4V a_1 a_2 a_3 a_4}^{(0)pert\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = & f_{a_1 a_2 b} f_{a_3 a_4 b} (\delta^{\mu_1\mu_4} \delta^{\mu_2\mu_3} - \delta^{\mu_1\mu_3} \delta^{\mu_2\mu_4}) \\ & + f_{a_1 a_3 b} f_{a_4 a_2 b} (\delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4} - \delta^{\mu_1\mu_4} \delta^{\mu_2\mu_3}) \\ & + f_{a_1 a_4 b} f_{a_2 a_3 b} (\delta^{\mu_1\mu_3} \delta^{\mu_2\mu_4} - \delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Der Funktionalintegralformalismus

Definiert werden die Greenfunktionen als Vakuumserwartungswerte des zeitgeordneten Produktes der in der betrachteten Feldtheorie auftretenden Felder. Das Erzeugende Funktional der euklidischen Greenfunktionen für die QCD unter Einbeziehung des photonischen Sektors lautet:

$$\begin{aligned} Z_E[S, J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = & \frac{1}{N_E} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ -S_E[A, B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] \right. \\ & - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ S^\mu(-q) A^\mu(q) + J_a^\mu(q) B_a^\mu(q) + \bar{C}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) C_a(q) \right. \\ & \left. \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \left( \bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\psi}_{(f)}^i(-q) \psi_{(f)}^i(q) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Dabei ist der Normierungsfaktor  $\frac{1}{N_E}$  so gewählt, daß  $Z_E[S = 0, \dots, \bar{\eta} = 0] = 1$  ergibt. Das Erzeugende Funktional für die zusammenhängenden (connected-) Greenfunktionen ist dann

$$W_E[S, J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E[S, J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \quad (\text{A.13})$$

Leitet man dieses Funktional nach den Quellen  $S, J, \dots, \bar{\eta}$  ab und setzt diese anschließend gleich null, so erhält man die entsprechenden euklidischen, zusammenhängenden Greenfunktionen. In dieser Arbeit werden die folgenden zusammenhängenden Greenfunktionen benötigt:

$$\frac{\delta^2 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta S^{\nu_2}(q_2) \delta S^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} = \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^D(q_1 + q_2) G_{AA}^{\nu_1 \nu_2}(q_1, q_2) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\delta^2 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta \eta^{\nu_2}(q_2) \delta \bar{\eta}^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} = \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^D(q_1 + q_2) G_{F\bar{F}}^{\nu_1 \nu_2}(q_1, q_2) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\delta^3 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta S^{\nu_3}(q_3) \delta \eta^{\nu_2}(q_2) \delta \bar{\eta}^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) G_{F\bar{F}A}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(q_1, q_2, q_3) \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\delta^3 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_3}^{\nu_3}(q_3) \delta \eta^{\nu_2}(q_2) \delta \bar{\eta}^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) G_{F\bar{F}V a_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(q_1, q_2, q_3) \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^4 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta \eta^{\nu_4}(q_4) \delta \bar{\eta}^{\nu_3}(q_3) \delta \eta^{\nu_2}(q_2) \delta \bar{\eta}^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3D}} \delta^D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) G_{F\bar{F}F\bar{F}}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^4 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta S^{\nu_4}(q_4) \delta J_{a_3}^{\nu_3}(q_3) \delta \eta^{\nu_2}(q_2) \delta \bar{\eta}^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3D}} \delta^D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) G_{F\bar{F}VA}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^4 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta S^{\nu_4}(q_4) \delta S^{\nu_3}(q_3) \delta \eta^{\nu_2}(q_2) \delta \bar{\eta}^{\nu_1}(q_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3D}} \delta^D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) G_{F\bar{F}AA}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Es bestehen folgende Zusammenhänge zwischen den connected-Greenfunktionen und den Vertexfunktionen (Entwicklung nach Vertexfunktionen):

$$\begin{aligned} G_{F\bar{F}}^{\nu_1 \nu_2}(q_1, q_2) &= \delta^{\nu_1 \nu_2} S(q_2) \\ G_{AA}^{\nu_1 \nu_2}(q_1, q_2) &= \delta^{\nu_1 \nu_2} K(q_2) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$S(q)\Gamma_{F\bar{F}} = -1 \quad (\text{A.22})$$

$$K(q)\Gamma_{AA} = -1 \quad (\text{A.23})$$

$$G_{F\bar{F}A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3) = e_f\nu_0^\epsilon S(-q_1)\Gamma_{F\bar{F}A}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3)S(q_2)K(q_3) \quad (\text{A.24})$$

$$G_{F\bar{F}V a_3}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3) = g_0\nu_0^\epsilon S(-q_1)\Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3)S(q_2)D_{a_3}(q_3) \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} G_{F\bar{F}F\bar{F}}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\ = (g_0\nu_0^\epsilon)^2 S(-q_1)S(q_2)\Gamma_{F\bar{F}F\bar{F}}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3, q_4)S(q_2)S(-q_3)S(q_4) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} G_{F\bar{F}VA}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\ = g_0\nu_0^\epsilon e_f\tilde{\nu}_0^\epsilon S(-q_1)S(q_2)\Gamma_{F\bar{F}VA}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3, q_4)D_{a_3}(q_3)K(q_4) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} G_{F\bar{F}AA}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\ = g_0\nu_0^\epsilon (e_f\tilde{\nu}_0)^2 S(-q_1)S(q_2)\Gamma_{F\bar{F}AA}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(q_1, q_2, q_3, q_4)K(q_3)K(q_4) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

### A.3 Definition der Feynman-Regeln

Im Folgenden werden die rein perturbativen Feynmanregeln, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden, festgelegt:

1) nackte Propagatoren werden durch dünne Linien dargestellt; die störungstheoretischen Vertexfunktionen nullter Ordnung (kurz: nackte Vertexfunktionen  $\Gamma_N^{(0)pert}$ ) mit mehr als zwei äußeren Beinen werden durch Punkte symbolisiert, in die die entsprechenden Linien einlaufen. Die einlaufenden dünn gedruckten Linien sind nicht mit den Propagatoren zu verwechseln, sondern gehören zur Symbolik der Vertizes.

2) Beschrieben werden alle Teilchen als in den Vertex einlaufend und der getragene Impuls und seine Richtung kann, wenn notwendig, durch anliegende Pfeile angegeben werden. Jedoch muß bei den gerichteten Linien (also bei fermionischen und geistartigen Linien) die Laufrichtung angegeben werden.

3) Wie bekannt wird über geschlossene Schleifen integriert und bei geschlossenen Fermion-Schleifen entgegen der Laufrichtung eine Dirac-Matrixspur gebildet sowie ein Faktor  $-1$  angefügt. Symmetriefaktoren vor Diagrammen mit Permutationssymmetrien werden in dieser Arbeit nicht benötigt, können aber der allgemeinen Literatur entnommen werden, da sie unabhängig von den hier eingeführten Konventionen sind.

Die Definition der nackten Größen lautet folgendermaßen:

der nackte Gluon-Propagator:

$$D_{a_1 a_2}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2}(q) = \delta^{a_1 a_2} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} q^2 - (1 - \alpha) q^{\mu_1} q^{\mu_2} \right) \frac{1}{q^4} = \text{diagram} \quad (\text{A.29})$$

der nackte Photon-Propagator:

$$D_{a_1 a_2}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2}(q) = \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} q^2 - (1 - \xi) q^{\mu_1} q^{\mu_2} \right) \frac{1}{q^4} = \text{diagram} \quad (\text{A.30})$$

der nackte Fermion-Propagator:

$$S^{(0) \text{pert} ij}(q) = \delta^{ij} \frac{\mathbb{1}}{q + m_{(0)}} = \text{diagram} \quad (\text{A.31})$$

der nackte Geist-Propagator:

$$\tilde{D}_{a_1 a_2}^{(0) \text{pert}}(q) = \delta_{a_1 a_2} \frac{1}{q^2} = \text{diagram} \quad (\text{A.32})$$

der nackte Fermion-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{F\bar{F}V a}^{(0) \text{pert} ij \mu} = T_a^{ij} \gamma^\mu = \text{diagram} \quad (\text{A.33})$$

der nackte Fermion-Photon-Vertex:

$$\Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} \mu} = \gamma^\mu = \text{diagram} \quad (\text{A.34})$$

der nackte 3-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2 \mu_3}(q_1, q_2, q_3) &= i f_{a_1 a_2 a_3} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} (q_1 - q_2)^{\mu_3} \right. \\ &\quad \delta^{\mu_2 \mu_3} (q_2 - q_3)^{\mu_1} \\ &\quad \left. \delta^{\mu_3 \mu_1} (q_3 - q_1)^{\mu_2} \right) \end{aligned}$$

$$= \text{diagram} \quad (\text{A.35})$$

der nackte Geist-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{(0) \text{pert} \mu_3}(q) = i f_{a_1 a_2 a_3} q^{\mu_3} = \text{diagram} \quad (\text{A.36})$$

Die vollen Propagatoren und Vertexfunktionen werden dagegen durch fettgedruckte Linien bzw. Kreise dargestellt:

der Photon-Propagator:

$$\text{diagram} \quad (\text{A.37})$$

der Fermion-Propagator:

$$\text{diagram} \quad (\text{A.38})$$

der Gluon-Propagator:

$$\text{diagram} \quad (\text{A.39})$$

der Geist-Propagator:

$$\text{diagram} \quad (\text{A.40})$$

der Fermion-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{F\bar{F}V}^{\text{pert}}(-q_1, q_2, k) = \text{diagram} \quad (\text{A.41})$$

der Fermion-Photon-Vertex:

$$\Gamma_{F\bar{F}A}^{\text{pert}}(-q_1, q_2, k) = \text{diagram} \quad (\text{A.42})$$

## Anhang B

# Dyson-Schwinger-Gleichungen

Die Dyson-Schwinger-Gleichungen (DS-Gleichungen) bilden ein unendliches, hierarchisch gekoppeltes System von Integraldifferentialgleichungen für die Vertex-Funktionen  $\Gamma_N$  mit  $N$  äußeren Beinen, basierend auf der mathematischen Eigenschaft des Funktionalintegrals, daß es über eine Funktionalableitung verschwindet. Die formale Darstellung der Dyson-Schwinger-Gleichungen mit Dyson-Schwinger-Funktional  $\Phi_N$  ist:

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + \Phi_N \left[ \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \Gamma_{N+2} \right] \quad (\text{B.1})$$

Ist die Wirkung der betrachteten Feldtheorie gegeben, so spiegeln die Dyson-Schwinger-Gleichungen die Dynamik der Theorie wieder, da sie genau wie die Euler-Lagrange-Gleichungen, wegen ihrer Ableitungsterme, als Bewegungsgleichungen der Greenfunktionen interpretiert werden können (sie verfügen immer über Schleifenintegrale in denen alle Impulsgrößenordnungen auftreten können). In dieser Arbeit werden einige der fermionischen, der photonischen und der gluonischen Dyson-Schwinger-Gleichungen benötigt.

