

Jörg Wassenberg

**Die Feldstärkenkorrelation
in
nichtabelschen Eichtheorien**

Januar 2003



institut für
theoretische physik

Die Feldstärkenkorrelation in nichtabelschen Eichtheorien

als Diplomarbeit vorgelegt
von
Jörg Wassenberg

Institut für Theoretische Physik
der
Westfälischen Wilhelms-Universität
Münster (Westfalen)

Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Grundlagen der Quantenchromodynamik	9
1.1 Wirkung und Korrelationsfunktionen der QCD	9
1.2 Dyson-Schwinger-Gleichungen	11
1.3 Die spontane Massenskala Λ	13
1.4 Renormierung	14
2 Die systematische Erweiterung der Störungstheorie	17
2.1 Systematik	17
2.2 Nichtperturbativ erweiterte Ansätze für Vertexfunktionen	18
2.2.1 Zwei-Gluonen-Vertex	18
2.2.2 Drei-Gluonen-Vertex	19
3 Der abelsche Teil der Feldstärkenkorrelation	21
3.1 Abelscher Teil der Feldstärkenkorrelation im Euklidischen	22
3.2 Fortsetzung ins Minkowskische	24
3.3 Asymptotisches Verhalten	27
3.4 Verhalten für kleine Abstände	28
3.5 Graphische Darstellung	30
4 Der „halb-nichtabelsche“ Teil der Feldstärkenkorrelation	37
4.1 Struktur des „halb-nichtabelschen“ Teils	37
4.2 Das innere Impulsintegral	39
4.3 Umwandlung der Feynmanparameter- in Spektralintegrale	46
4.4 Renormierung	50
4.5 Das äußere Impulsintegral	52
Zusammenfassung und Ausblick	55
A Feynmanregeln und Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD	57
A.1 $SU(N_C)$ -Algebra	57
A.2 Erzeugende Funktionale	58
A.3 Korrelationsfunktionen	59
A.4 Vertexfunktionen	59
A.5 Beziehungen zwischen Vertexfunktionen	61
A.6 Störungstheoretische Vertices	62
A.7 Dyson-Schwinger-Gleichungen	64

B Schleifenintegrale	67
B.1 Feynman-Parametrisierung	67
B.2 Impulsintegration	67
B.3 Parameterintegration	68
B.3.1 Hilfsintegrale	68
B.3.2 Parameterintegrale mit zwei Integrationsvariablen	71
B.3.3 Parameterintegrale mit drei Integrationsvariablen	73
C Besselfunktionen	77
C.1 Formelsammlung	77
C.1.1 Reihendarstellungen	77
C.1.2 Asymptotisches Verhalten	77
C.1.3 Beziehungen zwischen Besselfunktionen	78
C.1.4 Ableitungsregeln	78
C.1.5 Integraldarstellungen	78
C.2 Verhalten einiger Besselfunktionen für kleine Argumente	79
C.3 Ableitungen von $K_1(m x)/ x $	79
D Hilfsrechnungen	83
D.1 Skalarer Propagator in Ortsraumdarstellung	83
D.1.1 Euklidische Fassung	83
D.1.2 Minkowskische Fassung	84
D.2 Spektraldichten	85
D.3 Das Fourierintegral	91
E Tabellen	95
E.1 Polynome $P_{kjm}(z, p^2)$	95
E.2 Ausintegrierte Koeffizienten	100
E.3 Inneres Impulsintegral	102
Literaturverzeichnis	109
Hilfsmittel	113
Danksagung	115

Einleitung

Die fundamentalen in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen (elektromagnetische, starke, schwache, gravitative) lassen sich durch Eichfeldtheorien beschreiben. Während eine einheitliche Beschreibung der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung im Rahmen der elektroschwachen Theorie von Glashow, Salam und Weinberg [WEI 67] möglich ist, stellt Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie¹ auf klassischem Niveau die angemessene Theorie der Gravitation dar. Als Feldtheorie der starken Wechselwirkung hat sich in den Siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts die Quantenchromodynamik etabliert.

Historischer Ausgangspunkt der Entwicklung der Theorie der starken Wechselwirkung war das Quark-Modell von Gell-Mann [GEL 64] und Zweig (1964), mit dem der Versuch unternommen wurde, Ordnung in die Vielfalt der Elementarteilchen zu bringen. 1969 entdeckte Bjørken [BJO 69] das nach ihm benannte Skalenverhalten der Strukturfunktionen W_1 und W_2 bei der tiefinelastischen Elektron-Nukleon-Streuung, welche bei großen Impulsen nur von der dimensionslosen Skalenvariablen abhängen. Zur Erklärung dieses „Bjørken-Scaling“ wurde von Feynman [FEY 69] ein phänomenologisches Partonmodell vorgeschlagen, nach dem die Nukleonen aus kleineren Bestandteilen („Partonen“) bestehen, die mit Gell-Manns Quarks identifiziert werden konnten. Zur Bewahrung des Spin-Statistik-Theorems war es notwendig, ihnen eine neue Quantenzahl, die Farbe („Colour“) zu spendieren. Nach dem großen Erfolg der Quantenelektrodynamik als abelscher Eichtheorie lag der Versuch nahe, eine Eichtheorie der starken Wechselwirkung zu formulieren. Das Analogon der elektrischen Ladung ist dabei die Farbladung. Ihre Eigenschaften machten die Verwendung der nichtabelschen $SU(3)$ als Eichgruppe notwendig². Die so entstandene Theorie ist unter dem Namen Quantenchromodynamik (QCD) bekannt. Ihre Vorhersagen wurden durch zahlreiche Experimente bestätigt.

Die QCD erklärt die starke Wechselwirkung durch Austausch von Eichbosonen, den Gluonen, zwischen den Konstituenten der Hadronen, den Quarks. In der Natur sind $N_F = 6$ Quarksorten („Flavours“) bekannt, die jeweils in $N_C = 3$ verschiedenen Farben auftreten, und die Zahl unterschiedlicher Gluonen beträgt $N_C^2 - 1 = 8$. Charakteristisch für die QCD ist die 1973 entdeckte bei kleinen Abständen (bzw. großen Impulsen) asymptotisch verschwindende Kopplung („asymptotische Freiheit“, [GW 73], [POL 73]), was eine Erklärung experimenteller Resultate [BLO 69] durch die QCD ermöglichte und ihr somit zum Durchbruch verhalf. Der asymptotischen Freiheit ist die Möglichkeit einer störungstheoretischen Behandlung (siehe z.B. [MUT 87]) vieler Probleme bei hinreichend großen Energien zu verdanken. Auch erlaubt die QCD eine Beschreibung des „Confinement“, der Tatsache, dass Quarks niemals frei, sondern nur in farbneutralen, gebundenen Zuständen (Mesonen und Baryonen) beobachtet werden. Es ist jedoch nicht bewiesen, dass Confinement aus der QCD folgt.

Die Quantisierung nichtabelscher Eichtheorien gelang [FP 67] durch Einführung von „Geis-

¹siehe z.B. [EIN 56]

²Auch zur Erklärung der noch zu besprechenden asymptotischen Freiheit wird eine Theorie mit nichtabelscher Eichsymmetrie benötigt.

tern“. 1971 erfolgte der Beweis der Renormierbarkeit durch 't Hooft [HOO 71]. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir die Entdeckung der BRS-Symmetrie [BRS 76] durch Becchi, Rouet, Stora (1976), die entscheidende Einblicke in die mathematische Struktur der QCD (allgemein von Eichtheorien) erbrachte und einen Zugang zu ihrer kanonischen Quantisierung ermöglichte.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Feldstärkenkorrelation, welche den Vakuumerwartungswert zweier Feldstärken an i.a. verschiedenen Raumzeitpunkten darstellt und das raumzeitliche Ausbreitungsverhalten der Feldstärke beschreibt. Sind beide Punkte identisch, so liegt der Spezialfall des Vakuumpendensats vor, der in dieser Arbeit aber nicht behandelt werden soll. Das Vakuumpendensat gibt Auskunft über die Brechung der klassischen Skaleninvarianz in der quantisierten Theorie. Wir beschränken unsere Überlegungen auf die quarkfreie Theorie, die sogenannte Yang-Mills-Theorie³, und lassen als Eichgruppe allgemein die $SU(N_C)$ zu.

Da sich realistische Feldtheorien nicht geschlossen lösen lassen, ist man auf Näherungsverfahren angewiesen. Die einfachste Möglichkeit stellt die bereits erwähnte Störungstheorie dar, eine Entwicklung der relevanten Korrelationsfunktionen nach Potenzen der Kopplung. Sie liefert nur für kleine Kopplungen brauchbare Näherungen und besitzt überdies einen entscheidenden Nachteil. Durch den notwendigen Renormierungsprozess wird in die QCD eine in der Wirkung nicht auftretende Größe eingeführt, die sogenannte spontane Massenskala Λ . Sie ist nichtanalytisch in der Kopplung und tritt in einer Störungsreihe nicht auf. Die Störungstheorie ignoriert deshalb sämtliche Abhängigkeiten der Korrelationsfunktionen von der Λ -Skala. Zur Erfassung dieser Abhängigkeiten ist man deshalb auf andere Näherungsmethoden angewiesen. Häufig ersetzt man die kontinuierliche Raumzeit durch ein diskretes und endliches Gitter, auf dem sich numerische Berechnungen, z.B. Monte-Carlo-Simulationen, durchführen lassen (siehe [MM 94]). Dieser Ansatz soll in der vorliegenden Arbeit aber nicht verfolgt werden. Stattdessen wird ein eher analytisches Verfahren angewandt, das auf [STI 96] zurückgeht. Dazu werden die Korrelationsfunktionen systematisch durch rationale Approximanten in Form von Doppelsummen genähert, die sowohl eine perturbative als auch eine nichtperturbative Richtung besitzen, wobei letztere die Λ -Abhängigkeit erfasst. Innerhalb dieser Näherung wird zunächst in niedrigster quasiperturbativer Ordnung gerechnet. Die höheren Ordnungen stellen Quantenkorrekturen dar und können mit Hilfe von Dyson-Schwinger-Gleichungen, exakten Beziehungen zwischen Vertexfunktionen, aus der niedrigsten Ordnung generiert werden.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich die Gliederung dieser Arbeit. In Kapitel 1 werden die Grundlagen der QCD vorgestellt. Dies umfasst ihre Wirkung, Korrelationsfunktionen, die Dyson-Schwinger-Gleichungen, die Λ -Skala sowie Grundzüge der Renormierung. Kapitel 2 behandelt die Grundlagen des systematischen nichtperturbativen Näherungsverfahrens, soweit sie von Bedeutung für diese Arbeit sind. Das Verfahren sieht die Näherung der Vertexfunktionen durch rationale Approximanten vor, die an dieser Stelle vorgestellt werden. Den Hauptteil der Arbeit bilden die Kapitel 3 und 4, in denen die beiden in nullter perturbativer Ordnung vorhandenen Anteile der Feldstärkenkorrelation, die in dieser Arbeit „abelscher“ bzw. „halb-nichtabelscher“ Teil genannt werden, untersucht werden. Dabei beschränken wir uns auf die niedrigste quasiperturbative Ordnung; die Erzeugung der höheren Ordnungen mittels Iteration durch Dyson-Schwinger-Gleichungen ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Der abelsche Teil der Feldstärkenkorrelation wird im dritten Kapitel vollständig in niedrigster quasiperturbativer Ordnung berechnet; es fehlen lediglich die durch Dyson-Schwinger-Gleichungen selbstkonsistent erzeugten Korrekturen, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht gesondert eingegangen werden kann. Die aufwendigere Behandlung des „halb-nichtabelschen“ Teils im vierten Kapitel erfordert u.a. die

³benannt nach [YM 54]

Berechnung divergenter Schleifenintegrale. Für diesen Teil der Feldstärkenkorrelation geben wir auf Einschleifenniveau eine Spektraldarstellung an.

