

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik

Untersuchung logarithmisch modifizierter
nichtperturbativ-erweiterter Feynmanregeln der QCD
in Landau-Eichung

Als Diplomarbeit vorgelegt von
Andreas Wielenberg

Januar 2001

Themensteller:
Prof. Dr. M. Stingl

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik

Untersuchung logarithmisch modifizierter
nichtperturbativ-erweiterter Feynmanregeln der QCD
in Landau-Eichung

Als Diplomarbeit vorgelegt von
Andreas Wielenberg

Januar 2001

Themensteller:
Prof. Dr. M. Stingl

Und darum: Hoch die Physik!
F. Nietzsche [1]

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Entwicklung einer logarithmisch modifizierten Theorie	5
1 Einführung in die QCD	7
1.1 QCD als Yang-Mills-Theorie	7
1.1.1 Feynmanregeln der QCD im Impulsraum	9
1.1.2 Greensche Funktionen	11
1.1.3 Renormierung	12
1.2 Die Renormierungsgruppe	13
2 Die 't Hooft-Weinberg-Gleichung	17
3 Nichtperturbative Ansätze	21
3.1 Die QCD-Vertizes als Doppelsequenz	21
3.2 Ansätze für die erweiterten Vertizes	22
3.2.1 Erweiterte Propagatoren	23
3.2.2 Erweiterte 3-Punkt-Vertizes	24
3.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen	25
3.3.1 Die Propagator-Gleichungen	25
3.3.2 Die Vertex-Gleichungen	27
3.4 Schattenpole	30
3.5 Bethe-Salpeter-Resummation	31
3.5.1 Fermion-Kanal	32
3.5.2 Gluon-Kanal	33
3.6 Schattenreduzierte DS-Gleichungen	36
4 Modifizierte Feynmanregeln	41
4.1 Die Herkunft der logarithmischen Modifikationen	41
4.2 Gestalt der logarithmischen Modifikationen	43
4.3 Konstruktion modifizierter Feynmanregeln	43
II Berechnungen auf 1-Schleifen-Niveau	47
5 Divergenz logarithmischer Integrale	49

5.1	Integraldarstellung der Logarithmuspotenz	49
5.2	Symmetrische Integration	50
5.3	Eine Integralformel	52
5.3.1	Logarithmische Divergenz	52
5.3.2	Quadratische Divergenz	55
6	Die Propagatoren	57
6.1	Der Gluon-Propagator	57
6.1.1	Die Gluon-Schleife	57
6.1.2	Der Tadpole	62
6.1.3	Die Geist-Schleife	63
6.1.4	Die Fermion-Schleife	65
6.2	Der Fermion-Propagator	68
6.2.1	Die Fermion-Gluon-Schleife	68
6.3	Der Geist-Propagator	71
6.3.1	Die Geist-Gluon-Schleife	71
7	Der $\bar{\Gamma}_3$-Vertex	75
8	Selbstkonsistenzgleichungen	79
9	Zusammenfassung	87
III	Anhang	91
A	Mathematischer Anhang	93
A.1	Notationen und Konventionen	93
A.2	Darstellungstheorie der SU(N)	93
A.3	Integralformeln und Entwicklungen	94
B	Die T-Amplituden	97
C	Bethe-Salpeter-Gleichungen	101
D	Ergänzungen zur Gluon-Schleife	107
E	Partialbruchzerlegung	115
F	Zur SK-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3$-Vertex	117
	Literaturverzeichnis	123
	Danksagung	127

Einleitung

Mitte des vergangenen Jahrhunderts erlebte die Elementarteilchenphysik eine stürmische Entwicklung, immer neue Teilchen wurden mit neuartigen Messapparaturen entdeckt und beschrieben. Um 1964 konnten Gell-Mann, Ne'eman und Zweig mit dem Quarkmodell, das damals die Quarks *up*, *down* und *strange* umfasste, Ordnung in den sogenannten „Teilchenzoo“ bringen. Man erkannte sehr schnell, dass sich die Teilchenmultipletts mit der Darstellungstheorie der $SU(3)_F$ beschreiben ließen. Im Laufe der Zeit wurden mit *charm*, *bottom* und *top* drei weitere Quarksarten nachgewiesen, wobei das *top*-Quark erst 1994 „beobachtet“ werden konnte [LP 96]. Ebenso wurde sehr schnell klar, dass zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen den Quarks eine neuartige Kraft, die sogenannte *Farbkraft* eingeführt werden musste, die wiederum mit der nichtabelschen $SU(3)_C$ beschrieben werden konnte.

Damit wurde das Interesse an nichtabelschen Eichtheorien, die schon vorher von Yang und Mills aufgestellt worden waren [YM 54], wegen ihrer scheinbaren Unrenormierbarkeit jedoch wenig Beachtung fanden, erneut entfacht und sie wurden als *Quantenchromodynamic* (kurz QCD) zu neuem Leben erweckt. Sehr schnell fanden sich Ergebnisse, die experimentelle Eigenschaften der Kernmaternie erklären konnten. Hier sind vor allem die Entdeckung der *asymptotischen Freiheit*, die die experimentell und in theoretischen Rechnungen im Parton-Modell gefundene Eigenschaft der Bjorken-Skalierung nebst den beobachteten logarithmischen Korrekturen dieses Verhaltens erklären konnte, zu nennen [Wei 96]. Spätestens seit in [CG 73a] und [CG 73b] bewiesen wurde, dass unter einer großen Klasse physikalischer Theorien nur die nichtabelschen Eichtheorien asymptotische Freiheit aufweisen können, ist die QCD als physikalisch zutreffende Beschreibung der starken Wechselwirkung anerkannt. Sie gilt heute als ein wesentlicher Bestandteil des Standardmodells der Elementarteilchenphysik.

Dennoch kann die QCD nicht alle Fragen zur starken Wechselwirkung beantworten. Insbesondere das experimentell gut belegte Phänomen des *Quark-Confinement* ließ sich bisher noch nicht theoretisch herleiten. Ein weiteres Problem der QCD ist das Versagen der Störungstheorie. Weil die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung nur für große Impulse klein wird, konvergiert die Störungsreihe der QCD im Gegensatz zur der der QED nicht.¹ Weil man von einer exakten Lösung der QCD weit entfernt ist, steht eines der wichtigsten Instrumente zur Untersuchung von Streuamplituden und Wirkungsquerschnit-

¹Dies ist selbst für die QED nur im Sinne der Semikonvergenz der perturbativen Entwicklung richtig.

ten im Falle der QCD für kleine Impulse nicht zur Verfügung. Nur für große Impulse sind perturbative Betrachtungen im Rahmen der QCD sinnvoll.

Ein möglicher Zugang zu diesem Problem wurde in [Sti 96] und [DKS 99] vorgeschlagen. In diesem *nichtperturbativ-erweiterten* Ansatz wird die QCD störungstheoretisch nicht nur nach dem Kopplungsparameter der starken Wechselwirkung sondern zusätzlich nach der renormierungsgruppeninvarianten (kurz: RG-invarianten) Massenskala Λ entwickelt, die für verschindende Kopplung ein nichtanalytisches Verhalten zeigt. Stellt man die Λ -erweiterten Feynmanregeln durch rationale Approximanten dar, kann man die Theorie mit den bekannten Mitteln der perturbativen Feldtheorie behandeln. Durch die Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD müssen dann die Parameter der Theorie selbstkonsistent bestimmt werden. Daher stellt dieser Ansatz eine echte Erweiterung der bekannten Störungstheorie der QCD dar. Besonders interessant ist, dass sich die Parameter der rationalen Approximanten mit kurzebigen Elementaranregungen, die experimentell für die starke Wechselwirkung nachgewiesen worden sind, in Verbindung bringen lassen.

Eine weitere interessante Eigenschaft der (renormierten) QCD ist ihre Invarianz unter bestimmten nichtlinearen Transformationen, die in ihrere Gesamtheit eine Halbgruppe bilden und unter dem Namen Renormierungsgruppen-(RG-) Transformationen bekannt sind. Im Rahmen der Feldtheorie sind dies die Transformationen, die durch eine Änderung der willkürlichen Renormierungsskala ν induziert werden. Aus dieser Eigenschaft lassen sich bestimmte Eigenschaften einer exakten Lösung der QCD untersuchen, wie z.B. die Existenz kritischer Phänomene oder das asymptotische Verhalten für große Impulse. Letzteres führte in [GW 73b] zur Entdeckung der sogenannten *anomalen Dimensionen* und zu logarithmischen Korrekturen für die Vertizes der QCD bei Impulsskalierung.

In dieser Arbeit soll nun untersucht werden, welche Konsequenzen sich aus einer Kombination des oben erwähnten logarithmischen Skalenverhaltens mit den rationalen Approximanten des nichtperturbativ-erweiterten Ansatzes ergeben. Der erste Teil der Arbeit fasst die wesentlichen Schritte zusammen, die zur Formulierung logarithmisch modifizierter Feynmanregeln notwendig sind. In Kapitel 1 fassen wir kurz die wesentlichen Fakten der perturbativen QCD und der Renormierungsgruppe zusammen und führen einige im Folgenden benötigte Größen ein. Im anschließenden Kapitel 2 untersuchen wir die 't Hooft-Weinberg-Gleichung, die als grundlegender Ausdruck die RG-Invarianz der QCD beschreibt, und leiten eine gegenüber den in der uns bekannten Literatur zu finden Ergebnissen (s. z.B. [GW 73b], [Mut 87] oder [Kug 97]) verbesserte Lösung für die logarithmischen Korrekturen im Limes großer Impulse her. In Kapitel 3 stellen wir dann die nichtperturbativ-erweiterten Ansätze vor und notieren sämtliche Dyson-Schwinger-Gleichungen für die sieben Basisvertices der QCD. Ebenfalls dort beweisen wir eine Bethe-Salpeter-resummierte Form der Gleichungen für die 3-Punkt- und 4-Punkt-Vertizes, die eine verbesserte Bestimmung der Selbstkonsistenzgleichungen schon auf niedrigerem Schleifen-Niveau ermöglicht. Mit dem Mechanismus der *kompensierenden Pole* [DKS 99], [DS 99] zeigen wir anschließend, dass die im Rahmen des nichtperturbativ-erweiterten Ansatzes auf inneren Propagatorlinien auftauchenden unphysikalischen Pole,

die durch die Struktur der Ansätze bedingt sind, verschwinden. Das folgende Kapitel 4 zeigt den Zusammenhang zwischen den aus der Renormierungsgruppe stammenden logarithmischen Korrekturen und den führenden Logarithmen einer perturbativen Berechnung auf. Danach motivieren wir die Wahl logarithmisch modifizierter Feynmanregeln für die QCD aus den Randbedingungen des nichtperturbativ-erweiterten Ansatzes.

Im zweiten Teil der Arbeit führen wir mit diesen veränderten Vertizes Rechnungen auf 1-Schleifen-Niveau und in Landau-Eichung aus. Dazu wird in Kapitel 5 ein an die logarithmischen Modifikationen angepasstes Schema zur Berechnung der divergenten Terme vorgestellt, das die bisher bekannten Methoden zur Berechnung von Impulsintegralen erweitert. Das folgende Kapitel 6 widmet sich den Dyson-Schwinger-Gleichungen der Propagatoren. Es werden für sämtliche 1-Schleifen-Graphen im Rahmen des logarithmisch modifizierten Ansatzes die Divergenzen berechnet. Um eine bessere Nachvollziehbarkeit der Rechnungen zu gewährleisten, werden dabei für alle Graphen die Rechnungen detailliert durchgeführt. Im anschließenden Kapitel 7 wird die resummierte Dyson-Schwinger-Gleichung des Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex betrachtet und der einzige divergente 1-Schleifen-Graph berechnet. Schließlich diskutieren wir in Kapitel 8 das Problem der selbstkonsistenten Reproduktion der logarithmisch modifizierten Vertizes und zeigen einen möglichen Lösungsweg auf. Darauf stellen wir die in dieser Arbeit erhaltenen Selbstkonsistenzgleichungen zusammen und diskutieren die Veränderungen, die sich aus den logarithmisch modifizierten Feynmanregeln ergeben.

Teil I

Entwicklung einer logarithmisch modifizierten Theorie

Kapitel 1

Einführung in die QCD

matutina parum cautos iam frigora mordent
Horaz [2]

1.1 QCD als Yang-Mills-Theorie

Die QCD ist eine nichtabelsche Eichtheorie mit minimaler Ankopplung von Fermionfeldern und Symmetriegruppe SU(3). Wir formulieren die Theorie im D-dimensionalen euklidischen Raum. Die eichkovariante Ableitung lautet:

$$D_\mu = \partial_\mu - g T^a A_\mu^a. \quad (1.1)$$

Dabei ist A_μ^a ein lokales Vektorfeld (Eichfeld) über dem Hilbertraum der QCD, d.h. mit Farb- und Lorentzindizes. Das Eichfeld kann im Rahmen der QCD als Austauschfeld der starken Wechselwirkung, d.h. als Gluon-Feld, interpretiert werden. Die Lagrangedichte der QCD ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{EF} + \mathcal{L}_G \quad (1.2)$$

mit freier Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_F = \sum_f \bar{\Psi}_f^i (\gamma^\mu (D_\mu)^{ij} - m_f \delta^{ij}) \Psi_f^j. \quad (1.3)$$

Dabei sind die Fermion-Felder Ψ_f^i grassmannwertige und komplexe Felder in Fundamentaldarstellung. Der Index f nummeriert hier formal die unterschiedlichen Fermion- bzw. Quarksorten, die sogenannten *Flavours*, durch. Kinetische Energie und Selbstwechselwirkung des Eichfeldes sind enthalten in

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (1.4)$$

mit den (nichtabelschen) Feldstärken

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.5)$$

Zur Festlegung einer Eichung dienen der Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{EF} = \frac{1}{2\xi} \sum_a (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \quad (1.6)$$

und der Geist- oder Fadeev-Popov-Term

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial_\mu \bar{c}^a) D_\mu^{ab} c^b. \quad (1.7)$$

Beide Terme sorgen letztlich für eine Bestimmung des physikalischen Teils des Hilbertraums der QCD [Kug 97]. Hierbei sind die Geist-Felder grassmannwertige skalare Felder, die dennoch der Fermi-Statistik genügen. Sie dienen nur zur Beseitigung unphysikalischer Freiheitsgrade der Theorie und repräsentieren keine physikalisch detektierbaren Teilchen.

Man führt nun noch die euklidische Wirkung

$$S_E = \int d^D x \mathcal{L} \quad (1.8)$$

und das Quellenfunktional

$$\begin{aligned} j_E[A, \bar{c}, c, \bar{\Psi}, \Psi; J, J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}] \\ = \int d^D x \left(A \cdot J + \bar{c} \cdot J_{\bar{c}} + \bar{J}_c \cdot c + \sum_f \bar{\Psi}_f \cdot \eta_f + \bar{\eta}_f \cdot \Psi_f \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ein.¹ Dann lässt sich das zugehörige erzeugende Funktional der euklidischen Korrelationsfunktionen, Z_E , schreiben als

$$\begin{aligned} Z_E[J, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \eta, \bar{\eta}] \\ = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \{ -S_E + j_E \} \end{aligned} \quad (1.10)$$

mit

$$N^{-1} = Z[0, 0, 0, 0]. \quad (1.11)$$

Die Feynmanregeln ergeben sich nun ganz natürlich als Koeffizienten der niedrigsten Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals.

Das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen lautet:

$$W_E[J, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E. \quad (1.12)$$

Mit den Erwartungswerten der Felder bei nichtverschwindenden Quellen, den sogenannten effektiven Feldern, die wir hier ohne Indizes und Impulse notieren,

$$\hat{A} = \frac{\delta}{\delta J} W[J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}], \quad (1.13)$$

$$\hat{c} = \frac{\delta}{\delta \bar{J}_c} W[J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}] \quad (1.14)$$

$$\hat{\bar{c}} = \frac{\delta}{\delta J_{\bar{c}}} W[J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}], \quad (1.15)$$

$$\hat{\bar{\Psi}} = \frac{\delta}{\delta \eta} W[J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}], \quad (1.16)$$

$$\hat{\Psi} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} W[J_{\bar{c}}, J_c, \eta, \bar{\eta}], \quad (1.17)$$

¹Das Skalarprodukt bedeutet dabei in 1.9 Summation über die den jeweiligen Feldern und Quellen zugeordneten Farb- und Lorentzindizes.

kann man durch eine Legendretransformation das erzeugende Funktional der 1-Teilchen-irreduziblen² (1PI-) Vertexfunktionen definieren:

$$\Gamma_E[\hat{A}, \hat{\bar{c}}, \hat{c}, \hat{\bar{\Psi}}, \hat{\Psi}] = W_E - j_E[\hat{A}, \hat{\bar{c}}, \hat{c}, \hat{\bar{\Psi}}, \hat{\Psi}; \dots]. \quad (1.18)$$

1.1.1 Feynmanregeln der QCD im Impulsraum

Transformiert man die (euklidische) Wirkung 1.8 in den Impulsraum, erhält man mit $\vec{d} \equiv \frac{d}{2\pi}$:³

$$\begin{aligned} S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\Psi}, \Psi] &= -\frac{1}{2} \int \vec{d}^D p_1 \vec{d}^D p_2 (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \Gamma_{2a_1 a_2}^{p \mu_1 \mu_2} A_{a_1}^{\mu_1} A_{a_2}^{\mu_2} \\ &\quad - \int \vec{d}^D p_1 \vec{d}^D p_2 (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{\Gamma}_{2a_1 a_2}^p \bar{c}_{a_1} c_{a_2} \\ &\quad - \sum_f \int \vec{d}^D p_1 \vec{d}^D p_2 (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \bar{\Psi}_f^i \bar{\Gamma}_{2f}^{p i j} \Psi_f^j \\ &\quad + \frac{1}{3!} g_0 \nu_0^\epsilon \int \prod_{l=1}^3 \vec{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D \left[\sum_{l=1}^3 p_l \right] \Gamma_{3a_1 a_2 a_3}^{p \mu_1 \mu_2 \mu_3} A_{a_1}^{\mu_1} A_{a_2}^{\mu_2} A_{a_3}^{\mu_3} \\ &\quad + g_0 \nu_0^\epsilon \int \prod_{l=1}^3 \vec{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D \left[\sum_{l=1}^3 p_l \right] \tilde{\Gamma}_{3a_1 a_2 a_3}^p \bar{c}_{a_1} c_{a_2} A_{a_3}^{\mu_3} \\ &\quad + g_0 \nu_0^\epsilon \sum_f \int \prod_{l=1}^3 \vec{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D \left[\sum_{l=1}^3 p_l \right] \bar{\Psi}_f^i \bar{\Gamma}_{3f}^{p i j \mu_3} \Psi_f^j A_{a_3}^{\mu_3} \\ &\quad - \frac{1}{4!} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int \prod_{l=1}^4 \vec{d}^D p_l (2\pi)^D \delta^D \left[\sum_{l=1}^4 p_l \right] \Gamma_{4a_1 a_2 a_3 a_4}^{p \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} A_{a_1}^{\mu_1} A_{a_2}^{\mu_2} A_{a_3}^{\mu_3} A_{a_4}^{\mu_4}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hierbei wurde die explizite Abhängigkeit der Vertexfunktionen und Felder von den Impulsen unterdrückt, die Summationen über f bei den Fermion-Vertizes gehen über alle Flavours (u,d,c,s,t,b). Das transformierte Quellenfunktional 1.9 lautet:

$$\begin{aligned} j_E &= \int \vec{d}^D p [J_a^\mu(-p) A_a^\mu(p) + \bar{c}_a(p) J_{\bar{c} a}(-p) + \bar{J}_{c a}(-p) c_a(p) \\ &\quad + \sum_f (\bar{\Psi}_f^i(p) \eta_f^i(-p) + \bar{\eta}_f^i(-p) \Psi_f^i(p))]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Die perturbativen Basisvertizes der QCD ergeben sich nun als Koeffizienten der niedrigsten Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals im Impulsraum.

²Zur Definition dieses Begriffes siehe z.B. [Kug 97].

³Wir benutzen diese Konvention durchgehend.

Wir definieren die drei *nackten* Propagatoren als Negativ-Inverse der 2-Punkt-Vertizes,

$$S_f^{p\ ij} \equiv -[\bar{\Gamma}_2^{p\ ij}]^{-1}, \quad (1.21)$$

$$D^{p\ \mu_1\ \mu_2}_{a_1\ a_2} \equiv -[\Gamma_2^{p\ \mu_1\ \mu_2}]^{-1}, \quad (1.22)$$

$$\tilde{D}^{p\ a_1\ a_2} \equiv -[\Gamma_2^{p\ a_1\ a_2}]^{-1}, \quad (1.23)$$

und notieren dann die perturbativen Basisvertices der QCD und ihre dazugehörende graphische Darstellung.

- Der Fermion-Propagator⁴

$$S_f^{p\ ij}(\vec{p}) = \delta^{ij} \frac{1}{\vec{p} + \hat{m}_f} = \begin{array}{c} i \bullet \xleftarrow{} j \bullet \end{array} \quad (1.24)$$

- Der Gluon-Propagator

$$\begin{aligned} D^{p\ \mu_1\ \mu_2}_{a_1\ a_2}(\vec{p}) &= \delta_{a_1\ a_2} \left[\delta^{\mu_1\ \mu_2} - (1 - \xi) \frac{p^{\mu_1} p^{\mu_2}}{p^2} \right] \frac{1}{p^2} \\ &= \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \quad \mu_2, a_2 \\ \bullet \sim \sim \sim \bullet \end{array} \end{aligned} \quad (1.25)$$

- Der Geist-Propagator

$$\tilde{D}^{p\ a_1\ a_2}(\vec{p}) = \delta^{a_1\ a_2} \frac{1}{p^2} = \begin{array}{c} a_1 \bullet \dashleftarrow a_2 \bullet \end{array} \quad (1.26)$$

- Der 3-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\ a_1\ a_2\ a_3}^{p\ \mu_1\ \mu_2\ \mu_3}(p_1, p_2, p_3) &= if_{a_1\ a_2\ a_3} (\delta^{\mu_1\ \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \delta^{\mu_2\ \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \\ &\quad + \delta^{\mu_3\ \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2}) \\ &= \begin{array}{c} \mu_3, a_3 \\ \sim \sim \sim \bullet \\ \mu_1, a_1 \\ \sim \sim \sim \bullet \\ \mu_2, a_2 \end{array} \end{aligned} \quad (1.27)$$

- Der Fermion-Gluon-Vertex

$$\bar{\Gamma}_3^{p\ ij\ \mu_3} = T_{ij}^{a_3} \gamma_3^\mu = \begin{array}{c} \mu_3, a_3 \\ \sim \sim \sim \bullet \\ i \bullet \xleftarrow{} \bullet \xrightarrow{} j \end{array} \quad (1.28)$$

⁴Man beachte, dass die Fermionmasse im Propagator eigentlich matrixwertig ist. Korrekt müsste man schreiben $\hat{m}_f \cdot \mathbf{1}$. Wir können aber diese vereinfachte Schreibweise wählen, da sie zu keinen Konfusionen Anlass gibt.

- Der Geist-Gluon-Vertex

$$\tilde{\Gamma}_{3a_1a_2a_3}^p(\vec{p}) = if_{a_1a_2a_3}p^{\mu_3} = \begin{array}{c} \text{Diagram: A vertex with three gluon lines meeting at a point. The top line is wavy and labeled } \mu_3, a_3. \text{ The left line is wavy and labeled } \vec{p}, a_1. \text{ The right line is wavy and labeled } a_2. \end{array} \quad (1.29)$$

- Der 4-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} \Gamma_{4a_1a_2a_3a_4}^{p\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= f_{a_1a_2,a_3a_4}(\delta^{\mu_1\mu_4}\delta^{\mu_2\mu_3} - \delta^{\mu_1\mu_3}\delta^{\mu_2\mu_4}) \\ &\quad + f_{a_1a_3,a_4a_2}(\delta^{\mu_1\mu_2}\delta^{\mu_3\mu_4} - \delta^{\mu_1\mu_4}\delta^{\mu_2\mu_3}) \\ &\quad + f_{a_1a_4,a_2a_3}(\delta^{\mu_1\mu_3}\delta^{\mu_2\mu_4} - \delta^{\mu_1\mu_2}\delta^{\mu_3\mu_4}) \\ &= \begin{array}{c} \text{Diagram: A vertex with four gluon lines meeting at a point. The top-left line is wavy and labeled } \mu_1, a_1. \text{ The top-right line is wavy and labeled } \mu_4, a_4. \text{ The bottom-left line is wavy and labeled } \mu_2, a_2. \text{ The bottom-right line is wavy and labeled } \mu_3, a_3. \end{array} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dies sind die oberflächlich divergenten perturbativen Vertizes nullter Ordnung der QCD. Aus ihnen lassen sich alle höheren Vertizes iterativ aufbauen.

Wir müssen zwischen diesen sogenannten nackten und den vollen Vertizes der Theorie unterscheiden. Erstere sind die Objekte einer störungstheoretischen Entwicklung in der Kopplungskonstante g für die QCD und ergeben sich damit aus dem Grenzfall der freien Theorie. Letztere hängen, wie wir im Folgenden sehen werden, eng mit den Greenschen Funktionen zusammen und stellen die *exakten* Größen dar. Störungstheoretisch betrachtet, enthalten die vollen Vertizes Beiträge aus *allen* Ordnungen der perturbativen Entwicklung sowie darüberhinaus nicht durch perturbative Entwicklungen darstellbare Beiträge.

1.1.2 Greensche Funktionen

Mit dem erzeugenden Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen

$$W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \quad (1.31)$$

kann man nun die vollen Propagatoren im Impulsraum durch Ableitungen nach den Quellfeldern bestimmen. Wir geben hier zunächst die Ausdrücke für die drei vollen Propagatoren an:

$$\left. \frac{\delta^2 W_E[J, J_{\bar{c}}, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_2}^{\nu_2}(p_2) \delta J_{a_1}^{\nu_2}(p_1)} \right|_0 = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) D_{a_1 a_2}^{\nu_1 \nu_2}(p_1, p_2), \quad (1.32)$$

$$\left. \frac{\delta^2 W_E[J, J_{\bar{c}}, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{\bar{c}a_2}(p_2) \delta \bar{J}_{ca_1}(p_1)} \right|_0 = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{D}_{a_1 a_2}(p_1, p_2), \quad (1.33)$$

$$\left. \frac{\delta^2 W_E[J, J_{\bar{c}}, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta_f^{i_2}(p_2) \delta \bar{\eta}_f^{i_1}(p_1)} \right|_0 = (2\pi)^{-D} \delta^D(p_1 + p_2) S_f^{i_1 i_2}(p_1, p_2). \quad (1.34)$$

Die Null bedeutet hier, dass alle Quellfelder nach Ausführen der Ableitungen auf Null gesetzt werden. Für eine allgemeine verbundene Greensche Funktion (*connected Green's function*) erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^n W_E}{\delta J_{a_n}^{\nu_n}(p_n) \dots \delta J_{\bar{c}a_{k+l}}(p_{k+l}) \delta \bar{J}_{ca_{k+l-1}}(p_{k+l-1}) \dots \delta \eta_f^{i_l}(p_l) \delta \bar{\eta}_f^{i_{l-1}}(p_{l-1})} \Big|_0 \\ = & (2\pi)^{(1-(n-k-l))D} \delta^D \left[\sum p_i \right] G_{n,k,l(f)}^c {}_{a_{l+1} \dots a_{k+l} a_{k+l+1} \dots a_n}^{\nu_{k+l+1} \dots \nu_n}(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (1.35)$$

mit l Fermion- und k Geist-Beinen (l und k gerade).

Über die Definition der effektiven Felder und des effektiven Potentials kann man zeigen, dass die Greenschen Funktionen und die 1PI-Vertexfunktionen in folgender Weise zusammenhängen:

$$G_2^c(p_1, p_2) = D(p_1, p_2) = -[\Gamma_2(p_1, p_2)]^{-1}, \quad (1.36)$$

$$\tilde{G}_2^c(p_1, p_2) = \tilde{D}(p_1, p_2) = -[\tilde{\Gamma}_2(p_1, p_2)]^{-1}, \quad (1.37)$$

$$\bar{G}_2^c(p_1, p_2) = S(p_1, p_2) = -[\bar{\Gamma}_2(p_1, p_2)]^{-1}, \quad (1.38)$$

$$G_3^c(p_1, p_2, p_3) = -gD(p_1)D(p_2)D(p_3)\Gamma(p_1, p_2, p_3), \quad (1.39)$$

$$\tilde{G}_3^c(p_1, p_2, p_3) = -g\tilde{D}(p_1)\tilde{D}(p_2)\tilde{D}(p_3)\tilde{\Gamma}_3(p_1, p_2, p_3), \quad (1.40)$$

$$\bar{G}_3^c(p_1, p_2, p_3) = -gS(p_1)S(p_2)D(p_3)\bar{\Gamma}_3(p_1, p_2, p_3), \quad (1.41)$$

$$G_4^c(p_1, \dots, p_4) = -g^2 D(p_1) \dots D(p_4) T_4(p_1, \dots, p_4) \quad (1.42)$$

mit der Dekomposition von T_4 in

$$\begin{aligned} T_4(p_1, \dots, p_4) = & \Gamma_4(p_1, \dots, p_4) + \Gamma_3(p_1, p_2, k)D(k)\Gamma_3(k, p_3, p_4) \\ & + 2 \text{zykl. Perm. } (2, 3, 4). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Dabei stellen die letzten drei Terme in 1.43 die 1-Teilchen-reduziblen Anteile in den drei Kanälen der 4-Punkt-Amplitude T_4 dar und Γ_4 beschreibt den vollen, in allen Kanälen 1-Teilchen-irreduziblen 4-Punkt-Vertex.

1.1.3 Renormierung

Bei der Berechnung von Erwartungswerten bzw. Greenschen Funktionen mittels der in Abschnitt 3.3 dargestellten Gleichungen stößt man auf Divergenzen in den Schleifengraphen für die Vertizes. Da physikalische Größen jedoch immer endlich sein müssen, darf man die Divergenzen als Artefakte einer mathematisch unzureichenden Beschreibung der physikalischen Vorgänge auffassen. Deshalb kann man die Divergenzen durch eine geeignete Regularisierung der mathematisch divergenten Terme und anschließende Renormierung der Felder, der Kopplungskonstante und der Fermionmassen⁵ beseitigen. Man definiert:

$$A_\mu^a = [Z_3]^{\frac{1}{2}} A_R{}_\mu^a, \quad (1.44)$$

⁵Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf eine Theorie mit nur einer Fermionmasse. Die Verallgemeinerung ist jedoch mit keinen weiteren konzeptionellen Problemen verbunden.

$$c^a = [\bar{Z}_{3FP}]^{\frac{1}{2}} c_R^a, \quad (1.45)$$

$$\Psi^i = [\bar{Z}_{2F}]^{\frac{1}{2}} \Psi_R^i \quad (1.46)$$

für die in der QCD auftretenden Felder und

$$g_0 = Z_g g_R, \quad (1.47)$$

$$\xi = Z_3 \xi_R, \quad (1.48)$$

$$m = Z_m m_R \quad (1.49)$$

für die Kopplungskonstante, den Eichparameter und die Fermionmasse. Im Rahmen der dimensionellen Regularisierung in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen und im MS-Schema ergibt sich für die divergenten Teile der fünf unabhängigen Renormierungskonstanten der QCD in Ordung $O(g^2)$ [Mut 87]:

$$Z_g = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{11C_G - 4T_R N_f}{6} + O(g_R^4), \quad (1.50)$$

$$Z_m = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{3C_F}{\epsilon} + O(g_R^4), \quad (1.51)$$

$$\bar{Z}_{2F} = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{C_F \xi_R}{\epsilon} + O(g_R^4), \quad (1.52)$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} C_G \left(\frac{13}{3} - \xi_R \right) - \frac{4}{3} T_R N_f \right] + O(g_R^4), \quad (1.53)$$

$$\bar{Z}_{3FP} = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{C_G}{\epsilon} \frac{3 - \xi_R}{4} + O(g_R^4), \quad (1.54)$$

wobei für die Eichgruppe $SU(N_C)$ gilt:

$$C_G = N_C, \quad T_R = \frac{1}{2}, \quad C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}. \quad (1.55)$$

1.2 Die Renormierungsgruppe

Der Prozess der Renormierung ist notwendig nicht eindeutig, da man bei der Definition von divergenten Termen beliebige konvergente Beiträge addieren kann. Dann ist für eine renormierte Vertexfunktion

$$\Gamma_R = Z(R)\Gamma_0 \quad (1.56)$$

evident, dass für zwei Renormierungsschemata R und R' gelten muss:

$$\Gamma_{R'} = Z(R', R)\Gamma_R. \quad (1.57)$$

Diese Relation gibt Anlass zur Formulierung der Renormierungsgruppe.

Zur Festlegung der Renormierungsvorschrift gehört die Wahl einer Renormierungsskala ν , für die die Subtraktion der Divergenzen vorgenommen wird, bzw. die Wahl einer Massenskala in den dimensionellen Renormierungsschemata [PT 84]. Da die nackten Greenschen Funktionen nicht ν -abhängig sind,

kann man folgende Differentialgleichung für die renormierten Vertexfunktionen aufstellen:

$$\left[\nu \partial_\nu + \nu \frac{\partial g_R}{\partial \nu} \partial_{g_R} + \sum \nu \frac{\partial m_{i,R}}{\partial \nu} \partial_{m_{i,R}} + \mu \frac{\partial \alpha_R}{\partial \nu} \partial_{\xi_R} - \frac{dZ_\Gamma}{d\nu} \frac{\nu}{Z_\Gamma} \right] \times \Gamma_R^{(\{n\})}(\{p\}, g_R, \xi_R, \{m_R\}; \nu) = 0. \quad (1.58)$$

Durch Betrachtung der Massendimension der Vertexfunktionen kann man eine weitere Differentialgleichung für die gleichförmige Impulsskalierung der Vertexfunktionen mit einem Parameter λ beweisen [PT 84]:

$$\left[\lambda \partial_\lambda + \sum m_{i,R} \partial_{m_{i,R}} + \nu \partial_\nu - d_\nu \right] \Gamma_R^{(\{n\})}(\lambda \{p\}, \dots; \nu) = 0. \quad (1.59)$$

wobei

$$d_\Gamma(\epsilon) \equiv 4 - 2\epsilon - d_G n_G - d_{FP} n_{FP} - d_F n_F \quad (1.60)$$

die (naive) Massendimension des Vertex Γ ist. Die Gluon- und Geist-Felder haben Massendimension $d = 1 - \epsilon$ und die Fermion-Felder die Massendimension $d_F = \frac{3-2\epsilon}{2}$. Kombiniert man beide Gleichungen, erhält man die 't Hooft-Weinberg-Gleichung [Mut 87], deren Lösung im nächsten Kapitel durchgeführt wird. Als Vorbereitung dafür stellen wir hier die RG-Funktionen der QCD zusammen.

Da man in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen rechnet, muss man, um die Kopplungskonstanten dimensionslos zu halten, folgende Definitionen vornehmen:

$$g = g_0 \nu_0^\epsilon \quad (1.61)$$

$$g_r = g_R \nu^\epsilon. \quad (1.62)$$

Daraus folgt sofort [Mut 87]:

$$g_R(\nu) = \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^\epsilon Z_g(\nu)^{-1} g_0. \quad (1.63)$$

Für die RG-Funktion der Kopplung ergibt sich nach dieser Vorarbeit:

$$\begin{aligned} \beta(g_R, \xi_R) &= \nu \frac{dg_R}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \xi} \\ &= -\epsilon g_R - \frac{g_R^3}{(4\pi)^2} \frac{11C_G - 4T_R N_f}{3} + O(g_R^5) \\ &= -\epsilon g_R - \beta_0 g_R^3 + O(g_R^5). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Für die anomalen Dimensionen der Fermionmassen findet man:

$$\gamma_{m_i}(g_R, \xi_R) = -\frac{\nu}{m_{i,R}} \frac{dm_{i,R}}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \xi} = \frac{\nu}{Z_{m_i}} \frac{dZ_{m_i}}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \xi}. \quad (1.65)$$

Für den in Abschnitt 1.1.3 behandelten Fall nur einer Fermionmasse folgt damit:

$$\begin{aligned} \gamma_m(g_R, 0) &= \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} 6C_F + O(g_R^4) \\ &= \gamma_m^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Das Gluon-Feld hat die anomale Dimension:

$$\begin{aligned}
 \gamma_G(g_R, \xi_R) &= \frac{\nu}{2Z_3} \frac{dZ_3}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \alpha} \\
 &= -\frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{13C_G - \xi_R - 8T_R N_f}{6} + O(g_R^4) \\
 &= \gamma_G^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4),
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

das Geist-Feld:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_{FP}(g_R, \xi_R) &= \frac{\nu}{2\tilde{Z}_{3FP}} \frac{d\tilde{Z}_{3FP}}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \xi} \\
 &= -\frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{3C_G - \xi_R}{4} + O(g_R^4) \\
 &= \tilde{\gamma}_{FP}^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4)
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

und das Fermion-Feld:

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_F(g_R, \xi_R) &= \frac{\nu}{2Z_{2F}} \frac{dZ_{2F}}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \xi} \\
 &= -\frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \frac{C_F \xi_R}{\epsilon} + O(g_R^4) \\
 &= \bar{\gamma}_F^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4).
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

Weil der Eichparameter ξ in 1.48 über die Renormierungskonstante des Gluon-Feldes renormiert wird, erhält man mit 1.67:

$$\delta(g_R, \xi_R) = \nu \frac{d\xi_R}{d\nu} \Big|_{g, \{m\}, \xi} = -2\xi_R \gamma_G(g_R, \xi_R). \tag{1.70}$$

In Landau-Eichung ($\xi = 0$) verschwindet $\delta(g_R)$ exakt und $\bar{\gamma}_F$ in erster Ordnung in g^2 :

$$\delta(g_R, 0) = 0 = \bar{\gamma}_F^{(0)}(g_R, 0). \tag{1.71}$$

Damit sind alle für die im nächsten Kapitel vorgenommene Lösung der 't Hooft-Weinberg-Gleichung benötigten Größen bereitgestellt.