Exemplarisch wird die Herleitung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Photon-Propagator ausführlich angegeben.

### B.1 Der photonische Kanal

Das Funktionalintegral über eine Funktionalableitung verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta A^{\nu_1}(-p_1)} \exp \left\{ -S_E[A, B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ S^\mu(-q) A^\mu(q) + J_a^\mu(q) B_a^\mu(q) + \bar{C}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) C_a(q) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{f=1}^{N_F} \left( \bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\psi}_{(f)}^i(-q) \psi_{(f)}^i(q) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$= (-1) \left[ \frac{\delta S_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]}{\delta A^{\nu_1}(-p_1)} \right]_{F(x) \rightarrow -(2\pi)^D \frac{\delta}{\delta \bar{Q}(-x)}} + \frac{1}{(2\pi)^D} S^{\nu_1}(p_1) Z_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]$$



(B.3)

Dabei ist bereits die Ableitung auf den Quellenterm ausgeführt worden. Bei der Berechnung von  $\frac{\delta S_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]}{\delta A^{\nu_1}(-p_1)} \Big|_{F(x) \rightarrow -(2\pi)^D \frac{\delta}{\delta Q(-x)}}$  sind nur zwei Terme von null verschieden:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta A^{\nu_1}(-p_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{AA}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2} A^{\mu_1}(q_1) A^{\mu_2}(q_2) \right\} \\
&= 2 \frac{1}{2} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \delta^{\nu_1 \mu_2} \delta^D(q_1 + p_1) \Gamma_{AA}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2} A^{\mu_2}(q_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D} \Gamma_{AA}^{(0) \text{pert} \nu_1 \mu_2} A^{\mu_2}(p_1) \\
&= -\Gamma_{AA}^{(0) \text{pert} \nu_1 \mu_2} \frac{\delta}{\delta S^{\mu_2}(-p_1)}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Und:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta A^{\nu_1}(-p_1)} \left\{ e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \right. \\
& \quad \left. \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} ij} \psi_{(f)}^j(q_2) A^{\mu_3}(q_3) \right\} \\
&= \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \delta^{\nu_1 \mu_3} \delta^D(q_3 + p_1) \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} ij} \psi_{(f)}^j(q_2) \} \\
&= \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \bar{\psi}_{(f)}^i(p_1 - q_2) \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} ij} \psi_{(f)}^j(q_2) \\
&= \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta \eta_{(f)}^i(q_2 - p_1)} \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} ij \nu_1} \frac{\delta}{\bar{\eta}_{(f)}^j(-q_2)}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Damit lautet die Master-Dyson-Schwinger-Gleichung für den photonischen Kanal:

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ \Gamma_{AA}^{(0) \text{pert} \nu_1 \mu_2} \frac{\delta}{\delta S^{\mu_2}(-p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} S^{\nu_1}(p_1) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta \eta_{(f)}^i(q_2 - p_1)} \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} ij \nu_1} \frac{\delta}{\bar{\eta}_{(f)}^j(-q_2)} \right] Z_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

### B.1.1 DS-Gleichung für den inversen Photonpropagator

Anwenden der Funktionalableitung  $\frac{\delta}{\delta S^{\nu_2}(p_2)}$  auf die Master-Gleichung (B.6) mit  $Z_E = \exp W_E$  und anschließendes Nullsetzen der Quellen führt auf:

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ \Gamma_{AA}^{(0)pert\nu_1\mu_2} \frac{\delta^2 W}{\delta S^{\nu_2}(p_2) \delta S^{\mu_2}(-p_1)} \Big|_{J=\dots=\bar{\eta}=0} + \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^{\nu_1\nu_2} \right. \\
& \left. + \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon \int d^D q_2 \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} \frac{\delta^3 W}{\delta S^{\nu_2}(p_2) \delta \eta_{(f)}^i(q_2 - p_1) \delta \bar{\eta}_{(f)}^j(-q_2)} \Big|_{J=\dots=\bar{\eta}=0} \right] 1
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Es werden die folgenden zusammenhängenden (connected-) Greenfunktionen benötigt (Anhang A.1.2):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta S^{\nu_2}(p_2) \delta S^{\mu_2}(-p_1)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} &= \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^D(p_2 - p_1) G_{AA}^{\nu_2\mu_2}(-p_1, p_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^D(p_2 - p_1) \delta^{\nu_2\mu_2} K(p_2) \\
\\
\frac{\delta^3 W[S, J, \dots, \bar{\eta}]}{\delta S^{\nu_2}(p_2) \delta \eta^i(q_2 - p_1) \delta \bar{\eta}^j(-q)} \Big|_{S=\dots=\bar{\eta}=0} &= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \delta^D(p_2 - p_1) G_{F\bar{F}A}^{j i \nu_2}(-q_2, q_2 - p_1, p_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \delta^D(p_2 - p_1) e_f \nu_0^\varepsilon S(q_2) \\
&\quad \Gamma_{F\bar{F}A}^{j i \nu_2}(-q_2, q_2 - p_1, p_2) S(q_2 - p_1) K(p_2)
\end{aligned}$$

Auflösen der  $\delta$ -Funktion ( $p_2 = p_1$ ) liefert:

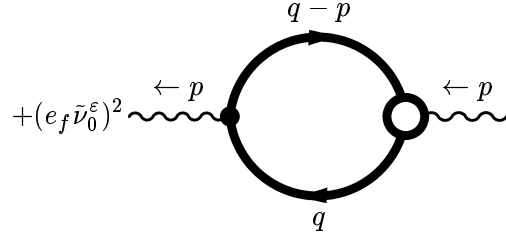
$$\begin{aligned}
0 = & \Gamma_{AA}^{(0)pert\nu_1\mu_2}(p_1) \delta^{\nu_2\mu_2} K(p_1) + \delta^{\nu_1\nu_2} \\
& + \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon Tr \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} S(q_2) \Gamma_{F\bar{F}A}^{j i \nu_2}(-q_2, q_2 - p_1, p_2) S(q_2 - p_1) K(p_2)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Multiplikation der Gleichung mit  $\Gamma_{AA}(p_1)$  liefert die Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Photonpropagator (mit  $K\Gamma_{AA} = -1$ ):

$$\begin{aligned}
\delta^{\nu_1\nu_2} \Gamma_{AA}(p_1) &= \delta^{\nu_1\nu_2} \Gamma_{AA}^{(0)pert\nu_1\mu_2}(p_1) \\
&+ \sum_{f=1}^{N_F} (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 Tr \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} S(q_2) \Gamma_{F\bar{F}A}^{j i \nu_2}(-q_2, q_2 - p_1, p_2) S(q_2 - p_1)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Mit den Feynmanregeln (Anhang A.1.3) ergibt sich die graphische Darstellung dieser Gleichung zu:

$$-(\text{wavy line with arrow})^{-1} = -(\text{wavy line with arrow})^{-1}$$



### B.1.2 Der Fermion-Antifermion-Photon-Vertex im photonischen Kanal

Nach Anwenden von  $\frac{\delta}{\delta\eta^{\nu_3}(p_3)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^{\nu_2}(p_2)}$  auf die Master-Gleichung (B.6) und anschließenden Nullsetzen der Quellen erhält man:

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \Gamma_{AA}^{(0)pert\nu_1\mu_2} \frac{\delta^3 W}{\delta S^{\mu_2}(-p_1) \delta\eta^{\nu_3}(p_3) \delta\bar{\eta}^{\nu_2}(p_2)} \Big|_{J=\dots=\bar{\eta}=0} \right. \\
 &+ \sum_{f=1}^{N_F} e_f \tilde{\nu}_0^\epsilon \int d^D q_2 \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} \left\{ \frac{\delta^4 W}{\delta\eta^{\nu_3}(p_3) \delta\bar{\eta}^{\nu_2}(p_2) \delta\eta_{(f)}^i(q_2 - p_1) \delta\bar{\eta}_{(f)}^j(-q_2)} \Big|_{J=\dots=\bar{\eta}=0} \right. \\
 &\left. \left. - \frac{\delta^2 W}{\delta\eta^{\nu_3}(p_3) \delta\bar{\eta}_{(f)}^j(-q_2)} \Big|_{J=\dots=\bar{\eta}=0} \frac{\delta^2}{\delta\eta_{(f)}^i(q_2 - p_1) \delta\bar{\eta}^{\nu_2}(p_2)} \Big|_{J=\dots=\bar{\eta}=0} \right\} \right] 1
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

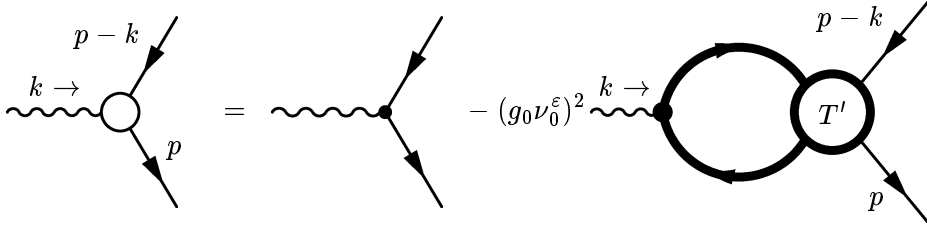
Einsetzen der connected-Greenfunktionen, Ausführen des letzten Impulsintegrals, Abspalten der  $\delta$ -Funktion ( $p_3 = p_1 - p_2$ ) und Entwickeln nach Vertexfunktionen (Anhang A.1.2) liefert:

$$\begin{aligned}
 0 &= \Gamma_{AA}^{(0)pert\nu_1\mu_2}(p_1) e_f \nu_0^\epsilon S(-p_2) \Gamma_{F\bar{F}A}^{\nu_2\nu_3\mu_2}(p_2, p_1 - p_2, -p_1) S(p_1 - p_2) K(-p_1) \\
 &+ e_f \nu_0^\epsilon (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int d^D q_2 \left\{ \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} S(q_2) S(q_2 - p_1) T_{F\bar{F}F\bar{F}}(-q_2, q_2 - p_1, p_2, p_1 - p_2) \right. \\
 &\quad \left. S(-p_2) S(p_1 - p_2) \right\} \\
 &- e_f \nu_0^\epsilon \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} \delta^{j\nu_3} S(p_1 - p_2) \delta^{i\nu_2} S(-p_2)
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Setzt man die DS-Gleichung für den inversen Photon-Propagator in obige Gleichung ein und benutzt die Zusammenhänge aus Anhang A.1.2, insbesondere  $T' = T - \Gamma_{F\bar{F}A} K \Gamma_{F\bar{F}A}$ , so erhält man die DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Photon-Vertex im photonischen Kanal:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}A}(p_2, p_1 - p_2, -p_1) &= \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} \\
 &- (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int d^D q_2 \left\{ \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pertij\nu_1} S(q_2) S(q_2 - p_1) T'_{F\bar{F}F\bar{F}}(-q_2, q_2 - p_1, p_2, p_1 - p_2) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Und in graphischer Form:



## B.2 Der fermionische Kanal

Das Funktionalintegral über eine Funktionalableitung verschwindet:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_{(f)}^{\nu_1}(-p_1)} \exp \left\{ -S_E[A, B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] \right. \\
 &\quad - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ S^\mu(-q) A^\mu(q) + J_a^\mu(q) B_a^\mu(q) + \bar{C}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) C_a(q) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \left( \bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\psi}_{(f)}^i(-q) \psi_{(f)}^i(q) \right) \right] \right\} \\
 &\quad \quad \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1) \left[ \frac{\delta S_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]}{\delta \bar{\psi}_{(f)}^{\nu_1}(-p_1)} \right]_{F(x) \rightarrow -(2\pi)^D \frac{\delta}{\delta Q(-x)}} + \frac{1}{(2\pi)^D} \eta_{(f)}^{\nu_1}(p_1) \Big] Z_E[A, B, \dots, \bar{\psi}] \\
 &= (-1) \left[ \Gamma_{F\bar{F}}^{(0)pert\nu_1 j}(p_1) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{(f)}(-p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} \eta_{(f)}^{\nu_1}(p_1) \right. \\
 &\quad + (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{(f)}^i(-q_2)} \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \\
 &\quad \left. + (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{(f)}^i(-q_2)} \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3} \frac{\delta}{\delta S^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \right] Z_E[S, \dots, \bar{\eta}] \\
 &\quad \quad \quad (B.14)
 \end{aligned}$$

Dieses ist die Master-Gleichung für die fermionischen DS-Gleichungen. Im Folgenden wird der Flavour-Index nicht mehr explizit angegeben.

### B.2.1 Der inverse Fermion-Propagator

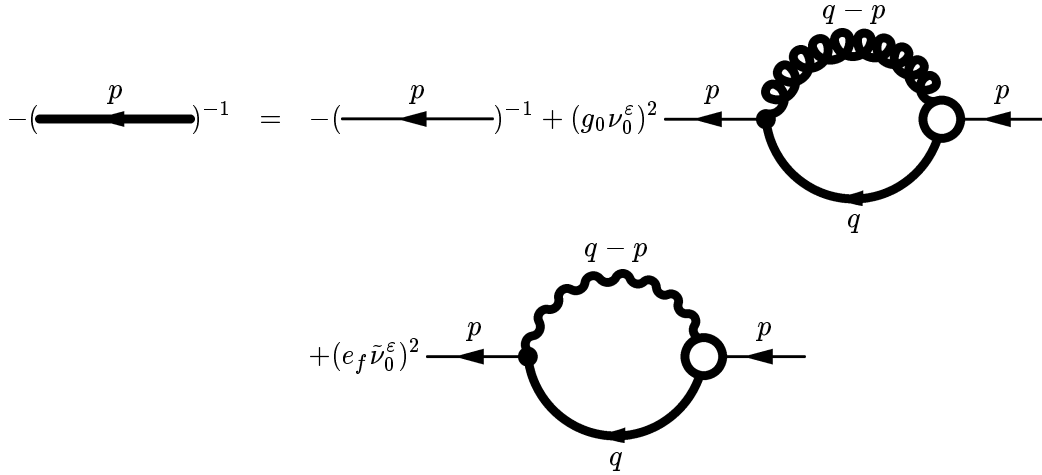
Anwenden der Funktionalableitung  $\frac{\delta}{\delta \eta^{\nu_2}(p_2)}$  auf die Master-Gleichung mit  $Z_E = \exp W_E$  und anschließendes Nullsetzen der Quellen führt zu:

$$0 = \left[ \Gamma_{F\bar{F}}^{(0)pert\nu_1 j}(p_1) \frac{\delta^2 W}{\delta \eta^{\nu_2}(p_2) \delta \bar{\eta}(-p_1)} \right]_{S=\dots=\bar{\eta}=0} + \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^{\nu_1 \nu_2} \delta^D(p_2 - p_1)$$

$$\begin{aligned}
& + (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0) \text{pert} \nu_1 j \mu_3} \frac{\delta^3 W}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1) \delta \eta^{\nu_2}(p_2) \delta \bar{\eta}^i(-q_2)} \\
& + (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} \nu_1 j \mu_3} \frac{\delta^3 W}{\delta S^{\mu_3}(q_2 - p_1) \delta \eta^{\nu_2}(p_2) \delta \bar{\eta}^i(-q_2)} \Big] Z_E[S, \dots, \bar{\eta}]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Einsetzen der connected-Greenfunktionen, Abspalten der  $\delta$ -Funktion ( $p_2 = p_1$ ) und Entwickeln nach Vertexfunktionen ergibt die DS-Gleichung für die fermionische Selbstenergie:

$$\begin{aligned}
\delta^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{F\bar{F}}(p_1) &= \delta^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{F\bar{F}}^{(0) \text{pert}}(p_1) \\
&+ (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0) \text{pert} \nu_1 j \mu_3} S(q_2) \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{j \nu_2 \mu_3}(-q_2, p_1, q_2 - p_1) D_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1) \right\} \\
&+ (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} \nu_1 j \mu_3} S(q_2) \Gamma_{F\bar{F}A}^{j \nu_2 \mu_3}(-q_2, p_1, q_2 - p_1) K^{\mu_3}(q_2 - p_1) \right\}
\end{aligned} \tag{B.16}$$



### B.2.2 Der Fermion-Antifermion-Photon-Vertex im fermionischen Kanal

Nach Anwenden der Funktionalableitungen  $\frac{\delta}{\delta S^{\nu_3}(p_3)} \frac{\delta}{\delta \eta^{\nu_2}(p_2)}$  auf obige Master-Gleichung (B.14) mit  $Z_E = \exp W_E$  und anschließenden Nullsetzen der Quellen erhält man (die Greenfunktionen sind bereits nach Anhang A.1.2 entwickelt):

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ \Gamma_{F\bar{F}}^{(0) \text{pert} \nu_1 j}(p_1) \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \delta^D(p_2 + p_3 - p_1) G_{F\bar{F}A}^{j \nu_2 \nu_3}(-p_1, p_2, p_3) \right. \\
&+ (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0) \text{pert} \nu_1 j \mu_3} \delta^D(p_2 + p_3 - p_1) G_{F\bar{F}V a_3}^{j \nu_2 \mu_3 \nu_3}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_3) \right. \\
&+ (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0) \text{pert} \nu_1 j \mu_3} \delta^D(p_2 + p_3 - p_1) G_{F\bar{F}A}^{j \nu_2 \mu_3 \nu_3}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_3) \right. \\
&\quad \left. \left. \delta^D(p_2 + p_3 - p_1) \delta^D(p_2 - q_2) G_{AA}^{\mu_3 \nu_3}(q_2 - p_1, p_3) G_{F\bar{F}}^{j \nu_2}(-q_2, p_2) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Ausführen des letzten Integrals, Abspalten der  $\delta$ -Funktion ( $p_3 = p_1 - p_2$ ) und Entwickeln nach Vertexfunktionen liefert:

$$\begin{aligned}
0 = & \Gamma_{F\bar{F}}^{(0)pert\nu_1 j}(p_1)(e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon) S(p_1) \Gamma_{F\bar{F}A}^{j\nu_2\nu_3} S(p_2) K^{\nu_3}(p_1 - p_2) \\
& + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon) \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3} S(q_2) S(p_2) T_{F\bar{F}V A a_3}^{j\nu_2 \mu_3 \nu_3}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_1 - p_2) \right. \\
& \quad \left. D_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1) K^{\nu_3}(p_1 - p_2) \right\} \\
& + (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^3 \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3} S(q_2) S(p_2) T_{F\bar{F}AA}^{j\nu_2 \mu_3 \nu_3}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_1 - p_2) \right. \\
& \quad \left. K^{\mu_3}(q_2 - p_1) K^{\nu_3}(p_1 - p_2) \right\} \\
& + (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon) \delta^{\mu_3 \nu_3} K^{\nu_3}(p_1 - p_2) \delta^{j\nu_2} S(p_2) \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Verwendet man die DS-Gleichung für den inversen Fermion-Propagator aufgelöst nach  $\Gamma_{F\bar{F}}^{(0)pert}(p_1)$  und benutzt insbesondere die Beziehungen

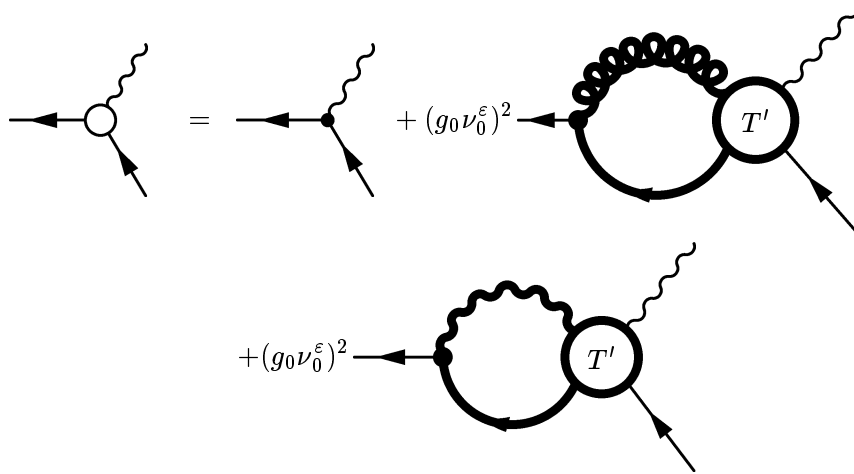
$$T'_{F\bar{F}VA} = T_{F\bar{F}VA} - \Gamma_{F\bar{F}V} S \Gamma_{F\bar{F}A} \tag{B.19}$$

$$T'_{F\bar{F}AA} = T_{F\bar{F}AA} - \Gamma_{F\bar{F}A} S \Gamma_{F\bar{F}A} \tag{B.20}$$

so erhält man die DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Photon-Vertex im fermionischen Kanal:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{F\bar{F}A}^{j\nu_2\nu_3}(-p_1, p_2, p_1 - p_2) = & \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pert} \\
& + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3} S(q_2) T'_{F\bar{F}V A a_3}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_1 - p_2) D_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1) \right\} \\
& + (e_f \tilde{\nu}_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}A}^{(0)pert\nu_1 j \mu_3} S(q_2) T'_{F\bar{F}AA}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_1 - p_2) K^{\mu_3}(q_2 - p_1) \right\}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Und mit den Feynmanregeln erhält man die graphische Formulierung dieser Gleichung zu:



### B.3 Der gluonische Kanal

Das Funktionalintegral über eine Ableitung verschwindet:

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta B_{b_1}^{\nu_1}(-p_1)} \exp \left\{ -S_E[A, B, C, \bar{C}, \psi, \bar{\psi}] \right. \\
&\quad - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[ S^\mu(-q) A^\mu(q) + J_a^\mu(q) B_a^\mu(q) + \bar{C}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) C_a(q) \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \left( \bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\psi}_{(f)}^i(-q) \psi_{(f)}^i(q) \right) \right] \right\} \\
&= (-1) \left[ \frac{\delta S_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]}{\delta B_{b_1}^{\nu_1}(-p_1)} \right]_{F(x) \rightarrow -(2\pi)^D \frac{\delta}{\delta Q(-x)}} + \frac{1}{(2\pi)^D} J_{b_1}^{\nu_1}(p_1) Z_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1) \left[ \frac{\delta S_E[A, B, \dots, \bar{\psi}]}{\delta B_{b_1}^{\nu_1}(-p_1)} \right]_{F(x) \rightarrow -(2\pi)^D \frac{\delta}{\delta Q(-x)}} + \frac{1}{(2\pi)^D} J_{b_1}^{\nu_1}(p_1) Z_E[A, B, \dots, \bar{\psi}] \\
&= (-1) \left[ \Gamma_{VVb_1a_2}^{(0)pert\nu_1\mu_2}(p_1) \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} j_{b_1}^{\nu_1}(p_1) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \Gamma_{3Va_1a_2a_3}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \\
&\quad + \frac{1}{3!} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_2 \int d^D q_3 \Gamma_{4Va_1a_2a_3a_4}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \frac{\delta^3}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(-q_3)} \\
&\quad - (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(-q_1)} \Gamma_{G\bar{G}Va_1a_2b_1}^{(0)pert\nu_1}(q_1) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_{a_2}(q_1 - p_1)} \\
&\quad \left. - (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \sum_{f=1}^{N_f} \frac{\delta}{\delta \eta^i(-q_1)} \Gamma_{F\bar{F}Vb_1}^{(0)pertij\nu_1} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^j(q_1 - p_1)} \right] Z_E[S, \dots, \bar{\eta}]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1) \left[ \Gamma_{VVb_1a_2}^{(0)pert\nu_1\mu_2}(p_1) \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} j_{b_1}^{\nu_1}(p_1) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \Gamma_{3Va_1a_2a_3}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \\
&\quad + \frac{1}{3!} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_2 \int d^D q_3 \Gamma_{4Va_1a_2a_3a_4}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \frac{\delta^3}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(-q_3)} \\
&\quad - (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(-q_1)} \Gamma_{G\bar{G}Va_1a_2b_1}^{(0)pert\nu_1}(q_1) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_{a_2}(q_1 - p_1)} \\
&\quad \left. - (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \sum_{f=1}^{N_f} \frac{\delta}{\delta \eta^i(-q_1)} \Gamma_{F\bar{F}Vb_1}^{(0)pertij\nu_1} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^j(q_1 - p_1)} \right] Z_E[S, \dots, \bar{\eta}]
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Dieses ist die Master-Gleichung für die gluonischen DS-Gleichungen.

#### B.3.1 Der inverse Gluon-Propagator

Nach Anwenden der Funktionalableitung  $\frac{\delta}{\delta J_{b_2}^{\nu_2}(p_2)}$  auf die Master-Gleichung mit  $Z_E = \exp W_E$  und anschließenden Nullsetzen der Quellen erhält man nach Abspalten der  $\delta$ -Funktion ( $p_2 = p_1$ ):

$$\begin{aligned}
\delta^{\nu_1\nu_2} \delta_{b_1b_2} &= \Gamma_{VVb_1a_2}^{(0)pert\nu_1\mu_2}(p_1) D^{\mu_2\nu_2}(p_1) \delta_{b_1b_2} \\
&\quad - \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \Gamma_{3Va_1a_2a_3}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) G_{3Va_3a_2b_2}^{\mu_3\mu_2\nu_2}(q_2 - p_1, -q_2, p_1) \\
&\quad - \frac{1}{3!} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_2 \int d^D q_3 \Gamma_{4Va_1a_2a_3a_4}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} G_{4Va_4a_3a_2b_2}^{\mu_4\mu_3\mu_2\nu_2}(q_2 + q_3 - p_1, -q_3, -q_2, p_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_3 \Gamma_{4Va_1a_2a_3a_4}^{(0)pert\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} D^{\nu_2\mu_2}(p_1) D^{\mu_3\mu_4}(q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 b_1}^{(0) \text{pert} \nu_1}(q_1) G_{G\bar{G}V a_2 a_1 b_2}^{\nu_2}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) \\
& + (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \sum_{f=1}^{N_f} \text{Tr} \left[ \Gamma_{F\bar{F}V b_1}^{(0) \text{pert} i j \nu_1} G_{F\bar{F}V b_2}^{j i \nu_2}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) \right]
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Entwicklung nach Vertexfunktionen liefert die DS-Gleichung für den inversen Gluon-Propagator:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{VV}^{\nu_1 \nu_1'}(p_1) \delta_{b_1 b_2} &= \Gamma_{VV}^{(0) \text{pert} \nu_1 \nu_1'}(p_1) \delta_{b_1 b_2} \\
&+ \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{3V b_1 a_2 a_3}^{(0) \text{pert} \nu_1 \mu_2 \mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) D^{\mu_2}(q_2 - p_1) \right. \\
&\quad \left. \Gamma_{3V a_3 a_2 b_1}^{\mu_3 \mu_2 \nu_1}(q_2 - p_1, -q_2, p_1) D^{\mu_2}(-q_1) \right\} \\
&+ \frac{1}{3!} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{4V a_1 a_2 a_3 a_4}^{(0) \text{pert} \nu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} D^{\mu_4}(q_2 + q_3 - p_1) D^{\mu_3}(-q_3) \right. \\
&\quad \left. D^{\mu_2}(-q_2) T_{4V a_4 a_3 a_2 b_2}^{\mu_4 \mu_3 \mu_2 \nu_2}(q_2 + q_3 - p_1, -q_3, -q_2, p_1) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{4V b_1 b_2 a_3 a_4}^{(0) \text{pert} \nu_1 \mu_1' \mu_3 \mu_4} D^{\mu_3 \mu_4}(q_3) \right\} \\
&- (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 b_1}^{(0) \text{pert} \nu_1}(q_1) \tilde{D}(q_1^2) \Gamma_{G\bar{G}V a_2 a_1 b_2}^{\nu_1'}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) \tilde{D}((q_1 - p_1)^2) \right\} \\
&- (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \left\{ \sum_{f=1}^{N_f} \text{Tr} \left[ \Gamma_{F\bar{F}V b_1}^{(0) \text{pert} i j \nu_1} S(q_1 - p_1) \Gamma_{F\bar{F}V b_1}^{j i \nu_1'}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) S(-q_1) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Und mit den Feynmanregeln erhält man die graphische Form der Gleichung zu:

$$\begin{aligned}
& -(\text{thick curly line with } p)^{-1} = -(\text{thin curly line with } p)^{-1} + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (thick curly line) } \text{ (loop of thick curly lines) } \text{ (thin curly line)} \\
& + \frac{1}{6} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^4 \text{ (thin curly line) } \text{ (loop of thick curly lines) } \text{ (thick curly line)} + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (thin curly line) } \text{ (loop of thin curly lines) } \text{ (thin curly line)}
\end{aligned}$$



$$-\frac{1}{2}(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \text{ (dashed loop) } - \frac{1}{2}(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \text{ (solid loop) }$$

### B.3.2 DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Nach dem gleichen Verfahren erhält man die DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex im gluonischen Kanal zu:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{F\bar{F}V}(-p_1, p_2, k) &= \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)pert}(-p_1, p_2, k) \\
&+ \frac{1}{2}(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{3V}^{(0)pert} D(q^2) T'_{F\bar{F}VV}(-p_1, p_2, -q, k+q) D((k+q)^2) \right\} \\
&- (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)pert} S(q) T'_{F\bar{F}F\bar{F}}(-q, k+q, -p_1, p_2) S(k+q) \right\} \\
&- (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)pert} \bar{D}(q) T'_{G\bar{G}F\bar{F}}(-q, k+q, -p_1, p_2) \bar{D}(k+q) \right\} \\
&+ \text{Zwei-Schleifen-Terme mit } T'_{3VF\bar{F}}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Dabei sind die Zusammenhänge:

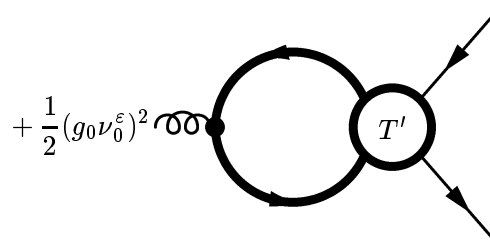
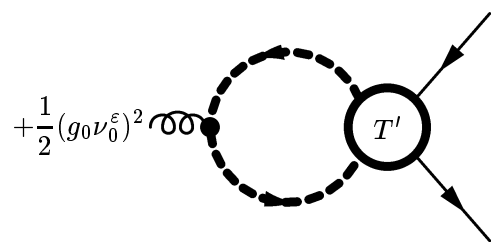
$$T'_{F\bar{F}VV} = T_{F\bar{F}VV} - \Gamma_{F\bar{F}V} S \Gamma_{F\bar{F}V} \tag{B.28}$$

$$T'_{F\bar{F}F\bar{F}} = T_{F\bar{F}F\bar{F}} - \Gamma_{F\bar{F}V} D \Gamma_{F\bar{F}V} \tag{B.29}$$

$$T'_{G\bar{G}F\bar{F}} = T_{G\bar{G}F\bar{F}} - \Gamma_{G\bar{G}V} D \Gamma_{F\bar{F}V} \tag{B.30}$$

Die graphischer Notation dieser Gleichung ist:

$$\text{Tree-level vertex} = \text{Tree-level vertex} + \frac{1}{2}(g_0\nu_0^\epsilon)^2 \text{ (loop correction with } T' \text{)}$$



+ Zwei-Schleifen-Terme.