Anhang A beinhaltet grundlegende Relationen der $SU(N_C)$ -Algebra, die benötigten Feynmanregeln der QCD sowie einen Abschnitt über die Herleitung der Dyson-Schwinger-Gleichungen. In Anhang B sind die zur Berechnung von Schleifenintegralen notwendigen Formeln zusammengestellt. Dies umfasst Formeln der euklidischen Impulsintegration sowie zwei- und dreiparametrische Feynmanparameter-Integrale. Da bei der Berechnung der Feldstärkenkorrelation immer wieder modifizierte K_1 -Besselfunktionen auftreten werden, ist den Besselfunktionen ein eigener Anhang C gewidmet. Längere Nebenrechnungen sind in Anhang D untergebracht; und Anhang E schließlich enthält in tabellarischer Form einige zu berechnende Koeffizienten.

Kapitel 1

Grundlagen der Quantenchromodynamik

1.1 Wirkung und Korrelationsfunktionen der QCD

Das einzige mir bekannte Verfahren zur Erzeugung einer Quantentheorie ist die Quantisierung einer klassischen Theorie durch einen genau definierten Quantisierungsprozess. Da eine klassische Feldtheorie durch ihre Wirkung charakterisiert wird, liegt es nahe, unsere Diskussion der QCD mit dieser Größe zu beginnen. Die Axiome von Osterwalder und Schrader ([OS 73], [OS 75]) gestatten eine Formulierung der Theorie im Euklidischen. In vierdimensionaler euklidischer Ortsraumdarstellung im Kontinuum lautet die Wirkung¹ der QCD

$$S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x [\mathcal{L}_V(x) + \mathcal{L}_{GF}(x) + \mathcal{L}_{FP}(x) + \mathcal{L}_F(x)], \quad (1.1)$$

wobei

$$\mathcal{L}_V(x) = \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu}(x) F_a^{\mu\nu}(x), \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_{GF}(x) = \frac{1}{2\xi_0} (\partial^\mu A_a^\mu(x))^2, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{FP}(x) = (\partial^\mu \bar{c}_a(x)) (\delta_{ab} \partial^\mu + \bar{g}_0 f_{abc} A_c^\mu(x)) c_b(x), \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_F(x) = \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\psi}_{(f)\alpha}^j(x) \left[\gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(-i\delta^{jk} \partial^\mu + \bar{g}_0 (T_a)^{jk} A_a^\mu(x) \right) + m_{(f)} \delta^{jk} \delta_{\alpha\beta} \right] \psi_{(f)\beta}^k(x) \quad (1.5)$$

die Lagrangedichten der Yang-Mills-Eichfelder, der kovarianten Eichfixierung, der Fadde'ev-Popov'schen Geistfelder und der Fermionfelder darstellen. Letztere transformieren sich in der definierenden Fundamentaldarstellung der zugrundeliegenden Eichgruppe $SU(N_C)$. Die Spinorindices α, β werden wir zumeist weglassen. γ^μ sind die Dirac-Matrizen, welche die euklidische Variante der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (1.6)$$

befolgen. Die Eichfeldstärken, um deren Korrelation es in der vorliegenden Arbeit geht, sind durch

$$F_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) + \bar{g}_0 f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) \quad (1.7)$$

¹Wie üblich arbeiten wir in „natürlichen“ Einheiten mit $\hbar = c = 1$.

gegeben. \bar{g}_0 stellt die in $D \neq 4$ Raumzeitdimensionen dimensionsbehaftete nichtrenormierte Kopplung dar. f_{abc} sind die vollständig antisymmetrischen Strukturkonstanten der Eichgruppe $SU(N_C)$, T_a deren Generatormatrizen in Fundamentaldarstellung (vgl. Anhang A.1). Für die QCD ist $N_C = 3$, und die Zahl der Quarkflavours beträgt $N_F = 6$. Für $N_F = 0$ liegt die Yang-Mills-Theorie vor, und der Fermionsektor (1.5) entfällt.

Um von der durch die Wirkung definierten klassischen Feldtheorie zu einer Quantentheorie zu gelangen, muss sie einem Quantisierungsprozess unterzogen werden. Gegen den aus der Quantenmechanik bekannten Operatorformalismus, in dem die relevanten Größen Eigen- und Erwartungswerte von Operatoren sind, hat sich der auf Feynman² zurückgehende Pfadintegralformalismus durchgesetzt. In dieser Formulierung der Feldtheorie ergeben sich die relevanten Größen gemäß dem Superpositionsprinzip durch gewichtete Funktionalintegration über alle Feldkonfigurationen. „Relevante Größen“ bedeutet hier Übergangsamplituden und Korrelationsfunktionen. Es stellt sich heraus, dass einige dieser Korrelationsfunktionen divergent sind. Sie müssen renormiert werden, um ihnen einen Sinn geben zu können. Die Festlegung eines Renormierungsverfahrens ist ebenso Bestandteil der Definition der Quantenfeldtheorie wie die Festlegung der Wirkung. Auf die Renormierung wird in Abschnitt 1.4 eingegangen.

Die Korrelationsfunktionen („Green’sche Funktionen“) $G_n(x_1, \dots, x_n)$ sind von grundlegender Bedeutung für eine Feldtheorie. Es handelt sich um Vakuumerwartungswerte von n Feldoperatoren an Raumzeitpunkten x_1, \dots, x_n . Kennt man den vollständigen Satz von Korrelationsfunktionen, so kennt man die Dynamik der Theorie. Die Green’schen Funktionen lassen sich aus einem erzeugenden Funktional Z gewinnen. Dazu ordnet man jedem Feld eine Quellfunktion J zu und definiert $Z[\{J\}]$ als funktionale Potenzreihe in $\{J\}$ mit Koeffizienten G_n , so dass sich die Korrelationsfunktion G_n durch n -fache funktionale Ableitung von Z nach den entsprechenden Quellen und anschließendes Nullsetzen aller Quellen ergibt. Wir demonstrieren dies am Beispiel einer skalaren Feldtheorie,

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) G_n(x_1, \dots, x_n) \quad (1.8)$$

mit³

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle. \quad (1.9)$$

(1.8) ist lediglich eine formale Entwicklung; für die konkrete Berechnung von Korrelationsfunktionen muss man auf explizitere Varianten zurückgreifen. So lautet das erzeugende Funktional der QCD im Pfadintegralformalismus

$$\begin{aligned} Z[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] &= \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] + j[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi; J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}]} }{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]}} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] + j[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi; J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}]} \end{aligned} \quad (1.10)$$

mit dem Quellterm

$$\begin{aligned} j[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi; J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] &= \int d^4x \left[A_a^\mu(x) J_a^\mu(x) + \bar{c}_a(x) \omega_a(x) + \bar{\omega}_a(x) c_a(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \left(\bar{\psi}_{(f)}^k(x) \chi_{(f)}^k(x) + \bar{\chi}_{(f)}^k(x) \psi_{(f)}^k(x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

²[FEY 48], inspiriert durch eine Arbeit [DIR 33] von Dirac

³Der Term $n = 0$ in (1.8) ist gleich 1.

Exemplarisch geben wir die Vorschrift zur Berechnung des Gluonpropagators im Ortsraum an:

$$\begin{aligned}
D_{ab}^{\mu\nu}(x, y) &= \langle 0 | A_a^\mu(x) A_b^\nu(y) | 0 \rangle \\
&= \frac{\delta}{\delta J_b^\nu(y)} \frac{\delta}{\delta J_a^\mu(x)} Z[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] \Big|_{J=\dots=0} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi A_a^\mu(x) A_b^\nu(y) e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Für den weiteren Ausbau der Theorie ist von Bedeutung, dass sich die „vollen“ Korrelationsfunktionen G_n aus zusammenhängenden Green'schen Funktionen $G_{(c)n}$ und diese wiederum aus Ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) „eigentlichen“ Vertexfunktionen Γ_n zusammensetzen lassen. Letztere sind die eigentlichen Bausteine der Quantenfeldtheorie. In der Sprache der Feynman-Diagramme bestehen sie aus zusammenhängenden, amputierten Diagrammen, die obendrein nicht durch Durchtrennung einer einzelnen inneren Propagatorlinie in zwei unzusammenhängende Teile zerlegt werden können⁴. Die Feynman-Diagramme der sieben oberflächlich divergenten Vertices (mehr dazu in Abschnitt 1.4) der QCD sind in Anhang A.4 angegeben. Wie die vollen lassen sich auch die zusammenhängenden und eigentlichen Green'schen Funktionen aus erzeugenden Funktionalen gewinnen. Man findet sie (meist nur für die Minkowskische Theorie) in gängigen Lehrbüchern der Quantenfeldtheorie, z.B. [BL 93], [PS 95] (siehe auch Anhang A.2).

Wegen der größeren Nähe zu experimentell zugänglichen Größen (S-Matrixelementen, Streuquerschnitten) ist es oft zweckmäßig, nicht im Orts-, sondern im Impulsraum zu arbeiten. Die Berechnung der Korrelationsfunktionen im Impulsraum geschieht über eine Fourier-Transformation nach dem Schema (A.15)

$$\begin{aligned}
G_{n_{a_1 \dots a_n}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1, \dots, x_n) &= \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_n}{(2\pi)^{4n}} e^{i(k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + \dots + k_n) \\
&\quad \times \tilde{G}_{n_{a_1 \dots a_n}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n) \Big|_{k_1 + \dots + k_n = 0} . \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Die Delta-Distribution konnte abgespalten werden, weil Translationsinvarianz im Ortsraum Impulserhaltung im Impulsraum bewirkt. Auf ähnliche Weise lassen sich verbundene ($G_{(c)n}$) und 1PI-Funktionen (Γ_n) in den Impulsraum transformieren.