Kapitel 2

Lösung der 't Hooft-Weinberg-Gleichung

*a[urum] n[ostrum] non est aurum vulgi
sprichwörtlich [3]*

Folgend [Mut 87] und [PT 84] können wir Gleichung 1.58 unter Ausnutzung der oben gegebenen Definitionen der anomalen Dimensionen folgendermaßen schreiben:¹

$$\left[\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} - \gamma_m(g_R) \frac{\partial}{\partial m_R} + \delta(g_R) \frac{\partial}{\partial \alpha_R} - n_{FP} \tilde{\gamma}_{FP}(g_R) - n_G \gamma_G(g_R) - n_F \tilde{\gamma}_F(g_R) \right] \Gamma^{(n_G, n_{FP}, n_F)}(g_R, \alpha_R, m_R, \nu) = 0. \quad (2.1)$$

Subtrahiert man davon nun Gleichung 1.59, erhält man mit $t = \ln \lambda$ und in Landau-Eichung $\xi = 0$ nach kurzer Rechnung die sogenannte '*t Hooft-Weinberg-Gleichung*:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} - (1 + \gamma_m)m \frac{\partial}{\partial m_R} - \omega \right] \Gamma^{(\{n\})}(\lambda p_1, \dots, \lambda p_n; g, m, \nu) = 0 \quad (2.2)$$

mit

$$\omega(g_R) \equiv n_G \gamma_G + n_{FP} \tilde{\gamma}_{FP} - d_\Gamma. \quad (2.3)$$

Man definiert die laufende Kopplung $\bar{g}(t)$ und die laufende Masse $\bar{m}(t)$ gemäß:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}(0) = g_R, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\bar{m}} \frac{d\bar{m}}{dt} = -1 - \gamma_m(\bar{g}), \quad \bar{m}(0) = m_R. \quad (2.5)$$

Für deren Lösung gilt:

$$\begin{aligned} t &= \int_{g_R}^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')}, \\ \bar{m}(t) &= m \exp \left[-t - \int_0^t dt' \gamma_m(\bar{g}(t')) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Wir benutzen wiederum ein Modell mit nur einer Fermionmasse. Verallgemeinert man dies, erhält man zusätzlich Summationen über alle Massen bei den entsprechenden Termen.

Ersetzt man nun in der obigen Differentialgleichung g_R durch $\bar{g}(-t)$ und m durch $\bar{m}(-t)$, erhält man:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\bar{g}(-t)) \frac{\partial}{\partial \bar{g}(-t)} - (1 + \gamma_m) \bar{m}(-t) \frac{\partial}{\partial \bar{m}(-t)} - \omega(\bar{g}(-t)) \right] \times \Gamma^{(\{n\})}(e^t p_i; \bar{g}(-t), \bar{m}(-t), \nu) = 0. \quad (2.7)$$

Mit den oben angegebenen Differentialgleichungen für \bar{g} und \bar{m} vereinfacht sich dies zu:

$$\left[\frac{d}{dt} + \omega(\bar{g}(-t)) \right] \Gamma^{(\{n\})}(e^t p_1, \dots, e^t p_n, \bar{g}(-t), \bar{m}(-t), \nu) = 0. \quad (2.8)$$

Diese Gleichung wird gelöst durch:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(\{n\})}(e^t p_i; \bar{g}(-t, g), \bar{m}(-t, m), \nu) \\ &= \Gamma^{(\{n\})}(p_i; g_R, m_R, \nu) \exp \left[- \int_{-t}^0 dt' \omega(\bar{g}(t', g)) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ersetzen wir darin g_R durch $\bar{g}(t)$, ergibt sich mit²

$$\bar{g}(t) = \bar{g}(t - t_1, \bar{g}(t_1)) \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \bar{g}(0, g_R) = g_R = \bar{g}(-t, \bar{g}(t)) \quad (2.11)$$

das gesuchte Zwischenergebnis:

$$\Gamma^{(\{n\})}(e^t p_i; g_R, m_R, \nu) = \Gamma^{(\{n\})}(p_i; \bar{g}(t), \bar{m}(t), \nu) \exp \left[- \int_0^t dt' \omega(\bar{g}(t')) \right]. \quad (2.12)$$

Für die Bestimmung des Skalierungsverhaltens muss man das Verhalten des Exponentialfaktors studieren:

$$\begin{aligned} & \exp \left[- \int_0^t dt' \omega(\bar{g}(t')) \right] \\ &= \lambda^{dt} \exp \left\{ - \int_0^t dt' [n_G \gamma_G(\bar{g}(t')) + n_{FP} \bar{\gamma}_{FP}(\bar{g}(t'))] \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Da die QCD eine asymptotisch freie Theorie ist, darf man annehmen:

$$\gamma_i(\bar{g}(t)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

$$\gamma_i(\bar{g}(t)) = \gamma_i^{(0)} \bar{g}(t)^2 + O(\bar{g}(t)^4). \quad (2.15)$$

Als nächster Schritt ist $\bar{g}(t)$ zu berechnen. Es gilt auf 1-Schleifen-Niveau:

$$t = \int_{g_R}^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \int_{g_R}^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{-\epsilon g' - \beta_0 g'^3}. \quad (2.16)$$

²Zu näheren Details siehe [PT 84].

Als Lösung dieses Integrals findet man (vgl. A.29):

$$-t = \frac{1}{2\epsilon} \left[\ln \left| \frac{g'^2}{\beta_0 g'^2 + \epsilon} \right| \right]_{g_R}^{\bar{g}(t)} \quad (2.17)$$

$$= \ln \left[\frac{\bar{g}^2(\beta_0 g_R^2 + \epsilon)}{(\beta_0 \bar{g}^2 + \epsilon) g_R^2} \right]^{\frac{1}{2\epsilon}}. \quad (2.18)$$

Lösen wir dies nach \bar{g}^2 auf, erhalten wir nach kurzer Rechnung:³

$$\bar{g}^2(t) = \frac{\epsilon g_R^2}{\beta_0 g_R^2(e^{2\epsilon t} - 1) + \epsilon e^{2\epsilon t}}. \quad (2.19)$$

Damit können wir das auf 1-Schleifen-Niveau, d.h. in niedrigster Ordung in g_R^2 , führende Verhalten des Exponentialfaktors 2.13 bestimmen:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \int_0^t dt' [n_G \gamma_G(\bar{g}(t')) + n_{FP} \tilde{\gamma}_{FP}(\bar{g}(t'))] \right\} \\ &= \exp \left[-[n_G \gamma_G^{(0)} + n_{FP} \tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}] \int_0^t dt' \frac{\epsilon g_R^2}{\beta_0 g_R^2(e^{2\epsilon t'} - 1) + \epsilon e^{2\epsilon t'}} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Als Lösung für das verbleibende Integral finden wir:

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \frac{\epsilon g_R^2}{\beta_0 g_R^2(e^{2\epsilon t'} - 1) + \epsilon e^{2\epsilon t'}} \\ & \stackrel{A.30}{=} -\frac{\epsilon t}{\beta_0} + \frac{\ln(e^{2\epsilon t} \epsilon + \beta_0 g_R^2(e^{2\epsilon t} - 1)) - \ln \epsilon}{2\beta_0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\approx -\frac{\epsilon t}{\beta_0} + \frac{\ln(1 + 2\epsilon t + 2\beta_0 g_R^2(t + \epsilon t^2))}{2\beta_0}. \quad (2.22)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt eine Entwicklung nach ϵ vorgenommen und die höheren Terme dieser Entwicklung vernachlässigt. Dies ist statthaft, weil Terme von höherer Ordnung in ϵ auf 1-Schleifen-Niveau im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ verschwinden müssen, ungeachtet des nachher vorgenommenen Limes $t \rightarrow \infty$. Man erhält also für das Skalierungsverhalten der Vertexfunktionen:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(n)}(\lambda p_i; g_R, m_R, \nu) \\ &= \lambda^{d_\Gamma} (\lambda^{-2\epsilon} [2\beta_0 g_R^2(\ln \lambda + \epsilon \ln^2 \lambda) + 1 + 2\epsilon \ln \lambda])^{-\frac{n_G \gamma_G^{(0)} + n_{FP} \tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\ & \quad \times \Gamma^{(n)}(p_i; \bar{g}(\ln \lambda), \bar{m}(\ln \lambda), \nu). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Diese Gleichung ist für unsere Zwecke noch zu kompliziert. Da wir nur an dem führenden Verhalten für $\epsilon \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$ interessiert sind⁴, vernachlässigen

³Hieraus lässt sich für $\epsilon \rightarrow 0$ das bekannte Resultat 3.2 [Mut 87] herleiten.

⁴Wie sich im weiteren Verlauf der Arbeit zeigen wird, liegt eine genauere Rechnung außerhalb unserer Möglichkeiten.

wir die beiden Terme proportional zu $\epsilon \ln \lambda$. Da die QCD zudem eine asymptotisch freie Theorie ist, verschwindet die laufende Kopplung \bar{g} für $\lambda \rightarrow \infty$ und ebenso die laufende Masse \bar{m} . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(\{n\})}(\lambda\{p\}; g_R, m_R, \nu) &\approx \lambda^{d_\Gamma} (\lambda^{-2\epsilon} (\beta_0 g_R^2 \ln(\lambda^2) + 1))^{-\frac{n_G \gamma_G^{(0)} + n_{FP} \gamma_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\ &\quad \Gamma^{(\{n\})}(\{p\}; 0, 0, \nu). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Vertizes der QCD nähern sich bei gleichmäßiger Hochskalierung der Impulse dem Verhalten der Vertizes der *freien* Theorie mit *logarithmischen Modifikationen nicht-ganzer Potenz* an.

Kapitel 3

Nichtperturbative Ansätze

entia praeter necessitatem non sunt multiplicanda.
Wilhelm von Ockham [4]

3.1 Die QCD-Vertizes als Doppelsequenz

Eine wichtige Größe, die sich aus der Analyse der RG-Gleichungen in Kapitel 2 ergibt, ist die RG-invariante Massenskala Λ . Wählen wir für die Renormierung die Impulsskala

$$\lambda = \exp\{t\} = \frac{\sqrt{p^2}}{\nu} \quad (3.1)$$

und betrachten Gleichung 2.19 im Limes $\epsilon \rightarrow 0$, können wir eine neue Impulsskala Λ einführen [Mut 87] durch

$$\bar{g}^2 = \frac{g_R^2}{1 + 2\beta_0 g_R^2 t} = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)} \quad (3.2)$$

mit

$$\Lambda = \nu \exp\left\{-\frac{1}{2\beta_0 g_R^2}\right\}, \quad (3.3)$$

wobei diese funktionale Gestalt von Λ auf 1-Schleifen-Niveau gilt. Es ist jedoch möglich, Beziehung 3.3 zu verallgemeinern [Sti 96], [Dri 97].

Das Besondere dieser RG-invarianten Skala ist, dass sie wegen ihrer funktionalen Abhängigkeit von der Kopplung $\sim e^{-g^{-2}}$ in einer störungstheoretischen Entwicklung in g^2 nicht reproduziert werden kann. Daher kann man g und Λ als unabhängige Größen auffassen und die Störungsreihe systematisch erweitern zu:¹

$$\Gamma(\{p\}, g_R(\nu); \nu) = \lim_{r,s \rightarrow \infty} \left[\Gamma^{[r,0]}(\{p\}, \Lambda) + \sum_{s'=1}^s \left[\frac{g_R(\nu)}{4\pi} \right]^{2s'} \Gamma^{[r,s']}(\{p\}, \Lambda; \nu) \right]. \quad (3.4)$$

¹In der Gleichung steht r für die Approximationsstufe des nichtperturbativ-erweiterten Schemas und s für die Schleifenordnung bezüglich der oberflächlich divergenten Basisvertices.

An die Ansätze für die erweiterten Vertizes stellen wir die folgenden Forderungen:

- Die erweiterten Vertizes gehen im formalen Limes verschwindender Massenskala Λ in die perturbativen vollen Vertizes über:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Gamma^{[r,s]}(\{p\}, \Lambda, \nu) = \Gamma^{p,s}(\{p\}, \nu). \quad (3.5)$$

- Der Divergenzgrad von Schleifenintegralen darf nicht erhöht werden.
- Die nichtperturbativen Vertizes nullter Ordnung gehen bei großen Impulsen in die perturbativen Basisvertizes über:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Gamma^{[r,0]}(\{\lambda p\}, \Lambda) = \Gamma^p(\{\lambda p\}). \quad (3.6)$$

Zudem verlangt man, dass sich die Ansätze für die erweiterten Vertizes in den Dyson-Schwinger-Gleichungen (vgl. Abschnitt 3.3) selbstkonsistent reproduzieren. Wir formulieren dieses hierarchisch gekoppelte Gleichungssystem hier stark vereinfacht ([Dri 97], [DKS 99]) als:

$$\left\{ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \Phi_\Gamma \left[\Gamma^p, \Gamma^{[r,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = \Gamma^{[r,0]} - \Gamma^p + O(g^2(\nu)). \quad (3.7)$$

Damit sich die nullte Ordnung der Theorie selbstkonsistent reproduzieren kann, muss das Funktional Φ_Γ Terme proportional zu g_0^{-2} enthalten. Dies zeigt man, indem man exakte Integraldarstellungen für Λ und die Renormierungskonstante der Kopplung Z_g betrachtet und daraus die folgende Beziehung ableitet:

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right]^{-2\epsilon} = \frac{1}{\beta_0} (1 + O(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon)). \quad (3.8)$$

Hierbei ist insbesondere zu beachten, dass 3.8 in g_0^2 exakt gilt.²

3.2 Ansätze für die erweiterten Vertizes

Wir geben im Folgenden die in dieser Arbeit verwendeten Ansätze für die nichtperturbativ-erweiterten Propagatoren und Vertizes in beliebiger (ungerader) Approximationsstufe an. Da sämtliche Schleifenrechnungen in dieser Arbeit in Landau-Eichung ($\xi = 0$) ausgeführt werden, können wir uns auf die dafür benötigten Terme beschränken. Insbesondere bedeutet dies, dass alle Gluon-Propagatoren rein transversal sind und in Schleifenintegralen keine Vertizes auftreten, die bezüglich innerer Gluonbeine longitudinal sind. Man kann daher ein Dyson-Schwinger-System für Amplituden mit nur transversalen Gluon-Beinen aufstellen. Zudem bleiben in Landau-Eichung der Geist-Propagator $\tilde{D}^{[1,r]}$ und der Geist-Gluon-Vertex $\tilde{\Gamma}_3^{[1,r]}$ rein perturbativ ([Dri 97]).

Mit dem Transversalprojektor

$$t^{\mu\nu}(\vec{p}) = \delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (3.9)$$

können wir die folgenden Definitionen in besonders einfacher Form schreiben.

²Ein entsprechender Beweis ist in [Sti 96] ausgearbeitet.

3.2.1 Erweiterte Propagatoren

- Der Gluon-Propagator

$$\begin{aligned}
 & D^{[r,0]\mu_1\mu_2}_{a_1a_2}(\vec{p}) \\
 &= \delta_{a_1a_2} t^{\mu_1\mu_2}(\vec{p}) \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (p^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(p^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \\
 &= \text{~~~~~} \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Die Pole des Gluon-Propagators sind dabei komplexwertig und jeweils paarweise komplex konjugiert:

$$u_{r,s+} = (u_{r,s-})^*. \quad (3.11)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit benutzen wir die folgende Umbenennung:

$$u_{r,s+} \equiv \hat{u}_{r,2s-1}, \quad (3.12)$$

$$u_{r,s-} \equiv \hat{u}_{r,2s}. \quad (3.13)$$

- Der Fermion-Propagator

$$\begin{aligned}
 S^{[r,0]ij}_f(\vec{p}) &= \delta^{ij} \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} + \kappa_{r,s+}^{(f)})(\not{p} + \kappa_{r,s-}^{(f)})} \\
 &= \text{---} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Auch die Pole des Fermion-Propagators sind komplexwertig³ und paarweise komplex konjugiert:

$$\kappa_{r,s+}^{(f)} = (\kappa_{r,s-}^{(f)})^*. \quad (3.15)$$

Wie oben benutzen wir meistens die Umbenennungen:

$$\kappa_{r,s+}^{(f)} \equiv \hat{\kappa}_{r,2s-1}^{(f)}, \quad (3.16)$$

$$\kappa_{r,s-}^{(f)} \equiv \hat{\kappa}_{r,2s}^{(f)}. \quad (3.17)$$

- Der Geist-Propagator

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{[r,0]}_{a_1a_2}(\vec{p}) &= -\delta_{a_1a_2} \frac{1}{p^2} \\
 &= \text{---} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

³Die Propagatorkoeffizienten κ sind wie \not{p} eigentlich matrixwertig. Strenggenommen müsste man z.B. schreiben: $\kappa_{r,2s}^{(f)} \cdot \mathbf{1}$.

3.2.2 Erweiterte 3-Punkt-Vertizes

- Der Γ_3 -Vertex

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_3^{[r,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3}_{a_1 a_2 a_3} (p_1, p_2, p_3) \\
 = & i f_{a_1 a_2 a_3} t^{\mu_1 \mu'_1} (\vec{p}_1) t^{\mu_2 \mu'_2} (\vec{p}_2) t^{\mu_3 \mu'_3} (\vec{p}_3) \left(\delta^{\mu'_1 \mu'_2} (p_1 - p_2)^{\mu'_3} \right. \\
 & F^{[r,0]} (p_1^2, p_2^2; p_3^2) + \delta^{\mu'_2 \mu'_3} (p_2 - p_3)^{\mu'_1} F^{[r,0]} (p_2^2, p_3^2; p_1^2) \\
 & \left. + \delta^{\mu'_3 \mu'_1} (p_3 - p_1)^{\mu'_2} F^{[r,0]} (p_3^2, p_1^2; p_2^2) \right) \\
 = & \text{Diagramm des } \Gamma_3 \text{-Vertizes}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Hierbei gilt für die Zählerfunktionen $F^{[r,0]}$:

$$\begin{aligned}
 & F^{[r,0]} (p_1^2, p_2^2; p_3^2) \\
 = & \frac{\sum_{k_1 k_2 k_3=0}^r C_{k_1 k_2; k_3} (p_1^2)^{k_1} (p_2^2)^{k_2} (p_3^2)^{k_3} (\Lambda^2)^{3r-(k_1+k_2+k_3)}}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

und für die Vertexparameter wegen der Bose-Symmetrie des Γ_3 -Vertex:

$$C_{k_1 k_2; k_3}^r = C_{k_2 k_1; k_3}^r. \tag{3.21}$$

- Der Fermion-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned}
 & \bar{\Gamma}_3^{[r,0] i_1 i_2 \mu_3}_{f a_3} (-p_1, p_2, p_3) \\
 = & T_{a_3}^{i_1 i_2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s}^f)} \frac{N^{r \mu_3} (\not{p}_1, \not{p}_2, p_3)}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s}^f)} \\
 = & \text{Diagramm des } \bar{\Gamma}_3 \text{-Vertizes}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

mit

$$\begin{aligned}
 N^{r \mu_3} (\not{p}_1, \not{p}_2, p_3) = & \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \sum_{m,n,n'=0}^r (p_3^2)^m \hat{m}_f^{4r-2m-n-n'-\lambda} \\
 & \times (\not{p}_1)^n \bar{C}_{\lambda m n n'}^r \gamma^{\mu_3} (\not{p}_2)^{n'}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Hier muss man fordern, dass Vertexparameter $\bar{C}_{\lambda m n n'}^r$, für die

$$4r - (2m + n + n' + \lambda) < 0 \tag{3.24}$$

ist, verschwinden, damit nicht der unphysikalische Fall einer inversen Fermionmasse im Ansatz für den Vertex auftritt.

- Der Geist-Gluon-Vertex

Wie erwähnt bleibt dieser Vertex in Landau-Eichung ($\xi = 0$) auf 1-Schleifen-Niveau perturbativ:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_3^{[r,0]\mu_3}_{a_1 a_2 a_3}(-p_1, p_2, p_3) &= i f_{a_1 a_2 a_3} p_3^{\mu_3} \\ &= \text{---} \circlearrowleft \tilde{\Gamma}_3 \text{---}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

- Der 4-Gluon-Vertex

Da dieser Vertex erst in 2-Schleifen-Termen zu den in dieser Arbeit behandelten Gleichungen vorkommt, wird er im Rahmen dieser Arbeit nicht benötigt. Weil der Γ_4 -Vertex zudem eine sehr komplizierte Struktur hat, geben wir ihn hier nur graphisch an und verweisen für Details auf [Dri 97] und [DS 99]:

$$\Gamma_4^{[r,0]\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4} = \text{---} \circlearrowleft \tilde{\Gamma}_4 \text{---}. \quad (3.26)$$

3.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen

3.3.1 Die Propagator-Gleichungen

Wir leiten hier nur die Dyson-Schwinger-Gleichung (kurz: DS-Gleichung) für den Geist-Propagator her. Eine ausführliche Herleitung für die beiden anderen Propagator-Gleichungen findet man in [Kuh 97] und [Dri 97].

Der Ausgangspunkt aller Dyson-Schwinger-Gleichungen ist die Beobachtung, dass das Funktionalintegral über eine Funktionalableitung bei geeigneten Randbedingungen verschwindet:

$$0 = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \frac{\delta}{\delta \bar{c}_{b_1}(-q_1)} \exp\{-S_E + j_E\}. \quad (3.27)$$

Setzen wir darin die Gleichungen 1.19 und 1.20 für die Fourierdarstellungen von S_E und j_E ein, können wir die Ableitung ausführen und wegen der sich ergebenden δ -Funktion eine Impulsintegration direkt vornehmen. Dann ersetzen wir das Geist-Feld c im Integral durch eine Ableitung nach den Quellen gemäß

$$c_{a_2}(q) = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{\delta}{\delta \bar{J}_{ca_2}(-q)} \quad (3.28)$$

und ziehen die verbleibenden Ableitungen aus dem Funktionalintegral heraus, so dass wir mit Gleichung 1.12 erhalten:

$$\begin{aligned} 3.27 &= \left[\tilde{\Gamma}_{2 b_1 a_2}^p(-q_1, q_1) \frac{\delta}{\delta \bar{J}_{ca_2}(-q_1)} + g_0 \nu_0^\epsilon \int d^D p_2 \tilde{\Gamma}_{3 b_1 a_2 a_3}^p \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\delta}{\delta \bar{J}_{ca_2}(-p_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_2 - q_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} J_{\bar{c} b_1}(q_1) \right] \exp\{W_E[J, J_{\bar{c}}, \bar{J}_c, \eta, \bar{\eta}]\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Leitet man diesen Ausdruck nun noch nach

$$\frac{\delta}{\delta J_{\bar{e}b_2}(q_2)} \quad (3.30)$$

ab, so findet man mit Definition 1.35, Nullsetzen der Quellfelder und ohne die Deltafunktion $\delta(q_2 - q_1)$:

$$\begin{aligned} -\delta_{b_1 b_2} &= \tilde{\Gamma}_{2 b_1 a_2}^p(q_1) \tilde{D}_{a_2 b_2}(q_1) \\ &\quad + g_0 \nu_0^\epsilon \int d^D p_2 \tilde{\Gamma}_{3 b_1 a_2 a_3}^{p \mu_3}(p_2 - q_1) \tilde{G}_{3 a_2 b_2 a_3}^c(-p_2, q_1, p_2 - q_1). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituiert man nun Gleichung 1.37 und 1.40, erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{2 b_1 b_2}(q_1) &= \tilde{\Gamma}_{2 b_1 b_2}^p(q_1) + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d^D p_2 \tilde{\Gamma}_{3 b_1 a_2 a_3}^{p \mu_3}(p_2 - q_1) \\ &\quad \times \tilde{D}_{a_2 a'_2}(p_2) D_{a_3 a'_3}^{\mu_3 \mu'_3}(p_2 - q) \tilde{\Gamma}_{3 a'_2 b_2 a'_3}^{\mu'_3}(-p_2, q_1, p_2 - q_1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

In graphischer Notation lauten die DS-Gleichungen für die drei Propagatoren der QCD:

Der Geist-Propagator

$$-\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{-->} \end{array} \right]^{-1} = -\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{-->} \end{array} \right]^{-1} + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{-->} \end{array} \circledcirc \tilde{\Gamma}_3 \quad (3.33)$$

Der Fermion-Propagator

$$-\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{-->} \end{array} \right]^{-1} = -\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{-->} \end{array} \right]^{-1} + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{-->} \end{array} \circledcirc \bar{\Gamma}_3 \quad (3.34)$$

Der Gluon-Propagator

$$\begin{aligned} -\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]^{-1} &= -\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]^{-1} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \circledcirc \Gamma_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \circledcirc \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \circledcirc T_4 \end{aligned}$$

$$-g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \quad \text{loop} \\ -g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \sum_f \quad \text{self-energy} \quad (3.35)$$

Aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen der Propagatoren bei noch nicht auf Null gesetzten Quellen erhält man durch weitere Ableitung nach den Quellfeldern die Gleichungen für die höheren Vertizes (vgl. z.B. [Kuh 97]).

3.3.2 Die Vertex-Gleichungen

Der $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Geist-Kanal

Durch Ableitung von 3.29 nach den Quellen des Eichfeldes, J , erhält man nach Nullsetzen der Quellfelder die Gleichungen für den $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Geist-Kanal:

$$\tilde{\Gamma}_3 = \text{bare vertex} + g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \quad \text{loop with } \tilde{T}_{4t} \quad . \quad (3.36)$$

Der $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Gluon-Kanal

Stellt man die zu 3.27 analoge Gleichung mit einer Funktionalableitung nach dem Gluon-Feld auf und führt danach je eine Ableitung nach der Quelle des Geist- und des Antigeist-Quellfeldes aus, so erhält man nach Nullsetzen aller Quellen die folgende Gleichung für den $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Gluon-Kanal:

$$\tilde{\Gamma}_3 = \text{bare vertex} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \quad \text{loop with } \tilde{T}_{4s} \\ + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^4 \epsilon \quad \text{loop with } \tilde{T}_{3,2} \\ - g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \quad \text{loop with } \tilde{T}_{2,2s} \\ - g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \sum_f \quad \text{loop with } \tilde{T}_{2,f,2s} \quad . \quad (3.37)$$

Der $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Fermion-Kanal

Aus der zu 3.29 analogen Gleichung, die durch funktionale Ableitungen nach dem Antifermion-Feld und der Fermion-Quelle entsteht, ergibt sich durch eine weitere Funktionalableitung nach den Quellen des Gluon-Feldes und Nullsetzen aller Quellen:

$$\bar{\Gamma}_3 = \text{bare vertex} + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{loop diagram with } \bar{T}_{4t}. \quad (3.38)$$

Der $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Gluon-Kanal

Analog zum Vorgehen in 3.37 (man ersetzt die funktionalen Ableitungen nach der Geist- und Antigeist-Quellen durch die Ableitungen nach den Fermion- und Antifermion-Quellen) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_3 &= \text{bare vertex} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{loop diagram with } \bar{T}_{4s} \\ &\quad + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{loop diagram with } \bar{T}_{3,2} \\ &\quad - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{loop diagram with } T_{2,2fs} \\ &\quad - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{loop diagram with } \bar{T}_{2,2s}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Der Γ_3 -Vertex

Leitet man die für den Gluon-Propagator zu 3.29 analoge Gleichung vor Nullsetzen der Quellen noch zwei Mal nach den Quellfeldern des Eichfeldes funktional ab und setzt erst danach alle Quellen auf Null, so ergibt sich als Dyson-Schwinger-Gleichung des Γ_3 -Vertex:

$$\Gamma_3 = \text{bare vertex} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{loop diagram with } T_{4s}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{ (loop diagram)} . \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Der Γ_4 -Vertex

Aus der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Γ_3 -Vertex vor Nullsetzen der Quellen erhält man durch erneutes funktionales Ableiten nach der Gluon-Quelle J die entsprechende Gleichung für den Γ_4 -Vertex. Setzt man dann alle Quellfelder auf Null, findet man:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_4 &= \text{ (loop diagram)} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} + 2 \text{ zykl. Perm. } (2, 3, 4) \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{ (loop diagram)} . \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Wir haben damit die Dyson-Schwinger-Gleichungen für die sieben oberflächlich divergenten Vertizes der QCD notiert. Diese Gleichungen zeigen exemplarisch die *hierarchische* Struktur des Dyson-Schwinger-Systems, i.e. die dynamische Kopplung aller Vertizes an die jeweils nächsthöheren.

3.4 Schattenpole

Bei der Skelettgraphenzerlegung voller T -Amplituden, wie sie z.B. in den obigen Gleichungen vorkommen, stößt man auf das Problem, dass, bedingt durch die Struktur der nichtperturbativ-erweiterten Ansätze in Abschnitt 3.2, auf den inneren Linien der Schleifengraphen über die dort definierten eigentlichen Propagatorpole hinaus noch zusätzliche, aus den vollen Vertizes stammende Pole, verbleiben. Dies würde zu einem offensichtlichen Widerspruch zu den Propagatoransätzen führen und Selbstkonsistenzgleichungen könnten nicht sinnvoll aufgestellt werden. In [DKS 99] und [DS 99] wurde mit dem Mechanismus der *kompensierenden Pole* für den nichtperturbativ-erweiterten Ansatz gezeigt, dass die aus den Mandelstam-Polen der Vertizes stammenden Beiträge diese unphysikalischen Pole gerade beseitigen. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung eines schon in [JJ 73] und [CN 73] bei der Behandlung abelscher Modelle beobachteten Zusammenhangs. Folgend [Kuh 97] illustrieren wir dies am Beispiel des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex.

Das Residuum dieses Vertex notieren wir graphisch als:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagramm eines } \bar{\Gamma}_3\text{-Vertices} = \left[(\not{p} + \kappa_{r,2t}^{(f)}) \rightarrow \bar{\Gamma}_3 \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}^{(f)}} \\
 & \stackrel{3.38}{=} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left[(\not{p} + \kappa_{r,2t}^{(f)}) \rightarrow \bar{T}_{4t} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}^{(f)}}, \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung als Bedingung an die Struktur des s-Kanals von \bar{T}_{4s} verstanden werden muss. Man kann nun zeigen, dass hieraus und mit der entsprechenden Gleichung für den Fermionpropagator folgt [Kuh 97]:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagramm eines } \bar{\Gamma}_3\text{-Vertices} \\
 & = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left[\text{Schleifenintegral} - (\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \text{Diagramm} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}^{(f)}}. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Hieran erkennt man, dass die Entwicklung kompensierender Pole notwendig an Schleifenintegrale gekoppelt ist. Man definiert dann als diagrammatische Repräsentation eines Schattenpols in einem 1-Teilchen-Austauschdiagramm:

$$\text{Diagramm eines Schattenpols} = \sum_{t=1}^r \frac{-(\kappa_{2,2t+1}^{(f)})^{-2}}{\not{p} + \kappa_{r,2t}^{(f)}}. \quad (3.44)$$

Nun definiert man noch einen *entschärften* Austauschgraphen durch:

(3.45)

Analoge Gleichungen kann man für alle 1-Teilchen-Austauschgraphen und allgemein für alle Vertizes des nichtperturbativ-erweiterten Ansatzes notieren und damit, wie in [DKS 99] und [DS 99] gezeigt wurde, alle unphysikalischen Pole aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen entfernen.

3.5 Bethe-Salpeter-Resummation

Die Technik der Bethe-Salpeter-Resummation wurde schon in [Kuh 97] an einem einfachen Beispiel vorgestellt. Allerdings wurde dort auf die Möglichkeit, diese Technik auf alle 3-Punkt- und 4-Punkt-Basisvertices der QCD zu übertragen, nicht weiter eingegangen. Wir geben hier erstmals ein für diese Vertizes tragfähiges und einheitliches Resummationsschema an.

Durch Reduzibilitätsanalyse der T -Amplituden in den Dyson-Schwinger-Gleichungen erhält man die sogenannten Bethe-Salpeter-Gleichungen, die in Anhang C ausführlich besprochen werden. Wesentliches Merkmal dieser Gleichungen ist die Konstruktion geeigneter Bethe-Salpeter-Kerne, in dieser Arbeit durch die Bezeichnung K und viereckige Vertizes notiert, die gegenüber den vollen Vertizes ein höheres Maß an Irreduzibilität im horizontalen Impulskanal aufweisen. Wir zeigen im Folgenden, dass es zur Resummation *aller* Basisvertices genügt, für die Konstruktion der Bethe-Salpeter-Kerne *2-Teilchen- und zusätzlich 3-Gluonlinien-Irreduzibilität im horizontalen Kanal* zu verlangen. In dem man die Bethe-Salpeter-Gleichungen und die in Abschnitt 3.3 vorgestellten DS-Gleichungen kombiniert, kann man in den Schleifengraphen der Dyson-Schwinger-Gleichungen den linken perturbativen durch einen vollen Vertex ersetzen. Dies ermöglicht es im Rahmen des nichtperturbativ-erweiterten Ansatzes, auf 1-Schleifen-Niveau zusätzliche und verbesserte Selbstkonsistenzgleichungen aufzustellen. Für die Diskussion der logarithmischen Modifikationen werden die resummierten DS-Gleichungen einen wichtigen Hinweis zur Konsistenz der modifizierten Feynmanregeln liefern. Weil sie es aber überdies ermöglichen, schon in niedrigen Schleifenordnungen Beiträge aus allen (perturbativen) Schleifenordnungen der DS-Gleichungen zu berechnen, sind sie auch darüber hinaus interessant.

Wir führen nun am Beispiel der Dyson-Schwinger-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex die Bethe-Salpeter-Resummation vor.