## Anhang C

# Die Algebra der Dirac-Matrizen

In dieser Arbeit wird die euklidische  $\gamma$ -Algebra in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen durch die Antikommutatorrelation

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = -2\delta^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (\text{C.1})$$

erzeugt. Elementare Rechnungen führen dann auf die folgenden wichtigen Identitäten, wobei stets die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird:

$$\gamma^\nu \gamma^\nu = -D \mathbb{1} \quad (\text{C.2})$$

$$\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\nu = (D - 2) \gamma^\alpha \quad (\text{C.3})$$

$$\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu = -(D - 4) \gamma^\alpha \gamma^\beta + 4\delta^{\alpha\beta} \mathbb{1} \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\nu = (D - 4) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta + 2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \quad (\text{C.5})$$

Höhere Identitäten werden in dieser Arbeit umgangen und daher nicht angegeben. Sie können aber leicht berechnet werden. Die so definierte Algebra überträgt sich mit  $\gamma^\nu p^\nu = \not{p} = p^\nu \gamma^\nu$  auf matrixwertige Impulse zu:

$$\not{p} \not{p} = -p^2 \quad (\text{C.6})$$

$$\not{p} \not{k} = -2pk - \not{k} \not{p} \quad (\text{C.7})$$

Dabei ist in konkreten Rechnungen des Skalarprodukt im Sinne der Einsteinschen Summenkonvention zu verstehen:  $pk = \sum_{\nu=1}^{D=4} p^\nu k^\nu = p^\nu k^\nu$ . Weiter findet häufig Verwendung:

$$\not{p} \not{k} \not{p} = -2pk \not{p} + p^2 \not{k} \quad (\text{C.8})$$

$$\not{p} \gamma^\nu \not{p} = p^2 \gamma^\nu - 2p^\nu \not{p} \quad (\text{C.9})$$

Damit können exponenzierte matrixwertige Impulse berechnet werden. Da man sich nur für die divergenten Anteile interessiert reicht es jeweils die höchsten Potenzen (bezgl. des Integrationsimpulses eines Schleifenintegrals) zu berechnen. Grundlage ist der gewöhnliche Binomiallehrsatz unter strenger Beachtung der Nichtvertauschbarkeit matrixwertiger Impulse. In dieser Arbeit finden folgende Entwicklungen Verwendung:

für  $r$  gerade

$$\begin{aligned} (\not{p} + \not{q})^r &= (-1)^{\frac{r}{2}} [(p + q)^2]^{\frac{r}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{r}{2}} \left( p^r + r p^{r-2} p q + O(p^{r-2}) \right) \end{aligned} \quad (C.10)$$

(Der Ausdruck ist effektiv skalarwertig)

für  $r$  ungerade:

$$\begin{aligned} (\not{p} + \not{q})^r &= (-1)^{\frac{r-1}{2}} \left( p^{r-1} + (r-1) p^{r-3} p q + O(p^{r-3}) \right) (\not{p} + \not{q}) \\ &= (-1)^{\frac{r-1}{2}} \left( \not{p} p^{r-1} + (r-1) \not{p} p^{r-3} p q + O(p^{r-3}) + \not{q} p^{r-1} \right) \end{aligned} \quad (C.11)$$

(Der Ausdruck ist effektiv matrixwertig)

Weiter wird speziell für  $r$  ungerade verwendet:

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} - \kappa_{r,s+})(\not{q} - \kappa_{r,s-}) &= (-1)^{\frac{r+1}{2}} \prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} [q^2 + \not{q}(\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) - \kappa_{r,s+} \kappa_{r,s-}] \\ &= (-1)^{\frac{r+1}{2}} \left[ q^{r+1} + \not{q} q^{r-1} \sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) + O(q^{r-1}) \right] \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^r (\not{q} - \kappa_{r,2s}) &= (\not{q})^r + O(q^{r-1}) \\ &= (-1)^{\frac{r-1}{2}} q^{r-1} \not{q} + O(q^{r-1}) \end{aligned} \quad (C.13)$$

Die matrixwertigen Nennerstrukturen der Schleifenintegrale werden durch geschicktes Erweitern zu skalaren Nennern:

$$\frac{\mathbb{1}}{\not{q} + a} = \frac{\mathbb{1}}{\not{q} + a} \frac{\not{q} - a}{\not{q} - a} = - \frac{\not{q} - a}{q^2 + a^2}$$

Damit ergibt sich beispielsweise:

$$\frac{\mathbb{1}}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} = \frac{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (\not{q} - \kappa_{r,s+})(\not{q} - \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} (q^2 + \kappa_{r,s+}^2)(q^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \quad (C.14)$$

## Anhang D

# Berechnung von Schleifenintegralen

Die Berechnung von Schleifenintegralen erfolgt im Wesentlichen in zwei Schritten: im ersten Schritt wird der Nenner des Integranden mittels Feynman-Parametrisierung und anschließender geeigneter Transformation des Integrationsimpulses so manipuliert, daß ein sphärisch symmetrisches Impulsintegral entsteht. Dieses sphärisch symmetrische Integral kann dann im zweiten Schritt mit Hilfe der symmetrischen Integration auf die Standardformel der Impulsintegration zurückgeführt werden.

### D.1 Feynman-Parametrisierung

In dieser Arbeit wird folgende Standardformel der Feynman-Parametrisierung verwendet:

$$\frac{1}{f_1 f_2 \dots f_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_n \frac{\delta(1 - \sum_{s=1}^n z_s)}{[\sum_{s=1}^n z_s f_s]^n} \quad (\text{D.1})$$

Mit Auflösen des letzten Integrals erhält man:

$$\frac{1}{f_1 f_2 \dots f_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_{n-1} \frac{\theta(1 - \sum_{s=1}^n z_s)}{[\sum_{s=1}^{n-1} z_s f_s + (1 - \sum_{s=1}^{n-1} z_s) f_n]^n} \quad (\text{D.2})$$

Anschließend wird die Variablentransformation

$$z_1 = 1 - u_1$$

$$z_2 = u_1(1 - u_2)$$

$$z_3 = u_1 u_2(1 - u_3)$$

...

$$z_{n-1} = u_1 \dots u_{n-2} (1 - u_{n-1})$$

durchgeführt. Eine einfache Rechnung ergibt folgende Eigenschaften: die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

$$\left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} \right| = u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2} \quad (\text{D.3})$$

und es gilt

$$1 - \sum_{s=1}^{n-1} z_s = u_1 u_2 \dots u_{n-1} \quad (\text{D.4})$$

Insgesamt erhält man nach Durchführen dieser Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_1 f_2 \dots f_n} &= \Gamma(n) \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} \right| \theta(u_1 u_2 \dots u_{n-1}) \\ &\quad \frac{1}{\left[ (1 - u_1) f_1 + u_1 (1 - u_2) f_2 + \dots + u_1 \dots u_{n-1} f_n \right]^n} \\ &= \Gamma(n) \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \frac{1}{\left[ f_1 + \sum_{s=1}^{n-1} (f_{s+1} - f_s) \prod_{i=1}^s u_i \right]^n} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Im Falle von nur zwei Faktoren im Nenner vereinfacht sich dieses zu:

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[b + x(a-b)]^{\alpha+\beta}} \quad (\text{D.6})$$

Man kann leicht nachrechnen:

$$\Gamma(n) \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} \right| = 1 \quad (\text{D.7})$$

(klar: das transformierte Integral über die eigene Funktionaldeterminante ist eins)

### D.1.1 Die transversale Fermion-Gluon-Schleife

Zur Vereinfachung der auftretenden Nennerprodukte wird folgende Definition verwendet:

$$\kappa_s^2 = \begin{cases} \kappa_{r,s+}^2 & \text{für } s = 1, \dots, \frac{r+1}{2} \\ \kappa_{r,s-\frac{r+1}{2}-}^2 & \text{für } s = \frac{r+3}{2}, \dots, r+1 \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

$$u_s = \begin{cases} u_{r,s+} & \text{für } s = 1, \dots, \frac{r+1}{2} \\ u_{r,s-\frac{r+1}{2}-} & \text{für } s = \frac{r+3}{2}, \dots, r+1 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Mit dieser Definition tritt in der transversalen Fermion-Gluon-Schleife die Nennerstruktur

$$\frac{1}{(q-p)^2 \prod_{s=1}^{r+1} ((q-p)^2 + u_s \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \kappa_s^2)} = \frac{1}{N_1} \quad (\text{D.10})$$

auf. Diese Nennerstruktur wird in mehreren Schritten zusammengefaßt: unter Verwendung von (D.5) erhält man:

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \kappa_s^2)} = r! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_r [x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1}]$$

$$\frac{1}{[q^2 + \kappa_1^2 + \sum_{s=1}^r (\kappa_{s+1}^2 - \kappa_s^2) \prod_{i=1}^s x_i]^{r+1}} \quad (\text{D.11})$$

Und:

$$\frac{1}{(q-p)^2 \prod_{s=1}^{r+1} ((q-p)^2 + u_s \Lambda^2)} = (r+1)! \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 \dots \int_0^1 dy_{r+1} [y_1^r y_2^{r-1} \dots y_r]$$

$$\frac{1}{[(q-p)^2 + y_1 u_1 \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r+1} (u_s \Lambda^2 - u_{s-1} \Lambda^2) \prod_{i=1}^s y_i]^{r+2}} \quad (\text{D.12})$$

Und mit (D.6) wird dieses zu

$$\frac{1}{N_1} = \int dF_1 \frac{1}{[(q-pz)^2 + R_1^2]^{2r+3}} \quad (\text{D.13})$$

wobei:

$$\int dF_1 = (2r+2)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_r \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 \dots \int_0^1 dy_{r+1} \int_0^1 dz$$

$$\left[ x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1} \right] \left[ y_1^r y_2^{r-1} \dots y_r \right] z^{r+1} (1-z)^r \quad (\text{D.14})$$

$$R_1^2 = z(1-z)p^2 + (1-z) \left( \kappa_1^2 + \sum_{s=1}^r (\kappa_{s+1}^2 - \kappa_s^2) \prod_{i=1}^s x_i \right)$$

$$+ z \left( y_1 u_1 \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r+1} (u_s \Lambda^2 - u_{s-1} \Lambda^2) \prod_{i=1}^s y_i \right) \quad (\text{D.15})$$