An der symmetrisierten Wirkung im Impulsraum (A.34) lassen sich die Feynman-Regeln der Theorie ablesen. In einer störungstheoretischen Entwicklung nach Potenzen von \bar{g}_0 (bzw. der renormierten Kopplung g) setzen sich die Korrelationsfunktionen aus wenigen Elementen, den „nackten“ Propagatoren und Vertices⁵ $\Gamma_n^{(0)pert}$ sowie evtl. Schleifenintegrationen zusammen. Ihnen sind graphische Symbole zugeordnet, mit deren Hilfe sich Beiträge zu Korrelationsfunktionen als Feynman-Diagramme visualisieren lassen. Die nackten Propagatoren und Vertices sind in analytischer und graphischer Form in Anhang A.6 zusammengestellt.

1.2 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Ein wichtiges Hilfsmittel in der nichtstörungstheoretischen Quantenfeldtheorie stellen die Dyson-Schwinger-Gleichungen⁶ dar. Sie beinhalten die durch die Wirkung (1.1) festgelegte Dynamik und stellen damit das quantentheoretische Gegenstück zu den klassischen Feldgleichungen dar.

⁴Beide unverbundenen Teile müssen mit einem externen Bein verbunden sein, um 1P-Reduzibilität zu bewirken. Hinzufügen eines „Tadpoles“ macht ein 1PI-Diagramm nicht reduzibel.

⁵Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird der Zusatz „*pert*“ meist fortgelassen.

⁶siehe [DYS 49], [SCHW 51]

Trotz ihrer fundamentalen Bedeutung als exakte Beziehungen zwischen Vertexfunktionen finden die Dyson-Schwinger-Gleichungen in den meisten Lehrbüchern keine Erwähnung (Ausnahmen sind [PS 95] und [RIV 87]). Es handelt sich um einen unendlichen Satz hierarchischer, gekoppelter Integralgleichungen für die Vertexfunktionen. Allgemein haben sie die Form

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + \left(\frac{\bar{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N [\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{N+2}]. \quad (1.14)$$

In dieser vereinfachten Notation sind sämtliche Impulsabhängigkeiten sowie Lorentz-, Farb- und Spinorindices unterdrückt. Die Funktionale Φ_N sind Schleifenintegrale über die $\Gamma_{2,\dots,N+2}$ und werden jeweils von mindestens einem \bar{g}_0^2 begleitet. Man beachte, dass trotz des Auftretens des nackten störungstheoretischen Vertex $\Gamma_N^{(0)pert}$ die Dyson-Schwinger-Gleichungen unabhängig von der Störungstheorie gelten.

Die Grundzüge der Herleitung der Dyson-Schwinger-Gleichungen sind in Anhang A.7 untergebracht. An dieser Stelle geben wir lediglich die Dyson-Schwinger-Gleichung für die Gluonenselbstenergie, die für die Berechnung von Korrekturen zur Feldstärkenkorrelation wichtig ist, in der Schreibweise der Feynman-Diagramme an:

$$\begin{aligned}
 - \left(\text{---} \right)^{-1} &= - \left(\text{---} \right)^{-1} \\
 &+ \frac{1}{2} \bar{g}_0^2 \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \bar{g}_0^2 \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right] \\
 &+ \frac{1}{6} \bar{g}_0^4 \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right] \\
 &- \bar{g}_0^2 \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right] \\
 &- \bar{g}_0^2 \sum_{f=1}^{N_F} \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right], \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

In dieser schematischen Darstellung sind sämtliche Indices und Impulse unterdrückt. Der Vertex

T_4 stellt die amputierte, verbundene Vier-Gluonen-Funktion (A.32) dar, für die eine endliche Entwicklung nach den Basisvertices der QCD existiert.

Eine ausführliche Zusammenstellung der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD findet sich in [DRI 97]. Im Rahmen der systematisch erweiterten Theorie (Kapitel 2) dienen die Dyson-Schwinger-Gleichungen dazu, zunächst die Approximanten nullter quasiperturbativer Ordnung ($p = 0$) selbstkonsistent zu etablieren und sodann aus ihnen die Quantenkorrekturen ($p > 0$) zu berechnen. Hierauf kommen wir kurz in Kapitel 3 zurück.

1.3 Die spontane Massenskala Λ

Auch in einer Theorie mit verschwindenden Fermionmassen und dimensionsloser Kopplung, in der es auf der Ebene der Wirkung keine Massenskala gibt, werden dennoch massenbehaftete Observable beobachtet. Es muss deshalb eine von der Theorie „spontan“ durch Quanteneffekte erzeugte Massenskala Λ geben⁷, die von der Renormierungsmasse μ und der renormierten Kopplung $g(\mu)$ (siehe Abschnitt 1.4) in einer Weise abhängt, dass sie eine „Renormierungsgruppen“- (RG-) Invariante ist, also die RG-Gleichung

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \Lambda(\mu, g(\mu)) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g(\mu)) \frac{\partial}{\partial g} \right) \Lambda(\mu, g(\mu)) \quad (1.16)$$

erfüllt, mit der Betafunktion

$$\beta(g(\mu)) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu}, \quad (1.17)$$

welche die Abhängigkeit der renormierten Kopplung $g(\mu)$ von der willkürlichen Renormierungsmasse μ beschreibt und sämtliche Information über die noch einzuführende Kopplungsrenormierungskonstante Z_α (1.22) enthält. Aufintegration führt unter Beachtung der Massendimension von Λ auf

$$\Lambda(\mu, g(\mu)) = \mu \exp \left(- \int_{g_1}^{g(\mu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right). \quad (1.18)$$

Der dimensionslose Parameter $g(\mu)$ wird durch einen dimensionsbehafteten Parameter Λ ersetzt, was als *dimensionale Transmutation* bezeichnet wird. Λ ist RG-invariant, hängt aber über die Integrationskonstante g_1 und die höheren Koeffizienten $\beta_{n>1}$ der Betafunktion vom Renormierungsschema ab. Einsetzen der Entwicklung

$$\beta(g, \varepsilon = 0) = -g \left[\beta_0 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^4 + O(g^6) \right] \quad (1.19)$$

führt in erster Ordnung Störungstheorie auf

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp \left[- \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 g^2(\mu)} \left(1 + O(g^2) \right) \right], \quad (1.20)$$

wobei der schemaunabhängige erste Koeffizient der Betafunktion durch

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F \quad (1.21)$$

⁷Das Auftreten einer spontanen Massenskala wurde erstmals in [GN 74] beobachtet.

gegeben ist. Ist $\beta_0 > 0$, so nennt man die Theorie asymptotisch frei. Eine asymptotisch freie Theorie ist durch eine für große Impulse verschwindende Kopplung $g(\mu)$ gekennzeichnet. Die QCD ($N_C = 3$) ist asymptotisch frei, solange die Anzahl N_F der Fermionen-Flavours kleiner als 17 ist. Mit den bekannten $N_F = 6$ Quark-Flavours ist $\beta_0 = 7$, die QCD somit asymptotisch frei. Der Form (1.20) sieht man die für $\beta_0 > 0$ nichtanalytische Abhängigkeit der spontanen Massenskala Λ von der Kopplung $g(\mu)$ an. In einer störungstheoretischen Entwicklung der Korrelationsfunktionen nach der Kopplung $g(\mu)$ werden Abhängigkeiten von Λ in keiner Ordnung erfasst.

1.4 Renormierung

Bei der Berechnung von Korrelationsfunktionen stößt man auf das Problem, dass einige der auftretenden Integrale divergieren. Nach der Zahl der divergenten Diagramme unterscheidet man superrenormierbare Theorien, in denen nur eine endliche Zahl von Diagrammen divergiert, strikt renormierbare Theorien, in denen nur endlich viele Vertexfunktionen divergieren, allerdings in jeder Ordnung der Störungstheorie, und nicht renormierbare Theorien, in denen alle Vertexfunktionen in ausreichend hoher Ordnung Störungstheorie divergieren. Diese Klassifizierung ist eng verbunden mit der Massendimension der Kopplung \bar{g}_0 : Bei superrenormierbaren Theorien ist $[\bar{g}_0] > 0$, bei strikt renormierbaren Theorien $[\bar{g}_0] = 0$ und bei nicht renormierbaren Theorien $[\bar{g}_0] < 0$. Die QCD ist eine strikt renormierbare Theorie, d.h. ihre Kopplung \bar{g}_0 ist in $D = 4$ Raumzeitdimensionen dimensionslos. Wie bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt, gibt es sieben oberflächlich divergente Vertices, nämlich Γ_{2V} , $\Gamma_{\bar{G}G}$, $\Gamma_{\bar{F}F}$, Γ_{3V} , $\Gamma_{V\bar{G}G}$, $\Gamma_{V\bar{F}F(f)}$ und Γ_{4V} , siehe dazu auch Anhang A.4.

Um den divergenten Korrelationsfunktionen einen Sinn geben zu können, ist es notwendig, sie auf eine konsistente Weise endlich zu machen. Dazu werden die divergenten Integrale zuerst „regularisiert“, d.h. so modifiziert, dass sie konvergieren. Bei an der oberen Grenze divergenten („UV-divergenten“) Integralen kann dies z.B. durch Ersetzung der oberen Grenze durch einen endlichen „Cut-off“ geschehen. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, dass die Einführung des Regulators die Lorentzinvarianz der Theorie bricht. Eine andere Methode, die Pauli-Villars-Regularisierung, bewahrt zwar die Lorentz-, bricht aber die nichtabelsche Eichinvarianz.

Ein konsistentes und elegantes Verfahren ist die in [HV 72] vorgeschlagene dimensionale Regularisierung, in der die Raumzeit von 4 auf $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen erweitert wird. Die Divergenzen stecken nun in Termen mit Polstellen bei $\varepsilon = 0$. Diese werden im folgenden Renormierungsprozess entfernt, wobei die genaue Vorgehensweise durch ein Renormierungsschema festgelegt ist. Anschließend kann der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ durchgeführt werden, und die berechneten Korrelationsfunktionen sind konvergent.

Im Rahmen des Renormierungsprozesses werden die in der Wirkung auftretenden „nackten“ durch renormierte Größen ersetzt; so führt man eine renormierte Kopplung $g(\mu)$ über die Beziehung

$$\bar{g}_0^2(\varepsilon) = Z'_\alpha(\bar{g}^2, \varepsilon)\bar{g}^2 = Z_\alpha(g^2(\mu), \varepsilon)g^2(\mu)\mu^{2\varepsilon} \quad (1.22)$$

ein. Da \bar{g}_0 und \bar{g} in dimensionaler Regularisierung Massendimension ε besitzen, wurde eine willkürliche Masse („Renormierungsmasse“) μ abgespalten, um eine dimensionslose Kopplung $g(\mu) = \mu^{-\varepsilon}\bar{g}$ zu gewährleisten, die nun von μ abhängt („laufende Kopplung“). Die Kopplungsrenormierungskonstante Z_α ist in strikt renormierbaren Theorien wie der QCD UV-divergent für $\varepsilon \rightarrow 0$ in jeder Ordnung Störungstheorie, was von fundamentaler Bedeutung für die Theorie ist. Umso erstaunlicher ist die Tatsache, dass die „vollständige“ Renormierungskonstante Z_α für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Neben der Kopplungsrenormierung werden die Gluon-, Geist- und Fermion-

felder sowie die Eichfixierung und die Fermionmassen renormiert, was für diese Arbeit aber von untergeordneter Bedeutung ist.