3.5.1 Fermion-Kanal

Mit der in C.1 angegebenen Bethe-Salpeter-Gleichung von \bar{T}_{4t} im Fermion-Kanal erhält man aus Gleichung 3.38:⁴

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_3 &= -g_0^2 \nu_0^2 \epsilon + g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. + \times \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \\
 &= \text{---} + g_0^2 \nu_0^2 \epsilon \left(\bar{\Gamma}_3 + \bar{K}_{4t} \right) \text{---}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

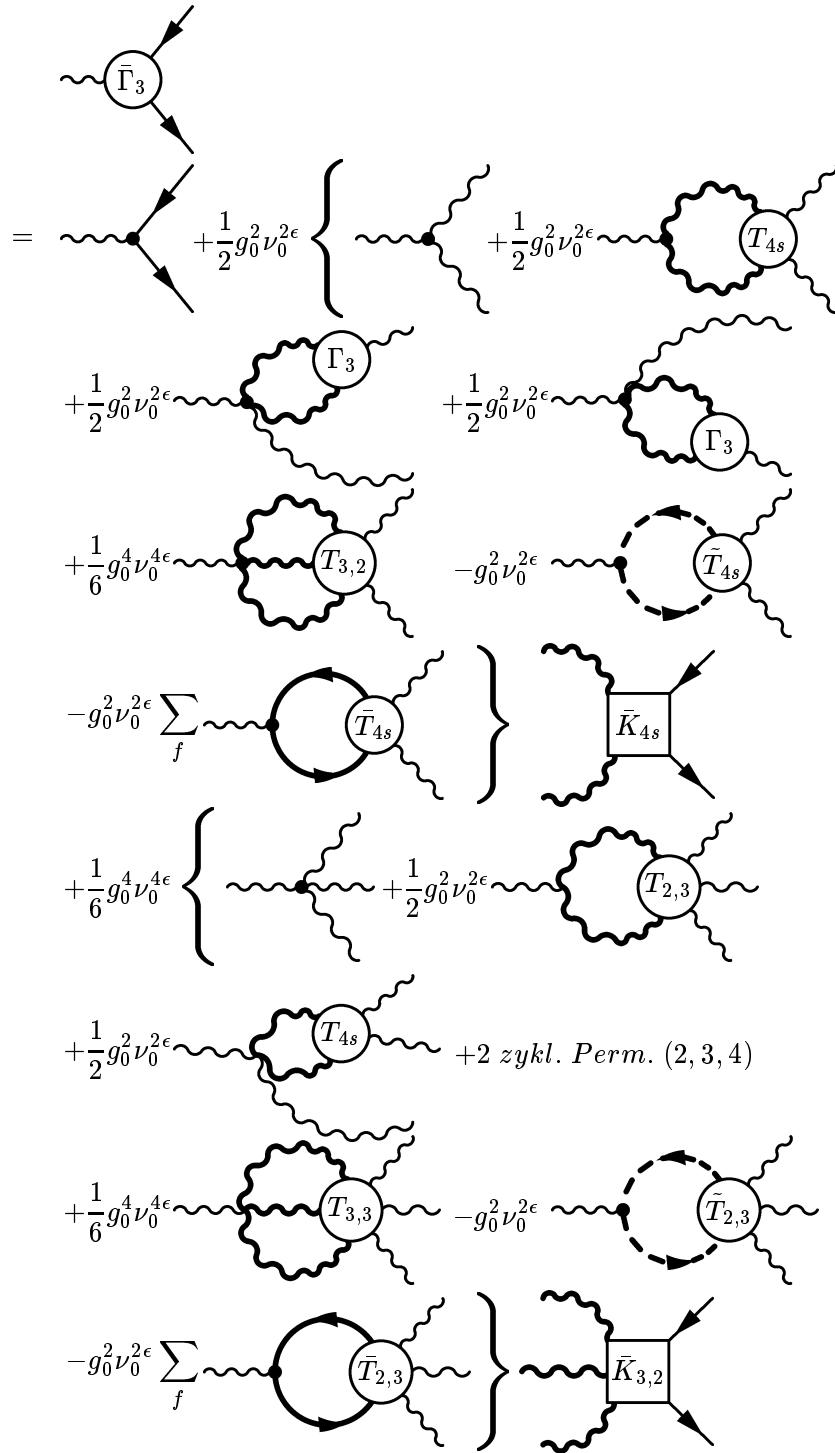
Vergleicht man diese Gleichung mit der ursprünglichen Form der DS-Gleichung in 3.38, stellt man fest, dass in dem einzigen Schleifengraphen der linke perturbative durch einen vollen $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex ausgetauscht wurde. Zugleich steht anstatt der im horizontalen Kanal 1-Teilchen-irreduziblen \bar{T}_{4t} -Amplitude der im horizontalen Kanal zusätzlich 2-Teilchen-irreduzible⁵ \bar{K}_{4t} -Kern. Dies ist aus zwei Gründen bemerkenswert: Zum einen enthält der Bethe-Salpeter-Kern wegen der verschärften Irreduzibilitätsbedingungen eine gegenüber der \bar{T}_{4t} -Amplitude geringere Menge an Graphenklassen, so dass man bei Rechnungen auf n-Schleifen-Niveau weitaus weniger Graphen betrachten muss, zum anderen werden durch die Bethe-Salpeter-Resummation Beiträge aus allen Ordungen in g^2 schon in 1-Schleifen-Näherung zugänglich. Für $\tilde{\Gamma}_3$ im Geist-Kanal findet man eine analoge Gleichung.

⁴Diese Gleichung wurde schon in [Kuh 97] bewiesen.

⁵Im t-Kanal ist dies mit der oben gegebenen Reduzibilitätsbedingung für die Bethe-Salpeter-Kerne äquivalent. Kein Beitrag zu \bar{K}_{4t} kann 3-Gluonlinien-reduzibel im t-Kanal sein, da dies gegen die Erhaltung der Fermion-Zahl verstieße.

3.5.2 Gluon-Kanal

Setzen wir in Gleichung 3.39 die in Anhang C gegebenen Zerlegungen der T -Amplituden ein und ordnen die Terme um, so finden wir:



The diagram shows six horizontal rows of Feynman-like diagrams. Each row consists of two diagrams connected by a brace. The top row has a brace on the left. The second row from the bottom has a brace on the right. The other four rows have braces in the center.

- Top row:** Left diagram: A wavy line enters a vertex, which then splits into two paths. The left path goes to a circle labeled \tilde{T}_{4s} . The right path goes to another circle labeled \tilde{T}_{4s} . Right diagram: A wavy line enters a circle labeled \tilde{T}_{4s} , which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled \tilde{T}_{4s} .
- Second row from bottom:** Left diagram: A wavy line enters a circle labeled $\tilde{T}_{3,2}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled $\tilde{T}_{2,2s}$. Right diagram: A wavy line enters a circle labeled $\tilde{T}_{2,2s}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled $\tilde{T}_{2,2s}$.
- Third row from bottom:** Left diagram: A wavy line enters a circle labeled $\tilde{T}_{2_f,2s}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a square labeled $K_{2,2f}$. Right diagram: A wavy line enters a square labeled $K_{2,2f}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled $\tilde{T}_{2_f,2s}$.
- Fourth row from bottom:** Left diagram: A wavy line enters a circle labeled \tilde{T}_{4s} , which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled \tilde{T}_{4s} . Right diagram: A wavy line enters a circle labeled \tilde{T}_{4s} , which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled \tilde{T}_{4s} .
- Fifth row from bottom:** Left diagram: A wavy line enters a circle labeled $\tilde{T}_{3,2}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled $T_{2,2fs}$. Right diagram: A wavy line enters a circle labeled $T_{2,2fs}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled $T_{2,2fs}$.
- Sixth row from bottom:** Left diagram: A wavy line enters a circle labeled $\tilde{T}_{2,2s}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a square labeled $\bar{K}_{2,2}$. Right diagram: A wavy line enters a square labeled $\bar{K}_{2,2}$, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled $\tilde{T}_{2,2s}$.

(3.47)

Wie man hier sieht, ergeben sich in den geschweiften Klammern genau die DS-Gleichungen der 3-Punkt- und 4-Punkt-Vertizes, die in den Gleichungen 3.37, 3.39, 3.40 und 3.41 vorgestellt wurden. Besonders bemerkenswert ist dabei, dass sogar die in den DS-Gleichungen für den Γ_3 - bzw. Γ_4 -Vertex vorkommenden Graphen, bei denen ein *rechtes* Gluon-Bein in einen perturbativen Γ_3^p - bzw. Γ_4^p -Vertex einläuft, reproduziert werden. Damit können wir die resummierte Form der DS-Gleichung für den $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Gluon-Kanal notieren:

The diagram shows the resummed form of the DS-Gleichung for the $\bar{\Gamma}_3$ vertex. It consists of two parts separated by an equals sign (=).

- Left part:** A wavy line enters a circle labeled $\bar{\Gamma}_3$, which then splits into two paths.
- Right part:** A wavy line enters a vertex, which then splits into two paths. The left path goes to a wavy line. The right path goes to a circle labeled Γ_3 , which is connected to a square labeled \bar{K}_{4s} by a wavy line.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{---} \Gamma_4 \text{---} \square K_{3,2} \text{---} \rightarrow \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{---} \bar{\Gamma}_3 \text{---} \square K_{2,2f} \text{---} \rightarrow \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{---} \bar{\Gamma}_3 \text{---} \square K_{2,2} \text{---} \rightarrow . \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

Wie schon betont, sind die hier auftretenden Bethe-Salpeter-Kerne 1-Teilchen-2-Teilchen *und* 3-Gluonlinien-irreduzibel im horizontalen Kanal. Auch in dieser Gleichung konnten wir die linken perturbativen Vertizes der Schleifengraphen durch die entsprechenden vollen Vertizes ersetzen. Ansonsten gelten die schon zur Gleichung im Fermion-Kanal gemachten Anmerkungen auch für diesen Fall. Für $\bar{\Gamma}_3$, Γ_3 und Γ_4 lassen sich analoge Gleichungen formulieren. Dabei findet man jedoch in den Gleichungen für den Γ_3 - und Γ_4 -Vertex zusätzlich Terme, die *nicht* resummiert werden können. Es handelt sich dabei um die Graphen in der zweiten Zeile von 3.40 bzw. 3.41, bei denen jeweils ein rechtes Gluonbein in einen perturbativen Γ_4^p -Vertex läuft. Ebenso wie die Propagator-Gleichungen können diese Terme mit dem vorgestellten Resummationsschema prinzipiell nicht behandelt werden und bleiben daher unverändert. Zudem unterscheiden sich diese Graphen dadurch von den anderen Beiträgen zu den DS-Gleichungen, dass die in ihnen auftretenden vollen Amplituden von besonders einfacher Struktur und insbesondere linear in dem linken (zu bestimmenden) Vertex der DS-Gleichung sind.⁶

Diese Ergebnisse sind eine weitere Anmerkung wert. In [BL 77] konnten mit den Ward-Takahashi-Identitäten⁷ der QCD ähnliche Darstellungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen gefunden werden, die das Problem der sogenannten *überlappenden Divergenzen* lösten, welches eine der Schwierigkeiten beim Beweis der Renormierbarkeit der QCD darstellte.⁸ Für die Herleitung der oben vorgestellten DS-Gleichungen werden die Ward-Takahashi-Identitäten jedoch gerade *nicht* benötigt. Ebenso fehlt in der zitierten Arbeit jeder Verweis auf die *besondere Art der Irreduzibilität*, die wir für die Konstruktion der Bethe-Salpeter-Kerne fordern mussten. Weil Baker und Lee überdies erweiterte Reduzibilitätsbedingungen auch für den vertikalen und diagonalen Kanal der Vertizes stellen, ist der Autor dieser Arbeit der Auffassung, dass die Resultate nicht äquivalent sind. Ein genauerer Vergleich wäre zwar wünschenswert, kann aber im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden.

⁶In der Tat enthalten die unresummierbaren Graphen für den Γ_3 -Vertex nur diesen selbst und die unresummierbaren Graphen für den Γ_4 -Vertex die T_{4s} -Amplitude. Die T_{4s} -Amplitude zerfällt aber nach den Gleichungen B.1 und 1.43 in den Γ_4 -Vertex und zwei 1-Teilchen-Austauschgraphen der Form $\Gamma_3 D \Gamma_3$. Damit bleiben die nichtresummierbaren Graphen notwendig 1-Schleifen-Graphen.

⁷Für eine Erklärung dieses Begriffes siehe z.B. [Kug 97].

⁸Da es starke Hinweise darauf gibt, dass die Ward-Takahashi-Identitäten im nichtperturbativ-erweiterten Ansatz verletzt sind [Ewe 00], ist es fraglich, ob man die von Baker und Lee erhaltenen Ergebnisse unmodifiziert übernehmen könnte.

3.6 Schattenreduzierte Dyson-Schwinger-Gleichungen

Mit den in Abschnitt 3.4 definierten gepunkteten Linien kann man einen neuen Reduzibilitätsbegriff einführen.

Da zwischen vollen Vertizes nur noch gepunktete (also auf ihre physikalischen Anteile beschränkte) Linien vorkommen dürfen, fordert man statt der üblichen Irreduzibilität jetzt Irreduzibilität bezüglich der Teilchen- und Schattenlinien. Analog zu Abschnitt 3.5 fordert man für die Konstruktion der *schattenreduzierten* Bethe-Salpeter-Kerne 2-Teilchen- und zusätzlich 3-Gluonlinien-Irreduzibilität bezüglich Teilchen- und Schattenlinien. Diese neuen Kerne werden durch quadratische Vertizes mit einer Doppellinie und bei Bedarf durch die Beschriftung K^{sr} kenntlich gemacht. Analysiert man die in Anhang B definierten T -Amplituden mit diesem neuen Reduzibilitätsbegriff, so stellt man fest, dass sich zu den Gleichungen in Anhang C analoge Beziehungen ergeben, lediglich mit dem Unterschied, dass nun alle inneren vollen Propagatorlinien gepunktet sind. Damit kann man sämtliche Schritte in der Rechnung zu 3.46 und 3.48 nachvollziehen und so die schattenreduzierte und resummierte Form der Dyson-Schwinger-Gleichungen erhalten. Wie im vorigen Abschnitt benutzen wir die besonders einfache Gleichung für den $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex zur Illustration unseres Argumentes.

Der $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Fermion-Kanal

Zerlegt man \bar{T}_{4t} im t-Kanal (wie in Gleichung B.5 definiert) bezüglich *gepunkteter* Linien (also sowohl teilchen- als auch schattenirreduzibel), erhält man:

$$\bar{T}_{4t} = \bar{K}_{4t}^{sr} + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{(loop term)} \quad (3.49)$$

Hierbei ist besonders zu beachten, dass der in der Entwicklung von T_{4t} eigentlich vorkommende einfache Schattenpol auf der rechten Seite der Gleichung nicht mehr manifest sondern im Schleifenterm verborgen ist. Der Term

$$\text{(loop term)} \quad (3.50)$$

ist wegen der Beziehung

$$\text{(loop term)} = g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{(vertex correction diagram)} \quad (3.51)$$

$$= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} , \quad (3.51)$$

die sich als Dyson-Schwinger-Gleichung für den Schattenpol-Anteil durch Partialbruchzerlegung von 3.46 ergibt,⁹ im Schleifengraphen von Gleichung 3.49 schon enthalten, da der Graph 3.50 nach Konstruktion Bestandteil von \bar{T}_{4t} ist.

Bei dem Mechanismus der kompensierenden Pole handelt es sich um ein Schema zur Entfernung unphysikalischer Pole von inneren Propagatorlinien. Wendet man dieses Verfahren auf Propagatorlinien ohne unphysikalische Pole an, liefert es die Identität.¹⁰ Daher kann man widerspruchsfrei auch in einen *perturbativen* Vertex einlaufende innere Propagatorlinien punktieren. Wir illustrieren das Argument mit dem folgenden Beispiel:

$$. \quad (3.52)$$

Wir beweisen nun die folgende Identität für den $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Fermion-Kanal:¹¹

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_3 = \dots + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \bar{T}_{4t} \\ & \stackrel{3.49}{=} \dots + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \dots + g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \dots \\ & \stackrel{3.38}{=} \dots + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

⁹In dieser Gleichung ist kondensiert eine Behandlung der Gleichung 3.46 mit dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Mechanismus der kompensierenden Pole zusammengefasst. Ein Residuenvergleich an den aus den Mandelstam-Variablen stammenden Schattenpolen liefert dann diese DS-Gleichung für den „Schattenvertex“.

¹⁰Genauer formuliert: Die sogenannten Schattenpole stammen aus den Mandelstam-Polen der vollen Vertizes. Die Koeffizienten der perturbativen Vertizes in den Mandelstam-Polen sind Null. Daher entwickeln sich durch den Mechanismus der kompensierenden Pole auf diesen Linien gerade *keine* zusätzlichen Beiträge.

¹¹Diese Rechnung findet sich schon in [Kuh 97].

Damit ist gezeigt, dass die hier geforderte, auf Schattenpole erweiterte Reduzibilität sich in ihren Auswirkungen auf die Bethe-Salpeter-Resummation von der gewöhnlichen Reduzibilität nicht unterscheidet.

Weil sich für den Gluon-Kanal aus 3.39 eine zu 3.51 analoge Gleichung ergibt, die alle vier Schleifengraphen enthält,¹² und man die entsprechenden Gleichungen auch für alle anderen „Schattenvertices“ formulieren kann, ist das hier vorgestellte Verfahren auf die verbleibenden DS-Gleichungen übertragbar. Wir geben nun ohne weitere Rechnung die restlichen Dyson-Schwinger-Gleichungen für die Basisvertices der QCD in schattenpol-reduzierter und resummierte Form an.

Der $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Gluon-Kanal

$$\begin{aligned}
 & \bar{\Gamma}_3 = \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{(loop with wavy line and square)} \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{(more complex loop with wavy line and square)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{(loop with dashed line and square)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{(loop with wavy line and square)}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Der $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Geist-Kanal

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\Gamma}_3 = \\
 & + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{(loop with wavy line and square)}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

¹²Die entsprechende Gleichung ist als Gleichung C.8 im Anhang notiert.

Der $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex im Gluon-Kanal

$$\begin{aligned}
 &= +\frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 &+ \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{ (more complex loop diagram)} \\
 &- g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 &- g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{ (sum over } f \text{ loop diagram)}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Der Γ_3 -Vertex

$$\begin{aligned}
 &= +\frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 &+ \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 &+ \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{ (more complex loop diagram)} \\
 &- g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (loop diagram)} \\
 &- g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{ (sum over } f \text{ loop diagram)}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Wie auch in Anhang C bei der Herleitung der Bethe-Salpeter-Gleichungen für die 4-Punkt-Amplituden betont, unterscheidet sich der schattenreduzierte BS-Kern K_{4s}^{sr} von den anderen, in dieser Gleichung vorkommenden BS-Kernen, fundamental. Während aus den anderen Kernen nur die Austauschgraphen zur Reproduktion der nullten Ordnung auf 1-Schleifen-Niveau beitragen können, enthält K_{4s}^{sr} zusätzlich einen die Bose-Symmetrie verletzenden Anteil des Γ_4 -Vertex. Weitere Ausführungen zu dieser Bethe-Salpeter-Amplitude finden sich in der Diskussion von Gleichung C.3 im Anhang.

Der Γ_4 -Vertex

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram of } \Gamma_4 \text{ vertex} \\
 = & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (Diagram with loop, 2 dots)} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (Diagram with loop, 3 dots)} + 2 \text{ zykl. Perm. (2, 3, 4)} \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{ (Diagram with loop, 4 dots)} - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{ (Diagram with loop, 3 dots)} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{ (Diagram with loop, 2 dots)}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Wie schon in Abschnitt 3.4 erwähnt, verbleiben in den Gleichungen für die gluonischen Vertizes die Graphen mit einem rechten äusseren Impuls, der in einen perturbativen Γ_4^p -Vertex einläuft, unresummiert. Abschließend bleibt noch zu erwähnen, dass diese Resultate nicht von einer bestimmten Wahl für den Eichparameter ξ abhängen und daher auch außerhalb der Landau-Eichung gelten. Ebenso haben wir in den letzten Abschnitten keinen Gebrauch von der besonderen Form der gebrochen rationalen Approximanten gemacht. Deshalb sollten die hier hergeleiteten Ergebnisse auch für die im nächsten Kapitel vorgestellten logarithmisch modifizierten Vertizes gelten, da die logarithmischen Modifikationen am Mechanismus der kompensierenden Pole nichts ändern können.

Kapitel 4

Modifizierte Feynmanregeln

pedo mellon a minno.
Tolkien [5]

4.1 Die Herkunft der logarithmischen Modifikationen

In Kapitel 2 haben wir aus der Renormierungsgruppe in erster Näherung in g^2 ein Skalierungsverhalten gemäß

$$\Gamma(\lambda) \sim \lambda^{d_\Gamma} (\ln \lambda^2)^{\frac{\gamma}{2\beta_0}} \quad (4.1)$$

gefunden. Nach Weinbergs Theorem gilt jedoch bei Skalierung von Vertizes mit einem Faktor λ [Col 84]:

$$\Gamma(\lambda) \sim \lambda^{d_\Gamma} (\text{Polynom in } \ln \lambda). \quad (4.2)$$

Formulieren wir dies z.B. für den inversen Gluon-Propagator, so erhalten wir:

$$\Gamma_2 = -k^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_R^{2n} T_n (k^2/\nu^2), \quad (4.3)$$

wobei $T_0 = 1$ gilt. Wir vernachlässigen nun in der RG-Gleichung 2.1 die indirekten Abhängigkeiten der RG-Funktionen von ν . Damit ist insbesondere die renormierte Kopplung g_R von ν unabhängig und wird als Konstante betrachtet. Dieses Vorgehen ist dadurch gerechtfertigt, dass wir im Folgenden nur die explizite Abhängigkeit der Koeffizienten T_n von ν bestimmen wollen.¹ Dann erhalten wir durch Differentiation mit $\frac{\partial}{\partial \ln \nu}$ für den Koeffizienten von g_R^{2n} in obiger Entwicklung:

$$\frac{\partial}{\partial \ln \nu} T_n = [2\gamma_G(g_R) - \beta(g_R)\partial_{g_R}] \sum_{n'=0}^{n-1} g_R^{2n'} T_{n'}. \quad (4.4)$$

¹Wir folgen der Argumentation in [Col 84].

Weil die anomale Dimension $O(g_R^2)$ und die β -Funktion $O(g_R^3)$ sind, ist die Ableitung des n-ten Koeffizienten vollständig durch die Koeffizienten mit niedrigerem n bestimmt. Die Integration dieser Gleichung liefert dann:

$$T_n = c_0^{(n)} + \sum_{n'=0}^{n-1} [2\gamma(g_R) - \beta(g_R)\partial_{g_R}]g_R^{2n'} \int_0^{\ln \nu} d\ln \nu' T_{n'} (k^2/\nu^2). \quad (4.5)$$

Iteriert man dies, kann man T_n auf n Integrationskonstanten und ein Integral über T_0 zurückführen. Die Lösung des verbliebenen Integrals liefert dann den noch fehlenden Logarithmus, so dass man T_n als Polynom n-ten Grades in $\ln \nu$ schreiben kann:

$$T_n = \sum_{l=0}^n c_l^{(n)} \left[\ln \frac{k^2}{\nu^2} \right]^l. \quad (4.6)$$

Die Terme dieser Reihe kann man geeignet mit der Größe $L = n - l$ klassifizieren. $L = 0$ gibt dann z.B. immer den Logarithmus mit der höchsten Potenz (den sogenannten *leading logarithm*) für ein bestimmtes n an.

An dieser Stelle muss man betonen, dass die Koeffizienten der Logarithmen nicht aus der Analyse der RG-Gleichung folgen, sondern durch explizite Berechnung der entsprechenden Terme in n-Schleifen-Näherung bestimmt werden müssen. Schreibt man Gleichung 4.3 explizit aus, erhält man:²

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= -k^2 \left[1 + g_R(\nu)^2 \left(c_0^{(1)} + c_1^{(1)} \ln \frac{k^2}{\nu^2} \right) \right. \\ &\quad + g_R(\nu)^4 \left(c_0^{(2)} + c_1^{(2)} \ln \frac{k^2}{\nu^2} + c_2^{(2)} \ln^2 \frac{k^2}{\nu^2} \right) \\ &\quad \left. + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dies kann man mit der Taylor-Entwicklung des sich aus der Lösung der 't Hooft-Weinberg-Gleichung ergebenden Terms

$$\begin{aligned} &\left[1 + \beta_0 g(\nu)^2 \ln \frac{k^2}{\nu^2} \right]^{\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\ &= 1 + \frac{\gamma_G^{(0)}}{2} g(\nu)^2 \ln \frac{k^2}{\nu^2} + \frac{\gamma_G^{(0)}(\gamma_G^{(0)} - 2\beta_0)}{8} g(\nu)^4 \ln^2 \frac{k^2}{\nu^2} + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

vergleichen (s. Gleichung 2.24). Wie man durch Koeffizientenvergleich erkennt, stellt die Lösung der 't Hooft-Weinberg-Gleichung eine exakte Resummation der *leading-log*-Terme der perturbativen Berechnung auf 1-Schleifen-Niveau dar. Umgekehrt folgt aus dieser Betrachtung, dass es bei Berechnungen auf 1-Schleifen-Niveau hinreichend ist, nur die führenden Logarithmen zu betrachten.

²Hier darf man sich (wieder) daran erinnern, dass die in den Gleichungen vorkommende Kopplung $g_R(\nu)$ abhängig von der Renormierungsskala ist. Wir haben damit die in 4.4 vernachlässigten indirekten Abhängigkeiten der renormierten Größen von ν formal wieder eingeführt.

4.2 Gestalt der logarithmischen Modifikationen

In Kapitel 2 hatten wir die logarithmischen Modifikationen bei gleichmäßiger Skalierung der Impulse mit einem dimensionslosen Faktor λ hergeleitet. In diesem Kapitel wollen wir die logarithmischen Modifikationen als Korrekturen für große Impulse in die Vertexansätze integrieren, da die in Kapitel 3 vorgestellten Ansätze für die Basisvertices dieses logarithmische Skalierungsverhalten *nicht* zeigen. Dazu setzen wir in 2.24

$$\lambda = \frac{k}{\nu}, \quad (4.9)$$

wobei k hier zunächst ein beliebiger Impuls des Vertex ist. Weil wir nur auf 1-Schleifen-Niveau rechnen, können wir Gleichung 3.3 benutzen und in dem Argument des Logarithmus die Renormierungsskala ν durch die invariante Massenskala Λ ersetzen:

$$\begin{aligned} 1 + \beta_0 g_R^2 \ln \frac{k^2}{\nu^2} &= \beta_0 g_R^2 \left[\frac{1}{\beta_0 g_R^2} + \ln \frac{k^2}{\nu^2} \right] \\ &= \beta_0 g_R^2 \ln \left[\exp \left\{ \frac{1}{\beta_0 g_R^2} \right\} \frac{k^2}{\nu^2} \right] \\ &\stackrel{3.3}{=} \beta_0 g_R^2 \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Benutzt man nun noch Gleichung 1.63 und setzt dort in erster Näherung in g_0^2 die Renormierungskonstante auf 1, so findet man:

$$\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu^{-2\epsilon}} \beta_0 g_R^2 \ln \frac{k^2}{\Lambda^2} = \frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}. \quad (4.11)$$

Damit haben wir eine von renormierungsabhängigen Größen in erster Näherung unabhängige Gestalt der logarithmischen Modifikationen gefunden, die wir so zur Konstruktion der logarithmisch modifizierten Feynmanregeln nutzen können.

4.3 Konstruktion modifizierter Feynmanregeln

Das oben besprochene Skalierungsverhalten der Vertizes ist, wenn auch in geringerer Genauigkeit, schon lange bekannt (s. z.B. [GW 73b]). Dennoch ist uns nur ein Versuch bekannt, diese Eigenschaft einer exakten Lösung der QCD zur Konstruktion modifizierter Vertizes zu benutzen. In [ASS 93] führte ein erster Versuch zu signifikanten Veränderungen in den Selbstkonsistenzgleichungen. Allerdings wurden dort einige sehr problematische Vereinfachungen vorgenommen. Wir versuchen im weiteren Verlauf dieser Arbeit, die dort gewonnenen Erkenntnisse zu verbessern und auf das nichtperturbativ-erweiterte Schema zu übertragen.

Bei der Konstruktion logarithmisch modifizierter Feynmanregeln stößt man auf folgende konzeptionelle Schwierigkeiten:

- Aus Gleichung 2.24 folgt nur das Verhalten bei Hochskalierung *aller* Impulse. Das Verhalten der Vertizes bei Skalierung *einzelner* Impulse ist *nicht* bekannt.
- Die Logarithmen können unphysikalische Infrarotdivergenzen erzeugen. Aus diesem Grund müssen wir in 4.11 einen Parameter s zur Beseitigung eventueller zusätzlicher Infrarot-Divergenzen, d.h aus dem Limes $p \rightarrow 0$ stammender Divergenzen, einführen.
- Eventuelle Ergänzungen dürfen die Dimension des Vertex nicht ändern.

Weitere Einschränkungen folgen aus den Forderungen für die nichtperturbativ-erweiterten Vertizes:

1. Die Theorie soll im formalen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ in ihren perturbativen Limes übergehen.
2. Die fundamentalen Symmetrien der perturbativen Vertizes sollen erhalten bleiben.
3. Die Vertexparameter sollen über Dyson-Schwinger-Gleichungen selbst-konsistent bestimmt werden können.

Dadurch ist insbesondere die Wahl für die Propagatoren in Landau-Eichung effektiv festgelegt. Setzen wir $\lambda = \frac{k^2}{\nu^2}$ erhalten wir mit 4.11 und dem zusätzlichen Parameter³ s die folgenden Ansätze für die modifizierten Propagatoren.

- Der Gluon-Propagator

$$D_{a,b}^{*\mu\nu}(p) = D_{a,b}^{\mu\nu}(p) \left[\left(\frac{p^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{\frac{\gamma_G^{(0)}}{\beta_0}} \quad (4.12)$$

- Der Geist-Propagator

$$\tilde{D}_{ab}^*(p) = \tilde{D}_{ab}(p) \left[\left(\frac{p^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{\frac{\bar{\gamma}_{FP}^{(0)}}{\beta_0}} \quad (4.13)$$

- Der Fermion-Propagator

$$S_{(f)}^{*ij}(p) = S_{(f)}^{ij}(p) \quad (4.14)$$

Der Fermion-Propagator bleibt unverändert, da in Landau-Eichung ($\xi = 0$) und in erster Ordnung in g^2 gilt: $\bar{\gamma}_F^{(0)} = 0$.

³Dass wir hier nur einen zusätzlichen Parameter einführen, ist nicht *a priori* klar. Es stellt im Rahmen dieser Arbeit eine zulässige und irrelevante Vereinfachung dar.

Die Wahl der geeigneten Ansätze für die oberflächlich divergenten 3-Punkt- und 4-Punkt-Vertizes der QCD ist hingegen nicht eindeutig festgelegt. Die Form der Gleichung 2.24 legt einen *globalen* Faktor nahe, der die bekannten nichtperturbativ-erweiterten Vertizes ergänzt. Dies wird unterstützt durch die Ergebnisse von [Mue 78] und [EGM 79], die bei der Untersuchung eines verwandten Problems im Rahmen des Parton-Modells eine Faktorisierung logarithmischer Terme in den Wirkungsquerschnitten beobachteten. Damit ist jedoch noch nichts über die Impulsabhängigkeit der Logarithmen gesagt. Wie man bei der Berechnung der führenden logarithmischen Terme aus den Selbstenergien der Vertizes sieht (z.B. [BC 80]), hängen diese von Produkten von Impulsen und Summen von Impulsquadraten ab. Da die logarithmischen Korrekturen der Vertizes, die aus der Renormierungsgruppe abgeleitet wurden, perturbativ durch partielle Resummation der führenden Logarithmen entstehen,⁴ sollte man ähnliche Ansätze für die Skalenfaktoren bei Skalierung nur eines Impulses wählen. Auch nach [Mue 78] und [EGM 79] sollte man Beiträge von der Art $\ln \frac{p_i \cdot p_j}{\Lambda^2}$ in den führenden Ordnungen der Ansätzen verlangen. Dies führt jedoch auf rechentechnisch schwer zu behandelnde Terme, die noch dazu die Symmetrien der Vertizes, wie z.B. die Bose-Symmetrie des Γ_3 -Vertex, nicht manifest erhalten.

Da wir diese Probleme im Rahmen dieser Arbeit nicht lösen können, beschränken wir uns auf die Impulsquadrate der Verteximpulse als Ansatz für die Impulsabhängigkeit der Logarithmen in führender Ordnung.⁵ Insbesondere sind damit Logarithmen von Mandelstam-Variablen ausgeschlossen. Dies ist wichtig, damit der Mechanismus der kompensierenden Pole, wie in Kapitel 3 vorgestellt, auch für logarithmisch modifizierte Vertizes anwendbar bleibt. Weil die Impulse eines Vertex eindeutig den verschiedenen Feldertypen und damit den verschiedenen anomalen Dimensionen zugeordnet sind, teilen wir die Potenz in 2.24 auf ein Produkt aus Logarithmen in den jeweiligen Impulsquadraten mit passender anomaler Dimension auf. Überdies hat ein rein faktorisierender Ansatz den rechentechnischen Vorteil, dass sich in Schleifenintegralen die logarithmischen Faktoren der Vertizes mit denen der Propagatoren kürzen können. Auch die anderen Bedingungen an die logarithmischen Modifikationen sind evident erfüllt.

⁴Dies ist in Abschnitt 4.1 vorgeführt worden. Diese erste Näherung wird häufig als LL-Approximation bezeichnet.

⁵In der Tat werden wir in Kapitel 5 sehen, dass andere Ansätze außerhalb unserer rechentechnischen Möglichkeiten liegen.

Für die oberflächlich divergenten Vertizes der QCD machen wir also die folgenden modifizierten Ansätze:

- Der 3-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} & \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{*\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) \\ = & \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) \left[\frac{p_1^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_1^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\ & \times \left[\frac{p_2^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_2^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_3^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \quad (4.15) \end{aligned}$$

- Der Geist-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} & \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{*\mu_3}(-p_1, p_2, p_3) \\ = & \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{\mu_3}(-p_1, p_2, p_3) \left[\frac{p_1^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_1^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\ & \times \left[\frac{p_2^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_2^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_3^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \quad (4.16) \end{aligned}$$

- Der Fermion-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V(f) a_3}^{*\mu_3}(-p_1, p_2, p_3) \\ = & \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V(f) a_3}^{ij \mu_3}(-p_1, p_2, p_3) \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_3^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \quad (4.17) \end{aligned}$$

- Der 4-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} & \Gamma_{4G a_1, a_2, a_3, a_4}^{*\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ = & \Gamma_{4G a_1, a_2, a_3, a_4}^{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \left[\frac{p_1^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_1^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\ & \times \left[\frac{p_2^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_2^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_3^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\ & \left[\frac{p_4^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p_4^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \quad (4.18) \end{aligned}$$

Teil II

Berechnungen auf 1-Schleifen-Niveau

Kapitel 5

Berechnung der Divergenz logarithmisch modifizierter Integrale

Preise die Schönheit, Bruderschwester!
Witzko [6]

Nachdem wir in Kapitel 4 logarithmisch modifizierte Feynmanregeln definiert haben, stellt sich uns nun die Aufgabe, mit diesen Feynmanregeln erste Berechnungen durchzuführen. Dabei stoßen wir auf Impulsintegrale mit einem Integranden vom Typ einer gebrochenrationalen Funktion multipliziert mit einer nicht-ganzen Potenz des Logarithmus des Impulses. Diese lassen sich nicht mit der Standardformel der dimensionellen Regularisierung A.24 lösen. Uns ist auch kein Verfahren bekannt, mit dem man die Stammfunktion des Integranden geschlossen bestimmen könnte. Das bekannte Schema der dimensionellen Regularisierung, welches bekanntlich das geeignetste für die Regularisierung und Renormierung von Eichtheorien ist, stößt daher hier an seine Grenzen. Wir müssen also zur Bestimmung des Koeffizienten der divergenten Terme einen neuen Weg suchen. Im Folgenden wird das dazu entwickelte Verfahren vorgestellt.

5.1 Integraldarstellung der Logarithmuspotenz

Da die Potenz des Logarithmus eine Berechnung der Stammfunktion stark erschwert, muss ein Weg gefunden werden, diesen Term in einen im Sinne der Extraktion der Divergenz handhabbareren Ausdruck zu überführen. Dazu benutzen wir die folgende Integraldarstellung [Sti 00a]:

$$[\ln(s+b)]^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} (s+b)^{-x} \quad (5.1)$$

mit $0 < \alpha, 0 < b$.

Beweis:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} (s+b)^{-x}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-x \ln(s+b)} \quad (5.2)$$

mit $y \equiv x \ln(s+b)$ folgt:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{dy}{\ln(s+b)} y^{\alpha-1} (\ln(s+b))^{1-\alpha} e^{-y} \\ &= [\ln(s+b)]^{-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dy y^{\alpha-1} e^{-y} \\ &= [\ln(s+b)]^{-\alpha} \quad q.e.d. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Damit können wir die Potenz eines Logarithmus in ein Parameterintegral über eine bezüglich der Impulsintegration negative (reelle) Potenz eines Polynoms umwandeln. Diese kann dann, wie im nächsten Abschnitt vorgeführt, per Feynmanparametrisierung behandelt werden und führt auf ein lösbares Impulsintegral.

5.2 Symmetrische Integration und logarithmische Modifizierungen

Ein wesentliches Merkmal der unmodifizierten Theorie ist das Verschwinden aller Beiträge mit ungerader Potenz des Schleifenimpulses durch symmetrische Integration. Wie wir im Folgenden beweisen, bleibt diese Eigenschaft bei der in Kapitel 4 getroffenen Wahl für die Form der logarithmischen Modifikationen exakt erhalten, eine Tatsache, die ein weiteres Indiz für die Konsistenz unseres Ansatzes ist.