Außerdem gilt analog zu (D.7)

$$\int dF_1 = 1 \quad (\text{D.16})$$

Bei der Auswertung der Parameterintegrale in der transversalen Fermion-Gluon-Schleife tritt folgendes Integral auf, das durch r-fache partieller Integration berechnet werden kann:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dz z^{r+2} (1-z)^r &= \frac{1}{r+3} z^{r+3} (1-z)^r \Big|_0^1 - \int_0^1 dz z^{r+3} r(-1)(1-z)^{r-1} \\
 &= \frac{r}{r+3} \int_0^1 dz z^{r+3} (1-z)^{r-1} \\
 &\dots \\
 &= \frac{r!(r+2)!}{(r+3)\dots(2r+3)} \int_0^1 dz z^{2r+3} = \frac{r!(r+2)!}{(2r+3)!}
 \end{aligned}$$

Damit kann das Parameterintegral allgemein angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \int dF_1 z &= (2r+2)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_r \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 \dots \int_0^1 dy_{r+1} \\
 &\quad \left[ x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1} \right] \left[ y_1^r y_2^{r-1} \dots y_r \right] \int_0^1 dz z^{r+2} (1-z)^r \\
 &= \frac{(2r+2)!}{r!(r+1)!} \frac{r!(r+2)!}{(2r+3)!} \\
 &= \frac{r+2}{2r+3}
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

### D.1.2 Die longitudinale Fermion-Gluon-Schleife

Es tritt folgende Nennerstruktur auf:

$$\frac{1}{\left[ (q-p)^2 \right]^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \kappa_s^2)} = \frac{1}{N_2} \tag{D.18}$$

Mit (D.6) und (D.11) erhält man sofort:

$$\frac{1}{N_2} = \int dF_2 \frac{1}{[(q-pz)^2 + R_2^2]^{r+3}} \tag{D.19}$$

wobei:

$$\int dF_2 = (r+2)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_r \int_0^1 dz \left[ x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1} \right] z(1-z)^r \tag{D.20}$$

und:

$$R_2^2 = z(1-z)p^2 + (1-z) \left( \kappa_1^2 + \sum_{s=1}^r (\kappa_{s+1}^2 - \kappa_s^2) \prod_{i=1}^s \right) \tag{D.21}$$

und analog zu (D.7) gilt  $\int dF_2 = 1$ . Bei der Auswertung des Schleifenintegrals der longitudinalen Fermion-Gluon-Schleife benötigt man:

$$\int dF_2 z = (r+2)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_r \int_0^1 dz \left[ x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1} \right] z^2 (1-z)^r$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{(r+2)!}{r!} \int_0^1 dz z^2 (1-z)^r \\
&= \frac{2}{r+3}
\end{aligned} \tag{D.22}$$

## D.2 Symmetrische Integration und Standardformel

Im zweiten Schritt wird das parametrisierte Integral symmetrisch integriert; dazu gibt es folgende Formel für die symmetrische Integration:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_n} \\
&= \frac{S_n^{(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n)}}{D(D+2) \dots (D+n-2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) (q^2)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned} \tag{D.23}$$

für  $n$  gerade und null sonst.

Dabei ist  $f(q^2)$  eine beliebige, nicht singuläre Funktion und  $S_n$  ist der totalsymmetrische Lorentz-Tensor  $n$ -ter Stufe ( $n \geq 2$ ), der rekursiv dargestellt werden kann:

$$S_n^{(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n)} = \sum_{i=1}^n \delta^{\nu_1 \nu_i} S_{n-2}^{(\nu_2 \nu_3 \dots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \dots \nu_n)} \tag{D.24}$$

mit Startwert  $S^{(\nu_1 \nu_2)} = \delta^{\nu_1 \nu_2}$ .

Die zwei ersten Iterationen werden in dieser Arbeit verwendet:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^{\nu_1} q^{\nu_2} = \frac{\delta^{\nu_1 \nu_2}}{D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^2 \tag{D.25}$$

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^{\nu_1} q^{\nu_2} q^{\nu_3} q^{\nu_4} = \frac{\delta^{\nu_1 \nu_2} \delta^{\nu_3 \nu_4} + \delta^{\nu_1 \nu_3} \delta^{\nu_2 \nu_4} + \delta^{\nu_1 \nu_4} \delta^{\nu_2 \nu_3}}{D(D+2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^4 \tag{D.26}$$

Damit ist es immer möglich, ein beliebiges Schleifenintegral auf die Standardformel der dimensionellen Regularisierung zurückzuführen; in  $D = 4 - 2\epsilon$  euklidischen Dimensionen lautet die Standardformel:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{[q^2 + R^2]^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{D}{2}) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\beta)} [R^2]^{\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{D}{4}} \tag{D.27}$$

Mit Kenntnis der fundamentalen Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{D.28}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{D.29}$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon); \quad (D.30)$$

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right\} \quad (D.31)$$

können die Divergenzen der dimensionell regularisierten *logarithmisch divergenten* Impulsintegrale berechnet werden:

$$\nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{[q^2 + R^2]^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{\Lambda(\varepsilon)}{\nu_0} \right)^{-2\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon) + \ln(4\pi) \right) \quad (D.32)$$

Damit können die Divergenzen solcher Schleifenintegrale sofort angegeben werden:

$$g_0^2 \nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{[q^2 + R^2]^\beta} = \Pi(\varepsilon) + KONV \quad (D.33)$$

d.h.: die divergenten Anteile eines beliebigen logarithmisch divergenten Impulsintegrals unterscheiden sich lediglich durch die Anwendung der Operatoren die sich durch symmetrische Integration ergeben!

### D.3 Speziell: Berechnung rein logarithmisch divergenter Integrale

Um Selbstkonsistenzgleichungen (SK-Gleichungen) im Rahmen der erweiterten Störungstheorie aufzustellen, ist es ausreichend, lediglich die divergenten Anteile der Schleifenintegrale zu berechnen. Daher beschränken sich die Berechnungen in dieser Arbeit auf die Divergenzen eines Integrals. Durch diese Beschränkung kann das erläuterte Berechnungsverfahren bei rein logarithmisch divergenten Schleifenintegralen deutlich vereinfacht werden, wie man auf folgende Weise schnell sehen kann:

in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen sei ein rein logarithmisch divergentes Integral der allgemeinen Form

$$\nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_m}}{p(q^{4+m})} \quad (D.34)$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $p(q^{4+m})$  ein beliebiges Nennerpolynom vom Grad  $4 + m$  (die Abhängigkeit von weiteren Impulsen und Koeffizienten ist nicht von Belang und daher nicht notiert). Da das Polynom bei Schleifenintegralen immer ein Polynom in  $q^2$  bzw.  $(q - koeff)^2$  ist, kann es mittels Feynman-Parametrisierung auf folgende Form gebracht werden (mit  $n = \frac{4+m}{2}$ ):

$$\frac{1}{p(q^{4+m})} = \frac{(n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} [u_1^{n-2} \dots u_{n-2}]}{\int_0^1 \frac{1}{[(q - z(u_i))^2 + R^2(u_i)]^n} du_n} \quad (D.35)$$

Anschließend wird das Impulsintegral durch die Verschiebung  $q \rightarrow q + z(u_i)$  sphärisch symmetrisiert:

$$\begin{aligned} \nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_m}}{p(q^{4+m})} &= (n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} [u_1^{n-2} \dots u_{n-2}] \\ &\quad \nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q + z(u_i))^{\nu_1} (q + z(u_i))^{\nu_2} \dots (q + z(u_i))^{\nu_m}}{[q^2 + R^2(u_i)]^{2+\frac{m}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Durch Ausmultiplizieren des Zählers können die konvergenten Anteile von den divergenten getrennt werden. Wegen der logarithmischen Divergenz des Impulsintegrals vermag nur die höchste Zählerpotenz eine Divergenz erzeugen:

$$\begin{aligned} \nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_m}}{p(q^{4+m})} &= (n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} [u_1^{n-2} \dots u_{n-2}] \\ &\quad \left\{ \nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_m}}{[q^2 + R^2(u_i)]^{2+\frac{m}{2}}} + KONV \right\} \\ &= \nu_0^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\nu_1} q^{\nu_2} \dots q^{\nu_m}}{[q^2 + R^2(u_i)]^{2+\frac{m}{2}}} + KONV \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Die Feynman-Parameter stecken in dem konvergenten Anteil des Integrals. Die isolierte Divergenz kann unmittelbar mit symmetrischer Integration auf die Standardformel (D.28) zurückgeführt werden. Damit ist gezeigt:

Bei der Berechnung von rein logarithmischen Divergenzen ist es ausreichend, die Feynman-Parametrisierung nur formal durchzuführen, um die symmetrische Integration zu ermöglichen. Die Berechnungen der divergenten Anteile eines rein logarithmisch divergenten Integral beschränken sich auf die Anwendung des Operators, der sich durch symmetrische Integration ergibt.

Damit kann die *formale Feynman-Parametrisierung* eingeführt werden, wie sie in Kapitel 4.2 und Kapitel 4.3 verwendet wird. Für ein beliebiges maximal logarithmisch divergentes Integral der allgemeinen Form

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{Z(q, \tilde{p})}{N(q^2, \tilde{p})} \quad (\text{D.38})$$

wird die formale Feynman-Parametrisierung dadurch erklärt, daß

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{Z(q, \tilde{p})}{N(q^2, \tilde{p})} = \int dF \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{Z(q, \tilde{p})}{[(q - z\tilde{p})^2 + R^2]^n} \quad (\text{D.39})$$

gesetzt wird. Dabei ist  $n$  dem Divergenzgrad entsprechend zu setzen und  $z, \tilde{p}$  stehen für die Abhängigkeit des Integrals von den Feynman-Parametern, bzw. für die Abhängigkeiten von den nicht-Integrationsimpulsen.

Bemerkung:

Dieses Verfahren beschränkt sich streng auf logarithmische Divergenzen. Bei der Berechnung von höheren Divergenzen (lineare Divergenz, quadratische Divergenz,...) muß die Feynmanparametrisierung vollständig durchgeführt werden, da noch Feynman-Parameter im divergenten Anteil verbleiben.

## D.4 Die verwendeten Basisintegrale des Quark-Photon-Vertex

Bei der Berechnung der Schleifenintegrale in Kapitel 4 treten einige Integraltypen mehrfach auf; sie werden im Folgenden berechnet.