Die genaue Renormierungsprozedur ist nicht eindeutig festgelegt; es können verschiedene Renormierungsschemata verwendet werden. Wir erwähnen zwei von ihnen.

1. $\overline{\text{MS}}$ -Schema

Bei einer Laurent-Entwicklung der divergenten Ausdrücke nach dem Regulator ε treten Terme der Form

$$\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \quad (1.23)$$

auf, wobei die Divergenzen im $\frac{1}{\varepsilon}$ stecken. Während das ursprüngliche „minimal subtraction“-Schema lediglich Kompensation von $\frac{1}{\varepsilon}$ vorsieht, wird im $\overline{\text{MS}}$ -Schema der gesamte Ausdruck (1.23) durch Gegenterme in der Lagrangedichte kompensiert. Dieses Verfahren garantiert in einer nichtperturbativen Näherung die Bewahrung des perturbativen Limes.

2. Das zweite zu besprechende Verfahren verzichtet auf Entwicklung nach ε und sieht stattdessen die Verwendung der exakten Identität⁸

$$\left(\frac{\bar{g}_0}{4\pi}\right)^2 (\Lambda^2)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\beta_0} [1 + O(\varepsilon \ln \varepsilon, \varepsilon)] \quad (1.24)$$

vor, bei welcher die rechte Seite für $\varepsilon \rightarrow 0$ endlich ist. Wegen des Auftretens der Λ -Skala (1.18) kann diese Kombination in der reinen Störungstheorie nicht vorkommen, sondern nur im Rahmen einer nichtperturbativen Methode. Bemerkenswert ist das Verschwinden eines Faktors \bar{g}_0^2 durch die Renormierung, d.h. Terme der Ordnung \bar{g}_0^2 ergeben Korrekturen zur Ordnung \bar{g}_0^0 . Dieses Verfahren erhält i.a. nicht den perturbativen Limes und führt zu einer anderen, ungeordneten Form der quasiperturbativen Reihe. Es wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine Anwendung finden.

⁸siehe [STI 02]

Kapitel 2

Die systematische Erweiterung der Störungstheorie

2.1 Systematik

Zur Erfassung der nichtstörungstheoretischen Aspekte der Vertexfunktionen wurde von M. Stingl in [STI 96] ein systematisches nichtstörungstheoretisches Näherungsverfahren entworfen. Dieses geht davon aus, dass die Vertexfunktionen eine asymptotische Entwicklung in Form einer Doppelreihe

$$\Gamma \sim \sum_{n,p=0}^{\infty} \Gamma^{(n,p)} (\Lambda^2)^n (g^2)^p. \quad (2.1)$$

besitzen. Obwohl Λ gemäß (1.18) Funktion von g^2 ist, werden beide hier als unabhängige Parameter aufgefasst. Γ heißt in diesem Zusammenhang resurgente Funktion und die Entwicklung (2.1) resurgentes Symbol¹. Die Doppelreihe besitzt eine „perturbative“ (p) und eine „nichtperturbative“ (n) Richtung, letztere erfasst die nichtanalytischen Λ -Abhängigkeiten. Zur Bestimmung der Koeffizienten $\Gamma^{(n,p)}$ lässt man sich von folgenden Überlegungen leiten:

Die störungstheoretische Näherung Γ_N^{pert} von Γ_N hat bekanntlich die Form

$$\Gamma_N^{pert} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[p]pert} \quad \text{mit} \quad \Gamma_N^{[p]pert} = \Gamma_N^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{g^2}{(4\pi)^2} \right)^{p'} \Gamma_N^{(p')pert} \quad (2.2)$$

einer Potenzreihe in g^2 . Eine derartige Entwicklung soll auch in der erweiterten Theorie möglich sein, was eine kleine Kopplung $g(\nu)$ für alle ν voraussetzt. Dies scheint aber der Fall zu sein, wie Experimente [JSL 87] und Gitterrechnungen [LSW 94] bestätigen. Anstelle der perturbativen treten nichtperturbativ modifizierte Vertices auf,

$$\Gamma_N(\{k\}, g^2(\nu), \nu) = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}, g^2(\nu), \nu) \quad (2.3)$$

mit

$$\Gamma_N^{[r,p]} = \Gamma_N^{[r,0]}(\{k\}, \Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{[r,p']}(\{k\}, \Lambda, \nu), \quad (2.4)$$

wobei im Vergleich zum perturbativen Fall eine Abhängigkeit der Approximanten von der spontanen Massenskala Λ zusätzlich zur analytischen g^2 -Abhängigkeit hinzugekommen ist.

¹zu den mathematischen Grundlagen siehe [STI 02] und Referenzen darin

An die Approximanten $\Gamma_N^{[r,p]}$ werden zwei Randbedingungen gestellt, die sich als wichtig für die Bestimmung der Struktur dieser Approximanten erweisen:

- Aufrechterhaltung des *perturbativen Limes*,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Gamma^{[r,p]} = \Gamma^{(p)pert} \quad \text{für alle } p \quad (2.5)$$

Diese Forderung wird durch die Tatsache begründet, dass Λ für $g^2 \rightarrow 0$ schneller als jede Potenz von g^2 verschwindet.

- Bewahrung der *perturbativen Renormierbarkeit*:

Die nichtperturbativ modifizierten Vertexfunktionen sollen keinen höheren Divergenzgrad besitzen als die entsprechenden störungstheoretischen. Dies umfasst die Forderung nach „naiver“ asymptotischer Freiheit, d.h. die Vertexfunktionen nullter Ordnung sollen bei gleichmäßigem Hochskalieren aller Impulse in ihre perturbativen Gegenstücke übergehen,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r,0]}(\{\lambda k\}) = \Gamma_N^{(p)pert}(\{\lambda k\}). \quad (2.6)$$

Diese beiden Randbedingungen schränken die Möglichkeiten bei der Auswahl der Approximanten stark ein. Die Forderung der Möglichkeit des perturbativen „power-counting“ legt zusammen mit der Bedingung einer bzgl. der Impulse globalen Approximation eine rationale Abhängigkeit der Approximanten von Λ^2 nahe.

Im folgenden werden die Approximanten für die in dieser Arbeit benötigten Vertexfunktionen, den 2- und den 3-Gluonen-Vertex angeführt.

2.2 Nichtperturbativ erweiterte Ansätze für Vertexfunktionen

2.2.1 Zwei-Gluonen-Vertex

Da wir in Landau-Eichung ($\xi_0 \rightarrow 0$) arbeiten werden, können wir uns auf den transversal projizierten 2-Gluonen-Vertex beschränken. Den vorangehenden allgemeinen Überlegungen entsprechend, hat unser Ansatz die Struktur

$$\Gamma_{2VT}(k^2) = \sum_{n,p=0}^{\infty} \Gamma_{2VT}^{(n,p)} \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)^n (g^2)^p. \quad (2.7)$$

Die Λ -abhängige n -Summe kann nicht einfach bei endlichem n abgebrochen und in die Dyson-Schwinger-Gleichungen eingesetzt werden, da deren Schleifenintegrale sich über den gesamten Impulsraum bis hinunter zu $k = 0$ erstrecken und beim Einsetzen einer Entwicklung um $k = \infty$ wie (2.7) beliebig starke Infrarotdivergenzen erzeugen würden. Die n -Summe wird daher in nullter Ordnung Störungstheorie mit rationalen Approximanten vom Nennergrad r vorsummiert,

$$D_T^{[r,0]}(k^2) = - \left[\Gamma_{2VT}^{[r,0]}(k^2) \right]^{-1} = \frac{\Delta_{2VT}^{[r]}(k^2)}{N_{2VT}^{[r]}(k^2)} \quad (2.8)$$

mit

$$\Delta_{2VT}^{[r]}(k^2) = \sum_{n=0}^r \eta_n^{[r]} (k^2)^{r-n} (\Lambda^2)^n = \prod_{l=1}^r \left(k^2 + u_{2l}^{[r]} \Lambda^2 \right), \quad (2.9)$$

$$N_{2VT}^{[r]}(k^2) = \sum_{m=0}^{r+1} \zeta_m^{[r]} (k^2)^{r+1-m} (\Lambda^2)^m = \prod_{l=1}^{r+1} \left(k^2 + \sigma_l^{[r]} \Lambda^2 \right), \quad (2.10)$$

Die Koeffizienten $\eta_n^{[r]}$ und $\zeta_m^{[r]}$ sind reell. Weiter sind $\eta_0 = \zeta_0 = 1$ vorgegeben, um den perturbativen Limes

$$-\Gamma_{2VT}^{[r,0]}(k^2) \xrightarrow{k^2 \rightarrow \infty} -\Gamma_{2VT}^{(0)}(k^2) = k^2 \quad (2.11)$$

zu gewährleisten. Die Approximantenfolge (2.8) besteht aus zwei Teilfolgen mit geradem bzw. ungeradem r .

Ist r gerade, so besitzt der Nenner $N_{2V}^{[r,0]}$ mindestens eine reelle Nullstelle, $D_T^{[r,0]}$ somit einen Pol bei reellem k^2 . Befindet dieser sich auf der negativ-reellen Achse, bedeutet dies die Existenz eines stabilen Gluons mit Masse m , die im einfachsten Fall $r = 0$ wegen

$$-\Gamma_{2VT}^{[0,0]}(k^2) = k^2 + \zeta_1^{[0]} \Lambda^2 \quad (2.12)$$

$m^2 = \zeta_1^{[0]} \Lambda^2$ beträgt. Die weiteren r Pole und Nullstellen werden sich ebenfalls auf der negativen reellen Achse befinden, jedoch bei kleineren Werten von k^2 als der erste Pol, und bei wachsendem r einen Verzweigungsschnitt approximieren.

Bei der Teilfolge mit ungeradem r ist die Zahl der Polstellen gerade. Man nimmt an, dass sie paarweise komplex konjugiert zueinander sind,

$$\left(\sigma_{l+1}^{[r]}\right)^* = \sigma_l^{[r]} \quad \text{für } l \text{ ungerade,} \quad (2.13)$$

und bei k^2 mit negativem Realteil liegen. Die Pole approximieren auch hier Schnitte und repräsentieren kurzlebige Quasiteilchen mit einer Lebensdauer in der Größenordnung $1/\Lambda$. Das ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass keine freien Gluonen beobachtet werden (Confinement).

Da $D_T^{[r,0]}(k^2)$ als Propagator nur einfache Nullstellen in k^2 besitzt, lässt sich eine Partialbruchzerlegung der Form

$$D_T^{[r,0]}(k^2) = \sum_{m=1}^{r+1} \frac{\varrho_m^{[r]}}{k^2 + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2} \quad (2.14)$$

mit

$$\varrho_m^{[r]} = \frac{\prod_{l=1}^r (u_{2l}^{[r]} - \sigma_m^{[r]})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{r+1} (\sigma_j^{[r]} - \sigma_m^{[r]})} \quad (2.15)$$

vornehmen.