Sei also $f(q, k)$ eine Funktion der Massendimension 8, die bei symmetrischer Integration über q verschwindet. Dann gilt:

$$\int d^D q \frac{f(q, k)}{(q^2 + L^2)^4} \stackrel{A.25}{=} 0, \quad (5.4)$$

wobei sich $(q^2 + L^2)^{-4}$ durch Feynmanparametrisierung von $((a^2 + c_1)(b^2 + c_2))^{-1}$ und entsprechende Impulsverschiebung ergebe.¹ Fügen wir nun die beiden logarithmischen Faktoren entsprechend den Ansätzen in Kapitel 4 hinzu, erhalten wir Integrale der Form:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1 - x_3) x_3 \int d^D q \\ &\frac{f(q, k)}{(q^2 + L^2)^4} \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \ln \frac{a^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\alpha} \left[\frac{b^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \ln \frac{b^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{-\beta}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Um die Berechnungen zu vereinfachen, skalieren wir wo nötig die Größen mit Λ . Wir führen für solcherart skalierte Größen die folgende Notation ein: $\tilde{q} = \frac{q}{\Lambda}$,

¹Dies ist gerade der Fall, der bei der Berechnung von Integralen aus den Propagator-Gleichungen auf 1-Schleifen-Niveau vorkommt. Die Variablen \vec{a} und \vec{b} sind dabei Linearkombinationen von äußerem Impuls \vec{k} und Schleifenimpuls \vec{q} wie z.B. in D.6 definiert.

$\tilde{k} = \frac{k}{\Lambda}$ usw. Da der Integrand dimensionslos sein soll, skaliert f folgendermaßen: $f(q, k) = \Lambda^8 f(\tilde{q}, \tilde{k})$. Damit berechnet man weiter:

$$\begin{aligned} 5.5 &= \Lambda^{D+2\epsilon\alpha} \int_0^1 d^3x (1-x_3)x_3 \int \bar{d}^D \tilde{q} \frac{f(\tilde{q}, \tilde{k})}{(\tilde{q}^2 + \tilde{L}^2)^4} \\ &\quad \times [\tilde{a}^{-2\epsilon} \ln(\tilde{a}^2 + s)]^{-\alpha} [\tilde{b}^{-2\epsilon} \ln(\tilde{b}^2 + s)]^{-\beta} \\ &\stackrel{n.Vor.}{=} \Lambda^{D+2\epsilon\alpha} \int \bar{d}^D \tilde{q}' \frac{f(\tilde{q}', \tilde{k})}{\tilde{a}^2(\tilde{a}^2 + \tilde{c}_1)\tilde{b}^2(\tilde{b}^2 + \tilde{c}_2)} \\ &\quad \times [\tilde{a}^{-2\epsilon} \ln(\tilde{a}^2 + s)]^{-\alpha} [\tilde{b}^{-2\epsilon} \ln(\tilde{b}^2 + s)]^{-\beta} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hierbei haben wir insbesondere die Impulsverschiebung

$$q = q' + h(x_3)k \quad (5.7)$$

benutzt, die im konkreten Fall von der Parametrisierung der Schleifenimpulse abhängt. Einsetzen der Integraldarstellung 5.1 führt dann auf:

$$= \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty d\phi d\psi \int \frac{\bar{d}^D \tilde{q}' f(\tilde{q}', \tilde{k}) \phi^{\alpha-1} \psi^{\beta-1}}{\tilde{a}^{2(1+\epsilon)} (\tilde{a}^2 + \tilde{c}_1)(\tilde{a}^2 + s)^\phi \tilde{b}^{2(1+\epsilon)} (\tilde{b}^2 + \tilde{c}_2)(\tilde{b}^2 + s)^\psi}. \quad (5.8)$$

Durch Feynmanparametrisierung gelangt man zu:

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz \int_0^\infty d\phi d\psi \frac{\Gamma(4+2\epsilon+\psi+\phi) \phi^{\alpha-1} \psi^{\beta-1}}{\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(\psi)\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(\phi)} \\ &\quad \int \bar{d}^D \tilde{q}' \frac{f(\tilde{q}', \tilde{k}) x_1^\epsilon (1-x_2)^{1+\epsilon} x_2^{\phi-1} y_1^\epsilon (1-y_2)^{1+\epsilon} y_2^{\psi-1} (1-z)^{1+\epsilon+\phi} z^{1+\epsilon+\psi}}{(\tilde{b}^2 + z(\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) + \tilde{K}'^2)^{4+2\epsilon+\phi+\psi}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Der Nenner des Integranden hat die gleiche Struktur wie im nichtperturbativ erweiterten Fall, so dass man hier die *gleiche* Impulsverschiebung wie in 5.7 durchführen muss, nur x_3 wird durch z ersetzt, um auf die folgende Standardform zu kommen:

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz \int_0^\infty d\phi d\psi \frac{\Gamma(4+2\epsilon+\psi+\phi) \phi^{\alpha-1} \psi^{\beta-1}}{\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(\psi)\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(\phi)} \\ &\quad \int \frac{\bar{d}^D \tilde{q} f(\tilde{q}, \tilde{k}) x_1^\epsilon (1-x_2)^{1+\epsilon} x_2^{\phi-1} y_1^\epsilon (1-y_2)^{1+\epsilon} y_2^{\psi-1} (1-z)^{1+\epsilon+\phi} z^{1+\epsilon+\psi}}{(\tilde{q}^2 + \tilde{K}^2)^{4+2\epsilon+\phi+\psi}} \\ &\stackrel{n.Vor.}{=} 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Das Ergebnis folgt, da nach Voraussetzung jedes symmetrische Integral über f verschwindet. Damit wurde gezeigt, dass die in Kapitel 4 hergeleiteten logarithmischen Modifikationen die symmetrische Integration, die im Rahmen der dimensionellen Regularisierung ein wichtiges Hilfsmittel darstellt, respektieren. Gleichzeitig ist gewährleistet, dass wegen der Äquivalenz der Impulsverschiebungen die Ergebnisse der logarithmisch modifizierten Theorie im Limes $\alpha, \beta \rightarrow 0$ in die bekannten Resultate ([Kuh 97], [Dri 97]) übergehen.

5.3 Eine Integralformel

Bei der Berechnung der Selbstkonsistenzgleichungen steht man vor dem Problem, dass die (mehrfachen) Logarithmen eine vollständige analytische Lösung der Integrale sehr erschweren. Um an diesem Punkt in voller Allgemeinheit weiterrechnen zu können, ist die Entwicklung neuer Rechentechniken notwendig. Da es zur Bestimmung der Selbstkonsistenzgleichungen der nullten Ordnung jedoch genügt, nur die UV-divergenten Terme zu berechnen, können wir uns in dieser Arbeit darauf beschränken, das folgende Integral auszurechnen, das für alle Rechnungen auf 1-Schleifen-Niveau genügt.

Gesucht ist die Lösung von:

$$I(m, n, \alpha) = \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha}}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}} \int d^D \tilde{q} \frac{(\tilde{k}^2)^{n-m} (\tilde{q})^m}{(\tilde{q}^2 + \tilde{L}^2)^n} \left[\tilde{q}^{-2\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}^2 + \tilde{K}^2) \right]^{-\alpha}. \quad (5.11)$$

Wir benutzen Gleichung 5.1:

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha} (\tilde{k}^2)^{n-m}}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} (\beta_0 g_0^2)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} \int d^D \tilde{q} \frac{(\tilde{q}^2)^{m+\epsilon\alpha}}{(\tilde{q}^2 + \tilde{L}^2)(\tilde{q}^2 + \tilde{K}^2)^t} \\ &= \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha} (\tilde{k}^2)^{n-m}}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} (\beta_0 g_0^2)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \int_0^1 dx t^{\alpha-1} x^{t-1} (1-x)^{n-1} \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(n)\Gamma(t)} \\ &\quad \times \int d^D \tilde{q} \frac{(\tilde{q}^2)^{m+\epsilon\alpha}}{(\tilde{q}^2 + (x\tilde{K}^2 + (1-x)\tilde{L}^2))^{n+t}} \\ &\stackrel{A.24}{=} \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha} (\tilde{k}^2)^{n-m}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) (\beta_0 g_0^2)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \int_0^1 dx t^{\alpha-1} x^{t-1} (1-x)^{n-1} \\ &\quad \frac{\Gamma(m+2-\epsilon') \Gamma(n+t-m-2+\epsilon')}{\Gamma(n)\Gamma(t)} (\tilde{M}^2(x))^{m-n-t+2-\epsilon'} \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit $\epsilon' \equiv \epsilon(1-\alpha)$ und $\tilde{M}^2(x) \equiv x\tilde{K}^2 + (1-x)\tilde{L}^2$. Wir haben der Vollständigkeit halber nochmals die Feynmanparametrisierung ausgeschrieben.

Mit Gleichung 5.12 haben wir das Integral $I(m, n, \alpha)$ in eine Form gebracht, in der wir die Impulsintegration mit der im Anhang beschriebenen Standardformel A.24 *exakt* ausführen konnten. Damit müssen nur noch die verbleibenden Parameterintegrale gelöst werden. Hierbei sind Näherungen jedoch weit weniger kritisch als im Impulsintegral, da man in der Regel den Einfluss der Näherungen auf den Koeffizienten der $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz sehr gut abschätzen kann. Um nun weiterrechnen zu können, müssen wir den Divergenzgrad des Integranden festlegen.

5.3.1 Logarithmische Divergenz

In diesem Fall gilt $m = n - 2$ und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} &I(n-2, n; \alpha) \\ &= \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 \Gamma(n-\epsilon') (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) \Gamma(\alpha) \Gamma(n)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\alpha-1} \Gamma(t+\epsilon')}{\Gamma(t)} \int_0^1 dx \frac{x^{t-1} (1-x)^{n-1}}{(\tilde{M}^2)^{t+\epsilon'}} \end{aligned}$$

$$\stackrel{A.31}{=} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 \Gamma(n - \epsilon') (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \left[\frac{t^{\alpha-1} \Gamma(t + \epsilon')}{(\tilde{L}^2)^{t+\epsilon'} \Gamma(t+n)} {}_2F_1(t + \epsilon', t; t + n; z) \right] \quad (5.13)$$

mit $z \equiv 1 - \frac{\tilde{K}^2}{\tilde{L}^2}$. Über die Parametertransformation der hypergeometrischen Funktion [EMÖ 53a]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} {}_2F_1(c - a, c - b; c; z) \quad (5.14)$$

erhält man

$$\begin{aligned} 5.13 &= \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 \Gamma(n - \epsilon') (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\alpha-1} \Gamma(t + \epsilon') (1 - z)^{n-t-\epsilon'}}{(\tilde{L}^2)^{t+\epsilon'} \Gamma(t+n)} \\ &\quad \times {}_2F_1(n - \epsilon', n; t + n; z). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Auch dieses Integral kann man analytisch kaum berechnen. Wir folgen daher einem erstmals in [Sti 00b] beschrittenen Weg. Mit $(1 - z) = \frac{\tilde{K}^2}{\tilde{L}^2}$ und der Reihendarstellung der hypergeometrischen Funktion [WG 89]

$${}_2F_1(n - \epsilon', n; t + n; z) = \frac{\Gamma(t + n)}{\Gamma(n - \epsilon') \Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + m - \epsilon') \Gamma(n + m)}{\Gamma(t + n + m)} \frac{z^m}{m!} \quad (5.16)$$

gelangt man zu:

$$\begin{aligned} 5.15 &= \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) \Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{K}^2}{\tilde{L}^2} \right)^n (\tilde{K}^2)^{-\epsilon'} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(n + m - \epsilon') \Gamma(n + m) z^m}{\Gamma(n) m!} \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t \ln \tilde{K}^2} \frac{\Gamma(t + \epsilon')}{\Gamma(t + n + m)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Hier ist das verbleibende Parameterintegral in einer Form, aus der sich der für $\epsilon \rightarrow 0$ divergente Teil extrahieren lässt. Da $n + m$ eine natürliche Zahl ist, wird der Quotient der beiden Γ -Funktionen in erster Näherung in ϵ zu einem endlichen Produkt. Dieses kann durch Partialbruchzerlegung in eine endliche Summe umgewandelt werden, so dass gilt:

$$\frac{\Gamma(t + \epsilon')}{\Gamma(t + n + m)} = \frac{1}{t + \epsilon'} \sum_{l=1}^{m+n-1} \frac{r_l}{t + l} (1 + O(\epsilon')), \quad (5.18)$$

mit

$$r_l \equiv \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n+m-1} \frac{1}{i - l}. \quad (5.19)$$

Nochmalige Partialbruchzerlegung liefert:

$$\frac{1}{(t + \epsilon')(t + l)} = \frac{1}{l - \epsilon'} \left(\frac{1}{t + \epsilon'} - \frac{1}{t + l} \right). \quad (5.20)$$

Diese setzen wir ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
 5.17 &= \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) \Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{K}^2}{\tilde{L}^2} \right)^n (\tilde{K}^2)^{-\epsilon'} \\
 &\quad \times \sum_{l=1}^{n+m-1} \frac{r_l}{l-\epsilon'} \frac{\Gamma(n+m-\epsilon') \Gamma(n+m) z^m}{\Gamma(n) m!} \\
 &\quad \int_0^\infty dt \left(\frac{1}{t+\epsilon'} - \frac{1}{t+l} \right) t^{\alpha-1} e^{-t \ln \tilde{K}^2} (1 + O(\epsilon')). \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

Hierzu kann man die Stammfunktion in den einschlägigen Tabellenwerken nachschlagen² und es folgt:

$$\begin{aligned}
 I(n-2, n; \alpha) &\stackrel{A.35}{=} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{K}^2}{\tilde{L}^2} \right)^n (\tilde{K}^2)^{-\epsilon'} \\
 &\quad \sum_{l=1}^{n+m-1} \frac{r_l}{l-\epsilon'} \frac{\Gamma(n+m) z^m}{\Gamma(n) m!} \Gamma(n+m-\epsilon') \left(\frac{(\tilde{K}^2)^{\epsilon'}}{\epsilon'^{1-\alpha}} \right. \\
 &\quad \left. \times \Gamma(1-\alpha, \epsilon' \ln \tilde{K}^2) - \frac{(\tilde{K}^2)^l}{l^{1-\alpha}} \Gamma(1-\alpha, l \ln \tilde{K}^2) + O((\epsilon')^0) \right). \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $\Gamma(u, v)$ die unvollständige Γ -Funktion und z.B. durch A.35 definiert. Mit Asymptotik dieser Funktion A.36 und der Rücknahme der Partialbruchzerlegung 5.18 erhält man für die divergenten Terme:

$$\stackrel{div}{=} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon)} \frac{(\tilde{K}^2)^n}{(\tilde{L}^2)^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)} \frac{z^m}{m!} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} + O((\epsilon')^0). \tag{5.23}$$

Mit der Hilfsformel [KF 60]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m) z^m}{\Gamma(n) m!} = {}_2F_1(n, b; b; z) \Big|_{b \text{ bel.}} = (1-z)^{-n} \tag{5.24}$$

kommt man dann auf das einfache Ergebnis:

$$5.23 \stackrel{div}{=} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon)} \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} + O((\epsilon')^0) \right). \tag{5.25}$$

Löst man das Integral ohne die logarithmischen Modifikationen, erhält man durch direkte Anwendung des Standardintegrals und anschließender Entwicklung der Γ -Funktion in ϵ :

$$I'(n-2, n) = \frac{\Lambda^{-2\epsilon} k^4 \Gamma(n-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(2-\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} (1 + O(\epsilon^0)). \tag{5.26}$$

²Siehe z.B. [GR 94] oder [PBM 88a].

Wir können nun unmittelbar verifizieren, dass im Limes $\alpha \rightarrow 0$ Gleichung 5.25 in 5.26 übergeht. Das Integral mit den logarithmischen Modifikationen unterscheidet sich von dem unmodifizierten durch einen multiplikativen Faktor und eine *Verringerung des Divergenzgrades* um α . Letzteres ist konsistent mit den Ergebnissen aus [ASS 93],³ wohingegen der dort erhaltene numerische Faktor von (in unserer Notation) $\frac{\pi^2}{1-\alpha}$ hier um einen Faktor zwischen 20 und 50 (für die entsprechenden Werte von α) präzisiert wurde.

5.3.2 Quadratische Divergenz

Weil wir nur an den divergenten Termen interessiert sind, verläuft die Rechnung hier analog zum obigen Beispiel. Deshalb führen wir hier nur noch die wesentlichen Schritte auf.

Mit $m = n - 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & I(n-1, n; \alpha) \\ \stackrel{A.24, A.31}{=} & \frac{\Lambda^{2-2\epsilon'} k^2 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(n+1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) \Gamma(\alpha) \Gamma(n)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\alpha-1} \Gamma(t+1+\epsilon')}{(t-1+\epsilon')(t+\epsilon') \Gamma(t)} \\ & \frac{\Gamma(n)}{t(t+1)(\tilde{L}^2)^{\epsilon'+t}} \left[\frac{\tilde{L}^2 \Gamma(t+2)}{\Gamma(n+t)} {}_2F_1(t, \epsilon' + t; n+t; z) \right. \\ & \left. + \frac{(\tilde{K}^2 - \tilde{L}^2)t \Gamma(t+2)}{\Gamma(n+1+t)} {}_2F_1(t+1, \epsilon' + t; n+1+t; z) \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Mit der Parametertransformation 5.14 und der Reihendarstellung 5.16 bzw. A.32 der ${}_2F_1$ -Funktion sowie der Partialbruchzerlegung 5.18 erhält man:

$$\begin{aligned} & = \frac{\Lambda^{2-2\epsilon'} k^2 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(n+1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) \Gamma(\alpha)} \left[\tilde{L}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tilde{K}^2)^{n-\epsilon'}}{(\tilde{L}^2)^n} \frac{\Gamma(n+m-\epsilon') \Gamma(n+m)}{\Gamma(n-\epsilon') \Gamma(n)} \right. \\ & \times \frac{z^m}{m!} \int_0^\infty dt \sum_{l=1}^{n+m-1} \frac{r_l}{t+l} \left(\frac{1}{t-1+\epsilon'} - \frac{1}{t+\epsilon'} \right) t^{\alpha-1} e^{-t \ln \tilde{K}^2} \\ & + (\tilde{K}^2 - \tilde{L}^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tilde{K}^2)^{n-\epsilon'}}{(\tilde{L}^2)^n} \frac{\Gamma(n+m) \Gamma(n+m+1-\epsilon')}{\Gamma(n+1-\epsilon') \Gamma(n)} \frac{z^m}{m!} \\ & \left. \times \int_0^\infty dt \sum_{l=1}^{n+m-1} \frac{r_l}{t+l} \left(\frac{1}{t-1+\epsilon'} - \frac{1}{t+\epsilon'} \right) t^\alpha e^{-t \ln \tilde{K}^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Bei den Termen proportional zu $\frac{1}{t-1+\epsilon'}$, die eine Singularität innerhalb des Integrationsbereiches haben, benutzen wir zur Hebung der Singularität die Hauptwertvorschrift, weil jede andere Vorschrift dem definitionsgemäß reellen euklidischen Schleifenintegral unphysikalische Imaginärteile erteilen würde. Dieses Verfahren ist deshalb gerechtfertigt, weil diese Singularität nicht aus den Ultraviolettdivergenzen des Impulsintegrals zu tun hat sondern als divergenter Term innerhalb eines Parameterintegrals ein Artefakt des Rechenverfahrens ist. In

³Bei einem Vergleich beachte man, dass das in dieser Arbeit verwendete α einem $-\alpha$ in [ASS 93] entspricht.

den anderen Termen wird die Divergenz mittels einer weiteren Partialbruchzerlegung isoliert:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Lambda^{2-2\epsilon'} k^2 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(n+1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) \Gamma(\alpha)} \left[\tilde{L}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tilde{K}^2)^{n-\epsilon'}}{(\tilde{L}^2)^n} \frac{\Gamma(n+m-\epsilon') \Gamma(n+m)}{\Gamma(n-\epsilon') \Gamma(n)} \right. \\
&\quad \times \frac{z^m}{m!} \left(\mathcal{P}[I_1] - \sum_{l=1}^{m+n-1} \frac{r_l}{l-\epsilon'} \int_0^\infty dt \left[\frac{1}{t+\epsilon'} - \frac{1}{t+l} \right] t^{\alpha-1} e^{-t \ln \tilde{K}^2} \right) \\
&\quad + (\tilde{K}^2 - \tilde{L}^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tilde{K}^2)^{n-\epsilon'}}{(\tilde{L}^2)^n} \frac{\Gamma(n+m) \Gamma(n+m+1-\epsilon')}{\Gamma(n+1-\epsilon') \Gamma(n)} \frac{z^m}{m!} \\
&\quad \left. \times \left(\mathcal{P}[I_2] - \sum_{l=1}^{m+n-1} \frac{r_l}{l-\epsilon'} \int_0^\infty dt \left[\frac{1}{t+\epsilon'} - \frac{1}{t+l} \right] t^\alpha e^{-t \ln \tilde{K}^2} \right) \right]. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Wir dürfen nun alle konvergenten Terme vernachlässigen, da uns nur der für $\epsilon' \rightarrow 0$ divergente Teil des Integrals interessiert und führen wiederum mit der Integralformel A.35 das verbleibende Parameterintegral aus und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\stackrel{div}{=} - \frac{\Lambda^{2-2\epsilon'} k^2 (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(n+1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) \Gamma(\alpha)} \tilde{L}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tilde{K}^2)^{n-\epsilon'}}{(\tilde{L}^2)^n} \frac{\Gamma(n+m-\epsilon') \Gamma(n+m)}{\Gamma(n-\epsilon') \Gamma(n)} \\
&\quad \times \frac{z^m}{m!} \sum_{l=1}^{m+n-1} \frac{r_l}{l-\epsilon'} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha, \epsilon' \ln \tilde{K}^2) \frac{(\tilde{K}^2)^{\epsilon'}}{(\epsilon')^{1-\alpha}} + O((\epsilon')^0). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Der weitere Gang der Rechnung folgt wieder dem logarithmischen Fall. Wir setzen die Darstellung der unvollständigen Γ -Funktion ein, nehmen mit 5.18 die Partialbruchzerlegung zurück und benutzen nochmals Formel 5.24, um zu dem folgenden Endergebnis zu gelangen:

$$= - \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} L^2 k^2 (n-\epsilon') \Gamma(1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) (\beta_0 g_0^2)^\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} + O((\epsilon')^0). \tag{5.31}$$

Für die Unterschiede zwischen diesem Ergebnis und dem Resultat für das unmodifizierte Integral gelten die schon für die logarithmische Divergenz zu Gleichung 5.25 gemachten Anmerkungen.

Man kann diese Resultate mit einer unabhängigen Rechnung (zumindest für die logarithmische Divergenz) bestätigen. Transformiert man den Betrag des Impulses im Sinne der dimensionellen Regularisierung gemäß $x = e^q$ und vernachlässigt einen nur die konvergenten Beiträge ändernden Term, erhält man mit Formel A.37 äquivalente Ergebnisse für die Divergenzen.

Kapitel 6

Die Propagatoren

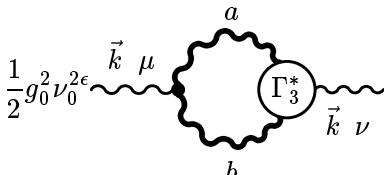
sed tamen amoto quaeramus seria ludo
Horaz [7]

6.1 Der Gluon-Propagator

Hier berechnen wir die divergenten Beiträge der Schleifenintegrale aus der Dyson-Schwinger-Gleichung des Gluon-Propagators 3.40.

6.1.1 Die Gluon-Schleife

Mit den Ansätzen für den nichtperturbativ-erweiterten, logarithmisch modifizierten Γ_{3V}^* -Vertex ergibt sich nach Kontraktion der Farbindizes, wenn \vec{a} den oberen und \vec{b} den unteren Schleifenimpuls¹ bezeichnet:



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta_{\mu\nu} \Gamma_3^* \\
 &= \frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2!} \delta^{ab} C_G \int d^D q t^{\mu\mu'}(-k) t^{\rho\rho'}(b) t^{\kappa\kappa'}(a) \times [c_\kappa \delta_{\mu'\rho'} \\
 &\quad + d_{\mu'} \delta_{\rho'\kappa'} + f_{\rho'} \delta_{\kappa'\mu'}] t^{\rho\sigma}(b) G^{*,r}(b) t^{\nu\nu'}(k) t^{\lambda\lambda'}(a) t^{\sigma\sigma'}(b) t^{\lambda\kappa}(a) G^{*,r}(a) \\
 &\quad \times [f_{\sigma'} \delta_{\nu'\lambda'} F^r(k^2, a^2; b^2) + d_{\nu'} \delta_{\lambda' \sigma'} F^r(a^2, b^2; k^2) + c_{\lambda'} \delta_{\nu'\sigma'} F^r(b^2, k^2; a^2)] \\
 &\quad \times \left[\left(\frac{a^2 b^2 k^2}{(\nu_0^2)^3} \right)^{-\epsilon} (\beta_0 g_0^2)^3 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

mit den folgenden Definitionen:

$$\vec{k} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{6.2}$$

$$\vec{c} = -\vec{k} - \vec{b}, \tag{6.3}$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}, \tag{6.4}$$

¹Die konkrete Wahl von \vec{a} und \vec{b} in Abhängigkeit von \vec{q} und \vec{k} findet sich in D.6.

$$\vec{f} = -\vec{k} - \vec{a}, \quad (6.5)$$

$$\tilde{p} = \frac{\vec{p}}{\Lambda} \quad (6.6)$$

und

$$F^r(p_1^2, p_2^2; p_3^2) = \frac{\sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1 m_2; m_3}^r p_1^{2m_1} p_2^{2m_2} p_3^{2m_3} \Lambda^{6r-2(m_1+m_2+m_3)}}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \quad (6.7)$$

sowie

$$G^{*,r}(p) \equiv \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \left[\frac{p^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln \frac{p^2 + s \Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{\frac{\gamma_G^{(0)}}{\beta_0}}}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (p^2 + u_{r,s+} \Lambda^2)(p^2 + u_{r,s-} \Lambda^2)}. \quad (6.8)$$

Als ersten Schritt zur Berechnung dieses Integrals muss man die aufwendige Kontraktion der Lorentzindizes durchführen. Weil in Landau-Eichung alle gluonischen Beiträge transversal bleibe, können wir das Integral transversal projizieren und die invariante Funktion berechen. Mit Gleichung 6.25 und mit den Abkürzungen $F^r(k^2, a^2; b^2) \equiv F_1$, $F^r(a^2, b^2; k^2) \equiv F_2$, $F^r(b^2, k^2; a^2) \equiv F_3$ erhält man:

$$6.1 = -\frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2!} \frac{t^{\mu\nu}(k)}{D-1} \delta^{ab} C_G \int d^D q \frac{G^{*,r}(a) G^{*,r}(b) N^{*,r}(a, b, k)}{a^2 b^2}, \quad (6.9)$$

wobei wir mit $N^{*,r}$ die invariante Funktion für die transversalen Beiträge aus den Vertizes bezeichnen:

$$\begin{aligned} & N^{*,r}(a, b, k) \\ & \equiv 4(a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) \left\{ \frac{F_1}{k^2} [(D-1)a^2 k^2 - (a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) + (a \cdot k)b^2] \right. \\ & \quad + \frac{F_2}{k^2} [(D-1)a^2 b^2 - (a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) - 4(a \cdot b)k^2] \\ & \quad \left. \frac{F_3}{k^2} [(D-1)b^2 k^2 - (a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) + (k \cdot b)a^2] \right\} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{a^2 b^2 k^2}{(\nu_0^2)^3} \right)^{-\epsilon} (\beta_0 g_0^2)^3 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ein analoges Ergebnis findet man z.B. bei [Sti 84].

Partialbruchzerlegung

Die nächste Aufgabe ist, eine Partialbruchzerlegung von Gleichung 6.9 zu finden. Mit

$$S_D(a|b;k) \equiv 4(a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) [(D-1)a^2 k^2 - (a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) + (a \cdot k)b^2] \quad (6.11)$$

und

$$T_D(a, b; k) \equiv 4 (a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) \left[(D-1) a^2 b^2 - (a^2 b^2 - (a \cdot b)^2) - (a \cdot b) k^2 \right] \quad (6.12)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{G^{*,r}(a) G^{*,r}(b)}{a^2 b^2} N^{*,r}(a, b, k) \\ = & \left(a^2 b^2 k^2 \prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^{r+1} (a^2 + \hat{u}_{r,s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^{r+1} (b^2 + \hat{u}_{r,s} \Lambda^2) \right)^{-1} \\ & \times \left\{ \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1 m_2; m_3}^r \Lambda^{6r-2(\sum m)} \left[(k^2)^{m_1} (a^2)^{m_2} (b^2)^{m_3} S_D(a|b; k) \right. \right. \\ & \left. \left. + (a^2)^{m_1} (b^2)^{m_2} (k^2)^{m_3} T_D(a, b; k) + (b^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} (a^2)^{m_3} S_D(b|a; k) \right] \right\} \\ & \times \left[\frac{a^{-2\epsilon} b^{-2\epsilon}}{(\nu_0^{-4\epsilon})} (\beta_0 g_0^2)^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^2} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dies wiederum lässt sich in eine Doppelpartialbruchzerlegung überführen, wobei wir die in Kapitel 3 angegebene Umindizierung der Propagatorpole verwendet haben:

$$\begin{aligned} = & \left[k^2 \prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]^{-1} \sum_{t,t'=1}^{r+1} \left\{ \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t'}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t'}) \right)^{-1} \right. \\ & \times \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1 m_2; m_3}^r \Lambda^{6r-2(\sum m)} \frac{1}{a^2 (a^2 + \hat{u}_{r,t} \Lambda^2) b^2 (b^2 + \hat{u}_{r,t'} \Lambda^2)} \\ & \left[(k^2)^{m_1} (-\hat{u}_{r,t} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{u}_{r,t'} \Lambda^2)^{m_3} S_D(a|b; k) \right. \\ & + (-\hat{u}_{r,t} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{u}_{r,t'} \Lambda^2)^{m_2} (k^2)^{m_3} T_D(a, b; k) \\ & \left. \left. + (-\hat{u}_{r,t'} \Lambda^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} (-\hat{u}_{r,t'} \Lambda^2)^{m_3} S_D(b|a; k) \right] \right\} \\ & \times \left[\frac{a^{-2\epsilon} b^{-2\epsilon}}{(\nu_0^{-4\epsilon})} (\beta_0 g_0^2)^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Führt man nun noch die Feynmanparametrisierungen und Impulsverschiebungen wie im Anhang D beschrieben durch und verwendet

$$\alpha \equiv -\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}, \quad (6.15)$$

was nach Gleichung 1.67 positiv ist, sowie

$$c_{k,t,t'}^{m_1 m_2 m_3} \equiv (k^2)^{m_1} (-\hat{u}_{r,t} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{u}_{r,t'} \Lambda^2)^{m_3} \quad (6.16)$$

und zyklisch in k , $-\hat{u}_{r,t}$ und $-\hat{u}_{r,t'}$, so gelangt man zu dem wichtigen Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned}
& \int d^D q \frac{G^{*,r}(a) G^{*,r}(b) N^{*,r}(a, b, k)}{a^2 b^2} \\
= & \left[k^2 \prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]^{-1} \left[\left(\frac{k^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\
& \times \sum_{t,t'=1}^{r+1} \left\{ \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t'}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t'}) \right)^{-1} \right. \\
& \times \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^r \Lambda^{6r-2(\sum m)} \Gamma(4) \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3) x_3 \\
& \int d^D q \frac{1}{(q^2 + L^2)^4} \left[\left(\frac{a^2 b^2}{(\nu_0^2)^2} \right)^{-\epsilon} (\beta_0 g_0^2)^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\alpha} \\
& \left. \times \left[c_{k,t,t'}^{m_1 m_2 m_3} S_D(a|b;k) + c_{t,t',k}^{m_1 m_2 m_3} T_D(a,b;k) + c_{t',k,t}^{m_1 m_2 m_3} S_D(b|a;k) \right] \right\}. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Den weiteren Gang der Rechnung kann man im Anhang D verfolgen, wenn auch ohne die aus den logarithmischen Modifikationen stammenden Terme. Diese ändern jedoch am vorgestellten Rechengang wegen der in Kapitel 5 gefundenen Ergebnisse für die Divergenzen logarithmisch modifizierter Integrale nichts Wesentliches.

Um die divergenten Teile *mit* den logarithmischen Modifikationen zu erhalten, werden $(a^2)^{-\epsilon}$ und $(b^2)^{-\epsilon}$ zu $(q^2)^{-\epsilon}$ abgeschätzt. Der dabei gemachte Fehler ändert höchstens die konvergenten Terme. Dasselbe gilt für die rechentechnisch notwendige Näherung.²

$$\left[\ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\alpha} \approx (\ln(\tilde{q}^2 + \tilde{\sigma}^2))^{-2\alpha} (1 + O(q^{-1})). \tag{6.18}$$

In den Impulsintegralen aus Anhang D taucht dann zusätzlich der Term

$$\left[\left(\frac{q^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}^2 + \tilde{\sigma}^2) \right]^{-2\alpha} \tag{6.19}$$

auf, wobei zu $\tilde{\sigma}^2$ auch Terme proportional zum äußeren Impuls k beitragen. Dies kann mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 zur Berechnung der Divergenzen logarithmisch modifizierter Integrale behandelt werden. Man definiert nun mit Blick auf Anhang D die folgenden Basisintegrale, wobei

$$\epsilon'' \equiv \epsilon(1 - 2\alpha) \tag{6.20}$$

²Im Falle einer symmetrischen Wahl der Schleifenimpulse wie in Anhang D gilt diese Näherung sogar mindestens in $O(\frac{1}{q \ln q}, \frac{1}{q^2})$.

bezeichnet:

$$B'_1 = \frac{\Lambda^{-2\epsilon''} L^2 k^2 (n - \epsilon'') \Gamma(1 - \epsilon'')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{2\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) (\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}} \quad (6.21)$$

$$B'_3 = \frac{\Lambda^{-2\epsilon''} k^4 \Gamma(1 - \epsilon'')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{2\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) (\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}}. \quad (6.22)$$

Da sich diese von den im Anhang D definierten Basisintegralen nur um einen gemeinsamen Faktor und eine Veränderung der ϵ -Potenz unterscheiden, kann man die dort vorgestellten Ergebnisse übernehmen und erhält so für die divergenten Terme:

$$\begin{aligned} & \frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \frac{\delta^{ab} t^{\mu\nu}(\vec{k}) C_G}{D - 1} \int d^D q \frac{G^{*,r}(a) G^{*,r}(b) N^{*,r}(a, b, k)}{a^2 b^2} \\ & \stackrel{div}{=} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \left[k^2 \prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]^{-1} \left[\left(\frac{k^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\ & \times \sum_{t,t'=1}^{r+1} \left\{ \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t'}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t'}) \right)^{-1} \right. \\ & \times \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1 m_2; m_3}^r \Lambda^{6r-2(\sum m)} \frac{\Lambda^{-2\epsilon''}}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{2\epsilon\alpha} (\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}} \\ & \times \left[c_{k,t,t'}^{m_1 m_2 m_3} \frac{15}{4} k^2 + c_{t,t',k}^{m_1 m_2 m_3} \left[-\frac{5}{4} k^2 - \frac{9}{2} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,t} + \hat{u}_{r,t'}) \right] \right. \\ & \left. \left. + c_{t',k,t}^{m_1 m_2 m_3} \frac{15}{4} k^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Nach Rücknahme der Partialbruchzerlegung mit den Formeln aus Anhang E erhält man das folgende Endergebnis:

$$\begin{aligned} & = g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon''} t^{\mu\nu}(\vec{k})}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{2\epsilon\alpha}} \frac{1}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\ & \times \left[\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]^{-1} \sum_{m=0}^r \left\{ \Lambda^{2(r-m)} k^{2(m+1)} \left[\frac{15}{2} C_{m,r;r}^r - \frac{5}{4} C_{r,r;m}^r \right] \right. \\ & \left. - 9(\Lambda^2)^{r+1-m} (k^2)^m \left(-C_{r-1,r;m}^r + C_{r,r;m}^r \sum_{t=1}^{r+1} \hat{u}_{r,t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Dies entspricht bis auf die aus den logarithmischen Modifikationen stammenden Unterschiede den Ergebnissen aus [Kuh 97].³ Die zur Konstruktion der Selbstkonsistenzgleichungen aus den in Abschnitt 3.3 vorgestellten DS-Gleichungen notwendige weitere Behandlung dieses Terms wird in Kapitel 8 vorgenommen.