### D.4.1 Berechnung der Basisintegrale von Kapitel 4.2

Bei der Berechnung der transversalen Schleife tritt folgender Integraltyp auf:

$$B_1 = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) t^{\mu\sigma}(q) \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\sigma \quad (D.40)$$

Mit Hilfe elementarer  $\gamma$ -Algebra und anschließender symmetrischen Integration wird der Integrand zu  $q^2$ -Faktoren zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} B_1 &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{q^2} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\sigma \\ &= \frac{(D-2)^2 - D}{D} \gamma^\nu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^4 \end{aligned} \quad (D.41)$$

In  $D = 4 - 2\varepsilon$ -Dimensionen folgt dann mit der Standardformel und dem  $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus für die verwendeten logarithmisch divergenten Impulsintegrale (D.41):

$$\begin{aligned} B_{T1} &= \frac{(D-2)^2 - D}{D} \gamma^\nu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{12r+4}}{[q^2 + R^2]^{6r+4}} \\ &= \Pi(\varepsilon) \frac{(D-2)^2 - D}{D} \gamma^\nu \Big|_{D=4} = 0 \end{aligned} \quad (D.42)$$

und analog:

$$B_{T2} = \frac{(D-2)^2 - D}{D} \gamma^\nu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{8r+4}}{[q^2 + R^2]^{4r+4}} = 0 \quad (D.43)$$

$$B_{T3} = \frac{(D-2)^2 - D}{D} \gamma^\nu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+4}}{[q^2 + R^2]^{2r+4}} = 0 \quad (D.44)$$

$$B_{T4} = \frac{(D-2)^2 - D}{D} \gamma^\nu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{[q^2 + R^2]^4} = 0 \quad (D.45)$$

d.h.: alle Divergenzen proportional zu  $F_{\eta ij}$  verschwinden in der transversal-projizierten Schleife!

Weiter wird folgender Integraltyp benötigt:

$$\tilde{B}_1 = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) t^{\mu\sigma}(q) \gamma^\mu \not{q} \gamma^\sigma \quad (D.46)$$

Es folgt sofort:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) \frac{q^2 \delta^{\mu\sigma} - q^\mu q^\sigma}{\gamma} \not{q} \gamma^\sigma \\ &= (D-1)(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^2 \end{aligned} \quad (D.47)$$

Damit ergibt sich für die verwendeten Integrale:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{T1} &= (D-1) \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{12r+4}}{[q^2 + R^2]^{6r+4}} \\ &= \Pi(\varepsilon) \frac{k^\nu}{\Lambda} (D-1) \Big|_{D=4} = 3\Pi(\varepsilon) \frac{k^\nu}{\Lambda} \end{aligned} \quad (D.48)$$

Und:

$$\tilde{B}_{T2} = (D-1) \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{8r+4}}{[q^2 + R^2]^{4r+4}} = 3\Pi(\varepsilon) \frac{k^\nu}{\Lambda} \quad (D.49)$$

$$\tilde{B}_{T3} = (D-1) \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+4}}{[q^2 + R^2]^{2r+4}} = 3\Pi(\varepsilon) \frac{k^\nu}{\Lambda} \quad (D.50)$$

$$\tilde{B}_{T4} = (D-1) \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^4}{[q^2 + R^2]^4} = 3\Pi(\varepsilon) \frac{k^\nu}{\Lambda} \quad (D.51)$$

#### D.4.2 Basisintegrale der longitudinalen Schleife

Bei der Berechnung der longitudinalen Schleife des Quark-Photon-Vertex wird folgender Integraltyp benötigt:

$$B_1 = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) l^{\mu\sigma}(q) \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\sigma \quad (D.52)$$

Mit  $\gamma$ -Algebra zu  $q^2$ -Faktoren zusammengefaßt ergibt sich:

$$\begin{aligned} B_1 &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) \frac{q^\mu q^\sigma}{q^2} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu \not{q} \gamma^\sigma \\ &= \gamma^\nu (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) q^2 \end{aligned} \quad (D.53)$$

In  $D = 4 - 2\varepsilon$ -Dimensionen folgt dann speziell:

$$B_{L1} = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^{8r+4}}{[q^2 + R^2]^{4r+4}} \gamma^\nu = \alpha \gamma^\nu \quad (\text{D.54})$$

$$B_{L2} = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^{4r+4}}{[q^2 + R^2]^{2r+4}} \gamma^\nu = \alpha \gamma^\nu \quad (\text{D.55})$$

$$B_{L3} = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^4}{[q^2 + R^2]^4} \gamma^\nu = \alpha \gamma^\nu \quad (\text{D.56})$$

Und genau so erhält man aus

$$\tilde{B}_L = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} f(q^2) l^{\mu\sigma}(q) \gamma^\mu \not{q} \frac{k^\nu}{\Lambda} \not{q} \gamma^\sigma \quad (\text{D.57})$$

nach elementaren Umformungen:

$$\tilde{B}_{L1} = \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^{8r+4}}{[q^2 + R^2]^{4r+4}} = \alpha \frac{k^\nu}{\Lambda} \quad (\text{D.58})$$

$$\tilde{B}_{L2} = \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^{4r+4}}{[q^2 + R^2]^{2r+4}} = \alpha \frac{k^\nu}{\Lambda} \quad (\text{D.59})$$

$$\tilde{B}_{L3} = \frac{k^\nu}{\Lambda} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\alpha q^4}{[q^2 + R^2]^4} = \alpha \frac{k^\nu}{\Lambda} \quad (\text{D.60})$$

## Anhang E

# Umrechnungen der Vertexparameter

### E.1 Der transversale Quark-Gluon-Vertex

Mit Berücksichtigung aller Einschränkungen durch kompensierende Pole ( $D_{\lambda mn l}^{[r]} = E_{\lambda mn l}^{[r]} = 0$ ) sowie mit Ausnutzen aller Symmetrieen ( $C_{\lambda mn l}^{[r]} = C[r]_{\lambda mn l}$ ) lautet der transversale Quark-Gluon-Vertex in r=1:

$$\begin{aligned} N_{F\bar{F}V_T}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = & \frac{\mathbb{1}}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \frac{1}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \\ & \left\{ C_{4000}^{[1]} \Lambda^4 \gamma^\mu \right. \\ & + C_{3010}^{[1]} \Lambda^3 (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \\ & + C_{2011}^{[1]} \Lambda^2 \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \\ & + C_{2100}^{[1]} \Lambda^2 k^2 \gamma^\mu \\ & + C_{1110}^{[1]} \Lambda k^2 (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \\ & \left. + C_{0111}^{[1]} k^2 \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \right\} \frac{\mathbb{1}}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

In Partialbruchzerlegung hat der Vertex die Form:

$$\begin{aligned} N_{F\bar{F}V_T}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = & \gamma^\mu + z_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right) + z_2 \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \\ & + \frac{\Lambda}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \left\{ z_3 \gamma^\mu + z_4 \left( \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right) \right. \\ & \left. + z_5 \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Indem (F.2) auf den Hauptnenner gebracht wird, können die C-Parameter durch Koeffizientenvergleich der Matrixstrukturen bestimmt werden:

$$C_{0111}^{[1]} = 1 \quad (\text{E.3})$$

$$C_{1110}^{[1]} = z_1 + w_{1,2} \quad (\text{E.4})$$

$$C_{2100}^{[1]} = z_2 + w_{1,2}^2 + 2w_{1,2}z_1 \quad (\text{E.5})$$

$$C_{2011}^{[1]} = z_3 + u_{1,2} \quad (\text{E.6})$$

$$C_{3010}^{[1]} = z_4 + w_{1,2}z_3 + w_{1,2}u_{1,2} + u_{1,2}z_1 \quad (\text{E.7})$$

$$C_{4000}^{[1]} = z_5 + w_{1,2}z_4 + 2w_{1,2}^2u_{1,2} + z_1(3w_{1,2}u_{1,2} + 2u_{1,2}) + 2u_{1,2}w_{1,2} + u_{1,2}z_2 \quad (\text{E.8})$$

## E.2 Der longitudinale Quark-Gluon-Vertex

Unter Beachtung der Einschränkungen durch kompensierende Pole ( $\tilde{D}_{\lambda nl}^{[r]} = \tilde{E}_{\lambda nl}^{[r]} = 0$ ) und Ausnutzen der Symmetrieen ( $\tilde{C}_{\lambda nl}^{[r]} = \tilde{C}_{\lambda ln}^{[r]}$ ) lautet der longitudinale Quark-Gluon-Vertex in r=1:

$$\begin{aligned} N_{F\bar{F}V_L}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2) &= \frac{\mathbb{1}}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \\ &\quad \left\{ \tilde{C}_{200}^{[1]} \Lambda^2 \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}_{110}^{[1]} \Lambda^1 (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}_{011}^{[1]} \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \right\} \frac{\mathbb{1}}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Die partialbruchzerlegte Variante lautet:

$$N_{F\bar{F}V_L}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \gamma^\mu + \tilde{z}_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right) + \tilde{z}_2 \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \quad (\text{E.10})$$

Wird (E.10) auf den Hauptnenner gebracht und anschließend nach Matrixstrukturen sortiert, so können die Koeffizienten abgelesen werden:

$$\tilde{C}_{011}^{[1]} = 1 \quad (\text{E.11})$$

$$\tilde{C}_{110}^{[1]} = \tilde{z}_1 + w_{1,2} \quad (\text{E.12})$$

$$\tilde{C}_{200}^{[1]} = w_{1,2}^2 + 2w_{1,2}\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \quad (\text{E.13})$$

## E.3 Der Quark-Photon-Vertex

In r=1 und allen Einschränkungen durch kompensierende Pole und Symmetrieen lautet der Quark-Photon-Vertex (insbesondere mit  $H_{\eta ij}^{[r,0]} = 0$ ):

$$\begin{aligned} N_{F\bar{F}A}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2) &= \frac{\mathbb{1}}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \\ &\quad \left\{ F_{200}^{[1]} \Lambda^2 \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + F_{110}^{[1]} \Lambda^1 (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \right\} \end{aligned}$$



$$+ F_{011}^{[1]} \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \Big\} \frac{\mathbb{1}}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \quad (\text{E.14})$$

Die partialbruchzerlegte Variante lautet:

$$N_{F\bar{F}A}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \gamma^\mu + x_1 \left( \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right) + x_2 \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \quad (\text{E.15})$$