2.2.2 Drei-Gluonen-Vertex

Der 3-Gluonen-Vertex besitzt bezüglich seiner Farbindices die Struktur (A.33),

$$\Gamma_{3V_{abc}}^{\mu\nu\kappa}(k, p, q) = f_{abc} \Gamma_{3V}^{(f)\mu\nu\kappa}(k, p, q) + d_{abc} \Gamma_{3V}^{(d)\mu\nu\kappa}(k, p, q). \quad (2.16)$$

Der vollständig transversal projizierte Anteil der farbantisymmetrischen Komponente lässt sich gemäß [BC 80] als

$$\begin{aligned} \Gamma_{3VT}^{(f)\mu\nu\kappa}(k, p, q) &= t^{\mu'\mu}(k) t^{\nu'\nu}(p) t^{\kappa'\kappa}(q) \Gamma_{3V}^{(f)\mu\nu\kappa}(k, p, q) \\ &= t^{\mu'\mu}(k) t^{\nu'\nu}(p) t^{\kappa'\kappa}(q) \\ &\quad \times \left(\delta^{\mu\nu}(k-p)^\kappa F_0(k^2, p^2; q^2) + \delta^{\nu\kappa}(p-q)^\mu F_0(p^2, q^2; k^2) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\kappa\mu}(q-k)^\nu F_0(q^2, k^2; p^2) + (k-p)^\kappa (p-q)^\mu (q-k)^\nu F_1(p^2, q^2, k^2) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

schreiben, wobei die invarianten Funktionen F_0 symmetrisch in den ersten beiden Argumenten und F_1 total symmetrisch in allen drei Argumenten sind. Bei Berücksichtigung der Lorentzstruktur wird der Vertex $\Gamma_{3VT}^{(f)}$ (ab jetzt unter Weglassung des Index „ (f) “) in nullter quasiperturbativer Ordnung durch rationale Approximanten genähert,

$$t^{\mu'\mu}(k)t^{\nu'\nu}(p)t^{\kappa'\kappa}(q)\Gamma_{3VT}^{[r,0]\mu'\nu'\lambda'}(k,p,q) = \frac{t^{\mu'\mu}(k)t^{\nu'\nu}(p)t^{\kappa'\kappa}(q)N_{3VT}^{[r]\mu'\nu'\lambda'}(k,p,q)}{\Delta_{3VT}^{[r]}(k^2)\Delta_{3VT}^{[r]}(p^2)\Delta_{3VT}^{[r]}(q^2)}, \quad (2.18)$$

mit

$$N_{3VT}^{[r]\mu\nu\lambda}(k,p,q) = \delta^{\mu\nu}(k-p)^\lambda F_0^{[r]}(k^2,p^2;q^2) + \delta^{\nu\lambda}(p-q)^\mu F_0^{[r]}(p^2,q^2;k^2) + \delta^{\lambda\mu}(q-k)^\nu F_0^{[r]}(q^2,k^2;p^2). \quad (2.19)$$

Die faktorisierende Nennerstruktur der rechten Seite von (2.18) kann im übrigen durch Postulierung einer Cauchy-Integral-Darstellung begründet werden, siehe [STI 02], Seite 98. Die Approximanten

$$F_0^{[r]}(k^2,p^2;q^2) = \sum_{l,m,n=0}^r C_{lmn}^{[r]}(k^2)^l(p^2)^m(q^2)^n(\Lambda^2)^{3r-(l+m+n)} \quad (2.20)$$

besitzen dieselben Symmetrieeigenschaften wie die invarianten Funktionen F_0 , folglich sind die Koeffizienten $C_{lmn}^{[r]}$ symmetrisch in den ersten beiden Indices. Es zeigt sich, dass infolge der Forderung nach Erhaltung der perturbativen Renormierbarkeit der in (2.17) auftretende F_1 -Term zu den Funktionen nullter quasiperturbativer Ordnung noch nicht beiträgt.

Der am Ende von Abschnitt 1.2 erwähnte Selbstkonsistenzmechanismus bewirkt²

$$\Delta_{2VT}^{[r]}(k^2) = \Delta_{3VT}^{[r]}(k^2). \quad (2.21)$$

²siehe [STI 96]

Kapitel 3

Der abelsche Teil der Feldstärkenkorrelation

Die Feldstärkenkorrelation ist definiert als der Vakuumerwartungswert zweier Feldstärken $F_a^{\mu\nu}(x)$ und $F_b^{\kappa\lambda}(y)$ aus (1.7),

$$\begin{aligned} \langle 0 | F_a^{\mu\nu}(x) F_b^{\kappa\lambda}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \left(\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x) + \bar{g}_0 f_{acd} A_c^\mu(x) A_d^\nu(x) \right) \\ &\quad \times \left(\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y) + \bar{g}_0 f_{bcd} A_c^\kappa(y) A_d^\lambda(y) \right) | 0 \rangle \\ &= \sum_{n=1}^3 FSK_{n,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit

$$FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x, y) = \langle 0 | (\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x)) (\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y)) | 0 \rangle, \quad (3.2)$$

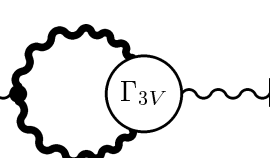
$$\begin{aligned} FSK_{2,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x, y) &= \bar{g}_0 f_{bcd} \langle 0 | (\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x)) A_c^\kappa(y) A_d^\lambda(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \bar{g}_0 f_{acd} \langle 0 | A_c^\mu(x) A_d^\nu(x) (\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$FSK_{3,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x, y) = \bar{g}_0^2 f_{acd} f_{bhj} \langle 0 | A_c^\mu(x) A_d^\nu(x) A_h^\kappa(y) A_j^\lambda(y) | 0 \rangle. \quad (3.4)$$

Der erste Summand tritt auch in abelschen Eichtheorien auf und wird deshalb im folgenden abelscher Teil der Feldstärkenkorrelation genannt. Der zweite Summand besteht aus den Produkten aus je einem abelschen und einem nichtabelschen Teil einer Feldstärke und heißt in dieser Arbeit „halb-nichtabelscher“ Term. Der letzte Summand schließlich wird als „nichtabelscher“ Teil der Feldstärkenkorrelation bezeichnet. In Einschleifenordnung sind nur die ersten beiden Teile relevant, der „nichtabelsche“ Teil ($n = 3$) ist proportional zu \bar{g}_0^2 und erzeugt bereits Zweischleifenbeiträge.

Der abelsche Teil erhält genau genommen selbst noch quasiperturbative Einschleifenkorrekturen, die aus den drei Einschleifentermen der Dyson-Schwinger-Gleichung (1.15) für die Zweipunktfunktion,

$$\begin{aligned} - \left(\text{wavy line} \right)^{-1} &= - \left(\text{wavy line} \right)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{g}_0^2 \left[\text{wavy line} \text{---} \text{blob} \text{---} \text{blob} \text{---} \text{wavy line} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\bar{g}_0^2 \text{ (diagram: wavy line with a loop)} \\
& -\bar{g}_0^2 \text{ (diagram: wavy line with a dashed loop and a circle labeled } \Gamma_{VGG} \text{)} \\
& +O(\bar{g}_0^4)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

herrühren; sie werden in dieser Arbeit nicht berechnet.

3.1 Abelscher Teil der Feldstärkenkorrelation im Euklidischen

Zu berechnen ist der Vakuumerwartungswert des abelschen Teils zweier Feldstärken an verschiedenen Raumzeitpunkten x und y , also

$$\begin{aligned}
FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) &= \langle 0 | (\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x)) (\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y)) | 0 \rangle \\
&= \partial_x^\mu \partial_y^\kappa \langle 0 | A_a^\nu(x) A_b^\lambda(y) | 0 \rangle - \partial_x^\mu \partial_y^\lambda \langle 0 | A_a^\nu(x) A_b^\kappa(y) | 0 \rangle \\
&\quad - \partial_x^\nu \partial_y^\kappa \langle 0 | A_a^\mu(x) A_b^\lambda(y) | 0 \rangle + \partial_x^\nu \partial_y^\lambda \langle 0 | A_a^\mu(x) A_b^\kappa(y) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Da keine divergenten Schleifenintegrale zu berechnen sein werden, kann in $D = 4$ Raumzeitdimensionen gearbeitet werden. Zur Ausführung der Ableitungen empfiehlt sich eine Transformation in den Impulsraum gemäß (A.15) und (A.16),

$$\begin{aligned}
\langle 0 | A_a^\nu(x) A_b^\lambda(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4k d^4k'}{(2\pi)^8} e^{i(k \cdot x + k' \cdot y)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+k') \tilde{G}_{2V}^{\nu\lambda}(k, k') \\
&= \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} D^{\nu\lambda}(-k),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

mit $D^{\nu\lambda}$ aus (A.25). Es folgt

$$\begin{aligned}
FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) &= \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} \left[\delta^{\nu\varrho} \delta^{\lambda\sigma} (ik^\mu) (-ik^\kappa) - \delta^{\nu\varrho} \delta^{\kappa\sigma} (ik^\mu) (-ik^\lambda) \right. \\
&\quad \left. - \delta^{\mu\varrho} \delta^{\lambda\sigma} (ik^\nu) (-ik^\kappa) + \delta^{\mu\varrho} \delta^{\kappa\sigma} (ik^\nu) (-ik^\lambda) \right] D^{\varrho\sigma}(-k) \\
&= \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} \left(\delta^{\nu\varrho} \delta^{\lambda\sigma} k^\mu k^\kappa - \delta^{\nu\varrho} \delta^{\kappa\sigma} k^\mu k^\lambda \right. \\
&\quad \left. - \delta^{\mu\varrho} \delta^{\lambda\sigma} k^\nu k^\kappa + \delta^{\mu\varrho} \delta^{\kappa\sigma} k^\nu k^\lambda \right) \left(t^{\varrho\sigma}(-k) D_T(k^2) + l^{\varrho\sigma} D_L(k^2) \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

mit der Zerlegung (A.28) des Gluonpropagators in Transversal- und Longitudinalteil. Man erkennt, dass $FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y)$ in Wirklichkeit nur von der Koordinatendifferenz $x - y$ abhängt, was zu erwarten war. Wir können deshalb die vereinfachte Schreibweise

$$FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x-y) := FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) \tag{3.9}$$

benutzen.

Beim Einsetzen der Projektoren $t^{\rho\sigma}$ und $l^{\rho\sigma}$ fällt der Longitudinalpropagator D_L interessanterweise heraus,

$$FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x-y) = \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \times \left[\delta^{\nu\lambda} k^\mu k^\kappa - \delta^{\nu\kappa} k^\mu k^\lambda - \delta^{\mu\lambda} k^\nu k^\kappa + \delta^{\mu\kappa} k^\nu k^\lambda \right] D_T(k^2), \quad (3.10)$$

auch außerhalb der Landau-Eichung ($\xi_0 \rightarrow 0$). Nach dieser Feststellung empfiehlt es sich, die Impulse k^μ wieder wie ursprünglich geschehen als Ableitungen nach x darzustellen, um das k -Integral ausführen zu können. Auf Grund der Translationsinvarianz des Vakuums hängt die Feldstärkenkorrelation nur von der Koordinatendifferenz $x - y$ ab, weshalb wir im folgenden o.B.d.A. $y = 0$ setzen können.