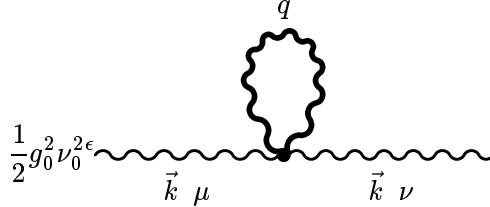
³Bei einem Vergleich beachte man allerdings, dass das Ergebnis dort auf eine andere Darstellung der Propagatorpole umgeschrieben wurde.

6.1.2 Der Tadpole

Auch bei diesem Graph gilt, dass wegen der Landau-Eichung ($\xi = 0$) nur der transversal projizierte Teil des Graphen interessiert. Unter Benutzung von

$$t^{\mu\nu}(p)t^{\mu\nu}(p) = D - 1 \quad (6.25)$$

kann man nun die invariante Funktion berechnen:



$$\begin{aligned}
&= -\frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \int d^D q t^{\mu\kappa_1}(\vec{k}) W_{\kappa_1 \dots \kappa_4}^{a,b,c,d} \delta^{dc} t^{\kappa_4 \kappa_3}(\vec{q}) G^{r,*}(\vec{q}) t^{\kappa_2 \nu}(\vec{k}) \\
&= -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \int d^D q \left[t^{\mu\nu}(\vec{k})(D-1) - t^{\mu\kappa_3}(\vec{k}) t^{\kappa_3 \kappa_2}(\vec{q}) t^{\kappa_2 \nu}(\vec{k}) \right] G^{r,*}(\vec{q}) \\
&= -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \int d^D q \left[(D-1)(D-2) + 1 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{k^2 q^2} \right] G^{r,*}(\vec{q}).
\end{aligned} \quad (6.26)$$

Führt man nun wie oben die Partialbruchzerlegung aus⁴, gelangt man zu:

$$\begin{aligned}
&= -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \sum_{t=1}^{r+1} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \right]^{-1} \prod_{s=1}^r \Lambda^2 (u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t}) \\
&\quad \times \int d^D q \left[\frac{D^2 - 3D + 3}{q^2 + \hat{u}_{r,t} \Lambda^2} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{k^2 q^2 (q^2 + \hat{u}_{r,t} \Lambda^2)} \right] \left[\frac{q^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}^2 + s) \right]^{2\alpha}.
\end{aligned} \quad (6.27)$$

Mit den Formeln für die symmetrische Integration wird dies zu:

$$\begin{aligned}
&= -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \sum_{t=1}^{r+1} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \right]^{-1} \prod_{s=1}^r \Lambda^2 (u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t}) \\
&\quad \times \int d^D q \frac{(D-1)(D-2) + 1 - D^{-1}}{q^2 + \hat{u}_{r,t} \Lambda^2} \left[\frac{q^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}^2 + s) \right]^{2\alpha}.
\end{aligned} \quad (6.28)$$

Dies lässt sich mit der allgemeinen Formel 5.24 problemlos integrieren. Wir erhalten für den divergenten Teil des Tadpole-Graphen:

$$= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \sum_{t=1}^{r+1} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \right]^{-1} \prod_{s=1}^r \Lambda^2 (u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t})$$

⁴Vgl. auch [Pot 00].

$$\times \frac{\Lambda^{-2\epsilon''} (\hat{u}_{r,t} \Lambda^2) \Gamma(2 - \epsilon'')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) (\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}} \left(\frac{27}{4} \right). \quad (6.29)$$

Benutzt man nun noch die Formeln zur Zurücknahme der Partialbruchzerlegung aus Anhang E, so folgt als Endergebnis:

$$= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{9}{4} \frac{\Lambda^{-2\epsilon''} \Gamma(2 - \epsilon'')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2 - \epsilon) (\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}} \\ \times \left[\sum_{s=1}^{r+1} \hat{u}_{r,s} - \sum_{s=1}^r u_{r,2s} \right]. \quad (6.30)$$

Ein analoges Ergebnis für den Fall ohne logarithmische Modifikationen wurde in [Pot 00] berechnet. Die wesentliche Neuerung des logarithmisch modifizierten Ansatzes besteht in dem Faktor:

$$\frac{\epsilon^{2\alpha} \Lambda^{4\epsilon\alpha}}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} (\beta_0 g_0^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{(1 - 2\alpha)^{1-2\alpha}}. \quad (6.31)$$

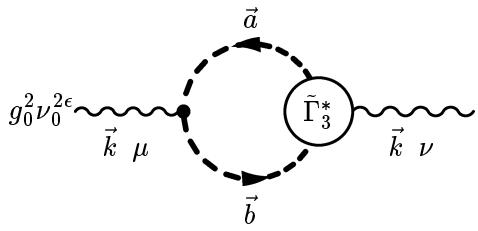
Ein logarithmischer Faktor im äusseren Impuls k , wie im Ansatz für D^* , tritt nicht auf. Dies stellt für die sinnvolle Konstruktion von Selbstkonsistenzgleichungen ein ernstes Hindernis dar, dessen mögliche Beseitigung wir in Kapitel 8 diskutieren.

6.1.3 Die Geist-Schleife

Zur Berechnung der Geist-Schleife definieren wir:

$$\bar{\alpha} \equiv -\frac{\bar{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}. \quad (6.32)$$

Nach [Dri 97] werden der Geist-Gluon-Vertex $\tilde{\Gamma}_3$ und der Geist-Propagator \tilde{D} in Landau-Eichung ($\xi_R = 0$) und auf 1-Schleifen-Niveau unabhängig von der Approximationsstufe r nicht modifiziert. Dies bedeutet, dass die Geist-Schleife neben der perturbativen Struktur nur die logarithmischen Modifikationen trägt. Damit folgt für den transversal projizierten Teil der Geist-Schleife:



$$= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} t^{\mu\mu'}(k) t^{\nu\nu'}(\tilde{k}) \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\ \int d^D q f^{acd} b^{\mu'} \frac{\delta^{cf}}{b^2} f^{bef} (-a)^{\nu'} \frac{\delta^{ed}}{a^2} \left[\frac{a^{-2\epsilon} b^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-4\epsilon}} (\beta_0 g_0^2)^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\
&\quad \int d^D q \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{(\vec{k}\vec{a})(\vec{k}\vec{b})}{k^2}}{a^2 b^2} \left[\frac{a^{-2\epsilon} b^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} (\beta_0 g_0^2)^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Mit der üblichen Feynmanparametrisierung und der symmetrischen Wahl des Schleifenimpulses wie beim 3-Gluon-Vertex,

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \vec{k} - \vec{q}, \tag{6.34}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2} \vec{k} + \vec{q}, \tag{6.35}$$

kommt man durch die Impulsverschiebung $\vec{q}' = \vec{q}' - \frac{1}{2} \vec{k}(1 - 2x)$ zu:

$$\begin{aligned}
6.33 &= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \int_0^1 dx \\
&\quad \int d^D q' \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{(\vec{k}\vec{a})(\vec{k}\vec{b})}{k^2}}{(q'^2 + k^2(x - x^2))^2} \left[\frac{a^{-2\epsilon} b^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} (\beta_0 g_0^2)^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Mit den Formeln der symmetrischen Integration und der schon bei der Gluon-Schleife praktizierten Approximation der logarithmischen Modifikationen 6.18 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\stackrel{div}{\approx} -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \int_0^1 dx \\
&\quad \times \int d^D q' \frac{q'^2(1 - \frac{1}{D})}{(q'^2 + k^2(x - x^2))^2} \left[\frac{q'^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}'^2 + \sigma) \right]^{-2\bar{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Daraus lassen sich die Divergenzen problemlos extrahieren. Mit der Definition

$$\bar{\epsilon} \equiv \epsilon(1 - 2\bar{\alpha}) \tag{6.38}$$

können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
6.37 &\stackrel{5.31}{=} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\
&\quad \times \int_0^1 dx \frac{\Lambda^{-2\bar{\epsilon}} k^2 (x - x^2) (2 - \bar{\epsilon}) \Gamma(1 - \bar{\epsilon}) \Gamma(1 - 2\bar{\alpha})}{(4\pi)^{2-\bar{\epsilon}} (\nu_0^2)^{\epsilon\bar{\alpha}} \Gamma(2 - \epsilon) (\beta_0 g_0^2)^{2\bar{\alpha}} (\bar{\epsilon})^{1-2\bar{\alpha}}},
\end{aligned} \tag{6.39}$$

und erhalten als Endergebnis:

$$\begin{aligned}
&= g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G t^{\mu\nu}(\vec{k}) \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \\
&\quad \times \frac{1}{12} \frac{\Lambda^{-2\bar{\epsilon}} k^2 \Gamma(1 - \bar{\epsilon})}{(4\pi)^{2-\bar{\epsilon}} (\nu_0^2)^{\epsilon\bar{\alpha}} \Gamma(2 - \epsilon) (\beta_0 g_0^2)^{2\bar{\alpha}}} \frac{\Gamma(1 - 2\bar{\alpha})}{(\bar{\epsilon})^{1-2\bar{\alpha}}}.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von dem bekannten perturbativen (s. z.B. [Mut 87]) wiederum nur um einen Faktor und die zusätzliche logarithmische Modifikation. Zur weiteren Behandlung dieses Terms verweisen wir wiederum auf Kapitel 8.

6.1.4 Die Fermion-Schleife

Weil die fermionische anomale Dimension in Landau-Eichung verschwindet, gibt es in diesem Schleifenintegral keine Logarithmen. Aus dem modifizierten Vertex kommt lediglich der mit dem äusseren Impuls skalierende logarithmische Vorfaktor. Damit ist das schon in [Kuh 97] für diesen Term der DS-Gleichung berechnete Ergebnis direkt übertragbar.⁵ Auch in [Pot 00] wird dieser Graph berechnet. Dort ist jedoch die Rechnung für die divergenten Terme nicht zu Ende geführt worden. Weil man wegen eines Fehlers in der Rücknahme der Partialbruchzerlegung (siehe auch Anhang E) mit den dortigen Resultaten auf ein falsches Endergebnis kommen würde, führen wir hier die Rechnung nochmals mit allen wesentlichen Details vor.

$$\begin{aligned}
 &= -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f t^{\mu\mu'}(\vec{k}) t^{\nu\nu'}(\vec{k}) \int d^D q T r \left\{ \gamma^{\mu'} T_{ij}^a \frac{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \delta^{il} \right. \\
 &\quad \times T_{lk}^b \left[\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \frac{N^{r,\nu'}(\not{q}, -\not{\phi}, \vec{k}^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \left[\prod_{s=1}^r (-\not{\phi} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \\
 &\quad \times \left. \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha \delta^{kj} \frac{\prod_{s=1}^r (-\not{\phi} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^r (-\not{\phi} + \kappa_{r,s+})(-\not{\phi} + \kappa_{r,s-})} \right\}. \tag{6.41}
 \end{aligned}$$

Mit den Umbenennungen 3.16 und 3.17 erhält man nach Auflösung der Farbtensorstruktur:

$$= -\frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \delta^{ab} \sum_f \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\bar{k}^2 + s) \right]^\alpha t^{\mu\mu'}(\vec{k}) t^{\nu\nu'}(\vec{k})$$

⁵Man beachte die unterschiedliche Darstellung des Ergebnisses gegenüber den Konventionen dieser Arbeit. Während in [Kuh 97] alle Größen in den reellen Parametern der Propagatoren ausgedrückt werden, behalten wir die komplexen Propagatorpole bei. Dieses ist durch die Rechnung in Kapitel 7 motiviert.

$$\int d^D q Tr \left\{ \gamma^{\mu'} \left[\prod_{s=1}^{r+1} (\not{q} + \hat{\kappa}_{r,s}^{(f)}) \right]^{-1} \frac{N^{r,\nu'}(\not{q}, -\not{q}, \vec{k}^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \left[\prod_{s=1}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \not{q}) \right]^{-1} \right\}. \quad (6.42)$$

Indem man nun wie oben eine Partialbruchzerlegung bezüglich der Schleifenimpulse \not{q} und $-\not{q}$ durchführt⁶ sowie die Summendarstellung des Zählerpolynoms benutzt, gelangt man zu:

$$\begin{aligned} &= -\frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \delta^{ab} \sum_f \frac{\left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} t^{\mu\mu'}(\vec{k}) t^{\nu\nu'}(\vec{k}) \sum_{t,t'=1}^{r+1} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n'=0}^r \\ &\quad \times Tr \left\{ \gamma^{\mu'} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) \right]^{-1} \Lambda^\lambda (k^2)^m \hat{m}_f^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} (-\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^n \bar{C}_{\lambda,m,n,n'}^r \right. \\ &\quad \left. \times \int d^D q \frac{1}{\not{q} + \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}} \gamma^{\nu'} \frac{1}{-\not{q} + \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}} (-\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^{n'} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t'}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) \right]^{-1} \right\}. \quad (6.43) \end{aligned}$$

Macht man die Nenner im Impulsintegral in bekannter Weise rational, so kann man die Spur über die γ -Matrizen ausführen und verbleibt mit dem transversal projizierten Impulsintegral:

$$\begin{aligned} &t^{\mu\mu'}(\vec{k}) t^{\nu\nu'}(\vec{k}) \int d^D q Tr \left\{ \gamma^{\mu'} \frac{\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} - \not{q}}{b^2 + (\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2} \gamma^{\nu'} \frac{\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)} + \not{q}}{a^2 + (\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2} \right\} \\ &= 4t^{\mu\mu'}(\vec{k}) t^{\nu\nu'}(\vec{k}) \int d^D q \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) \delta^{\mu'\nu'} - b^{\mu'} a^{\nu'} - a^{\mu'} b^{\nu'}}{(b^2 + (\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2)(a^2 + (\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2)} \\ &= 4 \frac{t^{\mu\nu}(\vec{k})}{D-1} \int d^D q \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) (D-1) - 2(\vec{b} \cdot \vec{a} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})(\vec{k} \cdot \vec{a})}{k^2})}{(b^2 + (\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2)(a^2 + (\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2)}. \quad (6.44) \end{aligned}$$

Man wählt die symmetrische Parametrisierung der Schleifenimpulse:

$$\vec{a} \equiv \frac{1}{2} \vec{k} - \vec{q} \quad (6.45)$$

$$\vec{b} \equiv \frac{1}{2} \vec{k} + \vec{q}. \quad (6.46)$$

Führt man nun die bekannte Feynmanparametrisierung und die dazugehörige Impulsverschiebung

$$\vec{q} = \vec{q}' - \frac{1}{2} \vec{k} (1 - 2x) \quad (6.47)$$

⁶Zwar sind \not{q} und \not{q}' matrixwertige Größen, der Formalismus der Partialbruchzerlegung lässt sich aber problemlos erweitern. Genauer: Macht man den Nenner rational und führt dann eine Partialbruchzerlegung bezüglich $-a^2$ und $-b^2$ durch, erhält man ein äquivalentes Ergebnis.

durch, erhält man:

$$6.44 = 4t^{\mu\nu}(\vec{k}) \int_0^1 dx \int d^D q' \frac{(\vec{b}' \cdot \vec{a}' - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) - \frac{2}{D-1} \left(\vec{b}' \cdot \vec{a}' - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b}')(\vec{k} \cdot \vec{a}')}{k^2} \right)}{\left(b'^2 + x(a'^2 - b'^2) + (1-x)(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2 + x(\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2 \right)^2}. \quad (6.48)$$

Beachtet man nun noch die Regeln der symmetrischen Integration, wie sie in Anhang A vorgestellt werden, so ergibt sich:

$$= 4t^{\mu\nu}(\vec{k}) \int_0^1 dx \int d^D q' \frac{\left(\frac{2}{D}-1\right) q'^2 - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)} + k^2(1-x)x}{(q'^2 + K^2)^2} \quad (6.49)$$

mit

$$K^2 \equiv k^2(1-x)x + (1-x)(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2 + x(\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2. \quad (6.50)$$

Aus der Impulsintegration erhält man für die divergenten Terme:

$$\begin{aligned} &\stackrel{div}{=} \frac{4\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \int_0^1 dx \left[\Gamma(\epsilon)(k^2(1-x)x - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) - \Gamma(\epsilon-1)K^2 \right] \\ &= \frac{4\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{2}(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2 \right). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Damit findet man für die divergenten Teile des Graphen:

$$\begin{aligned} 6.43 &\stackrel{div}{=} -\frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \delta^{ab} \sum_f \frac{\left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s)\right]^\alpha}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \sum_{t,t'=1}^{r+1} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n'=0}^r \\ &\quad \times \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}) \right]^{-1} \Lambda^\lambda (k^2)^m \hat{m}_f^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} (-\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^n \bar{C}_{\lambda,m,n,n'}^r \\ &\quad \frac{4\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{2}(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^2 \right) (-\hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)})^{n'} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t'}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Durch Rücknahme der Partialbruchzerlegung mit den Formeln aus Anhang E gelangt man zu:

$$\begin{aligned} &= -\frac{2g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \delta^{ab} \sum_f \frac{\left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s)\right]^\alpha}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m=0}^r \\ &\quad \times \Lambda^\lambda (k^2)^m \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{3}k^2 \bar{C}_{\lambda,m,r,r}^r \hat{m}_f^{2r-(2m+\lambda)} - \bar{C}_{\lambda,m,r-1,r-1}^r \hat{m}_f^{2r+2-(2m+\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + \bar{C}_{\lambda,m,r-2,r}^r \hat{m}_f^{2r+2-(2m+\lambda)} + \bar{C}_{\lambda,m,r-1,r}^r \hat{m}_f^{2r+1-(2m+\lambda)} \sum_{t=1}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \right. \\ &\quad \left. - \bar{C}_{\lambda,m,r,r}^r \hat{m}_f^{2r-(2m+\lambda)} \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)} \right]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Wie man durch die Analyse dieses Ausdruckes bezüglich der Fermionmassen \hat{m}_f erkennt, tragen Werte von λ größer als $2r+2$ nicht zu den Divergenzen bei, da im obigen Term keine inversen Fermionmassen auftauchen dürfen. Dieses Ergebnis ist - ohne die aus den logarithmischen Modifikationen stammenden Terme - eine unparametrisierte Version des in [Kuh 97] vorgestellten Resultates.

Von besonderem Interesse ist der chirale Limes der massenlosen Theorie. Hier erhalten wir nur dann Beiträge, wenn der Exponent der Fermionmassen verschwindet. Damit ergibt sich für den chiralen Limes:

$$\begin{aligned}
 6.53 \quad \hat{m}_f = & -\frac{2g_0^2\nu_0^{2\epsilon}\Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}}\delta^{ab}\sum_f \frac{\left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}}\beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s)\right]^\alpha}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{1}{\epsilon} \\
 & \left[\sum_{\lambda=0}^r \frac{\Lambda^{2\lambda}}{3} (k^2)^{r+1-\lambda} \bar{C}_{2\lambda,r-\lambda,r,r}^r - \sum_{\lambda=1}^{r+1} \Lambda^{2\lambda} (k^2)^{r+1-\lambda} \bar{C}_{2\lambda,r+1-\lambda,r-1,r-1}^r \right. \\
 & + \sum_{\lambda=1}^{r+1} \Lambda^{2\lambda} (k^2)^{r+1-\lambda} \bar{C}_{2\lambda,r+1-\lambda,r-2,r}^r + \sum_{\lambda=0}^r \Lambda^{2\lambda+1} (k^2)^{r-\lambda} \\
 & \times \bar{C}_{2\lambda+1,r-\lambda,r-1,r}^r \sum_{t=1}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} - \sum_{\lambda=0}^r \Lambda^{2\lambda} (k^2)^{r-\lambda} \bar{C}_{2\lambda,r-\lambda,r,r}^r \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \hat{\kappa}_{r,t'}^{(f)} \left. \right]. \tag{6.54}
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis werden wir in Kapitel 8 zur Konstruktion der Selbstkonsistenzgleichungen benutzen.

6.2 Der Fermion-Propagator

6.2.1 Die Fermion-Gluon-Schleife

Die Fermion-Gluon-Schleife ist der einzige Schleifengraph, der in der Dyson-Schwinger-Gleichung des Fermion-Propagators vorkommt. Gemäß den in Kapitel 4 gemachten Ansätzen trägt in Landau-Eichung und auf 1-Schleifen-Niveau nur das „Schleifengluon“ logarithmische Modifikationen.

$$\begin{aligned}
 & = g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d^D q \gamma^\mu T_{ik}^a \delta^{kl} \frac{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+}^{(f)})(\not{q} + \kappa_{r,s-}^{(f)})} \\
 & \quad T_{lj}^b \left[\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \frac{N^{r,\nu}(\not{q}, \not{k}, a^2)}{\prod_{s=1}^r (a^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \left[\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \delta^{ab} t^{\mu\nu}(\vec{a})
 \end{aligned}$$

$$\frac{\prod_{s=1}^r (a^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)} (a^2 + u_{r,s}\Lambda^2)(a^2 + u_{r,s-\Lambda^2})} \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \quad (6.55)$$

Unter Kontraktion der Farbindizes, mit den Umbenennungen der Propagatorpole 3.16 und 3.17 und mit den üblichen Partialbruchzerlegungen gibt dies:

$$\begin{aligned} &= \frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \delta^{ij} \frac{N_C^2 - 1}{N_C} \int d^D q \sum_{t,t'=1}^{r+1} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n'=0}^r \Lambda^\lambda \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}) \right]^{-1} \\ &\quad \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})} (-\hat{u}_{r,t'}\Lambda^2)^m \hat{m}_f^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} (-\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^n \bar{C}_{\lambda,m,n,n'}^r \gamma^\nu t^{\mu\nu}(\vec{a}) \\ &\quad \frac{\not{k}^{n'}}{a^2 + \hat{u}_{r,t'}\Lambda^2} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t'}) \right]^{-1} \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \\ &\quad \times \left[\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Indem man nun noch den Nenner des Impulsintegrals von der Dirac-Matrixstruktur befreit, gelangt man zu dem folgenden Impulsintegral:

$$\int d^D q \gamma^\mu \frac{(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} - \not{k})}{b^2 + (\kappa_{r,t}^{(f)})^2} \gamma^\nu t^{\mu\nu}(\vec{a}) \frac{1}{a^2 + \hat{u}_{r,t'}\Lambda^2} \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha}. \quad (6.57)$$

Mit den Formeln für die Kontraktion von Dirac-Matrizen in D euklidischen Dimensionen ($D \neq 4$),

$$\gamma^\mu \gamma^\mu = -D, \quad (6.58)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (D-2)\gamma^\nu, \quad (6.59)$$

$$\not{k} \not{k} = -k^2, \quad (6.60)$$

$$\not{k} \gamma^\mu \not{k} = \gamma^\mu k^2 - 2k^\mu \not{k}, \quad (6.61)$$

vereinfacht sich dies zu:

$$\begin{aligned} 6.57 &= \int d^D q \left[\frac{(1-D)\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} + (3-D)\not{k}}{(b^2 + (\kappa_{r,t}^{(f)})^2)(a^2 + \hat{u}_{r,t'})} - \frac{2(\vec{a} \cdot \vec{b})\not{k}}{(b^2 + (\kappa_{r,t}^{(f)})^2)(a^2 + \hat{u}_{r,t'})a^2} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Durch Feynmanparametrisierung erhält man:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dx \int d^D q \left[\frac{(1-D)\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} + (3-D)\not{k}}{(b^2 + x(a^2 - b^2) + K'^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dy \frac{x 2\Gamma(3)(\vec{a} \cdot \vec{b})\not{k}}{(b^2 + x(a^2 - b^2) + K'_y)^3} \right] \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Mit der inzwischen bekannten Impulsverschiebung $\vec{q}' = \vec{q}' - \frac{1}{2}\vec{k}(1-2x)$ gibt dies:

$$= \int_0^1 dx \int d^D q' \left[\frac{(1-D)\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} + (3-D)\not{k}}{(q'^2 + K^2)^2} - \int_0^1 dy \frac{x 2\Gamma(3)(\vec{a} \cdot \vec{b})\not{a}}{(q'^2 + K'_y)^3} \right] \\ \times \left[\left(\frac{a^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \quad (6.64)$$

mit

$$K^2 = k^2(1-x)x + x\hat{u}_{r,t'}\Lambda^2 + (1-x)(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2. \quad (6.65)$$

$$K_y^2 = k^2(1-x)x + xy\hat{u}_{r,t'}\Lambda^2 + (1-x)(\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^2. \quad (6.66)$$

Wir sind wieder nur an den divergenten Termen interessiert und bekommen dafür mit den Regeln der symmetrischen Integration:

$$\stackrel{\text{div}}{=} \int_0^1 dx \int d^D q' \left[\frac{(1-D)\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} + (3-D)x\not{k}}{(q'^2 + K^2)^2} \left[\frac{q'^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \right. \\ \left. - \int_0^1 dy \frac{2x\Gamma(3)(q'^2\not{k}(x-1) + (\vec{k} \cdot \vec{q}')\not{q}'(1-2x))}{(q'^2 + K'_y)^3} \left[\frac{q'^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \right]. \quad (6.67)$$

Daraus erhält man mit 5.24:

$$\stackrel{\text{div}}{=} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'}(\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}\Gamma(1-\epsilon')}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}(4\pi)^{2-\epsilon}\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} \\ \times \left[(1-D)\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} + \frac{3-D}{2}\not{k} + 2\Gamma(3)\frac{1}{6}\not{k}\frac{D-1}{D} \right] \\ \stackrel{\text{div}}{=} -3 \frac{\Lambda^{-2\epsilon'}(\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}\Gamma(1-\epsilon')}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}(4\pi)^{2-\epsilon}\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}. \quad (6.68)$$

Damit erhalten wir für den gesamten Ausdruck:

$$6.56 \quad \stackrel{\text{div}}{=} 3 \frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \delta^{ij} \frac{N_C^2 - 1}{N_C} \sum_{t,t'=1}^{r+1} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n'=0}^r \Lambda^\lambda \left[\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \not{k}^{n'} \\ \times \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}) \right]^{-1} (-\hat{\kappa}_{r,t}^{(f)})^{n+1} \hat{m}_f^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \bar{C}_{\lambda,m,n,n'}^r \\ (-\hat{u}_{r,t'}\Lambda^2)^m \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t'}) \right]^{-1} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'}(\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}\Gamma(1-\epsilon')}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}(4\pi)^{2-\epsilon}\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} \\ = 3 \frac{g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}}{2} \delta^{ij} \frac{N_C^2 - 1}{N_C} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{n'=0}^r \Lambda^\lambda \left[\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \not{k}^{n'} \\ \times \left[\hat{m}_f^{r+1-(n'+\lambda)} \bar{C}_{\lambda,r,r-1,n'}^r - \hat{m}_f^{r-(n'+\lambda)} \bar{C}_{\lambda,r,r,n'}^r \sum_{t=1}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \right] \\ \frac{\Lambda^{-2\epsilon'}(\beta_0 g_0^2)^{-\alpha}\Gamma(1-\epsilon')}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}(4\pi)^{2-\epsilon}\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}}. \quad (6.69)$$

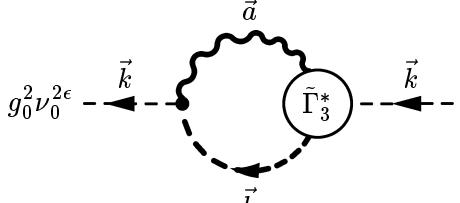
Auch hier ist es von Interesse, den chiralen Limes zu betrachten:

$$\begin{aligned}
 6.69 \quad & \stackrel{\hat{m}_f=0}{=} \frac{3}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ij} \frac{N_C^2 - 1}{N_C} \left[\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} (\beta_0 g_0^2)^{-\alpha} \Gamma(1-\epsilon') \Gamma(1-\alpha)}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} (4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(2-\epsilon) (\epsilon')^{1-\alpha}} \\
 & \times \left[\sum_{\lambda=1}^{r+1} \Lambda^\lambda \not{k}^{r+1-\lambda} \bar{C}_{\lambda,r,r-1,r+1-\lambda}^r - \sum_{\lambda=0}^r \Lambda^\lambda \not{k}^{r-\lambda} \bar{C}_{\lambda,r,r,r-\lambda}^r \sum_{t=1}^{r+1} \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)} \right].
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

6.3 Der Geist-Propagator

6.3.1 Die Geist-Gluon-Schleife

Nach [Dri 97] bleibt der $\tilde{\Gamma}_3$ -Vertex in Landau-Eichung ($\xi_R = 0$) perturbativ. In dem aktuellen, logarithmisch modifizierten Ansatz kommen jedoch die logarithmischen Korrekturen hinzu. Wir erhalten:



$$\begin{aligned}
 & = g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d^D q f^{dac} k^\mu \delta^{cf} \frac{1}{b^2} \left[\frac{b^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}} f^{efb} b^\nu \delta^{ed} t^{\mu\nu}(\vec{a}) \\
 & \quad \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{\bar{\alpha}} \frac{\prod_{s=1}^r (a^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{r+1} (a^2 + \hat{u}_{r,s} \Lambda^2)} \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha}.
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Durch Kontraktion der Farb- und Lorentzindizes sowie Partialbruchzerlegung bzgl. a^2 erhält man:

$$\begin{aligned}
 & = -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} N_C \delta^{ab} \int d^D q \sum_{t=1}^{r+1} \prod_{s=1}^r \Lambda^2 (u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t}) \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2 (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \right]^{-1} \\
 & \quad \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{\bar{\alpha}} \left[\frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})}{b^2 (a^2 + \hat{u}_{r,t} \Lambda^2)} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{k})(\vec{a} \cdot \vec{b})}{b^2 (a^2 + \hat{u}_{r,t} \Lambda^2) a^2} \right] \\
 & \quad \times \left[\left(\frac{b^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}} \left[\left(\frac{a^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha}.
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Mit der aus dem vorigen Abschnitt bekannten Feynmanparametrisierung und der Standardimpulsverschiebung für die symmetrische Wahl der Schleifenimpulse gelangt man schließlich zu:

$$= -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} N_C \delta^{ab} \sum_{t=1}^{r+1} \prod_{s=1}^r (u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t}) \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \right]^{-1} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{\bar{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} & \times \int d^D q \left[\int_0^1 dx \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})}{(q'^2 + K^2)^2} - \int_0^1 dx dy \frac{x \Gamma(3)(\vec{a} \cdot \vec{k})(\vec{a} \cdot \vec{b})}{(q'^2 + K_y^2)^3} \right] \\ & \times \left[\frac{b^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}} \left[\frac{a^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \end{aligned} \quad (6.73)$$

mit

$$K^2 = \frac{1}{4} k^2 (1-x)x + x \hat{u}_{r,t} \Lambda^2, \quad (6.74)$$

$$K_y^2 = \frac{1}{4} k^2 (1-x)x + xy \hat{u}_{r,t} \Lambda^2. \quad (6.75)$$

Wir wollen nun die divergenten Terme isolieren. Dazu definieren wir

$$\hat{\alpha} \equiv \alpha + \bar{\alpha} \quad (6.76)$$

und folglich

$$\hat{\epsilon} \equiv \epsilon(1 - \hat{\alpha}). \quad (6.77)$$

Wie bei der Gluon-Schleife kann man die beiden logarithmischen Faktoren zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{b^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{b}^2 + s) \right]^{-\bar{\alpha}} \left[\left(\frac{a^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{a}^2 + s) \right]^{-\alpha} \\ & \stackrel{\text{div}}{=} \left[\left(\frac{q'^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}'^2 + \sigma(k)) \right]^{-\bar{\alpha}} (1 + O(q'^{-1})). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Mit den Regeln der symmetrischen Integration gelangen wir zu:

$$\begin{aligned} 6.73 \stackrel{\text{div}}{=} & -g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} N_C \delta^{ab} \sum_{t=1}^{r+1} \prod_{s=1}^r (u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t}) \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \right]^{-1} \\ & \int d^D q \left[\left(\frac{q'^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{q}'^2 + \sigma(k)) \right]^{-\bar{\alpha}} \left[\int_0^1 dx \frac{k^2 x}{(q'^2 + K^2)^2} \right. \\ & \left. + \int_0^1 dx dy \frac{x \Gamma(3) q'^2 k^2 (1-x) + \frac{1}{D} q'^2 k^2 (1-2x)}{(q'^2 + K_y^2)^3} \right] \\ & \times \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Hierauf können wir die Formel 5.24 anwenden. Anschließend führt man die Parameterintegrale aus, die hier trivial sind, und nimmt mit den Formeln aus Anhang E die Partialbruchzerlegung zurück, was nur die Identität liefert. Damit erhalten wir als Endergebnis:

$$\stackrel{\text{div}}{=} -\frac{3}{4} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} N_C \delta^{ab} k^2 \frac{\Lambda^{-2\hat{\epsilon}} (\beta_0 g_0^2)^{-\hat{\alpha}} \Gamma(1-\hat{\epsilon})}{(\nu_0^2)^\epsilon \hat{\alpha} (4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\hat{\alpha})}{(\hat{\epsilon})^{1-\hat{\epsilon}}} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{\bar{\alpha}}. \quad (6.80)$$

Der logarithmisch modifizierte Ansatz führt lediglich zu den schon bekannten Modifikationen gegenüber dem perturbativen Resultat: Veränderung der $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz und ein zusätzlicher logarithmischen Faktor, der vom äußeren Impuls abhängt. Wie erwartet gibt es keinen Beitrag zum nichtperturbativen Sektor der Theorie, weil in 6.80 keine Terme vorkommen, die proportional zu einer *ganzen* Potenz von Λ sind. In Kapitel 8 wird erläutert, dass nur solche Terme über den Selbstkonsistenzmechanismus zur Reproduktion der nullten Ordnung beitragen können.

Kapitel 7

Der $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex

Ist die wissenschaftliche Begeisterung nicht der schönste Triumph, den die Vernuft über dich feiert?

Feuerbach [8]

Als Beispiel für eine Rechnung mit den schattenreduzierten Dyson-Schwinger-Gleichungen behandeln wir nun noch die führenden Terme für den $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex. Aus 3.53 folgt durch Skelettgraphenentwicklung des Bethe-Salpeter-Kerns K_{4t}^{sr} bis zur Ordnung $O(g_0^2)$:

$$\begin{aligned}
 3.53 = & \quad + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \left(\text{Diagramm 1} \right) \\
 & + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \left(\text{Diagramm 2} \right) + O(g_0^4). \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Die hier nicht explizit aufgeführten Terme enthalten Schleifenbeträge zu dem *oberflächlich konvergenten* Kern K_{4t}^{sr} und tragen deshalb nicht zu den Termen *nullter* Ordnung in g^2 sondern nur zu den sogenannten quasiperturbativen Korrekturen bei. Setzen wir die in Kapitel 4 definierten modifizierten Feynmanregeln in diese Gleichung ein, dann fällt sofort Folgendes auf.

Die logarithmischen Faktoren der Vertizes und Propagatoren kürzen sich auf den inneren Linien *exakt*. Die Schleifenintegrale können keine logarithmischen Terme enthalten, sondern stimmen mit den entsprechenden Integralen für den nicht modifizierten Fall überein. Des Weiteren erhält man logarithmische Faktoren in den drei äußeren Impulsen, die mit denen des $\bar{\Gamma}_3^*$ -Vertex übereinstimmen. Die resummierte Gleichung 7.1 zeigt also in den Schleifengraphen das gleiche Skalenverhalten wie der logarithmisch modifizierte Ansatz. Zum divergenten Teil der DS-Gleichung der $\bar{\Gamma}_3^*$ -Amplitude trägt auf 1-Schleifen-Niveau

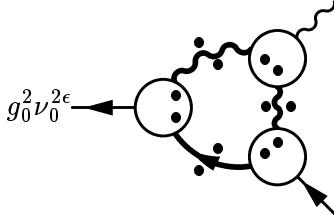
nur der zweite Graph in Gleichung 7.1 bei, da man für den dritten Graphen zeigt, dass eventuelle divergente Terme in Landau-Eichung durch symmetrische Integration verschwinden [Kuh 97]. Dies ist die Bestätigung eines perturbativen Resultates, wie es sich z.B. in [Mut 87] findet.