Mittels Koeffizientenvergleich findet man die Beziehungen:

$$F_{011}^{[1]} = 1 \quad (\text{E.16})$$

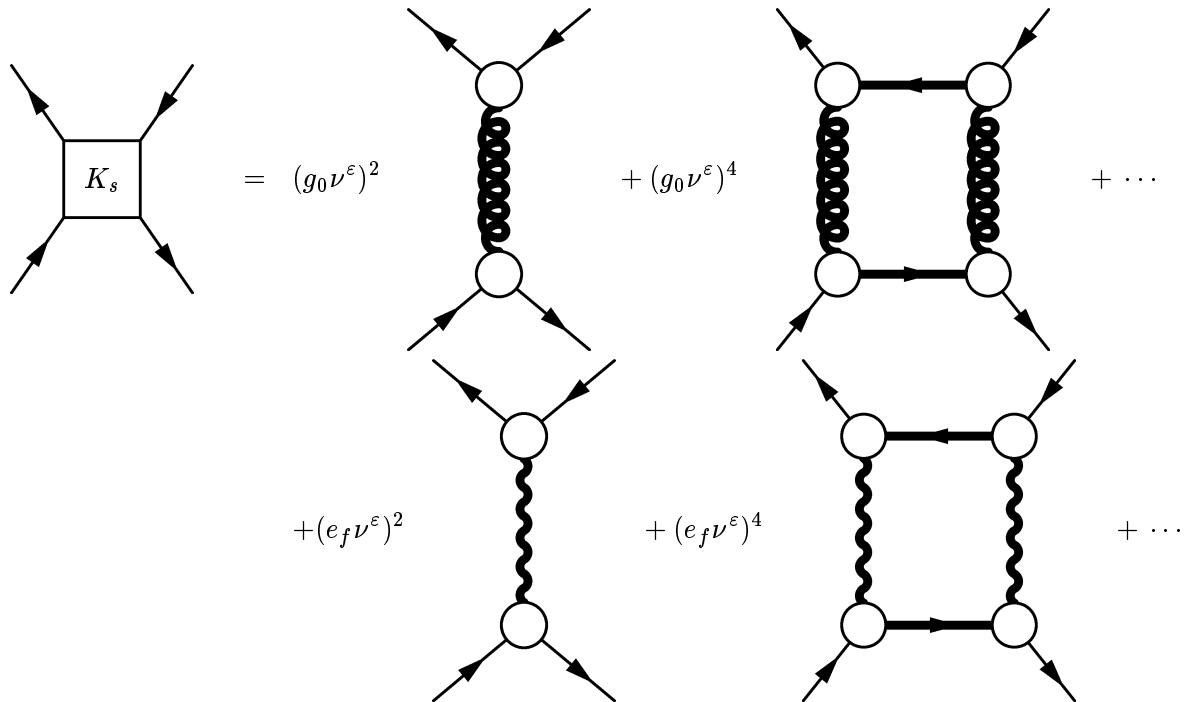
$$F_{110}^{[1]} = x_1 + w_{1,2} \quad (\text{E.17})$$

$$F_{200}^{[1]} = w_{1,2}^2 + 2w_{1,2}x_1 + x_2 \quad (\text{E.18})$$

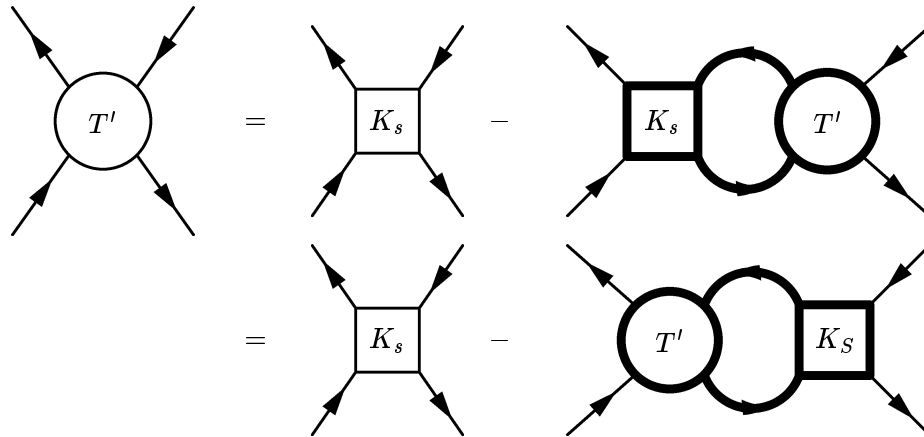
## Anhang F

# Bethe-Salpeter-Resummation der DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex

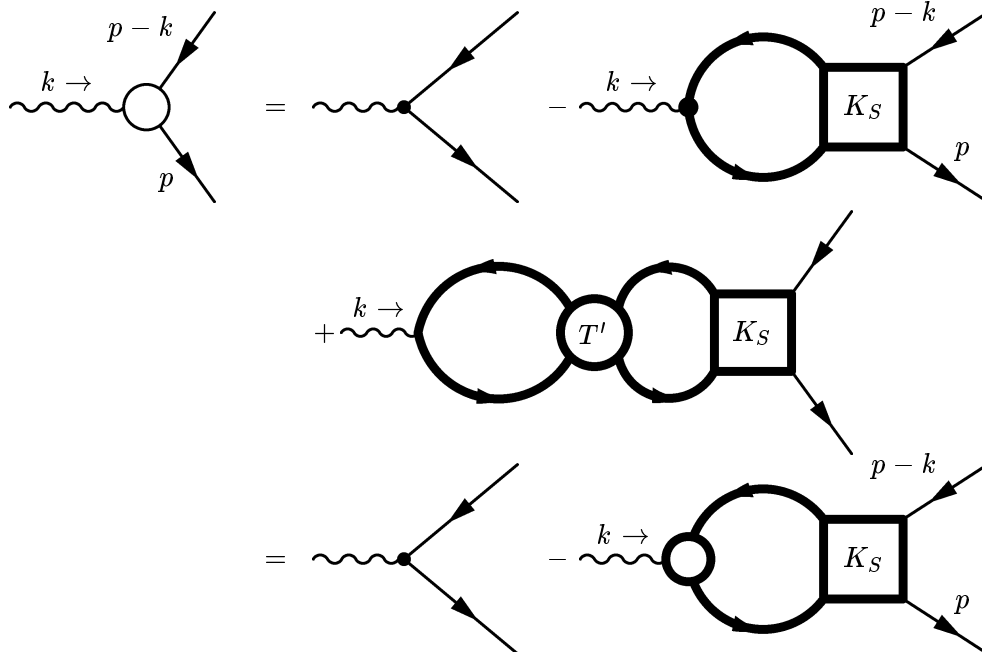
In diesem Kapitel wird die Bethe-Salpeter-Resummation der DS-Gleichung des Quark-Photon-Vertex durchgeführt. Mit  $K_s$  wird der Kern der  $T_{F\bar{F}F\bar{F}}$ -Amplitude bezeichnet, also alle im horizontalen 1PI und 2PI-Funktionen:



Die  $T'$ -Amplitude kann dann umgeschrieben werden zu ("Filtermechanismus"):



Setzt man diesen Graphen in die DS-Gleichung ein, so kann der nackte Vertex durch den vollen Photon-Vertex ersetzt werden:



# Literaturverzeichnis

- [BC 80] J. S. Ball, T.-W. Chiu, Phys. Rev. D22 (1980) 2542
- [Bec 95] M. Becker, *Nichtperturbative Strukturuntersuchung der Quantenelektrodynamik mittels genäherter Schwinger-Dyson-Gleichungen in dimensioneller Regularisierung*, Dissertation, WWU Münster (1995)
- [Bel 91] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford University Press (1991)
- [Col 84] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984)
- [Dri 97] L. Driesen, *Die Basisvertizes der Quantenchromodynamik und ihr Dyson-Schwinger Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie*, Dissertation, WWU Münster (1997)
- [Dri 98] L. Driesen, M. Stingl, *Extended iterative scheme for QCD: the four-gluon vertex*, Eur. Phys. J. A4 (1998) 401; MS-TPI-98-19, hep-th/9808155
- [DS 49] F. J. Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 1736; Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 73 (1951) 452
- [Ewe 00] A. Ewering, *Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit, WWU Münster (2000)
- [JJ 73] R. Jackiw, K. Johnson, Phys. Rev. D8 (1973) 2386; J. M. Cornwall, R. E. Norton, Phys. Rev. D8 (1973) 3338
- [Kuh 97] J. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die Quantenchromodynamik*, Dissertation, WWU Münster (1997)
- [Kug 97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer Verlag (1997)
- [Mal 85] B. Malgrange, L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985)
- [Mut 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific (1987)

- [PS 95] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995)
- [Reu 89] H. G. Reusch, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Dyson-Schwinger-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik*, Dissertation, WWU Münster (1989)
- [Riv 87] R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1987)
- [Ryd 97] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1997)
- [Sch 96] M. Schmelling, *Status of the Strong Coupling Constant*, Plenary talk given at XXVIII International Conference on High Energy Physics (1996), hep-ex/9701002
- [Sla 72] A. A. Slavnov, *Ward Identities in Gauge Theories*, Theor. Math. Phys. 10 (1972)
- [ST 71] A. A. Slavnov, Sov. J. Particles and Nuclei 5 (1975) 303; J. C. Taylor, Nucl. Phys. B33 (1971) 436
- [Sti 90] U. Häbel, R. Könning, H. G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard, *A nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger Equations of QCD*, Z. Physik A336 (1990) 423
- [Sti 86] M. Stingl, Phys. Rev. D34 (1986) 3866
- [Sti 96] M. Stingl, Z. Physik A353 (1996) 423
- [Sti 97] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl, *Extended Iterative Scheme for QCD: Three-Point Vertices*, Eur. Phys. J. A4, (1997) 381; MS-TPI-97-4, hep-th/9808152
- [Sti 00] M. Stingl, private Mitteilung im Januar 2000
- [SVZ 97] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *QCD and Resonance Physics*, Nucl. Phys. B147 (1979) 385
- [TV 72] G. t'Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189
- [TV 72a] G. t'Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B50 (1972) 318
- [Voi 99] J. Voigt, *Analytische Berechnung der hadronischen Vakuumpolarisation des Photons mit nichtperturbativ erweiterten Feynmanregeln für die Quantenchromodynamik*, Dissertation, WWU Münster (1999)
- [Zim 60] W. Zimmermann, Nuovo Cim. 13 (1959) 503, 16 (1960) 690



# Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt und beraten haben.

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. M. Stingl sowohl für die Anregung zu diesem interessanten Thema als auch für die ständige Bereitschaft zu klärenden Diskussionen und für seine zahlreichen wertvollen Hinweise.

Weiterhin danken möchte ich allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe, insbesondere Andre Ewering für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit danken möchte ich Tobias Galla, Florian Heitger, Andre Ewering und Ulrich v. Poblitzki. Außerdem verdanke ich Ulrich die gedruckten Feynman-Graphen und Tabellen. Vielen, vielen Dank für Deinen Einsatz!!!

Ganz besonders bedanken möchte ich mich jedoch bei meiner Gaby sowie meinen Eltern für ihre Unterstützung und ihr Verständnis im gesamten Zeitraum meines Studiums.





Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt  
und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im März 2000