Ein Ansatz mit rationalen Approximanten für den Transversalpropagator in nullter Ordnung Störungstheorie führt, wie in (2.14) dargestellt, auf

$$D_T(k^2) \rightarrow D_T^{[r,0]}(k^2) = \sum_{m=1}^{r+1} \frac{\varrho_m^{[r]}}{k^2 + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2}, \quad (3.11)$$

mit den Residuen $\varrho_m^{[r]}$ aus (2.15). Man erhält

$$FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) = \delta_{ab} \left(\delta^{\nu\kappa} \partial^\mu \partial^\lambda + \delta^{\mu\lambda} \partial^\nu \partial^\kappa - \delta^{\nu\lambda} \partial^\mu \partial^\kappa - \delta^{\mu\kappa} \partial^\nu \partial^\lambda \right) \times \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2 + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2}. \quad (3.12)$$

Dieses Integral ist nichts anderes als der Propagator eines freien skalaren Feldes mit i.a. komplexem Massenquadrat $\sigma_m^{[r]} \Lambda^2$ in euklidischer Ortsraumdarstellung, der gemäß Anhang D.1, (D.11) zu

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2 + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{4\pi^2 |x|} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|) \quad (3.13)$$

berechnet wird und auf folgendes Zwischenergebnis für den abelschen Teil der Feldstärkenkorrelation führt:

$$FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) = \delta_{ab} \left(\delta^{\nu\kappa} \partial^\mu \partial^\lambda + \delta^{\mu\lambda} \partial^\nu \partial^\kappa - \delta^{\nu\lambda} \partial^\mu \partial^\kappa - \delta^{\mu\kappa} \partial^\nu \partial^\lambda \right) \times \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{4\pi^2 |x|} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|). \quad (3.14)$$

Zur Ausführung der partiellen Ableitungen werden einige Rechenregeln für die modifizierten Besselfunktionen K_ν benötigt, die in Anhang C.1 zusammengestellt sind. Die erste partielle Ableitung wird mit Hilfe von (C.15) ausgeführt,

$$\begin{aligned} \partial^\lambda \frac{1}{|x|} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|) &= -\frac{x^\lambda}{|x|^3} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|) \\ &\quad + \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} x^\lambda}{|x|^2} \left[-K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|) - \frac{1}{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} x^\lambda}{|x|^2} K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|) - \frac{2x^\lambda}{|x|^3} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} |x|), \end{aligned} \quad (3.15)$$

die verbleibende mittels (C.15) und (C.16),

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \partial^\lambda \frac{1}{|x|} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) &= -\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \left(\frac{\delta^{\mu\lambda}}{|x|^2} - \frac{2x^\mu x^\lambda}{|x|^4} \right) K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) \\
&+ \left(\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 \frac{x^\mu x^\lambda}{|x|^3} - 2 \frac{\delta^{\mu\lambda}}{|x|^3} + 6 \frac{x^\mu x^\lambda}{|x|^5} \right) K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) \\
&+ 2 \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \frac{x^\mu x^\lambda}{|x|^4} \left[K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) + \frac{1}{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{|x|^2} \left(4 \frac{x^\mu x^\lambda}{|x|^2} - \delta^{\mu\lambda} \right) K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) \\
&+ \frac{1}{|x|^3} \left[\left(\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 + \frac{8}{|x|^2} \right) x^\mu x^\lambda - 2 \delta^{\mu\lambda} \right] K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|), \quad (3.16)
\end{aligned}$$

vgl. auch Anhang C.3.

Die Berechnung der restlichen Summanden in (3.14) verläuft völlig analog. Nach Zusammenfassung der Terme mit $\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda}$ sowie mit $\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}$ erhält man als Endergebnis für den abelschen Teil der Feldstärkenkorrelation im Euklidischen in nullter quasiperturbativer Ordnung

$$\begin{aligned}
FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) &= \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{4\pi^2 |x|^2} \left\{ 2 \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \left[(\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}) \right. \right. \\
&+ \frac{2}{|x|^2} (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \left. \right] K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) \\
&+ \frac{1}{|x|} \left[\left(\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 + \frac{8}{|x|^2} \right) (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \right. \\
&\left. \left. + 4 (\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}) \right] K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|) \right\}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

3.2 Fortsetzung ins Minkowskische

Bisher haben wir mit einer euklidischen Theorie gearbeitet, in der die Metrik durch $\delta^{\mu\nu}$ gegeben ist und kein Unterschied zwischen räumlichen und zeitlichen Koordinaten existiert. Unser Universum besitzt aber eine (näherungsweise) minkowskische Metrik mit einer ausgezeichneten Zeitachse. Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts sollen deshalb jetzt in die minkowskische Welt übertragen werden.

In diesem Abschnitt bezeichnet x^μ einen kontravarianten Vektor, ∂^μ die partielle Ableitung nach dem kovarianten $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, $x \cdot x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ das minkowskische Skalarprodukt. Die Minkowski-Metrik ist durch $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ gegeben.

Im Minkowskischen ist der abelsche Teil der Feldstärkenkorrelation als Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts der Feldoperatoren aus (3.2) definiert; wir bezeichnen ihn mit

$$FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x, y) = \langle 0 | T \left[(\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x)) (\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y)) \right] | 0 \rangle. \quad (3.18)$$

Wieder nutzen wir die Translationsinvarianz aus und substituieren $x - y \rightarrow x$. Den Übergang ins Minkowskische vollziehen wir an (3.12), indem wir die Metrik

$$-\delta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} \quad (3.19)$$

ersetzen und außerdem die in Anhang D.1.2 hergeleitete minkowskische Version (D.20)

$$i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{4\pi i} \delta(x^2) + \Theta(x^2) \frac{im}{8\pi\sqrt{x^2}} H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2}) \\ + \Theta(-x^2) \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \quad (3.20)$$

des skalaren Propagators einsetzen. Die Rolle des Massenquadrats m^2 übernimmt dabei die Polstelle $\sigma_m^{[r]} \Lambda^2$, die wir hier als reell annehmen (r gerade, Teilchen-Untersequenz, vgl. Seite 19).

$$FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) = \delta_{ab} \left(g^{\nu\lambda} \partial^\mu \partial^\kappa + g^{\mu\kappa} \partial^\nu \partial^\lambda - g^{\nu\kappa} \partial^\mu \partial^\lambda - g^{\mu\lambda} \partial^\nu \partial^\kappa \right) \\ \times \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - \sigma_m^{[r]} \Lambda^2 + i\varepsilon} \\ = \delta_{ab} \left(g^{\nu\lambda} \partial^\mu \partial^\kappa + g^{\mu\kappa} \partial^\nu \partial^\lambda - g^{\nu\kappa} \partial^\mu \partial^\lambda - g^{\mu\lambda} \partial^\nu \partial^\kappa \right) \\ \times \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \left[\frac{1}{4\pi i} \delta(x^2) + \Theta(x^2) \frac{i\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{8\pi\sqrt{x^2}} H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{x^2}) \right. \\ \left. + \Theta(-x^2) \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}) \right] \quad (3.21)$$

Anwendung der Ableitungsregeln (C.13) bis (C.16) führt auf

$$\partial^\mu \partial^\kappa \left[\frac{1}{4\pi i} \delta(x^2) + \Theta(x^2) \frac{i\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{8\pi\sqrt{x^2}} H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{x^2}) \right. \\ \left. + \Theta(-x^2) \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}) \right] \\ = \frac{1}{4\pi i} \partial^\mu \partial^\kappa \delta(x^2) + \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{4\pi} \\ \times \left[\frac{2i\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} x^\mu x^\kappa}{x^2} H_0^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{x^2}) \frac{i}{\sqrt{x^2}} H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{x^2}) \left(x^\kappa \partial^\mu + g^{\mu\kappa} - 4 \frac{x^\mu x^\kappa}{x^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} x^\mu x^\kappa}{\pi(-x^2)} K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}) - \frac{2x^\kappa}{\pi\sqrt{-x^2}} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}) \left(\partial^\mu + \frac{x^\mu}{-x^2} \right) \right] \delta(x^2) \\ + \frac{i\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{8\pi x^2} \Theta(x^2) \left[\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \left(g^{\mu\kappa} - 4 \frac{x^\mu x^\kappa}{x^2} \right) H_0^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{x^2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left(8 \frac{x^\mu x^\kappa}{x^2} - \sigma_m^{[r]} \Lambda^2 x^\mu x^\kappa - 2g^{\mu\kappa} \right) H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{x^2}) \right] \\ + \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda}}{4\pi^2(-x)^2} \Theta(-x^2) \left[\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \left(g^{\mu\kappa} + 4 \frac{x^\mu x^\kappa}{-x^2} \right) K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{-x^2}} \left(8 \frac{x^\mu x^\kappa}{-x^2} + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2 x^\mu x^\kappa + 2g^{\mu\kappa} \right) K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}) \right]. \quad (3.22)$$

Den abelschen Teil der Feldstärkenkorrelation im Minkowskischen erhält man schließlich durch Einsetzen der soeben berechneten Ableitungen in (3.21),