Für eine möglichst einfache und kompakte Notation der Rechnung müssen wir noch die folgende Konvention einführen:

$$\Delta^r(u, t) \equiv \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} \Lambda^2(\hat{u}_{r,s} - \hat{u}_{r,t}) \prod_{\bar{s}=1}^r \Lambda^2(u_{r,2s} - \hat{u}_{r,t}), \quad (7.2)$$

$$\Delta^r(\kappa^{(f)}, t) \equiv \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (\hat{\kappa}_{r,s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}) \prod_{\bar{s}=1}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \hat{\kappa}_{r,t}^{(f)}). \quad (7.3)$$

Damit erhält man für den Graphen:



$$= \int d^D q T_{a_1}^{i_1 j_1} \sum_{t_1, t_2, t_3=1}^{r+1} \left[\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{p}_3^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\ (\Delta^r(\kappa^{(f)}, t_1))^{-1} N_{F\bar{F}T}^{r \mu_1}(\not{p}_1, -\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)}, -\hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2) \frac{\delta^{j_1 j_2} T_{a_2}^{j_2 i_2}}{A + \hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)}} \\ N_{F\bar{F}T}^{r \mu_2}(-\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)}, \not{p}_2, -\hat{u}_{r,t_2} \Lambda^2) \left[\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} t^{\mu_2 \mu_5}(\vec{B}) \\ (\Delta^r(u, t_2))^{-1} \frac{\delta^{a_2 a_5} i f^{a_3 a_4 a_5}}{B^2 + \hat{u}_{r,t_1} \Lambda^2} \left[\delta^{\nu' \mu_4} (p_3 - C)^{\mu_5} N_{3T}^r(p_3^2, -\hat{u}_{t,t_3} \Lambda^2; -\hat{u}_{t,t_2} \Lambda^2) \right. \\ \left. + \delta^{\mu_4 \mu_5} (C + B)^{\nu'} N_{3T}^r(-\hat{u}_{t,t_3} \Lambda^2, -\hat{u}_{t,t_2} \Lambda^2; p_3^2) \right. \\ \left. + \delta^{\mu_5 \nu'} (-B - p_3)^{\mu_4} N_{3T}^r(-\hat{u}_{t,t_2} \Lambda^2, p_3^2; -\hat{u}_{t,t_3} \Lambda^2) \right] \\ t^{\mu_4 \mu_1}(\vec{C}) \frac{\delta^{a_1 a_4} t^{\mu_4 \mu_1}(\vec{p}_3)}{C^2 + \hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2} (\Delta^r(u, t_3))^{-1} \left[\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]^{-1}. \quad (7.4)$$

Die Kontraktion der Farbindizes ergibt:

$$-\frac{N_C}{2} T_{a_3}^{i_1 i_2}. \quad (7.5)$$

Setzt man nun noch die N-Funktionen der Vertizes ein, so gelangt man zu:

$$= -\frac{N_C}{2} T_{a_3}^{i_1 i_2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \int d^D q \sum_{t_1, t_2, t_3=1}^{r+1} \left[\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \sum_{n_1, n'_2=0}^r (\not{p}_1)^{n_1} \sum_{\lambda_1}^{4r} \Lambda^{\lambda_1}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_1, n'_1=0}^r (-\hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2)^{m_1} \hat{m}_f^{4r-(2m_1+n_1+n'_1+\lambda_1)} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)})^{n'_1} \sum_{\lambda_2=0}^{4r} \Lambda^{\lambda_2} \sum_{m_2, n_2=0}^r \\
& (-\hat{u}_{r,t_2} \Lambda^2)^{m_2} \hat{m}_f^{4r-(2m_2+n_2+n'_2+\lambda_2)} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)})^{n_2} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^r \\
& \left[\Delta^r(\kappa, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3) \right]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 n_1 n'_1}^r \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 n'_2}^r C_{k_1, k_2; k_3}^r \\
& (\Lambda^2)^{3r-(k_1+k_2+k_3)} \left[(A^2 + (\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)})^2)(B^2 + \hat{u}_{r,t_2} \Lambda^2)(C^2 + \hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2) \right]^{-1} \\
& \gamma^{\mu_1} (\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)} - A) \gamma^{\mu_2} \left[t^{\nu' \mu_1} (\vec{C})(p_3 - C)^{\mu_5} t^{\mu_2 \mu_5} (\vec{B}) c_{p_3, t_3, t_2}^{k_1 k_2 k_3} \right. \\
& \left. + t^{\mu_1 \mu_4} (\vec{C}) t^{\mu_4 \mu_2} (\vec{B})(C + B)^{\nu'} c_{t_3, t_2, p_3}^{k_1 k_2 k_3} - t^{\nu' \mu_2} (\vec{B})(B + p_3)^{\mu_4} t^{\mu_1 \mu_4} (\vec{C}) c_{t_2, p_3, t_3}^{k_1 k_2 k_3} \right] \\
& (p_2)^{n'_2} \left[\prod_{s=1}^r (p_2 + \hat{\kappa}_{r,2s}^{(f)}) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]^{-1} t^{\nu' \nu} (\vec{p}_3) \\
& \times \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{p}_3^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G}{2\beta_0}}. \tag{7.6}
\end{aligned}$$

Der nächste Schritt besteht in der (recht umständlichen) Kontraktion der Lorentzindizes und der Feynmanparametrisierung des resultierenden Nenners. Mit der Wahl¹ für

$$\vec{A} \equiv \vec{q} + \frac{1}{3}(\vec{p}_2 + \vec{p}_1), \tag{7.7}$$

$$\vec{B} \equiv \vec{q} + \frac{1}{3}(\vec{p}_3 - \vec{p}_2), \tag{7.8}$$

$$\vec{C} \equiv \vec{q} - \frac{1}{3}(\vec{p}_1 + \vec{p}_3) \tag{7.9}$$

findet man als Feynmanparametrisierung:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(A^2 + (\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)})^2) B^2 (B^2 + \hat{u}_{r,t_2} \Lambda^2) C^2 (C^2 + \hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2)} \\
& = \Gamma(5) \int_0^1 dx dy dz_1 dz_2 \frac{z_1(1-z_1)z_2^3}{(A^2 + z_2(B^2 + z_1(b^2 - C^2) - A^2) + K'^2)^5}. \tag{7.10}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Impulsverschiebung:

$$\vec{q} = \vec{q}' + z_2(\vec{p}_2 - z_1 \vec{p}_3). \tag{7.11}$$

Da hier nur die divergenten Teile interessieren und das Integral nur logarithmisch divergent ist, hat diese keinen Einfluss auf die divergenten Terme. Nachdem man mit den Formeln der symmetrischen Integration die Divergenzen extrahiert hat, muss man noch mit den Formeln

$$\gamma^a \gamma^a = -D \tag{7.12}$$

$$\gamma^a \gamma^b \gamma^a = (D-2)\gamma^b \tag{7.13}$$

¹Man beachte das \vec{p}_1 hier entgegen der üblichen Konvention als *auslaufender*, d.h. in Pfeilrichtung laufender, Impuls gezählt wird.

die γ -Matrizen kontrahieren. Dabei stellt man fest, dass nur der mittlere Summand aus Gleichung 7.6 mit einem numerischen Faktor von $-\frac{3}{2}$ zu den divergenten Termen beiträgt, und erhält als Endergebnis:

$$\begin{aligned}
7.6 \stackrel{\text{div}}{=} & \frac{3N_C}{4} T_{a_3}^{i_1 i_2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \nu_0^{2\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon) \Lambda^{-2\epsilon}}{(4\pi)^2} \sum_f \left[\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} \sum_{n_1, n'_2, k_3=0}^r (\not{p}_1)^{n_1} \gamma^{\nu'} \\
& \sum_{t_1, t_2, t_3=1}^{r+1} \sum_{\lambda_1}^{4r} \Lambda^{\lambda_1} \sum_{m_1, n'_1=0}^r (-\hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2)^{m_1} \hat{m}_f^{4r-(2m_1+n_1+n'_1+\lambda_1)} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)})^{n'_1} \\
& \sum_{\lambda_2=0}^{4r} \Lambda^{\lambda_2} \sum_{m_2, n_2=0}^r (-\hat{u}_{r,t_2} \Lambda^2)^{m_2} \hat{m}_f^{4r-(2m_2+n_2+n'_2+\lambda_2)} (-\hat{\kappa}_{r,t_1}^{(f)})^{n_2} \sum_{k_1, k_2=0}^r \\
& \left[\Delta^r(\kappa, t_1) \Delta^r(u, t_2) \Delta^r(u, t_3) \right]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 n_1 n'_1}^r \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 n'_2}^r C_{k_1, k_2; k_3}^r \\
& (\Lambda^2)^{3r-(k_1+k_2+k_3)} (-\hat{u}_{r,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{r,t_2} \Lambda^2)^{k_2} \\
& (p_3^2)^{k_3} (\not{p}_2)^{n'_2} \left[\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \hat{\kappa}_{r,2s}^{(f)}) \right]^{-1} t^{\nu' \nu}(\vec{p}_3) \\
& \times \left[\frac{p_3^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{p}_3^2 + s) \right]^{-\frac{\gamma_G}{2\beta_0}}. \tag{7.14}
\end{aligned}$$

Diese Rechnung wurde, wenn auch nicht in dieser einfachen Darstellung, schon in [Kuh 97] durchgeführt.² Anders als in den Propagatorberechnungen kann man hier die Partialbruchzerlegungen nicht zurücknehmen und so kein einfacheres Ergebnis erreichen. Darin spiegelt sich die bei gleicher Schleifenordnung verbesserte Bestimmung der nichtperturbativen Parameter durch die resummierte Form der DS-Gleichungen wieder.

Führt man in 3.55 auch für den Gluon-Kanal eine Skelettgraphenentwicklung der Bethe-Salpeter-Kerne durch und analysiert den Divergenzgrad der resultierenden 1-Schleifen-Graphen, findet man, dass auch in diesem Fall nur ein Graph vom oben behandelten Typ zur Reproduktion der nullten Ordnung beitragen kann. Man muss daher in 7.14 die Impulse p_1 und p_3 austauschen. Weil dies jedoch eine reine *Umbenennung* der Impulse ist (die Graphen sind rotationssymmetrisch), ändert sich an der Rechnung nichts und man kann das obige Ergebnis auch für den Gluon-Kanal der resummierten Dyson-Schwinger-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3^*$ -Vertex übernehmen. Dies ist eine direkte Folge der Tatsache, dass der BS-resummierte Term 7.4 einen in beiden Fermionbeinen symmetrischen Charakter hat, während in den für unresummierten Gleichungen auftretenden Dreiecksgraphen ein unsymmetrisch angeordneter nackter (perturbativer) Vertex auftaucht. Man erkennt daran, dass die BS-resummierte und schattenreduzierte Form der DS-Gleichungen den grundlegenden Symmetrien der Theorie besser darstellen kann als die gewöhnlichen DS-Gleichungen.

²Bei einem Vergleich beachte man den Druckfehler in der Potenz von Λ im ersten Term auf Seite 139 von [Kuh 97]: statt m_3 schreibe $2m_3$.

Kapitel 8

Selbstkonsistenzgleichungen

Qui nimium probat, nihil probat.
Sprichwort [9]

Aus den Berechnungen auf 1-Schleifen-Niveau, die in den vorigen Kapiteln durchgeführt worden sind, erhält man ein Gleichungssystem, aus dem die durch die nichtperturbativen Erweiterungen eingeführten zusätzlichen Parameter der Theorie selbstkonsistent bestimmt werden müssen. Dazu jedoch müssen die obigen Ergebnisse richtig interpretiert und bearbeitet werden.

Weil in den nichtperturbativ-erweiterten Ansätzen immer auch der perturbative Grenzfall enthalten ist, müssen die Dyson-Schwinger-Gleichungen die perturbativen Divergenzen reproduzieren, mit denen die Renormierungskonstanten berechnet werden, die in diesem Schema unverändert bleiben. Daher muss man vor dem Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichungen den perturbativen Anteil der divergenten Terme abspalten und darf nur die nichtperturbativen Beiträge für die Selbstkonsistenzgleichungen verwenden. Wir müssen im Rahmen der nichtperturbativ-erweiterten Theorie deshalb die Größe

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right]^{-2\epsilon} \quad (8.1)$$

verschieden behandeln. Bei den nicht zu ganzen Potenzen von Λ proportionalen Termen, den sog. *quasiperturbativen Korrekturen* wird 8.1 entwickelt zu:

$$8.1 \approx \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} (1 + O(\epsilon)), \quad (8.2)$$

für die restlichen Terme benutzt man die schon in Kapitel 3 vorgestellte Relation:

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right]^{-2\epsilon} = \frac{1}{\beta_0} (1 + O(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon)). \quad (8.3)$$

Wir stehen hier vor dem Problem, wie dieses Programm auf die logarithmisch modifizierte Theorie übertragen werden kann. Wie schon bei den Endergebnissen in Kapitel 6 erwähnt, unterscheidet sich das dort erhaltene Ergebnis insbesondere in einem numerischen Faktor von den Resultaten ohne Modifikationen. Da es uns als vordringlich erscheint, auch bei der modifizierten Theorie eine Reproduktion der *perturbativen* Renormierungskonstanten zu erreichen,

berücksichtigen wir nur Terme mit mindestens einer ganzen Potenz in Λ (bzw. in einem fermionischen Propagatorparameter) für die Selbstkonsistenzgleichungen. Die Behandlung dieser Terme illustrieren wir am Beispiel der Gluon-Schleife des Gluon-Propagators.

Mit 8.2 können wir den in 6.24 zusätzlich zur $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz auftretenden Faktor folgendermaßen abschätzen:

$$\left[\beta_0 g_0^2 \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\Lambda(\epsilon)}{\nu_0} \right]^{-2\epsilon} \right]^{-2\alpha} = ((4\pi)^2)^{-2\alpha} (1 + O(\epsilon)). \quad (8.4)$$

Den verbleibenden numerischen Faktor entwickeln wir zusammen mit den Renormierungsgruppenlogarithmen nach ϵ und α um 0 und berücksichtigen für die erste Ordnung in g_0^2 nur die konstanten Terme:¹

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Lambda^{-2\epsilon} \Gamma(1 - 2\alpha)}{(4\pi)^{4\alpha} (1 - 2\alpha)^{1-2\alpha}} \left[\left(\frac{k^2}{\nu_0^2} \right)^{-2\epsilon} \beta_0 g^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^\alpha = \frac{1}{\epsilon} [1 + O(\alpha, \epsilon)]. \quad (8.5)$$

In den nichtperturbativen Teilen der Schleifenintegrale stehen wir vor einem ganz anderen Problem. Da das jeweils linke Bein der Graphen in einen perturbativen Vertex läuft, fehlt der nach außen faktorisierende Logarithmus im Propagatorimpuls. Daher unterscheiden sich linke und rechte Seite der Selbstkonsistenzgleichung in ihrem Verhalten bei Skalierung des äußeren Impulses. Es scheint daher, dass eine selbstkonsistente Reproduktion der nullten Ordnung der Störungstheorie unmöglich ist. Mit der Resummationstechnik, die für die höheren Vertexfunktionen in Kapitel 3 vorgestellt worden ist, kann man jedoch genau dieses Problem zum Teil beheben. Dort erhält man z.B. für die auf 1-Schleifen-Niveau berechnete DS-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3^*$ -Vertex im Fermion-Kanal die geforderte Art der logarithmischen Abhängigkeit vom äußeren Impuls. Dies dient uns als Hinweis darauf, dass ein analoges Verfahren auch bei den Propagator-Gleichungen möglich sein könnte und man durch explizite Berechnung der Beiträge in höheren Schleifenordnungen die fehlenden Teile der Summe (im Sinne der in Abschnitt 4.1 vorgestellten Resummation) erhalten könnte. Eine genauere Analyse dieser Fragestellung liegt jedoch wegen ihres rechentechnischen Umfangs und ihrer mathematischen Schwierigkeit (man beachte die Vereinfachungen in Kapitel 5) außerhalb der Möglichkeiten dieser Arbeit. Wir müssen uns daher damit begnügen, die Reproduktion der fehlenden Faktoren zu *postulieren*.

Ein weiteres Detail ist eine Anmerkung wert. Wie auch für die quasiperturbativen Beiträge ergibt sich auch in den Selbstkonsistenzgleichungen für die Propagatoren ein numerischer Faktor, den wir oben vernachlässigt hatten. In der resummierten Form der Gleichung des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex taucht dieser Faktor nicht auf. Es wäre daher naheliegend, ihn auch bei der Konstruktion der SK-Gleichungen der Propagatoren zu vernachlässigen. Man erhielt dann die schon in [Dri 97] und [Kuh 97] vorgestellte Form der Selbstkonsistenzgleichungen. Da das von uns oben vorgeschlagene Prinzip der Resummation von der in Kapitel 3 be-

¹Dieses Vorgehen erscheint dadurch gerechtfertigt, dass Resummationseffekte im perturbativen Limes gerade nicht berücksichtigt werden können.

nutzten Bethe-Salpeter-Resummation jedoch signifikant abweicht,² können wir nicht behaupten, dass diese numerischen Faktoren durch die Resummation verschwinden. Wir müssen sie daher explizit angeben und führen dazu die folgende Funktion ein:

$$\Omega(x) = \frac{\Gamma(1-x)}{(1-x)^{1-x}} (4\pi)^{-2x}. \quad (8.6)$$

Das Beispiel des $\bar{\Gamma}_2^*$ -Vertex

Wir führen nun als Beispiel die notwendigen Operationen am $\bar{\Gamma}_2$ -Vertex für die Approximationsstufe $r = 1$ und im chiralen Limes $\hat{m}_f = 0$ vor.

Zunächst muss man den nichtperturbativen Anteil aus der Darstellung des inversen Propagators extrahieren:

$$-\frac{(\not{k} + \hat{\kappa}_{1,1}^{(f)})(\not{k} + \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})}{\not{k} + \kappa_{1,2}^{(f)}} = -\not{k} - \frac{\not{k}(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} + \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)} - \kappa_{1,2}^{(f)}) + \hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)}}{\not{k} + \kappa_{1,2}^{(f)}}. \quad (8.7)$$

Da bei dem dazugehörigen 1-Schleifen-Graphen nur nichtperturbative Terme auftauchen,³ können wir Relation 8.3 anwenden und die zu den SK-Gleichungen beitragenden Terme notieren:

$$\begin{aligned} 6.70 &\stackrel{r=1}{=} \frac{4}{\beta_0} \frac{1}{\not{k} + \kappa_{1,2}^{(f)}} \Omega(\alpha) \left[\not{k}(\Lambda \bar{C}_{1101}^1 - (\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} + \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})) \right. \\ &\quad \left. + \Lambda^2 \bar{C}_{2100}^1 - \Lambda \bar{C}_{1110}^1 (\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} + \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)}) \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die beiden SK-Gleichungen

$$-\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} - \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)} + \kappa_{1,2}^{(f)} = \frac{4}{\beta_0} \Omega(\alpha) [\Lambda \bar{C}_{1101}^1 - (\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} + \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})] \quad (8.9)$$

und

$$-\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)} = \frac{4}{\beta_0} \Omega(\alpha) [\Lambda^2 \bar{C}_{2100}^1 - \Lambda \bar{C}_{1110}^1 (\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)} + \hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})]. \quad (8.10)$$

Als numerischen Wert für $\Omega(\alpha)$ erhalten wir mit $\alpha = \frac{5}{28}$ bei $N_F = 6$:

$$\Omega(\alpha) \approx 0,54311. \quad (8.11)$$

²Die Bethe-Salpeter-Resummation ist für die Propagator-Gleichungen aus prinzipiellen Gründen gerade *nicht* anwendbar.

³Wir erinnern uns: In Landau-Eichung verschwand die Renormierungskonstante in $O(g_0^2)$.

Der Γ_2^* -Vertex

Hier nun sind zum ersten Mal sämtliche „Beschwerden“ des logarithmisch modifizierten Ansatzes vorhanden. Für den Γ_2^* -Vertex gilt:

$$\begin{aligned} & -\delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{(k^2 + \hat{u}_{1,1}\Lambda^2)(k^2 + \hat{u}_{1,2}\Lambda^2)}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{2\alpha} \\ &= -k^2 \delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k})(1 + O(\alpha, \epsilon)) - \frac{k^2 \Lambda^2 (\hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{1,2} - u_{1,2}) + \Lambda^4 \hat{u}_{1,1} \hat{u}_{1,2}}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \\ & \quad \times \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{2\alpha} \delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k}). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Mit dem Ergebnis für die Gluon-Schleife 6.24 müssen wir nun erstmals die volle Prozedur zur Konstruktion der SK-Gleichungen, wie oben beschrieben, durchführen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 6.24 \stackrel{!}{\sim} & \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{25}{4} k^2 (1 + O(\alpha, \epsilon)) \\ & + \delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{1}{\beta_0} \Omega(2\alpha) \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{2\alpha} \frac{1}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \\ & \times \left[k^2 \Lambda^2 \left[\frac{15}{2} C_{011}^1 - \frac{5}{4} C_{110}^1 - \frac{25}{4} u_{1,2} - 9(-C_{011}^1 + \hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{1,2}) \right] \right. \\ & \quad \left. - 9\Lambda^4 (-C_{010}^1 + C_{110}^1 (\hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{1,2})) \right]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Hierbei ist unbedingt zu beachten, dass im Unterschied zu 6.24 der logarithmische Faktor mit der Potenz 2α auftaucht und die zusätzliche α -Potenz nur durch eine *postulierte* Resummation zu Stande gekommen ist.

Für den Tadpole-Graphen 6.30 müssen wir sogar die Resummation des vollständigen logarithmischen Faktors postulieren. Ein perturbativer Beitrag des Tadpoles hingegen ist in Übereinstimmung mit [Mut 87] nicht vorhanden. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 6.30 \stackrel{!}{\sim} & \delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{1}{\beta_0} \Omega(2\alpha) \frac{27}{4} [\hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{1,2} - u_{1,2}] \Lambda^2 \\ & \times \left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}} \beta_0 g_0^2 \ln(\tilde{k}^2 + s) \right]^{2\alpha}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Aus dem Ergebnis für die Geist-Schleife 6.40 erhalten wir keine nichtperturbativen Beiträge (vgl. [Dri 97]), sondern nur quasiperturbative Korrekturen zur Renormierungskonstante Z_3 . Wir schreiben daher:

$$6.40 = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{1}{4} k^2 (1 + O(\bar{\alpha}, \epsilon)). \quad (8.15)$$

Der komplizierteste Term der DS-Gleichung des Γ_2^* -Vertex ist die Fermion-Schleife. Wir betrachten sie hier nur im chiralen Limes (d.h. im masselosen Fall). Auch der Fermion-Schleife „fehlt“ eine α -Potenz des logarithmischen Faktors,

deren Resummation wiederum postuliert werden muss. Unter dieser Annahme erhält man dann für $r = 1$ und im chiralen Limes:

$$\begin{aligned}
 6.54 &\stackrel{!}{\sim} -\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k})\frac{2}{3}k^2(1+O(\alpha,\epsilon)) \\
 &-2\delta^{ab}t^{\mu\nu}(\vec{k})\frac{1}{\beta_0}\frac{1}{k^2+u_{1,2}\Lambda^2}\left[\frac{k^{-2\epsilon}}{\nu_0^{-2\epsilon}}\beta_0g_0^2\ln(\tilde{k}^2+s)\right]^{2\alpha} \\
 &\times\left\{k^2\left[\Lambda^2\left(\frac{1}{3}(\bar{C}_{2011}^1-u_{1,2})-\bar{C}_{2100}^1\right)+\Lambda\bar{C}_{1101}^1\sum_f(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}+\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})\right.\right. \\
 &-\sum_f(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})\left]+\Lambda^2\left[-\Lambda^2\bar{C}_{4000}^1+\Lambda\bar{C}_{3001}^1\sum_f(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}+\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})\right.\right. \\
 &\left.\left.-\bar{C}_{1011}^1\sum_f(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})\right]\right\}. \tag{8.16}
 \end{aligned}$$

Damit erhält man aus 3.35 durch Koeffizientenvergleich die folgenden SK-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{1,2} - u_{1,2} &= -\frac{1}{\beta_0}\left\{\Omega(2\alpha)\left[\frac{33}{2}C_{011}^1 - \frac{5}{4}C_{110}^1 - 13\frac{1}{2}u_{1,2}\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.-\frac{9}{4}(\hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{1,2})\right]\right. \\
 &\quad \left.-2\left[\frac{1}{3}(\bar{C}_{2011}^1-u_{1,2})-\bar{C}_{2100}^1+\bar{C}_{1101}^1\Lambda^{-1}\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.\times\sum_f(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}+\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})-\sum_f\Lambda^{-2}(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})\right]\right\} \tag{8.17}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{1,1}\hat{u}_{1,2} &= -\frac{1}{\beta_0}\left\{9\Omega(2\alpha)[C_{010}^1-C_{110}^1(\hat{u}_{1,1}+\hat{u}_{1,2})+\frac{3}{4}u_{1,2}(\hat{u}_{1,1}+\hat{u}_{1,2})]\right. \\
 &\quad \left.+2\left[\bar{C}_{4000}^1-\bar{C}_{3001}^1\sum_f\Lambda^{-1}(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}+\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)})\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+\bar{C}_{1011}^1\sum_f\Lambda^{-2}(\hat{\kappa}_{1,1}^{(f)}\hat{\kappa}_{1,2}^{(f)})\right]\right\}. \tag{8.18}
 \end{aligned}$$

Als numerischen Wert für $\Omega(2\alpha)$ erhalten wir:

$$\Omega(2\alpha) \approx 0.30470. \tag{8.19}$$

Dies entspricht den in [Kuh 97] aufgestellten SK-Gleichungen. Wie man jedoch die fermionischen Beiträge zu diesen Gleichungen im Fall nicht-verschwindender Fermionmassen behandeln muss, bleibt ein strittiger Punkt. Wir gehen auf diese Diskussion in Anhang F kurz ein.

Der $\tilde{\Gamma}_2^*$ -Vertex

Für den $\tilde{\Gamma}_2^*$ -Vertex ergeben sich keine SK-Gleichungen, da es in 6.80 keine nicht-perturbativen Beiträge gibt.

Der $\bar{\Gamma}_3^*$ -Vertex

Zunächst merken wir an, dass sich hier der für die Selbstkonsistenz im nichtperturbativen Teil notwendige logarithmische Faktor exakt ergibt. Wir sind deshalb nicht, wie im Fall der Propagatorgleichungen, auf eine Postulierung eines nicht weiter untersuchten Resummationsschemas angewiesen.

Wir formulieren nun die Selbstkonsistenzgleichungen, die sich im masselosen chiralen Fall aus dem Ergebnis in 7.14 ergeben. Damit werden erstmals, wenn auch nur in niedrigster Approximationstufe, Selbstkonsistenzgleichungen für einen resummierten und schattenpolreduzierten Vertex angegeben. Da die dazu notwendigen Rechnungen, insbesondere zur Isolierung des perturbativen Anteils in 7.14 unübersichtlich sind und zum Verständnis nicht wesentlich beitragen, haben wir sie in Anhang F zusammengefasst. Wir notieren nur die endgültige Form der Selbstkonsistenzgleichungen.

Im Unterschied zu bisherigen Rechnungen erhalten wir eine *zusätzliche* SK-Gleichung.⁴ Dies liegt daran, dass der Koeffizient der für $r = 1$ führenden Impulspotenz $p_3^2 p_1 \gamma^\nu p_2$ nicht schon per Definition auf 1 gesetzt ist, sondern, vor allem weil man die Partialbruchzerlegung in 7.14 nicht mehr zurücknehmen kann, ein recht unübersichtlicher und vor allem auch nichtlinearer Term in den Propagatorparametern ist. Wir erhalten also aus F.2 und F.3 mit $\hat{m}_f = 0$:⁵

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{t_1, t_2, t_3=1}^2 \left[\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} - \hat{u}_{1,t_3} \Lambda^3 \bar{C}_{1110}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 + \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 \right] \\
&\quad \times \left[\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} - \hat{u}_{1,t_2} \Lambda^3 \bar{C}_{1101}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 + \Lambda^3 \bar{C}_{3001}^1 \right] \\
&\quad \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} C_{k_1 k_2 1}^1 \Lambda^{4-2k_1-2k_2} \\
&\quad \times (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2}. \tag{8.20}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich fundamental von der bisher gewohnten Form der Selbstkonsistenzgleichungen. Zum ersten Mal muss man mit 1 einen nicht-verschwindenden numerischen Koeffizienten reproduzieren. Die restlichen Glei-

⁴In [DKS 99] wurde ein zum folgenden Term analoger Ausdruck noch nicht als *systematisch bedingte* SK-Gleichung erkannt.

⁵Die Definition der Δ -Symbole findet sich in 7.2 bzw. 7.3.

chungen folgen dem bekannten Muster:

$$\begin{aligned}
 & \Lambda \bar{C}_{1110}^1 - \kappa_{1,2}^{(f)} \\
 = & \frac{9}{4} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \sum_{t_1,t_2,t_3=1}^2 \left[\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} - \hat{u}_{1,t_3} \Lambda^3 \bar{C}_{1110}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 + \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 \right] \right. \\
 & \times \left[\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^3 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \bar{C}_{1110}^1 - \hat{u}_{1,t_2} \Lambda^4 \bar{C}_{2100}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 + \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 \right] \\
 & \times \sum_{k_1,k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} C_{k_1 k_2 1}^1 \Lambda^{4-2k_1-2k_2} \\
 & \left. \times (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} \right\}. \tag{8.21}
 \end{aligned}$$

Für \bar{C}_{1101}^1 ergibt sich eine weitere Gleichung. Wegen der Ladungskonjugations-symmetrie der fermionischen Vertexparameter $\bar{C}_{lmnk}^r = \bar{C}_{lmkn}^r$ ist diese jedoch zur obigen Gleichung äquivalent. Weiter finden wir:

$$\begin{aligned}
 & \Lambda^2 \bar{C}_{2100}^1 - (\kappa_{1,2}^{(f)})^2 \\
 = & \frac{9}{4} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \sum_{t_1,t_2,t_3=1}^2 \left[\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^3 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \bar{C}_{1101}^1 - \hat{u}_{1,t_3} \Lambda^4 \bar{C}_{2100}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^3 \bar{C}_{3001}^1 + \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 \right] \right. \\
 & \times \left[\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^3 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \bar{C}_{1110}^1 - \hat{u}_{1,t_2} \Lambda^4 \bar{C}_{2100}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 + \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 \right] \\
 & \times \sum_{k_1,k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} C_{k_1 k_2 1}^1 \Lambda^{4-2k_1-2k_2} \\
 & \left. \times (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} \right\} \tag{8.22}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \\
 = & \frac{9}{4} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \sum_{t_1,t_2,t_3=1}^2 \left[\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} - \hat{u}_{1,t_3} \Lambda^3 \bar{C}_{1110}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 + \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 \right] \right. \\
 & \times \left[\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} - \hat{u}_{1,t_2} \Lambda^3 \bar{C}_{1101}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 + \Lambda^3 \bar{C}_{3001}^1 \right] \\
 & \times \sum_{k_1,k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} C_{k_1 k_2 0}^1 \Lambda^{6-2k_1-2k_2} \\
 & \left. \times (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} \right\}. \tag{8.23}
 \end{aligned}$$

Zu der folgenden Gleichung für \bar{C}_{3010}^1 gibt es wieder eine äquivalente für \bar{C}_{3001}^1 , die wir hier nicht notieren. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \\
 = & \frac{9}{4} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \sum_{t_1, t_2, t_3=1}^2 \left[\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} - \hat{u}_{1,t_3} \Lambda^3 \bar{C}_{1110}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 + \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 \right] \right. \\
 & \times \left[\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^3 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \bar{C}_{1110}^1 - \hat{u}_{1,t_2} \Lambda^4 \bar{C}_{2100}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 + \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 \right] \\
 & \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} C_{k_1 k_2 0}^1 \Lambda^{6-2k_1-2k_2} \\
 & \left. \times (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} \right\}. \tag{8.24}
 \end{aligned}$$

Abschließend erhalten wir noch:

$$\begin{aligned}
 & \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 (\kappa_{1,2}^{(f)})^2 \\
 = & \frac{9}{4} \frac{1}{\beta_0} \left\{ \sum_{t_1, t_2, t_3=1}^2 \left[\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^3 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \bar{C}_{1101}^1 - \hat{u}_{1,t_3} \Lambda^4 \bar{C}_{2100}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^3 \bar{C}_{3001}^1 + \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 \right] \right. \\
 & \times \left[\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^3 \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \bar{C}_{1110}^1 - \hat{u}_{1,t_2} \Lambda^4 \bar{C}_{2100}^1 - \hat{\kappa}_{1,t_1}^{(f)} \Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 + \Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 \right] \\
 & \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} C_{k_1 k_2 0}^1 \Lambda^{6-2k_1-2k_2} \\
 & \left. \times (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} \right\}. \tag{8.25}
 \end{aligned}$$

Wir hatten die zu diesen Ergebnissen führenden Berechnungen im Fermion-Kanal des $\bar{\Gamma}_3^*$ -Vertex durchgeführt. Wie schon bei der Berechnung des einzigen divergenten Graphen in Kapitel 7 erwähnt, erhält man im Gluon-Kanal dieses Vertex keine neuen Beiträge. Der einzige Term, der zur Selbstkonsistenz der nullten Ordung auf 1-Schleifen-Niveau beiträgt, bleibt der in Kapitel 7 berechnete Graph, jedoch mit einer dem Gluon-Kanal angepassten Permutation der Impulse untereinander.⁶ Daher erhält man auf 1-Schleifen-Niveau aus den DS-Gleichungen 3.53 und 3.54 nur diese sechs Gleichungen.

Eine weitere Anmerkung betrifft die Rolle der logarithmischen Modifikationen in den Selbstkonsistenzgleichungen des $\bar{\Gamma}_3^*$ -Vertex. Der von uns in Kapitel 4 gewählte Ansatz hat auf die inneren, punktierten Propagatorlinien der resummierten Gleichungen keinen Einfluss. Die hier bewiesenen SK-Gleichungen gelten daher in identischer Form auch für den $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex.

⁶Da es sich dabei um eine reine Umbenennung der Impulse handelt, ändert sich gegenüber 7.14 nichts.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Wenn alles gesagt ist, soll man schweigen
Kiesow [10]

Abschließend wollen wir die Ergebnisse unserer Untersuchung logarithmisch modifizierter Feynmanregeln zusammenfassen.

Ausgehend von einer gegenüber den in der Literatur (s. z.B. [Mut 87] oder [Kug 97]) zu findenden Ergebnissen verbesserten Lösung der 't Hooft-Weinberg-Gleichung für die QCD, konnten wir in Kapitel 4 unsere Wahl für die modifizierten Ansätze physikalisch untermauern. Dies stellt gegenüber den Untersuchungen in [ASS 93] eine signifikante Verbesserung dar. Wir verfügen damit erstmals über modifizierte Ansätze, in denen aus der Renormierungsgruppenanalyse stammende Eigenschaften einer exakten Lösung der QCD verarbeitet sind. Zudem haben wir die Grenzen und Näherungen unserer Ansätze explizit notieren können. Mit der in Kapitel 5 vorgestellten neuartigen Berechnung der $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz logarithmisch modifizierter Integrale konnten wir im Folgenden die sich aus unseren Ansätzen ergebenden Beiträge zu den Selbstkonsistenzgleichungen der nullter Ordnung exakt bestimmen. Auch hier konnten wir die Ergebnisse aus [ASS 93] präzisieren. Während dort mit einem *ad-hoc*-Ansatz und einer Abschätzung der Impulsintegration ein, in unserer Notation, Faktor $\frac{\pi^2}{1-\alpha}\beta_0^\alpha$ als Veränderung in der SK-Gleichung hergeleitet wurde, haben wir zeigen können, dass dieser Faktor bei präziserer Rechnung nicht auftritt. Wir erhalten anstatt dessen den rein numerischen Faktor $\Omega(\alpha)$ bzw. $\Omega(2\alpha)$, welche von der Größenordnung 1 sind. In dem folgenden Kapitel konnten wir die divergenten Terme aller 1-Schleifen-Graphen aus den DS-Gleichungen der Propagatoren berechnen und so die in [Kuh 97] vorgestellten Ergebnisse bestätigen. In Kapitel 7 ist uns die erstmalige Berechnung des auf 1-Schleifen-Niveau einzigen divergenten Graphen aus der BS-resummierten und schattenreduzierten DS-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex gelungen. In Kapitel 8 konnten wir die entsprechenden Selbstkonsistenzgleichungen aufstellen. Dabei sind besonders die sechs SK-Gleichungen aus der resummierten Form des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex in niedrigster Approximationsstufe bemerkenswert. Diese stellen in ihrer neuartigen Form ein besonders signifikantes Ergebnis dieser Arbeit dar.

Zugleich können wir aber auch nicht verschweigen, dass wichtige Probleme, die sich mit den logarithmisch modifizierten Ansätzen ergeben, im Rahmen

dieser Arbeit nicht abschließend untersucht und beurteilt werden konnten. Dies betrifft zunächst das Problem der Nichteindeutigkeit für die Wahl der modifizierten höheren Vertizes. Da aus der Analyse der 't Hooft-Weinberg-Gleichung hier keine hinreichenden Einschränkungen folgen, haben wir möglicherweise keine hinreichend allgemeinen Ansätze benutzt. Insbesondere die Einbeziehung anderer Impulskombinationen in die modifizierten Ansätze, wie sie z.B. durch die Ergebnisse von [EGM 79] nahe gelegt werden, verdiente eine weitere Untersuchung.

Aber auch im Rahmen des von uns gewählten Ansatzes sind noch wichtige Probleme zu lösen. Die Berechnung der Divergenz logarithmischer Integrale in Kapitel 5 stellt zwar einen wichtigen Fortschritt dar, bleibt jedoch auf einen einfachen - eben den divergenten - Anteil beschränkt. Hier wäre es wünschenswert, ein Schema zur vollständigen Berechnung (auch verallgemeinerter) logarithmisch modifizierter Integrale zu entwickeln. Dies gilt auch und vor allem in Hinblick auf die Berechnung der konvergenten Terme, die letztendliches Ziel dieses Ansatzes sein sollte. Wir können an dieser Stelle nur feststellen, dass die dafür bisher zur Verfügung stehenden mathematischen Mittel nicht ausreichen und hier Anlass für mathematisch anspruchsvolle weitere Untersuchungen besteht.

Das vielleicht wichtigste Problem des von uns gewählten Ansatzes stellt aber sicherlich die schon in Kapitel 8 diskutierte Verletzung der Skalierungsinvarianz der DS-Gleichungen vor allem der Propagatoren dar. Dadurch dass sich aus dem Mechanismus der DS-Gleichungen „systemimmanent“ ein linker perturbativer Vertex in den Gleichungen befindet, fehlt den Graphen ein Teil des für eine einfache Selbstkonsistenz notwendigen logarithmischen Faktors im äußeren Impuls. Nur für die 3-Punkt- und 4-Punkt-Vertizes konnten wir in Kapitel 3 mit den durch Bethe-Salpeter-Resummation entstandenen schattenreduzierten DS-Gleichungen die notwendigen Resummationen bei einer großen Klasse von Graphen explizit ausführen. Dies gibt uns Anlass zu der Hoffnung, dass sich ein ähnliches Verfahren auch für die Propagator-Gleichungen und die in den resummierten Gleichungen der höheren Vertizes verbliebenen unresumierte Terme finden lässt. Neben der in Kapitel 8 angesprochenen Resummation höherer Schleifenordnungen, die die in Kapitel 4 gezeigte Darstellung der RG-Logarithmen reproduzieren könnte, gehört dazu auch die sogenannte *triviale Symmetrisierung*. Da der Formalismus der DS-Gleichungen systematisch bedingt die Symmetrien der Vertizes unter Impulsvertauschung bricht und damit ein Impuls (in dieser Arbeit der jeweils linke) ausgezeichnet wird, kann man sich damit behelfen, dass man entsprechende Gleichungen für alle Impulskanäle aufstellt und aufaddiert. Dieses Verfahren sollte eine Etablierung der logarithmischen Faktoren ermöglichen und so die SK-Gleichungen begründen können.

Aber auch jenseits der logarithmischen Modifikationen konnten in dieser Arbeit Resultate erzielt werden, die für weitere Untersuchungen im Rahmen des nichtperturbativ-erweiteren Ansatzes nützlich sein werden. Mit dem in Kapitel 3 ausführlich beschriebenen Beweis der Bethe-Salpeter-resummierten und schattenreduzierten DS-Gleichungen steht nunmehr eine Darstellung der DS-Gleichungen zur Verfügung, bei denen die Selbstkonsistenzgleichungen schon auf 1-Schleifen-Niveau auf besondere Weise miteinander gekoppelt sind. Als be-

sonders ermutigendes Ergebnis kann man festhalten, dass mit der in dieser Arbeit durchgeführten konsequent getrennten Behandlung der perturbativen und nichtperturbativen Terme aus der DS-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex eine zusätzliche Selbstkonsistenzgleichung hergeleitet werden konnte. Auch aus der im Rahmen dieser Arbeit nicht berechneten DS-Gleichung des Γ_3 -Vertex sollte sich eine zusätzliche SK-Gleichung ergeben. Mit den in der ersten Approximationsstufe ($r = 1$) jeweils sechs SK-Gleichungen des $\bar{\Gamma}_3$ - und Γ_3 -Vertex und den je zwei SK-Gleichungen der Propagatoren stehen nunmehr 16 Bestimmungsgleichungen für die insgesamt 16 Parameter der Propagatoren und der 3-Punkt-Vertizes zur Verfügung. Dies heisst, dass sich für $r = 1$ und auf 1-Schleifen-Niveau und vor allem auch unter Vernachlässigung des Γ_4 -Vertex bzw. dessen Anteilen im K_{4s}^{sr} -Kern ein *vollständig bestimmtes* Gleichungssystem ergibt. Dieses manifest nicht-lineare System ist zwar nur noch numerisch lösbar, jedoch muss man zu dessen Lösung nicht mehr wie bisher Bewegungsgleichungskondensate oder andere Hilfsgrößen heranziehen.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 2 und auch aus Kapitel 4 kann man selbstverständlich auch auf *rein perturbativem* Niveau logarithmisch modifizierte Feynmanregeln definieren. Dieses Vorgehen hat eine überraschende Konsequenz. Wählt man die Ansätze für die modifizierten Vertizes entsprechend unserem Vorgehen in Kapitel 4, kürzen sich die logarithmischen Modifikationen auf den inneren Propagatorlinien von Schleifengraphen exakt heraus. Die Schleifenintegrale für die Selbstenergien bleiben also unverändert.¹ Zugleich entwickeln die entsprechenden Terme die benötigten logarithmischen Faktoren in den äußeren Impulsen. Ebenso könnte man eine Theorie betrachten, die sowohl mit logarithmisch modifizierten perturbativen als auch mit logarithmisch modifizierten nichtperturbativ-erweiterten Feynmanregeln arbeitet. Für diesen Fall gilt mit den Ansätzen aus Kapitel 4 ebenfalls, dass die Modifikationen in den Schleifenintegralen verschwinden. Eine solche Theorie würde zu den bisherigen Ergebnissen in [Dri 97] und [Kuh 97] vollkommen äquivalente SK-Gleichungen liefern. Ein Problem bei der Konstruktion der SK-Gleichungen wegen einer Verletzung der Skaleninvarianz, wie wir es in Kapitel 8 diskutieren mussten, tritt nicht auf. Um in einem solchen Ansatz Abweichungen von den bekannten Resultaten erhalten zu können, muss man andere, besser in den Skalierungseigenschaften der Vertizes bezüglich eines Impulses begründete Ansätze für die logarithmischen Modifikationen aufstellen. Wie die Berechnungen in Kapitel 6 jedoch zeigen, könnten solche Modifikationen bestenfalls Einfluss auf die konvergenten Terme haben, trügen also zum Problem der selbstkonsistenten Reproduktion der nullten Ordnung nicht bei.

Abschließend können wir feststellen, dass die in dieser Arbeit vorgenommene Untersuchung logarithmisch modifizierter Feynmanregeln einige interessante und vielversprechende Resultate erzielen konnte. Es sind jedoch noch weitere Forschungen und vor allem die Entwicklung neuer Rechentechniken nötig, um über die Relevanz dieses Ansatzes ein fundiertes Urteil abgeben zu können.

¹Dieses Phänomen konnten wir auch bei den BS-resummierten DS-Gleichungen beobachten.

Teil III

Anhang

Anhang A

A.1 Notationen und Konventionen

In der gesamten Arbeit wird für das Volumenelement der Impulsintegration die folgende Abkürzung gebraucht:

$$\bar{d} = \frac{d}{2\pi}. \quad (\text{A.1})$$

Im Rahmen der dimensionellen Regularisierung rechnen wir in

$$D = 4 - 2\epsilon \quad (\text{A.2})$$

Dimensionen.

Für die euklidischen γ -Matrizen gilt:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\mu = -D \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (D - 2)\gamma^\nu \quad (\text{A.5})$$

und

$$\text{Tr}\{\mathbf{1}\} = 4, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = -4\delta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Darstellungstheorie der SU(N)

$SU(N)$ ist die Menge aller unitären $N \times N$ -Matrizen mit positiver Determinante. Es sind f_{abc} die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der $SU(N)$ -Lie-Algebra und T^a die Generatoren der Lie-Algebra, so dass gilt:

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c. \quad (\text{A.9})$$

Dann gilt in Fundamentaldarstellung:

$$T_{ij}^a = \frac{1}{2}(\lambda^a)_{ij}, \quad (\text{A.10})$$

$$T_{il}^a T_{lj}^a = C_F \delta_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Dabei ist C_F der Erwartungswert des quadratischen Casimirooperators in der Fundamentaldarstellung und es gilt:

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (\text{A.12})$$

Mit den total symmetrischen Strukturkonstanten d_{abc} erhält man weiter:

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N} \delta^{ab} + d^{abc} T^c \quad (\text{A.13})$$

und

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}\{T^a T^b T^c\} = \frac{1}{4} (d^{abc} + i f^{abc}). \quad (\text{A.15})$$

Für die adjungierte Darstellung gilt:

$$\begin{aligned} T_{bc}^a &= -i f_{abc}, \\ T_{bc}^a T_{cd}^a &= C_G \delta_{bd} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

mit

$$C_G = N. \quad (\text{A.17})$$

Analog zu oben findet man:

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = C_G \delta^{ab}, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}\{T^a T^b T^c\} = i \frac{N}{2} f^{abc}. \quad (\text{A.19})$$

Aus obenstehenden Gleichungen ergeben sich die folgenden nützlichen Relationen für die Strukturkonstanten:

$$f^{abc} = -f^{acb} \quad (\text{A.20})$$

$$f^{acd} f^{bcd} = C_G \delta^{ab} \quad (\text{A.21})$$

$$f^{adc} f^{bcd} f^{cf} = \frac{N}{2} f^{abc}. \quad (\text{A.22})$$

Wir benötigen noch die folgende Konvention:

$$f_{ab,cd} = f_{abn} f_{cdn}. \quad (\text{A.23})$$

A.3 Integralformeln und Entwicklungen

Impulsintegrale:

Das Standardintegral der dimensionellen Regularisierung (z.B. [Dri 97]) ist:

$$\int d^D q \frac{(q^2)^m}{(q^2 + M^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 + m) \Gamma(b - a - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(b)} (M^2)^{a-b+D/2}. \quad (\text{A.24})$$

Die in dieser Arbeit benötigten Formeln der symmetrischen Integration lauten:
Sei f eine beliebige, nichtsinguläre Funktion in q^2 . Dann gilt

$$\int \bar{d}^D q q^{\mu_1} \cdots q^{\mu_m} f(q^2) = 0 \quad (\text{A.25})$$

für m ungerade und

$$\int \bar{d}^D q q^{\mu_1} q^{\mu_2} f(q^2) = \frac{\delta^{\mu_1 \mu_2}}{D} \int \bar{d}^D q q^2 f(q^2) \quad (\text{A.26})$$

sowie

$$\int \bar{d}^D q q^{\mu_1} q^{\mu_2} q^{\mu_3} q^{\mu_4} f(q^2) = \frac{\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3}}{D(D+2)} \int \bar{d}^D q q^4 f(q^2). \quad (\text{A.27})$$

Parameterintegrale

Für die Feynmanparametrisierung gilt (z.B. [Mut 87]):

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(xA + (1-x)B)^{\alpha+\beta}}. \quad (\text{A.28})$$

In Kapitel 2 benutzen wir die Formeln

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{|x^2 + a^2|} \quad (\text{A.29})$$

(vgl. [PBM 88a] 1.2.11.10) und

$$\int \frac{dx}{e^{ax} + b} = \frac{1}{ab} [ax - \ln(e^{ax} + b)] \quad (\text{A.30})$$

(vgl. [PBM 88a] 1.3.1.5).

In Kapitel 5 benötigen wir:

$$\int_0^1 dx \frac{x^{t-1}(1-x)^{n-1}}{(ax+b)^c} = \frac{\Gamma(t)\Gamma(n)}{b^c \Gamma(n+t)} {}_2F_1(c, t, n+t; -\frac{a}{b}), \quad (\text{A.31})$$

(vgl. z.B. [WG 89] 4.5.(6)). Für die ${}_2F_1$ -Funktion gilt außerdem:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) \quad (\text{A.32})$$

(vgl. [EMO 53a] 2.9.(2)),

$${}_2F_1(n'-\epsilon', n; t+n; z) = \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(n'-\epsilon')\Gamma(n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n'+m-\epsilon')\Gamma(n+m)}{\Gamma(t+n+m)} \frac{z^m}{m!} \quad (\text{A.33})$$

(vgl. z.B. [WG 89] 4.6.(1)) und als Sonderfall der ${}_2F_1$ -Funktion:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m)z^m}{\Gamma(n)m!} = {}_2F_1(n, b; b; z)|_{b \text{ bel.}} = (1-z)^{-n} \quad (\text{A.34})$$

(vgl. z.B. [KF 60] 4.(40)). Zuletzt braucht man:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dt \frac{t^{a-1}}{t+z} e^{-bt} = \frac{1}{z^{1-a}} e^{bz} \Gamma(1-a, bz) \quad (\text{A.35})$$

([PBM 88a] 2.3.6.13). Für die Entwicklung der unvollständigen Γ -Funktion gilt nach [EMO 53b], Formel 9.2.(5):

$$\Gamma(1-a, b) = \Gamma(1-a) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^{1-a+j}}{j!(1-a+j)}. \quad (\text{A.36})$$

Für eine alternative Rechnung kann man

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1} e^{-px}}{(e^{qx} + z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)_{n-1} (-z)^k}{(p+qk+qn)^\alpha} \quad (\text{A.37})$$

([PBM 88a] 2.3.12.1) benutzen.

Für diese Arbeit sind die folgenden Eigenschaften der Γ -Funktion von Bedeutung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (\text{A.38})$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{A.39})$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.40})$$

für alle natürlichen Zahlen n . Zudem benutzen wir die folgenden Entwicklungen der Γ -Funktion um 0 bzw. -1 :

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (\text{A.41})$$

$$\Gamma(\epsilon - 1) = -\frac{1}{\epsilon} + \gamma + O(\epsilon) \quad (\text{A.42})$$

(siehe z.B. [Mut 87]). Dabei ist γ die Eulerkonstante:

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right] \approx 0.57721. \quad (\text{A.43})$$

Anhang B

Definition der T -Amplituden der 3- und 4-Punkt-Vertizes

Die in den 3-Punkt-Vertizes auftauchenden vollen Amplituden T sind so definiert, dass in der DS-Gleichung keine 1-Teilchen-reduziblen Graphen vorkommen. Daher kann man sie durch ihr Verhältnis zu den vollen zusammenhängenden 4-Punkt, 5-Punkt und 6-Punkt-Amplituden explizit angeben. Wichtig hierbei ist die Feststellung, dass es keine T_3 -Amplituden gibt und dass statt dieser die Γ_3 -Vertizes vorkommen. Für die 4-Punkt-Amplituden bringen wir nur das Beispiel:

$$\text{Diagramm mit } T_{4s} \text{ links} = \text{Diagramm mit } T_4 \text{ links} - \text{Diagramm mit } \Gamma_3 \text{ links und } \Gamma_3 \text{ rechts} \quad (\text{B.1})$$

$$\Leftrightarrow T_{4s} = T_4 - \Gamma_3 D \Gamma_3. \quad (\text{B.2})$$

Dann gilt analog für:

$$\bar{T}_{4s} = \bar{T}_4 - \Gamma_3 D \bar{\Gamma}_3, \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{T}_{4s} = \tilde{T}_4 - \Gamma_3 D \tilde{\Gamma}_3. \quad (\text{B.4})$$

Oben haben wir den Gluon-Gluon \leftarrow Fermion-Antifermion-Kanal als s-Kanal bezeichnet. Den davon grundsätzlich verschiedenen Antifermion-Gluon \leftarrow Gluon-Fermion-Kanal bezeichnen wir daher als t-Kanal, wenn er als horizontaler Kanal betrachtet wird. Dies gilt für die Geist-Amplituden analog. Damit gilt:

$$\text{Diagramm mit } \bar{T}_{4t} \text{ links} = \text{Diagramm mit } \bar{T}_4 \text{ links} - \text{Diagramm mit } \bar{\Gamma}_3 \text{ links und } \bar{\Gamma}_3 \text{ rechts} \quad (\text{B.5})$$

$$\Leftrightarrow \bar{T}_{4t} = \bar{T}_4 - \bar{\Gamma}_3 S \bar{\Gamma}_3 \quad (\text{B.6})$$

und analog

$$\tilde{T}_{4t} = \tilde{T}_4 - \tilde{\Gamma}_3 \tilde{D} \tilde{\Gamma}_3. \quad (\text{B.7})$$

Für die Amplituden mit drei linken Gluon-Beinen findet man:

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with } T_{3,2} \\ \text{Diagram with } T_5 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } T_5 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_4 \text{ and } \bar{\Gamma}_3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array}, \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with } \bar{T}_{3,2} \\ \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with } \bar{T}_4 \text{ and } \bar{\Gamma}_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array}, \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with } \tilde{T}_{3,2} \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array}. \quad (\text{B.10})$$

Die entsprechenden Gleichungen für die $T_{2,3}$ -Amplituden umfassen dagegen mehr Terme, wobei (3, 4, 5) die drei *rechten* Gluon-Beine bezeichnen:

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with } T_{2,3} \\ \text{Diagram with } T_5 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } T_5 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_4 \text{ and } \bar{\Gamma}_3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with } \bar{T}_4 \text{ and } \bar{\Gamma}_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} - 2 \text{ zykl. Perm. (3, 4, 5)}, \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with } \bar{T}_{2,3} \\ \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_4 \text{ and } \bar{\Gamma}_3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \\ \text{Diagram with } \bar{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} - 2 \text{ zykl. Perm. (3, 4, 5)}, \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with } \tilde{T}_{2,3} \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram with } \tilde{T}_4 \text{ and } \tilde{\Gamma}_3 \\ \text{Diagram with } \tilde{T}_5 \\ \text{Diagram with } T_4 \text{ and } \Gamma_3 \end{array} - 2 \text{ zykl. Perm. (3, 4, 5)}. \quad (\text{B.13})$$

Als letzter in den Gleichungen auftretender Term bleibt $T_{3,3}$ zu analysieren.
Man findet:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram} = \text{Diagram} - \text{Diagram} \\
 \text{Diagram} - 2 \text{ zykl. Perm. } (4, 5, 6).
 \end{array}
 \tag{B.14}$$

Anhang C

Bethe-Salpeter-Gleichungen

Für den Beweis der BS-Resummation der 3-Punkt-Vertizes und des 4-Punkt-Vertex muss man Folgendes bemerken.

Die Anwesenheit des 4-Punkt-Vertex bedingt, dass man bei Reduzibilitätsuntersuchungen, also der Aufstellung der BS-Gleichungen, die Gluonlinien anders als Fermion- und Geistlinien behandeln muss. Während man bisher nur die allgemeine 2-Teilchen-Irreduzibilität im horizontalen Kanal als Kriterium verwandt hat [Kuh 97], muss man die Bethe-Salpeter-Kerne nun anders konstruieren. Wir wählen als Kriterium zur Konstruktion der Kerne *die 2-Teilchen- und zusätzlich dazu die 3-Gluonlinien-Irreduzibilität im horizontalen Kanal*. Dies ist insofern eine natürliche Wahl für die Resummation der Vertizes, als dass dadurch in den so konstruierten Bethe-Salpeter-Kernen keine inneren Schleifen von der Art mehr vorkommen, die schon in den DS-Gleichungen aufgeführt sind.

Gleichungen für den Fermion- und Geist-Kanal

Die Bethe-Salpeter-Gleichungen sind in diese beiden Fällen von einfacher Struktur:

$$\text{Diagramm 1} = \text{Diagramm 2} + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}, \quad , \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Diagramm 1} = \text{Diagramm 2} + g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}, \quad . \quad (\text{C.2})$$

Gleichungen für den Gluon-Kanal

Da wir die BS-Kerne hier an die rechte Seite der BS-Terme schreiben, haben die rechten Beine der hier betrachteten vollen Vertizes auf die Struktur der nun folgenden Gleichungen keinen Einfluss. Wir führen daher hier nur den Fall mit zwei rechten Gluonbeinen an. Ebenso wird die Beschriftung der vollen Vertizes

und Kerne unterlassen, da sich diese einfach aus der Anordnung ihrer Beine ergibt. Wie schon oben angesprochen, stehen anstatt der T_3 - die Γ_3 -Amplituden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \text{Diagram} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram} \\
 &+ \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{Diagram} - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram} \\
 &- g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{Diagram} . \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung für die T_{4s} -Amplitude ist wegen der Existenz des *oberflächlich divergenten* Γ_4 -Vertex von den anderen BS-Gleichungen fundamental verschieden. Während in den anderen 4-Punkt-BS-Kernen *nur* die Austauschgraphen in den nicht-horizontalen Kanälen (also t und u) zur Reproduktion der nullten Ordnung beitragen können, beinhaltet K_{4s} einen *zusätzlich* zu den Austauschgraphen im t - und u -Kanal zur nullten Ordnung beitragenden Term. Dieser entsteht durch Analyse des 1-Teilchen-irreduziblen Γ_4 -Vertex bezüglich der hier geforderten Irreduzibilität im s -Kanal. Ansätze für diese, die Bose-Symmetrie des Γ_4 -Vertex verletzende, *neue oberflächlich divergente Amplitude* gewinnt man aus der Betrachtung der 4-Punkt-Amplituden im Bethe-Salpeter-Formalismus. Genaueres zu diesem Punkt wird für die skalare Φ^4 -Theorie in [Sti 90] ausgeführt. Die anderen beiden Gleichungen sind unproblematisch:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \text{Diagram} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram} \\
 &+ \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{Diagram} - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram} \\
 &- g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{Diagram} , \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 3} \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{Diagram 4} - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 5} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{Diagram 6} . \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

The equation shows a four-point vertex (a circle with four external gluon lines) equated to a tree-level diagram (a square with four external gluon lines) plus loop corrections. The first correction term is $\frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop (a circle with two gluon lines and two ghost lines). The second correction term is $\frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a gluon loop. The third correction term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The final term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop.

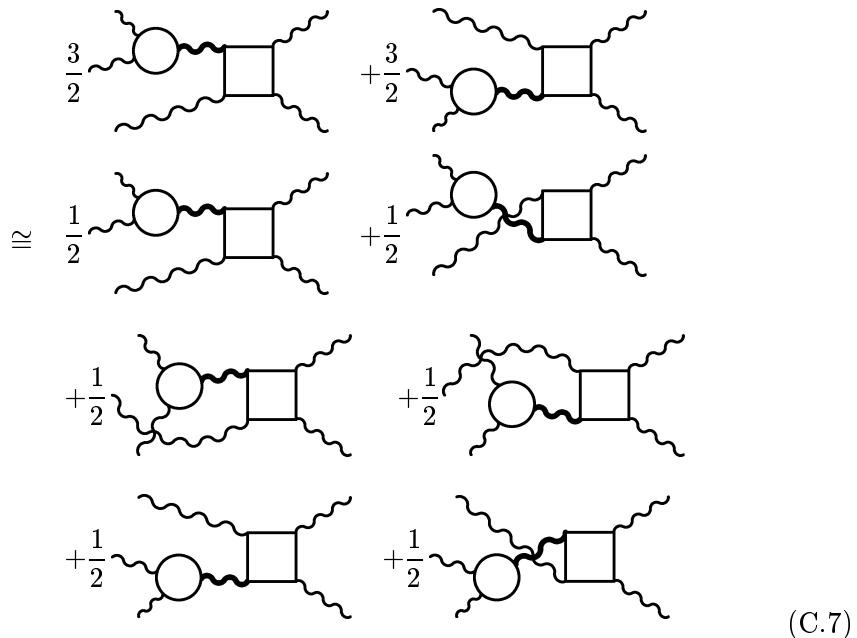
Analoge Gleichungen mit der gleichen strukturellen Gestalt ergeben sich für die Amplituden $T_{2,3}$, $\bar{T}_{2,3}$ und $\tilde{T}_{2,3}$ mit drei rechten Gluonbeinen, \bar{T}_{4s} , $\bar{T}_{2,2s}$ und $T_{2,2fs}$ mit zwei rechten Fermionbeinen und \tilde{T}_{4s} , $\tilde{T}_{2,2s}$ und $T_{2,f,2s}$ mit zwei rechten Geistbeinen. Es bleiben noch die Amplituden mit drei linken Gluonbeinen zu analysieren. Auch bei diesen beschränken wir uns darauf, die Gleichung mit zwei linken Gluonbeinen zu notieren. Wir erhalten für $T_{3,2}$:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \frac{3}{2} \text{Diagram 3} + \frac{3}{2} \text{Diagram 4} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 5} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 6} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 7} + \frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 8} \\
 & + \frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon} \text{Diagram 9} - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \text{Diagram 10} \\
 & - g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{Diagram 11} . \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

The equation shows a three-gluon vertex (a circle with three external gluon lines) equated to a tree-level diagram (a square with three external gluon lines) plus loop corrections. The first correction term is $\frac{3}{2}$ times a diagram with a ghost loop and a gluon loop. The second correction term is $\frac{3}{2}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The third correction term is $\frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a gluon loop. The fourth correction term is $\frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The fifth correction term is $\frac{1}{2} g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The sixth correction term is $\frac{1}{6} g_0^4 \nu_0^{4\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The seventh correction term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The eighth correction term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The ninth correction term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The tenth correction term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon}$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop. The eleventh correction term is $-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f$ times a diagram with a ghost loop and a ghost loop.

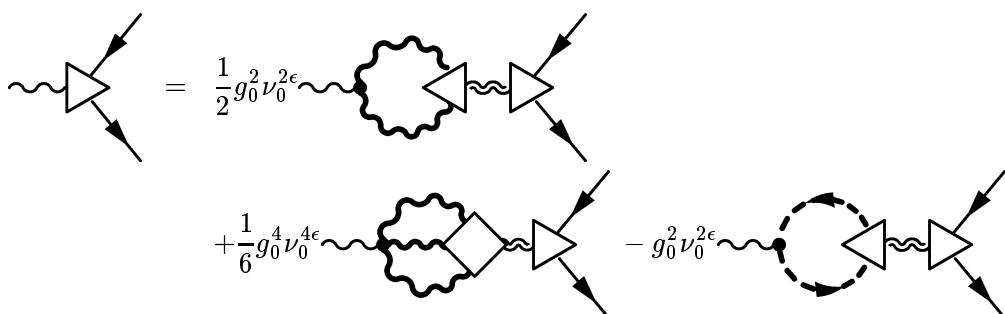
Strukturell äquivalente Gleichungen ergeben sich auch für $T_{3,3}$, $\bar{T}_{3,2}$ und $\tilde{T}_{3,2}$.

Der Vorfaktor $\frac{3}{2}$ vor dem zweiten bzw. dritten Graphen der rechten Seite von C.6 signalisiert eine passende Zusammenfassung der eigentlich in dem dazugehörigen Term entstehenden sechs Graphen in zwei Äquivalenzklassen,¹ die beim Einsetzen der entsprechenden Graphen in eine sich links anschließende zweifache Gluon-Schleife, wie sie sich z.B. für einen Γ_4 -Vertex ergibt, gleiche Beiträge liefern. Dabei ist zu beachten, dass der unten auftauchende Vorfaktor $\frac{1}{2}$ daher röhrt, dass hier explizit auch *innere* Crossing-Symmetrien aufgeführt werden.² Diese sind jedoch in den aus den Feynmanregeln stammenden Vorfaktoren schon berücksichtigt.



Ergänzung zu den Schattenpolen

Wir führen als Ergänzung für die Argumentation in Abschnitt 3.4 noch eine Dyson-Schwinger-Gleichung für die Schattenvertices im Gluon-Kanal auf. Als Beispiel wählen wir wiederum den Gluon-Kanal des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex im Schattensektor. Aus 3.39 folgt durch Residuenbildung:



¹Gerade diese werden im graphischen Formalismus der Feynmanregeln notiert.

²Wir verwenden keine gesonderte Notation im Vertrauen darauf, dass die jeweilige Bedeutung der Graphen aus unseren Anmerkungen klar wird.

$$-g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \sum_f \text{Diagram} . \quad (\text{C.8})$$

Dieses lässt sich selbstverständlich auf die anderen Schattenvertices analog übertragen. Dabei stellt man insbesondere fest, dass sich aus den in den DS-Gleichungen des Γ_3 - und Γ_4 -Vertex, 3.40 bzw. 3.41, vorhandenen Graphen mit rechten Beinen, die in einen perturbativen Vertex einlaufen, keine Beiträge zu den Gleichungen für die entsprechenden Schattenvertices ergeben.

Anhang D

Ergänzungen zur Gluon-Schleife

Wir führen hier die Berechnungen zur Gluon-Schleife aus Kapitel 6 fort. Am übersichtlichsten lässt sich das ohne die logarithmischen Erweiterungen, d.h. im bekannten Fall der nichtperturbativen Approximanten durchführen.¹ Wegen der besonderen Gestalt der in Kapitel 5 erhaltenen Formeln können wir die Ergebnisse dann direkt auch für den Fall logarithmischer Modifikationen übernehmen. Weil die folgende Rechnung als Modell für alle weiteren 1-Schleifen-Rechnungen dieser Arbeit gelten kann, werden wir mehr als nur die notwendigsten Rechenschritte angeben.

Feynmanparametrisierung

Wir führen die Feynmanparametrisierung für Terme von der allgemeinen Gestalt

$$\frac{1}{a^2(a^2 + \alpha)b^2(b^2 + \beta)} \quad (\text{D.1})$$

durch:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2(a^2 + \alpha)b^2(b^2 + \beta)} \\ = & \Gamma(2)^2 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2}{(x_1(a^2 + \alpha) + (1 - x_1)a^2)^2 (x_2(b^2 + \beta) + (1 - x_2)b^2)^2} \\ = & \Gamma(4) \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \cdot x_3(1 - x_3)}{(b^2 + x_3(a^2 - b^2) + x_2\beta + x_3(x_1\alpha - x_2\beta))^4}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Damit sind nun noch folgende drei Integrale zu berechnen:

$$I_1 = \Gamma(4) \int d^D q \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \cdot x_3(1 - x_3) S_D(a^2 | b^2; k^2)}{(b^2 + x_3(a^2 - b^2) + x_2\beta + x_3(x_1\alpha - x_2\beta))^4}, \quad (\text{D.3})$$

$$I_2 = \Gamma(4) \int d^D q \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \cdot x_3(1 - x_3) T_D(a^2, b^2; k^2)}{(b^2 + x_3(a^2 - b^2) + x_2\beta + x_3(x_1\alpha - x_2\beta))^4}, \quad (\text{D.4})$$

$$I_3 = \Gamma(4) \int d^D q \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \cdot x_3(1 - x_3) S_D(b^2 | a^2; k^2)}{(b^2 + x_3(a^2 - b^2) + x_2\beta + x_3(x_1\alpha - x_2\beta))^4}. \quad (\text{D.5})$$

¹Eine erste Berechnung des resultierenden Integrals wurde in [Spr 95] vorgenommen.