$$\begin{aligned}
& FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) \\
= & \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} g_m^{[r]} \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{4\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda i} (g^{\nu\lambda} \partial^\mu \partial^\kappa + g^{\mu\kappa} \partial^\nu \partial^\lambda - g^{\nu\kappa} \partial^\mu \partial^\lambda - g^{\mu\lambda} \partial^\nu \partial^\kappa) \right. \right. \\
& + \frac{2i\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) H_0^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}) \\
& + \frac{i}{\sqrt{x^2}} H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}) \left[(g^{\nu\lambda} x^\kappa \partial^\mu + g^{\mu\kappa} x^\lambda \partial^\nu - g^{\nu\kappa} x^\lambda \partial^\mu - g^{\mu\lambda} x^\nu \partial^\nu) \right. \\
& + 2(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) - \frac{4}{x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \left. \right] \\
& + \frac{2\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{\pi x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2}) \\
& + \frac{2}{\pi \sqrt{-x^2}} K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2}) \left[g^{\nu\lambda} x^\kappa \left(\frac{x^\mu}{x^2} - \partial^\mu \right) + g^{\mu\kappa} x^\lambda \left(\frac{x^\nu}{x^2} - \partial^\nu \right) \right. \\
& \left. - g^{\nu\kappa} x^\lambda \left(\frac{x^\mu}{x^2} - \partial^\mu \right) - g^{\mu\lambda} x^\kappa \left(\frac{x^\nu}{x^2} - \partial^\nu \right) \right] \delta(x^2) \\
& + \frac{i}{2x^2} \Theta(x^2) \left[2\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \left[-\frac{2}{x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right. \right. \\
& + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} \left. \right] H_0^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}) \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left[\left(\frac{8}{x^2} - \sigma_m^{[r]} \Lambda^2 \right) (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right. \\
& \left. - 4(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \right] H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}) \left. \right] \\
& + \frac{1}{\pi(-x^2)} \Theta(-x^2) \left[2\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \left[\frac{2}{-x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right. \right. \\
& + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} \left. \right] K_0(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2}) \\
& + \frac{1}{\sqrt{-x^2}} \left[\left(\frac{8}{-x^2} + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2 \right) (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right. \\
& \left. + 4(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \right] K_1(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2}) \left. \right] \left. \right\}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Der abelsche Teil der Feldstärkenkorrelation im Minkowskischen enthält zu einer Delta-Distribution bzw. deren erster oder zweiter Ableitung proportionale Terme, die die Feldstärkenkorrelation bei $x^2 = 0$ singularär werden lassen. Für $x^2 < 0$ entspricht die Feldstärkenkorrelation genau der euklidischen (3.17), wenn man dort $\delta^{\mu\nu} \rightarrow -g^{\mu\nu}$ und $x^2 \rightarrow -x^2$ ersetzt. Das sind genau die Ersetzungen, die für $x^2 < 0$ den euklidischen (D.11) in den minkowskischen (D.20) Propagator überführen. Für $x^2 > 0$ wird darüberhinaus K_n durch $H_n^{(2)}$ ersetzt. Die Struktur der minkowskischen und euklidischen Feldstärkenkorrelation ist weiterhin dieselbe, jedoch stimmen in diesem Fall nicht mehr alle Vorzeichen überein. Der Grund dafür ist in den unterschiedlichen Ableitungsregeln für K_n und $H_n^{(2)}$ zu suchen.

Im folgenden wird das Verhalten des abelschen Teils der Feldstärkenkorrelation im Unendlichen und für kleine Abstände sowohl im Minkowskischen (3.23) für zeit- und raumartige Abstände als auch im Euklidischen (3.17) untersucht. Der lichtartige, singuläre Fall wird nicht weiter beachtet.

3.3 Asymptotisches Verhalten

Das asymptotische Verhalten des abelschen Teils der euklidischen Feldstärkenkorrelation (3.17) ergibt sich aus demjenigen der modifizierten Besselfunktionen K_ν . (C.8) entnimmt man

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + O(1/z)], \quad (3.24)$$

$$K_1(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{3}{8z} + O(1/z^2) \right]. \quad (3.25)$$

mit $z = \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|$. Dies eingesetzt in die Korrelationsfunktion (3.17) ergibt für $|x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) &= \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \frac{\varrho_m^{[r]}}{4\sqrt{2}|x|^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|\right) \\ &\times \left\{ \frac{1}{|x|^2} (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \right. \\ &\times \left. \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x| + \frac{35}{8} \right) + 2(\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}) + O(1/|x|) \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Bis auf Korrekturen der Ordnung $1/|x|^{\frac{3}{2}}$ fällt der abelsche Teil der euklidischen Feldstärkenkorrelation im Unendlichen exponentiell ab.

Im Minkowskischen setzt man für raumartige Abstände ($x^2 < 0$) die Entwicklungen (3.24) und (3.25) mit $z = \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2}$ in (3.23) ein und erhält entsprechend

$$\begin{aligned} FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) \quad x^2 \leq 0 &\delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \frac{\varrho_m^{[r]}}{4\sqrt{2}(\sqrt{-x^2})^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2}\right) \\ &\times \left\{ \frac{1}{-x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right. \\ &\times \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{-x^2} + \frac{35}{8} \right) + 2(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \\ &\left. + O(1/\sqrt{-x^2}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Das für zeitartiges $x^2 > 0$ im Minkowskischen benötigte asymptotische Verhalten von $H_0^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ entnimmt man (C.5),

$$H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{\pi}{4})} [1 + O(1/z)], \quad (3.28)$$

$$H_1^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\frac{3}{4}\pi)} \left[1 - \frac{3i}{8z} + O(1/z^2) \right]. \quad (3.29)$$

Einsetzen in (3.23) führt mit $z = \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}$ auf

$$\begin{aligned}
FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) \quad x^2 \geq 0 & \quad \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sqrt{2}}{8 (\sqrt{x^2})^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{i\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-i\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}\right) \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right. \\
& \quad \times \left(-i\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2} - \frac{35}{8} \right) + 2(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \\
& \quad \left. + O(1/\sqrt{x^2}) \right\}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Fall $x^2 < 0$ und zum Euklidischen oszilliert die Feldstärkenkorrelation, anstatt exponentiell abzufallen. Diese Formel gilt jedoch nur für den Fall reeller Polpositionen $\sigma_m^{[r]} \Lambda^2$, die dann gemäß der bekannten Feynman'schen Vorschrift wie in (3.20) als $\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 - i\varepsilon$ zu interpretieren sind. Hat man, wie in einer Theorie mit Confinement vom Typ der QCD, stattdessen komplexe Polpaare $\sigma_m^{[r]} \Lambda^2$ mit $\sigma_{m+1}^{[r]} = (\sigma_m^{[r]})^*$ für ungerade m (Quasiteilchen-Untersequenz auf Seite 19), so kann besagte Formel nur für $\text{Im } \sigma_m^{[r]} < 0$ direkt fortgesetzt werden, da die Größe auf der linken Seite von (3.20) eine Diskontinuität (Verzweigungsschnitt) bei reellem $m^2 > 0$ besitzt. Für den jeweils konjugierten Pol mit $\text{Im } \sigma_m^{[r]} > 0$ ist die entsprechende Formel mit $-i\varepsilon$ statt $i\varepsilon$ fortzusetzen, die rechter Hand eine Besselfunktion $H_1^{(1)}(m\sqrt{x^2})$ mit der Asymptotik (C.4),

$$H_1^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{3\pi}{4})} \left(1 + \frac{3i}{8z} + O(1/z^2) \right) \tag{3.31}$$

enthält. Gegenüber (3.29) hat ein Vorzeichenwechsel im Exponenten stattgefunden. Eine analoge Entwicklung gilt für die dann durch Ableitung auftretende Funktion $H_0^{(1)}(m\sqrt{x^2})$. Dies führt dazu, dass in der Endformel (3.30) statt des Faktors $\exp\left(-i\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}\right)$ Kombinationen der Form

$$\begin{aligned}
& c \exp\left(i \left(\text{Re } \sqrt{\sigma_m^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \exp\left(- \left(\text{Im } \sqrt{\sigma_m^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \\
& + c^* \exp\left(-i \left(\text{Re } \sqrt{\sigma_{m+1}^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \exp\left(\left(\text{Im } \sqrt{\sigma_{m+1}^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \\
& = 2\text{Re} \left[c \exp\left(i \left(\text{Re } \sqrt{\sigma_m^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \right] \exp\left(- \left(\text{Im } \sqrt{\sigma_m^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \\
& = 2|c| \cos \left[\left(\text{Re } \sqrt{\sigma_m^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2} + \arg c \right] \exp\left(- \left(\text{Im } \sqrt{\sigma_m^{[r]}}\right) \Lambda \sqrt{x^2}\right) \tag{3.32}
\end{aligned}$$

aufzutreten, wenn wir die paarweise komplexen $\sigma_m^{[r]}$ in der Reihenfolge $\text{Im } \sigma_m^{[r]} = -\text{Im } \sigma_{m+1}^{[r]} > 0$ für ungerade m anordnen. Im Falle der Theorie mit Confinement ist demnach das Verhalten des abelschen Teils der Feldstärkenkorrelation bei großen zeitartigen Abständen nicht mehr rein oszillierend, sondern von einem exponentiellen Abfall überlagert.

3.4 Verhalten für kleine Abstände

Das Verhalten des abelschen Teils der Feldstärkenkorrelation im Euklidischen (3.17) für kleine $|x|$ ergibt sich aus demjenigen der modifizierten Besselfunktionen K_0 und K_1 . Einsetzen der

in Anhang C.2 hergeleiteten Reihendarstellungen (C.27) und (C.28) in (3.17) führt mit $z = \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|$ auf

$$\begin{aligned}
FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) &= \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{4\pi^2} \left\{ 2\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \left[(\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2}{|x|^2} (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \right] \right. \\
&\quad \times \left[-\frac{1}{|x|^2} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x| \right) + \frac{\ln 2 - \gamma_E}{|x|^2} - \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x| \right) \right] \\
&\quad + \sigma_m^{[r]} \Lambda^2 (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|^4} + \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{2|x|^2} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x| \right) \right] \\
&\quad + \left[\frac{8}{|x|^2} (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \right. \\
&\quad \left. + 4(\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|^4} + \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{2|x|^2} \ln \frac{\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|}{2} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(\gamma_E - \frac{1}{2}) \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda}{2|x|^2} + \frac{\left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \right)^3}{16} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x| \right) \right] \right\} + O(|x|^0, |x| \ln |x|),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

und nach Zusammenfassung der Terme mit gleicher Tensorstruktur auf

$$\begin{aligned}
FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) &= \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4\pi^2} \left\{ (\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa}) \right. \\
&\quad \times \left[\frac{4}{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 |x|^4} - \frac{1}{|x|^2} - \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x| \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{|x|^2} (\delta^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda + \delta^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa - \delta^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa - \delta^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda) \\
&\quad \times \left. \left(\frac{8}{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 |x|^4} - \frac{1}{|x|^2} \right) \right\} + O(|x|^0, |x| \ln |x|).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Der abelsche Teil der euklidischen Feldstärkenkorrelation besitzt also bei $|x| = 0$ Divergenzen vom Typ $1/|x|^4$, $1/|x|^2$ und $\ln(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda |x|)$.