Berechnung der Impulsintegrale

Um die obigen Integrale lösen zu können, ist es notwendig, eine konkrete Wahl für die Parametrisierung des Schleifenimpulses zu treffen. Ich wähle die symmetrische Parametrisierung, d.h.:

$$\vec{a} \equiv \frac{1}{2}\vec{k} - \vec{q}, \quad \vec{b} \equiv \frac{1}{2}\vec{k} + \vec{q}. \quad (\text{D.6})$$

Es ist die typische Impulsverschiebung im Integral durchzuführen, um die bekannten Standardintegrale zur Auswertung heranziehen zu können. Dazu setzt man zunächst \vec{a} und \vec{b} in den Nenner ein:

$$b^2 + x_3(a^2 - b^2) + x_2\beta + x_3(x_1\alpha - x_2\beta) = q^2 + (\vec{k} \cdot \vec{q})(1 - 2x_3) + \frac{1}{4}k^2 + L'^2.$$

Mit der Impulsverschiebung

$$\vec{q} = \vec{q}' - \frac{1}{2}\vec{k}(1 - 2x_3) \quad (\text{D.7})$$

erhält man:

$$\begin{aligned} & q^2 + (\vec{k} \cdot \vec{q})(1 - 2x_3) + \frac{1}{4}k^2 + L'^2 \\ &= q'^2 + k^2(x_3 - x_3^2) + L'^2 = q'^2 + L^2(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

wobei L^2 in D.24 explizit ausgeschrieben ist, und

$$\vec{a} = \vec{k}(1 - x_3) - \vec{q}', \quad \vec{b} = \vec{k}x_3 + \vec{q}' \quad (\text{D.9})$$

Man kann nun, da das Volumenelement $d^D q$ invariant unter Translationen ist, die verschobene Variable q' wieder in q umbenennen. Damit ergibt sich:

$$I_1 = \Gamma(4) \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \int d^D q \frac{x_3(1 - x_3)}{(q^2 + L^2)^4} S_D(a|b; k) \quad (\text{D.10})$$

usw. Man muß nun noch \vec{a} und \vec{b} in S_D bzw. T_D einsetzen. Man erhält:

$$\begin{aligned} & S_D(a|b; k) \\ &= 4(k^2 q^2 - (k \cdot q)^2) \left((D - 1)k^2(q^2 - 2(k \cdot q)(1 - x_3) + k^2(x_3 - 1)^2) \right. \\ & \quad \left. - (k^2 q^2 - (\vec{k} \cdot \vec{q})^2) + (k^2(1 - x_3) - (\vec{k} \cdot \vec{q}))(q^2 + 2(\vec{k} \cdot \vec{q})x_3 + k^2 x_3^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} & T_D(a, b; k) \\ &= 4(k^2 q^2 - (\vec{k} \cdot \vec{q})^2) \left((D - 1) \left[q^4 + q^2(\vec{k} \cdot \vec{q})(4x_3 - 2) + 4(\vec{k} \cdot \vec{q})^2(x_3^2 - x_3) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + k^2 q^2(2x_3^2 - 2x_3 + 1) + k^2(\vec{k} \cdot \vec{q})(4x_3^3 - 6x_3^2 + 2x_3) + k^4 x_3^2(1 - x_3)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. - (k^2 q^2 - (k \cdot q)^2) - (k^2(1 - x_3)x_3 + (k \cdot q)(1 - 2x_3) - q^2)k^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}
& S_D(b|a;k) \\
= & 4(k^2 q^2 - (\vec{k} \cdot \vec{q})^2) \left((D-1)k^2(q^2 + 2(\vec{k} \cdot \vec{q})x_3 + k^2 x_3^2) - (k^2 q^2 - (\vec{k} \cdot \vec{q})^2) \right. \\
& \left. + ((k^2 x_3) + (\vec{k} \cdot \vec{q}))(q^2 - 2(\vec{k} \cdot \vec{q})(1-x_3) + k^2(x_3 - 1)^2) \right). \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Terme mit ungerader Ordnung im Schleifenimpuls q , d.h. in denen eine ungerade Anzahl Potenzen von $(\vec{k} \cdot \vec{q})$ vorkommt, verschwinden durch die symmetrische Integration. Wie man leicht sieht, braucht man daher nur folgende Impulsintegrale zu lösen, was mit Formeln A.24, A.26 und A.27 einfach zu bewerkstelligen ist:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int \vec{d}^D q \frac{k^2 q^6}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(3 + \frac{D}{2})\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(4)} (L^2)^{\frac{D}{2}-1}, \tag{D.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \int \vec{d}^D q \frac{q^4 (k \cdot q)^2}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \frac{\delta^{\rho\sigma}}{D} B_1 = \frac{1}{D} B_1, \tag{D.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= \int \vec{d}^D q \frac{k^4 q^4}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^4}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2 + \frac{D}{2})\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(4)} (L^2)^{\frac{D}{2}-2}, \tag{D.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= \int \vec{d}^D q \frac{k^2 q^2 (k \cdot q)^2}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \frac{\delta^{\rho\sigma}}{D} B_3 = \frac{1}{D} B_3, \tag{D.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 &= \int \vec{d}^D q \frac{(k \cdot q)^4}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^\rho k^\sigma k^\tau k^\lambda}{k^4} \frac{S_4^{(\rho\sigma\tau\lambda)}}{D(D+2)} B_3 = \frac{3}{D(D+2)} B_3, \tag{D.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6 &= \int \vec{d}^D q \frac{k^6 q^2}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^6}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(1 + \frac{D}{2})\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(4)} (L^2)^{\frac{D}{2}-3}, \tag{D.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_7 &= \int \vec{d}^D q \frac{k^4 (k \cdot q)^2}{(q^2 + L^2)^4} \\
&= \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \frac{\delta^{\rho\sigma}}{D} B_6 = \frac{1}{D} B_6. \tag{D.20}
\end{aligned}$$

Damit erhält man für die drei Teilintegrale folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} I_1 &= \Gamma(4) \frac{4(D-1)}{D} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3)x_3 \left[(D-1)(B_3 \right. \\ &\quad \left. + (1-2x_3+x_3^2)B_6)) - B_3 \left(x_3 + \frac{2x_3-1}{D+2} \right) + (x_3^2-x_3^3)B_6 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \Gamma(4) \frac{4(D-1)}{D} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3)x_3 \left(\frac{B_3}{(D+2)} + (x_3^2-x_3)B_6 \right. \\ &\quad \left. + (D-1) \left[B_1 + B_3 \left(4 \frac{x_3^2-x_3}{(D+2)} + 2x_3^2 - 2x_3 + 1 \right) + x_3^2(1-x_3)^2 B_6 \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \Gamma(4) \frac{4(D-1)}{D} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3)x_3 \left((D-1)(B_3 + x_3^2 B_6) \right. \\ &\quad \left. + B_3 \left(x - 1 + \frac{2x_3-1}{(D+2)} \right) + (x_3^3 - 2x_3^2 + x_3)B_6 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Berechnung der Feynmanparameterintegrale

Es ist

$$L^2(x_1, x_2, x_3) = k^2(x_3 - x_3^2) + x_2\beta + x_3(x_1\alpha - x_2\beta). \quad (\text{D.24})$$

Terme quadratischer Divergenz

Man berechnet zunächst:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3)x_3 (L^2)^{\frac{D}{2}-1} \\ &= \int_0^1 dx_2 dx_3 (1-x_3)x_3 \int_0^1 dx_1 ((x_3\alpha)x_1 + M_1)^{\frac{D}{2}-1} \\ &= \frac{2}{\alpha D} \int_0^1 dx_2 dx_3 (1-x_3) \left((L_1^2)^{\frac{D}{2}} - (L_0^2)^{\frac{D}{2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

mit

$$L_1^2 = k^2(x_3 - x_3^2) + x_2\beta + x_3(\alpha - x_2\beta) \quad (\text{D.26})$$

$$L_0^2 = k^2(x_3 - x_3^2) + x_2\beta - x_3x_2\beta. \quad (\text{D.27})$$

Die nächste Integration liefert für D.25:

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\alpha D} \int_0^1 dx_3 (1-x_3) \int_0^1 dx_2 \left((x_2\beta(1-x_3) + M_2)^{\frac{D}{2}} \right. \\ &\quad \left. - (x_2\beta(1-x_3) + M_3)^{\frac{D}{2}} \right) \\ &= \frac{4}{\alpha\beta D(D+2)} \int_0^1 dx_3 \left((L_{11}^2)^{\frac{D+2}{2}} - (L_{10}^2)^{\frac{D+2}{2}} - (L_{01}^2)^{\frac{D+2}{2}} + (L_{00}^2)^{\frac{D+2}{2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

mit

$$L_{11}^2 = k^2(x_3 - x_3^2) + \beta + x_3(\alpha - \beta) \quad (\text{D.29})$$

$$L_{10}^2 = k^2(x_3 - x_3^2) + x_3\alpha \quad (\text{D.30})$$

$$L_{01}^2 = k^2(x_3 - x_3^2) + \beta - x_3\beta \quad (\text{D.31})$$

$$L_{00}^2 = k^2(x_3 - x_3^2). \quad (\text{D.32})$$

Das verbleibende Integral ist in geschlossener Form so nicht auszuwerten. Man geht daher zur Darstellung in $\epsilon \equiv \frac{4-D}{2}$ über. Für die Selbstkonsistenzgleichungen muss aus dem Integral noch ein Faktor $(\Lambda^2)^{-\epsilon}$ herausgezogen werden. Es ergibt sich:

$$\sum_{i,j=0}^1 (-1)^i(-1)^j(L_{ij}^2)^{\frac{D+2}{2}} = (\Lambda^2)^{-\epsilon} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^i(-1)^j(L_{ij}^2)^3 \left(\frac{L_{ij}^2}{\Lambda^2} \right)^{-\epsilon}. \quad (\text{D.33})$$

Entwickelt man nun im Integral nach ϵ , bleibt als Beitrag im Limes $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_3 \sum_{i,j=0}^1 (-1)^i(-1)^j(L_{ij}^2)^3 \\ &= 3 \int_0^1 dx_3 (\alpha^2\beta(x_3^2 - x_3^3) + \alpha\beta^2(x_3 - 2x_3^2 + x_3^3) + \alpha\beta k^2(2x_3^2 - 4x_3^3 + 2x_3^4)) \\ &= \alpha\beta \left(\frac{\alpha + \beta}{4} + \frac{1}{5}k^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Insgesamt ergibt sich für das Parameterintegral im Term quadratischer Divergenz also:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1 - x_3) x_3 (L^2)^{\frac{D}{2}-1} \\ & \approx (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{(2-\epsilon)(3-\epsilon)} \left(\frac{\alpha + \beta}{4} + \frac{1}{5}k^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Terme logarithmischer Divergenz

Zur Bestimmung der Terme mit logarithmischen Divergenzen berechnet man nun:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_1 dx_2 (1 - x_3) x_3 (L^2)^{D/2-2} \\ &= \frac{2}{\alpha(D-2)} \int_0^1 dx_2 (1 - x_3) \left((L_1^2)^{D/2-1} - (L_0^2)^{D/2-1} \right) \\ &= \frac{4}{\alpha\beta(D-2)D} \left((L_{11}^2)^{D/2} - (L_{10}^2)^{D/2} - (L_{01}^2)^{D/2} + (L_{00}^2)^{D/2} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Analog zu oben ergibt sich

$$\sum_{i,j=0}^1 (-1)^i(-1)^j(L_{ij}^2)^{\frac{D}{2}} = (\Lambda^2)^{-\epsilon} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^i(-1)^j(L_{ij}^2)^2 \left(\frac{L_{ij}^2}{\Lambda^2} \right)^{-\epsilon} \quad (\text{D.37})$$

und

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_3 \sum_{i,j=0}^1 (-1)^i (-1)^j (L_{ij}^2)^2 \\ &= \int_0^1 dx_3 (2\alpha\beta(x_3 - x_3^2)) = \frac{\alpha\beta}{3} \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

sowie

$$\int_0^1 dx_3 x_3 (2\alpha\beta(x_3 - x_3^2)) = \frac{\alpha\beta}{6}, \quad (\text{D.39})$$

$$\int_0^1 dx_3 x_3^2 (2\alpha\beta(x_3 - x_3^2)) = \frac{\alpha\beta}{10}. \quad (\text{D.40})$$

Insgesamt also:

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1 - x_3) x_3 (L^2)^{D/2-2} \approx (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{3(1-\epsilon)(2-\epsilon)}, \quad (\text{D.41})$$

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1 - x_3) x_3^2 (L^2)^{D/2-2} \approx (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{6(1-\epsilon)(2-\epsilon)}, \quad (\text{D.42})$$

$$\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1 - x_3) x_3^3 (L^2)^{D/2-2} \approx (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{10(1-\epsilon)(2-\epsilon)}. \quad (\text{D.43})$$

Konvergente Beiträge

Für die konvergenten Beiträge ist zu berechnen:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx_1 dx_2 (1 - x_3) x_3 (L^2)^{\frac{D}{2}-3} \\ &= \frac{2}{\alpha(D-4)} \int_0^1 dx_2 (1 - x_3) \left((L_1^2)^{\frac{D}{2}-2} - (L_0^2)^{\frac{D}{2}-2} \right) \\ &= \frac{4}{\alpha\beta(D-2)(D-4)} \left((L_{11}^2)^{\frac{D-2}{2}} - (L_{10}^2)^{\frac{D-2}{2}} - (L_{01}^2)^{\frac{D-2}{2}} + (L_{00}^2)^{\frac{D-2}{2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

Analog zu oben ergibt sich hier:

$$\sum_{i,j=0}^1 (-1)^i (-1)^j (L_{ij}^2)^{\frac{D-2}{2}} = (\Lambda^2)^{-\epsilon} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^i (-1)^j (L_{ij}^2) \left(\frac{L_{ij}^2}{\Lambda^2} \right)^{-\epsilon}. \quad (\text{D.45})$$

Bei der Entwicklung der Terme im Integral stellt man jedoch fest, dass der führende Term proportional ϵ ist, da

$$\sum_{i,j=0}^1 (-1)^i (-1)^j (L_{ij}^2) = 0 \quad (\text{D.46})$$

verschwindet. Das ϵ aus der Entwicklung im Integral kürzt sich gegen das im Vorfaktor erscheinende ϵ^{-1} . Daher sind als führende Terme für die konvergenten Beiträge auszurechnen ($n = 0, 1, 2, 3, 4$):

$$\Xi_3(n) \equiv \frac{1}{\alpha\beta(1-\epsilon)} \int_0^1 dx_3 x_3^n \sum_{i,j=0}^1 (-1)^i (-1)^j (L_{ij}^2) \ln \frac{L_{ij}^2}{\Lambda^2}. \quad (\text{D.47})$$

Zusammenföhrung der Ergebnisse

Zunächst werden (da hier uninteressant) alle konvergenten Beiträge (also Terme proportional B_6) vernachlässigt. Diese sind aber, wie oben angedeutet, prinzipiell berechenbar.

Man erhält also:

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \Gamma(4) \frac{4(D-1)}{D} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3) x_3 \left((D-1)(B_3) - B_3 \left(x_3 + \frac{2x_3-1}{D+2} \right) \right) \\ &= \frac{k^4}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{4(3-2\epsilon)}{(4-2\epsilon)} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(1-\epsilon)(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(4-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \left(\frac{5-4\epsilon}{6} \right) \\ &\approx \frac{k^4}{(4\pi)^{2-\epsilon}} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \frac{15}{2}, \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

$$\begin{aligned} I_2 &\approx \Gamma(4) \frac{4(D-1)}{D} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3) x_3 \left(B_3 \frac{1}{(D+2)} \right. \\ &\quad \left. + (D-1) \left[B_1 + B_3 \left(4 \frac{x_3^2 - x_3}{(D+2)} + 2x_3^2 - 2x_3 + 1 \right) \right] \right) \\ &= \frac{k^2}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{4(3-2\epsilon)}{(4-2\epsilon)} \left(\frac{\Gamma(4-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon} k^2}{(1-\epsilon)(2-\epsilon)} \left[\frac{3-2\epsilon}{5} - \frac{6-4\epsilon}{15(3-\epsilon)} + \frac{1}{18-6\epsilon} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(5-\epsilon)\Gamma(\epsilon-1)}{\Gamma(2-\epsilon)} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(2-\epsilon)(3-\epsilon)} \left[(3-2\epsilon) \left(\frac{\alpha+\beta}{4} + \frac{k^2}{5} \right) \right] \right) \\ &\approx \frac{k^2}{(4\pi)^{2-\epsilon}} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \left(-\frac{5}{2} k^2 - 9(\alpha+\beta) \right), \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

$$\begin{aligned} I_3 &\approx \Gamma(4) \frac{4(D-1)}{D} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3) x_3 \left((D-2)(B_3) + B_3 \left(x_3 + \frac{2x_3-1}{D+2} \right) \right) \\ &= \frac{k^4}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{4(3-2\epsilon)}{(4-2\epsilon)} \frac{(\Lambda^2)^{-\epsilon}}{(1-\epsilon)(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(4-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \left(\frac{5-4\epsilon}{6} \right) \\ &\approx \frac{k^4}{(4\pi)^{2-\epsilon}} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \frac{15}{2}. \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

Anhang E

Partialbruchzerlegung

Wichtig für diese Arbeit ist die Partialbruchzerlegung und ihre Rücknahme. Bei der Partialbruchzerlegung einer gebrochenrationalen Funktion wird immer angenommen, dass der Nennergrad größer als der Zählergrad ist und dass keine mehrfachen Polstellen vorkommen. Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{\prod_{t=1}^{r+1} (x + a_t)} = \sum_{t=1}^{r+1} \frac{1}{x + a_t} \frac{f(-a_t)}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)}. \quad (\text{E.1})$$

Nach [Pot 00] gilt für die Rücknahme der Partialbruchzerlegung:

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^m}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = 0 \quad (\text{E.2})$$

für $0 \leq m < r$,

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^r}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r \quad (\text{E.3})$$

und

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^{r+1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r \sum_{t=1}^{r+1} a_t. \quad (\text{E.4})$$

Für den Fall $m = r + 2$ wird der Beweis im Folgenden ausgeführt:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{a_k^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{r+1} (a_s - a_t)} - \sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^{r+2}}{(a_k - a_t)^2 \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t, k}}^{r+1} (a_s - a_t)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{a_k^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{r+1} (a_s - a_t)} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^{r+2}}{((a_k + \epsilon) - a_t)((a_k - \epsilon) - a_t) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t, k}}^{r+1} (a_s - a_t)}. \quad (\text{E.5})$$

Mit der Umbenennung $a_k + \epsilon = a_k$ und $a_k - \epsilon = a_{r+2}$ kann man die folgende Identität kondensiert anschreiben:

$$\sum_{t=1}^{r+2} \frac{a_t^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+2} (a_s - a_t)} = (-1)^{r+1} \sum_{t=1}^{r+2} a_t.$$

Dies können wir oben benutzen und finden:

$$\begin{aligned} E.5 &= \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{a_k^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{r+1} (a_s - a_t)} - (-1)^{r+1} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_k + \epsilon + a_k - \epsilon + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{r+1} a_t \right) \\ &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(a_k + \epsilon)^{r+2}}{2\epsilon \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{r+1} (a_s - (a_k + \epsilon))} - \frac{(a_k - \epsilon)^{r+2}}{2\epsilon \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{r+1} (a_s - (a_k - \epsilon))} \right) \\ &= (-1)^r \left(2a_k + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{r+1} a_t \right). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Durch partielle Differenzieren kann man nun elementar verifizieren, dass gilt:¹

$$\sum_{t=1}^{r+1} \frac{a_t^{r+2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{r+1} (a_s - a_t)} = (-1)^r \sum_{\substack{t, t'=1 \\ t \leq t'}}^{r+1} a_t a_{t'}. \quad (\text{E.7})$$

Dass die noch mögliche Integrationskonstante hier verschwinden muss, ergibt sich aus der folgenden, einfachen Überlegung. Skaliert man alle Variablen mit einem gemeinsamen Faktor c , so skalieren linke und rechte Seite der Gleichung proportional zu c^2 . Eine Integrationskonstante hingegen skaliert nicht. Da die Gleichung für alle $c \in \mathbb{R}$ erfüllt sein muss, ist die Konstante gleich Null.

¹Diese Formel ist bei [Pot 00] falsch angegeben. Dort fehlt die Einschränkung $t \leq t'$.

Anhang F

Zur SK-Gleichung des $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex

Extrahieren wir in 3.22 in erster Approximationsstufe ($r = 1$) den perturbativen Anteil aus dem vollen $\bar{\Gamma}_3$ -Vertex, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
3.22 &= T_{a_3}^{i_1 i_2} \gamma^{\mu_3} + T_{a_3}^{i_1 i_2} (\not{p}_1 + \kappa_{1,2}^{(f)})^{-1} \left\{ p_3^2 \not{p}_1 \left[\sum_{\lambda=0}^1 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{1-\lambda} \bar{C}_{\lambda 110}^1 - \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \right. \\
&\quad + p_3^2 \left[\sum_{\lambda=0}^1 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{1-\lambda} \bar{C}_{\lambda 101}^1 - \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \\
&\quad + p_3^2 \left[\sum_{\lambda=0}^2 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{2-\lambda} \bar{C}_{\lambda 100}^1 - (\kappa_{1,2}^{(f)})^2 \right] \gamma^{\mu_3} \\
&\quad + \not{p}_1 \left[\sum_{\lambda=0}^2 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{2-\lambda} \bar{C}_{\lambda 011}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \\
&\quad + \not{p}_1 \left[\sum_{\lambda=0}^3 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{3-\lambda} \bar{C}_{\lambda 010}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \\
&\quad + \left[\sum_{\lambda=0}^3 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{3-\lambda} \bar{C}_{\lambda 001}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \\
&\quad + \left[\sum_{\lambda=0}^3 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{3-\lambda} \bar{C}_{\lambda 001}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \\
&\quad \left. + \left[\sum_{\lambda=0}^4 \Lambda^\lambda \hat{m}_f^{4-\lambda} \bar{C}_{\lambda 000}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 (\kappa_{1,2}^{(f)})^2 \right] \gamma^{\mu_3} \right\} (p_3^2 + u_{1,2} \Lambda^2)^{-1} (\not{p}_2 + \kappa_{1,2}^{(f)})^{-1}. \tag{F.1}
\end{aligned}$$

Für den betrachteten chiralen Fall verschwindender Fermionmassen wird dies zu:

$$\begin{aligned}
m_f = 0 & T_{a_3}^{i_1 i_2} \gamma^{\mu_3} + T_{a_3}^{i_1 i_2} (\not{p}_1 + \kappa_{1,2}^{(f)})^{-1} \left\{ p_3^2 \not{p}_1 \left[\Lambda^1 \bar{C}_{1110}^1 - \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \right. \\
&\quad + p_3^2 \left[\Lambda^1 \bar{C}_{1101}^1 - \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 + p_3^2 \left[\Lambda^2 \bar{C}_{2100}^1 - (\kappa_{1,2}^{(f)})^2 \right] \gamma^{\mu_3} \\
&\quad + \not{p}_1 \left[\Lambda^2 \bar{C}_{2011}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 + \not{p}_1 \left[\Lambda^3 \bar{C}_{3010}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\Lambda^3 \bar{C}_{3001}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 + \left[\Lambda^3 \bar{C}_{3001}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\mu_3} \not{p}_2 \\
& + \left[\Lambda^4 \bar{C}_{4000}^1 - u_{1,2} \Lambda^2 (\kappa_{1,2}^{(f)})^2 \right] \gamma^{\mu_3} \} (p_3^2 + u_{1,2} \Lambda^2)^{-1} (\not{p}_2 + \kappa_{1,2}^{(f)})^{-1}.
\end{aligned} \tag{F.2}$$

Zur Konstruktion der Selbstkonsistenzgleichungen müssen wir nun auch in 7.14 den perturbativen Anteil isolieren. Dazu ist es unumgänglich, 7.14 der gleichen Prozedur wie 3.22 zu unterwerfen. Erst danach können wir die Relationen 8.2 bzw. 8.3 anwenden.¹ Dies liefert:

$$\begin{aligned}
7.14 = & \frac{9}{4} T_{a_3}^{i_1 i_2} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \gamma^{\mu_3} (1 + O(\epsilon)) + \frac{9}{4} T_{a_3}^{i_1 i_2} \frac{1}{\beta_0} (\not{p}_1 + \kappa_{1,2}^{(f)})^{-1} \times \\
& \left\{ p_3^2 \not{p}_1 \left[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^3 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{3-2m_1-n'_1-\lambda_1} \right. \right. \\
& \times \sum_{\lambda_2=0}^3 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{3-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 1 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 1}^1 C_{k_1 k_2 1}^1 \\
& \left. \left. \times \Lambda^{4-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - 1 \right] \gamma^{\nu'} \not{p}_2 \right. \\
& + p_3^2 \not{p}_1 \left[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^3 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{3-2m_1-n'_1-\lambda_1} \right. \\
& \times \sum_{\lambda_2=0}^4 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{4-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 1 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 0}^1 C_{k_1 k_2 1}^1 \\
& \left. \left. \times \Lambda^{4-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \right] \gamma^{\nu'} \right. \\
& + p_3^2 \left[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^4 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{4-2m_1-n'_1-\lambda_1} \right. \\
& \times \sum_{\lambda_2=0}^3 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{3-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 0 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 1}^1 C_{k_1 k_2 1}^1
\end{aligned}$$

¹Die in [Kuh 97] geäußerte Auffassung, die Anwesenheit der fermionischen Propagatorparameter κ im Nenner des Integrals 7.10 verhindere eine Ausbildung des Faktors 8.1, können wir in dieser rigorosen Form nicht teilen. Da κ und Λ von gleicher Dimension sein müssen, kann man 8.1 durch Skalierung der Parameter mit Λ erreichen. Dies ändert, wie auch in Anhang D für die Gluon-Schleife des Gluon-Propagators ausgeführt, höchstens die konvergenten Terme. Die weitere Diskussion dieses Problems erfolgt am Ende des Anhangs.

$$\begin{aligned}
& \times \Lambda^{4-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \Big] \gamma^{\nu'} \not{p}_2 \\
& + p_3^2 \Big[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^4 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{4-2m_1-n'_1-\lambda_1} \\
& \quad \times \sum_{\lambda_2=0}^4 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{4-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \quad \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 0 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 0}^1 C_{k_1 k_2 1}^1 \\
& \quad \times \Lambda^{4-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \Big] \gamma^{\nu'} \\
& + \not{p}_1 \Big[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^3 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{3-2m_1-n'_1-\lambda_1} \\
& \quad \times \sum_{\lambda_2=0}^3 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{3-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \quad \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 1 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 1}^1 C_{k_1 k_2 0}^1 \\
& \quad \times \Lambda^{6-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \Big] \gamma^{\nu'} \not{p}_2 \\
& + \not{p}_1 \Big[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^3 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{3-2m_1-n'_1-\lambda_1} \\
& \quad \times \sum_{\lambda_2=0}^4 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{4-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \quad \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 1 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 0}^1 C_{k_1 k_2 0}^1 \\
& \quad \times \Lambda^{6-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \Big] \gamma^{\nu'} \\
& + \Big[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^4 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{4-2m_1-n'_1-\lambda_1} \\
& \quad \times \sum_{\lambda_2=0}^3 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{3-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \quad \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 0 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 1}^1 C_{k_1 k_2 0}^1 \\
& \quad \times \Lambda^{6-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \Big] \gamma^{\nu'} \not{p}_2 \\
& + \Big[\sum_{t_1 t_2 t_3=1}^2 \sum_{\lambda_1=0}^4 \sum_{m_1, n'_1=0}^1 \Lambda^{\lambda_1} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{m_1} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n'_1} \hat{m}_f^{4-2m_1-n'_1-\lambda_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\lambda_2=0}^4 \sum_{m_2, n_2=0}^1 \Lambda^{\lambda_2} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{m_2} (-\hat{\kappa}_{1,t_1})^{n_2} \hat{m}_f^{4-2m_2-n_2-\lambda_2} \\
& \times \sum_{k_1, k_2=0}^1 [\Delta^1(\kappa, t_1) \Delta^1(u, t_2) \Delta^1(u, t_3)]^{-1} \bar{C}_{\lambda_1 m_1 0 n'_1}^1 \bar{C}_{\lambda_2 m_2 n_2 0}^1 C_{k_1 k_2 0}^1 \\
& \times \Lambda^{6-2k_1-2k_2} (-\hat{u}_{1,t_3} \Lambda^2)^{k_1} (-\hat{u}_{1,t_2} \Lambda^2)^{k_2} - \kappa_{1,2}^{(f)} \Big] \gamma^{\nu'} p_2 \Big\} \\
& \times (p_3^2 + u_{1,2} \Lambda^2)^{-1} (p_2 + \kappa_{1,2}^{(f)})^{-1}. \tag{F.3}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich von F.1 und F.3 erhält man die SK-Gleichungen für den massiven Fall. Bemerkenswert ist das Auftauchen einer zusätzlichen Gleichung für die Vertexpараметer. Der führende Term im nichtperturbativen Anteil von F.3 proportional zu $p_3^2 p_1 \gamma^\nu p_2$ hat keine Entsprechung in F.1 und muss daher exakt verschwinden. Diese zusätzliche Gleichung wird hier als systematisch bedingte SK-Gleichung angesehen, während ein in [Kuh 97] aufgestellter analoger Ausdruck noch als Störung der perturbativen Terme interpretiert wurde.² Dieses Ergebnis ist unabhängig von dem in dieser Arbeit verwendeten Ansatz mit logarithmischen Modifikationen.

Wie schon in Kapitel 8 erwähnt gibt es an dieser Stelle keine eindeutige Antwort auf die Frage, wie die Terme mit gemischten Beiträgen in \hat{m}_f und Λ zu behandeln sind. In [Kuh 97] wurden diese bei der Diskussion der fermionischen Beiträge zur DS-Gleichung des Gluon-Propagators als Störungen des perturbativen Limes behandelt und dementsprechend ihr Verschwinden gefordert. Dies führt zu einer weitgehenden Entkopplung zwischen dem fermionischen und dem gluonischen Sektor der Theorie, für den sich keine überzeugende physikalische Begründung finden lässt. Zudem ergibt sich ein unstetiger Übergang zu der masselosen Theorie, in der die fermionischen Beiträge in den SK-Gleichungen der gluonischen Parameter auftauchen müssen. Damit erscheint dieses Vorgehen für „leichte“ Quarks ($\hat{m}_f \ll \Lambda$) als nicht gerechtfertigt. In dieser Arbeit stellen wir uns auf den Standpunkt, dass auch die gemischten Terme (z.B. von der Form $(a\hat{m}_f + b\Lambda)^{-\epsilon}$) zu den Selbtkonsistenzgleichungen beitragen müssen und behandeln sie entsprechend. Dies ergibt einen „glatten“ Übergang von der masselosen Theorie zum Fall *leichter* Quarkmassen. Andererseits ist unser Vorgehen für schwere Quarks ($\hat{m}_f \gg \Lambda$) nicht angebracht, dort würde man eine Behandlung wie im Kuhrsschen Verfahren erwarten. Wie man schließlich Massen in der Größenordnung von Λ behandeln soll, ist vollkommen ungeklärt. Ebenfalls steht noch nicht fest, ob man eine exakte Reproduktion der perturbativen Renormierungskonstanten verlangen soll, wie dies in dieser Arbeit durchgehend angenommen wird, oder ob es dem nicht-perturbativ-erweiterten Mechanismus angemessener ist, auch bei diesen Größen Änderungen zuzulassen.³

²Ein Vergleich der entsprechenden Terme ist zwar prinzipiell möglich, wegen der stark unterschiedlichen Notation zwischen dieser und der Kuhrsschen Arbeit jedoch schwierig. Deshalb muss die Frage, ob sich die in [Kuh 97] auf S.145 genannten SK-Gleichungen aus den obigen Resultaten gewinnen lassen, vorerst unbeantwortet bleiben, einfache Plausibilitätsüberlegungen scheinen dies jedoch zu verneinen.

³Man hätte dann allerdings das Problem, zu entscheiden, welche Anteile der gemischten Termen die perturbativen Größen ändern und welche zu den SK-Gleichungen beitragen.

Wir können hier nur feststellen, dass man aus physikalischen Gründen erwarten darf, dass leichte Quarks zu den SK-Gleichungen der gluonischen Parameter voll beitragen und diese Beiträge mit steigender Masse der Quarks allmählich kleiner werden, bis sie für schwere Quarks schließlich ganz verschwinden. Um dieses (letztendlich dynamische) Problem zu behandeln, könnte sich die in dieser Arbeit gewählte komplexe Darstellung der Propagatorpole als hilfreich erweisen. Eine mögliche Lösung des oben angesprochenen Problems könnte darin bestehen, dass die Realteile der fermionischen Propagatorpole für große Quarkmassen verschwinden (diese also rein *imaginär* werden), so dass sich eventuell schon durch die Lösung der SK-Gleichungen in Abhängigkeit von den Fermionmassen eine konsistente Behandlung der entsprechenden Terme ergeben könnte.⁴

⁴Dieser Ansatz funktioniert allerdings wegen der zu geringen Zahl an Variablen nicht für $r = 1$ und nur ein schweres Quark. Schon für $r = 3$ kann man Lösungen finden, in denen Beiträge schwerer Quarks für jede Quarksorte getrennt verschwinden.

Literaturverzeichnis

- [ASS 93] Ahlbach, Streibl, Schaden, *Nonperturbative Solutions to the Dyson-Schwinger Equations of Pure QCD* in Fried, H.J., Müller, B. (Hrsg) *QCD Vacuum Structure, Proceeding of the workshop on QCD vacuum structure and its Applications*, Singapur 1993
- [BBJ 81] P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, Stuttgart 1981
- [BL 77] M. Baker, C.K. Lee, Phys. Rev. D15 (1977), 2201
- [BC 80] J.S. Ball, T. Chiu, Phys. Rev. D22 (1980), 2250
- [Bro 92] L.S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge 1992
- [CG 73a] S. Coleman, D.J. Gross, Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 851
- [CG 73b] C.G. Callan, D.J. Gross, Phys. Rev. D8 (1973), 4383
- [CN 73] J.M. Cornwall, R.E. Norton, Phys. Rev. D10 (1973), 3338
- [Col 84] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge 1984
- [DGH 94] J.F. Donoghue, E. Golowich, B.R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge 1994
- [DKS 99] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl, Eur. Phys. J. A4 (1999), 381
- [Dri 97] L. Driesen, *Die Basisvertices der Quantenchromodynamik und ihr Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation an der WWU Münster 1997
- [DS 99] L. Driesen, M. Stingl, Eur. Phys. J. A4 (1999), 401
- [EGM 78] R.K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H.D. Politzer, G.R. Ross, Phys. Lett. 78B (1978) 281
- [EGM 79] R.K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H.D. Politzer, G.R. Ross, Nucl. Phys. B152 (1979) 285
- [EMO 53a] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, *Higher Transcendental Functions, Volume I*, New York 1953

- [EMO 53b] Erdély, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, *Higher Transcendental Functions, Volume II*, New York 1953
- [Ewe 00] A. Ewering, *Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit an der WWU Münster 2000
- [GR 94] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5. Auflage, San Diego 1994
- [GV 95] C. Gerthsen, H. Vogel, *Gerthsen Physik*, 18. Auflage, Berlin 1995
- [GW 73a] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 26 (1973), 1343
- [GW 73b] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev D8, (1973), 3633
- [GW 74] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev D9, (1974), 980
- [IZ 80] C. Itzykson, J. Zuber *Quantum Field Theory*, New York 1980
- [JJ 73] R. Jackiw, K. Johnson, Phys. Rev. D8 (1973) 2386
- [Kak 93] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a modern introduction*, Oxford 1993
- [KF 60] A. Kratzer, W. Franz, *Transzendente Funktionen*, Leipzig 1960
- [Kug 97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Berlin 1997
- [Kuh 97] J.G. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster 1997
- [LP 96] E. Leader, E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics, Vol. 1*, Cambridge 1996
- [MP 78] W. Marciano, H. Pagels, *Quantum Chromodynamics* in Phys. Rep 36, 3 (1978) 137-276
- [Mue 74] A.H. Mueller, Phys. Rev. D9 (1974) 963
- [Mue 78] A.H. Mueller, Phys. Rev. D18 (1978) 3705
- [Mut 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, An introduction to perturbative methods in gauge theories*, Singapur 1987
- [PBM 88a] A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I Marichev, *Integrals and Series, Volume 1 Elementary Functions*, korrigierter Nachdruck, London 1988
- [PBM 88b] A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I Marichev, *Integrals and Series, Volume 2 Special Functions*, korrigierter Nachdruck, London 1988

- [Pot 00] K. Potzesny, *Nichtperturbative Korrekturen 1. Ordnung an α_s zu Zweipunktfunktionen im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster 2000
- [PT 84] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Berlin 1984
- [Raf 80] E. de Rafael, *Quantum Chromodynamics as a theoretical framework of the hadronic interactions* in Alonso, Tarrach(Hrsg.), *Quantum Chromodynamics* Lecture Notes in Physics 118, Berlin 1980
- [Rom 69] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, New York 1969
- [Spr 95] M. Spratte, *Nichtperturbative Berechnung der Gluonselfstenergie in Einschleifen-Näherung*, Diplomarbeit an der WWU Münster 1995
- [Sti 84] M. Stingl, *Unveröffentlichte Notizen zum Γ_3 -Vertex*
- [Sti 86] M. Stingl, Phys. Rev. D 34 (1986) 3863
- [Sti 90] M. Stingl, *Unveröffentlichte Notizen zu 4-Punkt-Amplituden und Bethe-Salpeter-Kernen*
- [Sti 96] M. Stingl, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Z. Physik A 353 (1996) 423
- [Sti 00a] M. Stingl, *Persönliche Mitteilungen zur Integraldarstellung des Logarithmus*
- [Sti 00b] M. Stingl, *Persönliche Mitteilungen zu logarithmisch modifizierten Integralen*
- [tHV 72] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189
- [tHo 73] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B61 (1973) 455
- [Voi 99] J.F. Voigt, *Analytische Berechnung der hadronischen Vakuumpolarisation des Photons mit nichtperturbativ erweiterten Feynmanregeln für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster 1999
- [Wei 96] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Volume II*, Cambridge 1996
- [WG 89] Z.X. Wang, D.R. Guo, *Special Functions*, Singapur 1989
- [Ynd 93] F.J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interaction, 2nd edition*, Berlin 1993
- [YM 54] C.N. Yang, R. Mills Phys. Rev. 96 (1954) 191

Zitatenachweis:

- [1] F. Nietzsche, *Die fröhliche Wissenschaft*, Stuttgart 2000, S. 224
- [2] Q. Horatius Flaccus, *Sermones, Satiren*, Stuttgart 2000, S. 152
- [3] H. Biedermann, *Lexikon der magischen Künste, Die Welt der Magie seit der Spätantike*, 3. Auflage, München 1986, S. 73
- [4] K. Vorländer, *Philosophie des Mittelalters*, Hamburg 1964, S. 105
- [5] J.R.R. Tolkien, *The Lord of the Rings*, London 1990, S. 323 (dort übersetzt als „speak, friend, and enter“)
- [6] K.H. Witzko, *Treibgut*, München 1997, S. 118
- [7] Q. Horatius Flaccus, *Sermones, Satiren*, Stuttgart 2000, S. 6
- [8] L. Feuerbach, *Das Wesen des Christentums*, Stuttgart 1969, S. 40
- [9] D. Fetzer (Hrsg.), *Weisheiten der alten Römer*, Bindlach 1989, S. 26
- [10] U. Kiesow, *Das zerbrochene Rad*, München 1997, S. 898

Danksagung

Es bleibt mir nur noch, mich bei den Personen zu bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben.

An erster Stelle ist hier Herr Prof. Manfred Stingl zu nennen, der mir in vielen angeregenden Diskussionen und durch seinen persönlichen Einsatz über meine Verständnisprobleme und so manche auch technische Schwierigkeit beim Erarbeiten der Themenstellung hinweggeholfen hat. Jene Punkte, die in dieser Arbeit noch unklar formuliert oder gar einfach falsch sind, müssen dem Verfasser angelastet werden.

Eicke Ruthotto möchte ich vor allem für die bereitwillige (weil ungefragte) gelegentlich Überlassung einer gewissen Latex-Einführung danken. Ohne diese sähe diese Arbeit vermutlich ein wenig schlechter aus.

Meiner Schwester Martina und meinem Vater möchte ich für das bereitwillige und sehr konsequente Korrekturlesen dieser Arbeit danken. Auch hier gilt, dass die verbliebenen Fehler ganz dem Autor zuzurechnen sind. Insbesondere verdanke ich ihnen auch eine kurze Einführung in die neue Rechtschreibung, und ich hoffe, dass sich vor allem auch keine „grösseren“ Fehler mehr finden...

Schließlich gilt aber auch dem Rest meiner Familie mein Dank dafür, dass sie mich in der oftmals schwierigen Verfassung, die ich während des Erstellens dieser Arbeit gezeigt habe, überhaupt ausgehalten habe.

Einige der in dieser Arbeit vorgestellten Resultate sind mit dem Computerprogramm „Mathematica“, ©1999 Wolfram Research, Inc., zuerst berechnet bzw. überprüft worden.

Diese Arbeit wurde mit L^AT_EX gesetzt. Die in dieser Arbeit enthaltenen Graphen wurden mit dem Erweiterungspaket „feynMF“ von Thorsten Ohl erstellt.¹

¹Dieses Paket ist z.B. unter www.dante.de erhältlich.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den 2. Februar 2001