Im Minkowskischen setzt man für $x^2 > 0$ die Entwicklungen (C.24) und (C.25) in (3.23) ein und erhält mit $z = \sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2}$

$$\begin{aligned}
FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) \quad x^2 \geq 0 &\stackrel{\cong}{=} \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4\pi^2} \left\{ (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \right. \\
&\quad \times \left[\frac{4}{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 (x^2)^2} + \frac{\pi i + 1}{x^2} - \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]}} \Lambda \sqrt{x^2} \right) \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{8}{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 (x^2)^2} + \frac{2\pi i + 1}{x^2} \right) \Big\} \\ & + O \left(\left(\sqrt{x^2} \right)^0, \sqrt{x^2} \ln \left(\sqrt{x^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Für $x^2 < 0$ führt Einsetzen von (C.27) und (C.28) in (3.23) mit $z = \sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2}$ auf

$$\begin{aligned} FSK_{M1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x) \stackrel{x^2 \leq 0}{=} & \delta_{ab} \sum_{m=1}^{r+1} \varrho_m^{[r]} \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4\pi^2} \left\{ (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa}) \right. \\ & \times \left[\frac{4}{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 (-x^2)^2} - \frac{1}{-x^2} - \frac{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2}{4} \ln \left(\sqrt{\sigma_m^{[r]} \Lambda} \sqrt{-x^2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{-x^2} (g^{\nu\lambda} x^\mu x^\kappa + g^{\mu\kappa} x^\nu x^\lambda - g^{\nu\kappa} x^\mu x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\nu x^\kappa) \\ & \times \left(\frac{8}{\sigma_m^{[r]} \Lambda^2 (-x^2)^2} - \frac{1}{-x^2} \right) \Big\} \\ & + O \left(\left(\sqrt{-x^2} \right)^0, \sqrt{-x^2} \ln \left(\sqrt{-x^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.5 Graphische Darstellung

In diesem Abschnitt werden einige ausgewählte Elemente der Feldstärkenkorrelation geplottet. Wir beschränken uns auf die erste Stufe rationaler Approximation ($r = 1$). Die benötigten Konstanten entnimmt man [DRI 97] für die rein gluonische Theorie ($N_F = 0$):

$\sigma_1^{[1]}$	$-0,4486 + i1,1673$
$\sigma_2^{[1]}$	$-0,4486 - i1,1673$
$u_2^{[1]}$	$0,8456$

Daraus berechnen sich die $\varrho_m^{[1]}$ gemäß (2.15):

$$\varrho_1^{[1]} = \frac{u_2^{[1]} - \sigma_1^{[1]}}{\sigma_2^{[1]} - \sigma_1^{[1]}} = 0,5 + i0,5544 \quad (3.37)$$

$$\varrho_2^{[1]} = \frac{u_2^{[1]} - \sigma_2^{[1]}}{\sigma_1^{[1]} - \sigma_2^{[1]}} = 0,5 - i0,5544 \quad (3.38)$$

Für die spontane Massenskala liefert [SCH 96] im $\overline{\text{MS}}$ -Schema den Wert

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \approx 287 \text{ MeV}, \quad (3.39)$$

was in „natürlichen Einheiten“ ($c = 1$) $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \approx 5,12 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$ entspricht.

Der genaue Wert von Λ wird für die graphische Darstellung jedoch nicht benötigt, weil der abelsche Teil der Feldstärkenkorrelation derart mit Potenzen von Λ erweitert werden kann, dass er proportional zu Λ^4 ist und die euklidischen Abstände in der dimensionslosen Variablen $(x - y)\Lambda$ angegeben werden können.

Vor dem Plotten machen wir uns Gedanken darüber, welche Elemente der Feldstärkenkorrelation dargestellt werden sollen. Ausgangspunkt ist die euklidische Version (3.17). Wir erinnern

daran, dass $FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y)$ eine Abkürzung für $\langle 0 | (\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x)) (\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y)) | 0 \rangle$ ist. Zunächst ist klar, dass $FSK_{1,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y)$ diagonal in den Farbindices ist; wir setzen o.B.d.A. $a = b = 1$.

Das Argument $x - y$ ist ein vierkomponentiger Vektor. Da wir in einer zweidimensionalen Graphik nicht die Abhängigkeit der Korrelation von allen Komponenten gleichzeitig darstellen können, beginnen wir mit dem einfachsten Fall und plotten $FSK_{1,11}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y)$ entlang einer Koordinatenachse. Da im Euklidischen alle vier Achsen gleichberechtigt sind, genügt es, sich auf die x^1 -Achse zu beschränken. Es ist leicht zu sehen, dass es je nach Wahl der Indexpaare (μ, ν) , (κ, λ) drei verschiedene Arten der Korrelation gibt, die in den Abbildungen 3.1 bis 3.2 dargestellt sind: Abbildung 3.1 zeigt die Komponente $FSK_{1,11}^{1212}(x,y)$ des abelschen Teils der Feldstärkenkorrelation im Euklidischen in Abhängigkeit von $x^1 - y^1$ für $x^2 - y^2 = x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$. Man erkennt die Divergenz für $|x| \rightarrow 0$ und den raschen Abfall bei großen $|x|$. In Abbildung 3.2 ist anhand von $FSK_{1,11}^{1212}(x,y)$ zu sehen, dass es auch negative Korrelationen gibt. Abbildung 3.3 schließlich demonstriert als dritte Variante das durch die Symmetrie der Indexstruktur der Feldstärkenkorrelation bedingte Verschwinden des abelschen Teils der Korrelation zweier Feldstärkelemente $FSK_{1,11}^{1111}(x,y)$ mit gleichen Indices.

Die nächste Abbildung 3.4 stellt das gleiche Element der Feldstärkenkorrelation dar wie Abb. 3.1, nun aber mit einem endlichen Offset $x^2 - y^2$, so dass die Singularität bei $x = y$ vermieden wird. In den folgenden Konturdiagrammen sind Linien gleicher Korrelation $FSK_{1,11}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) = \text{const}$ eingezeichnet. Die kleinsten Werte sind dabei schwarz, die größten weiß codiert. Abbildung 3.5 lässt Variation von $x^1 - y^1$ und $x^2 - y^2$ zu und entspricht damit in gewissem Sinne einer zweidimensionalen Version der in Abb. 3.1 dargestellten Größe. Die nächste Abbildung 3.6 dehnt den Wertebereich der Variablen $x^1 - y^1$, $x^2 - y^2$ über die Singularität bei $x = 0$ aus. Es stellt sich die Frage, ob die erkennbaren Strukturen in der Feldstärkenkorrelation oder der begrenzten Rechengenauigkeit von MATHEMATICA begründet liegen. Interessant ist auch Abbildung 3.7, in der im Vergleich zur vorhergehenden ein endlicher Offset $x^3 - y^3 = 0,175\Lambda$ gewählt wurde. In Abbildung 3.8 schließlich ist das Konturdiagramm von $FSK_{1,11}^{1331}(x,y)$ dargestellt.

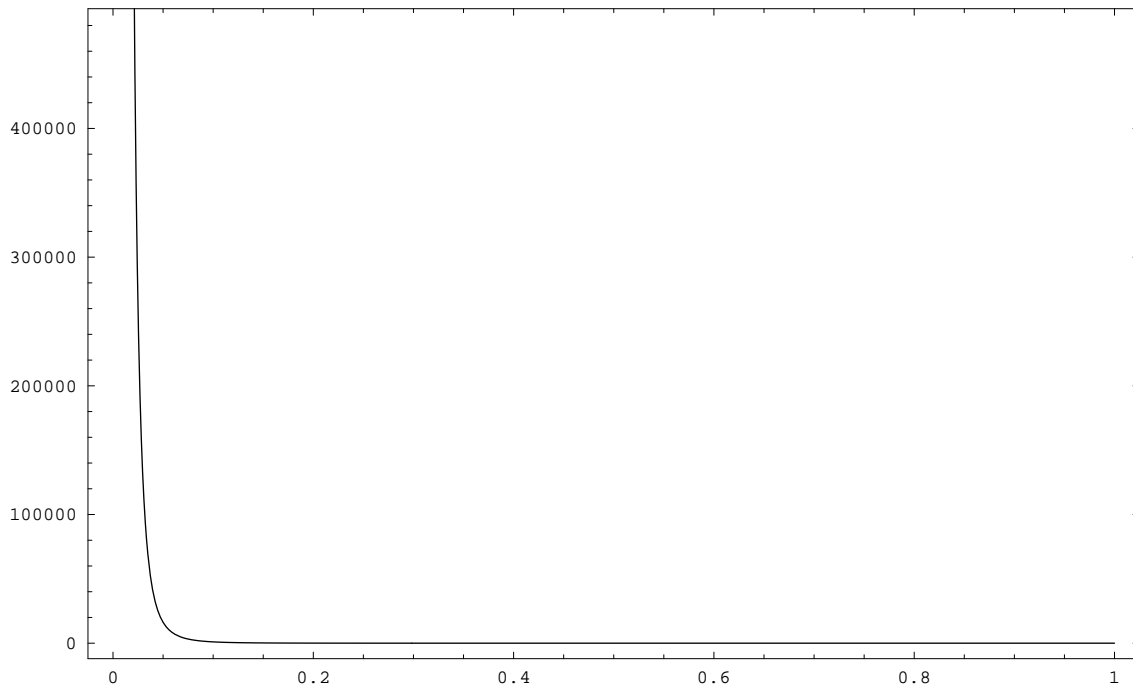


Abbildung 3.1: Abelscher Teil der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1221}(x, y)$ gemessen in Λ^4 für $x^2 - y^2 = x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1) \Lambda$

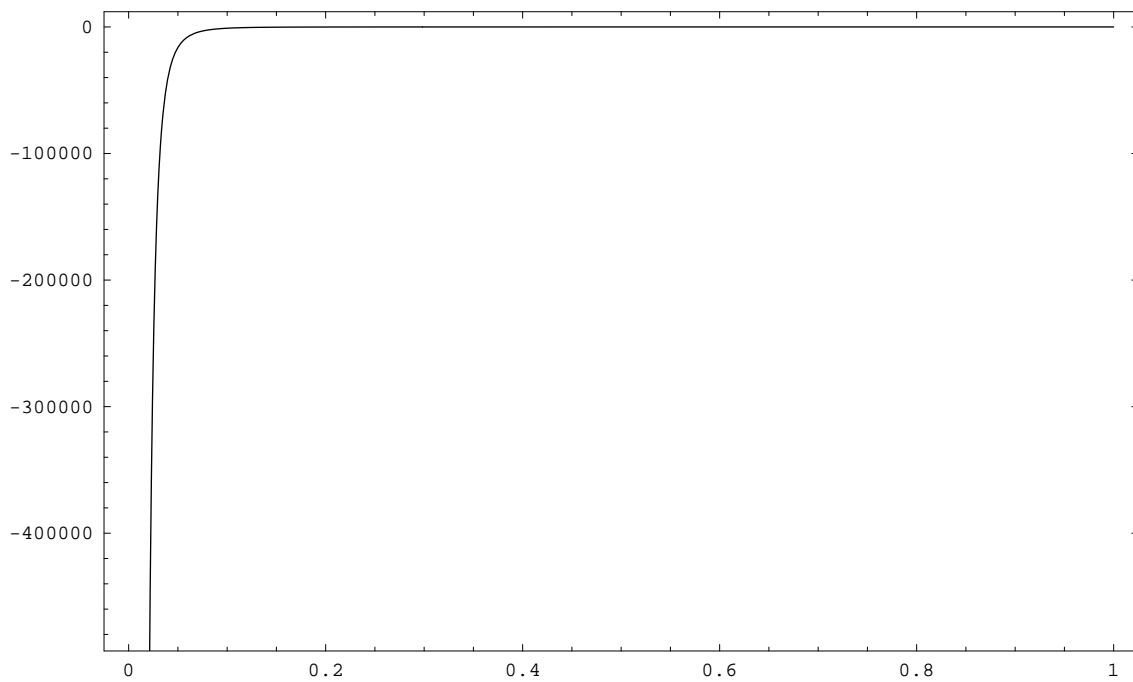


Abbildung 3.2: Abelscher Teil der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1212}(x, y)$ gemessen in Λ^4 für $x^2 - y^2 = x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1) \Lambda$

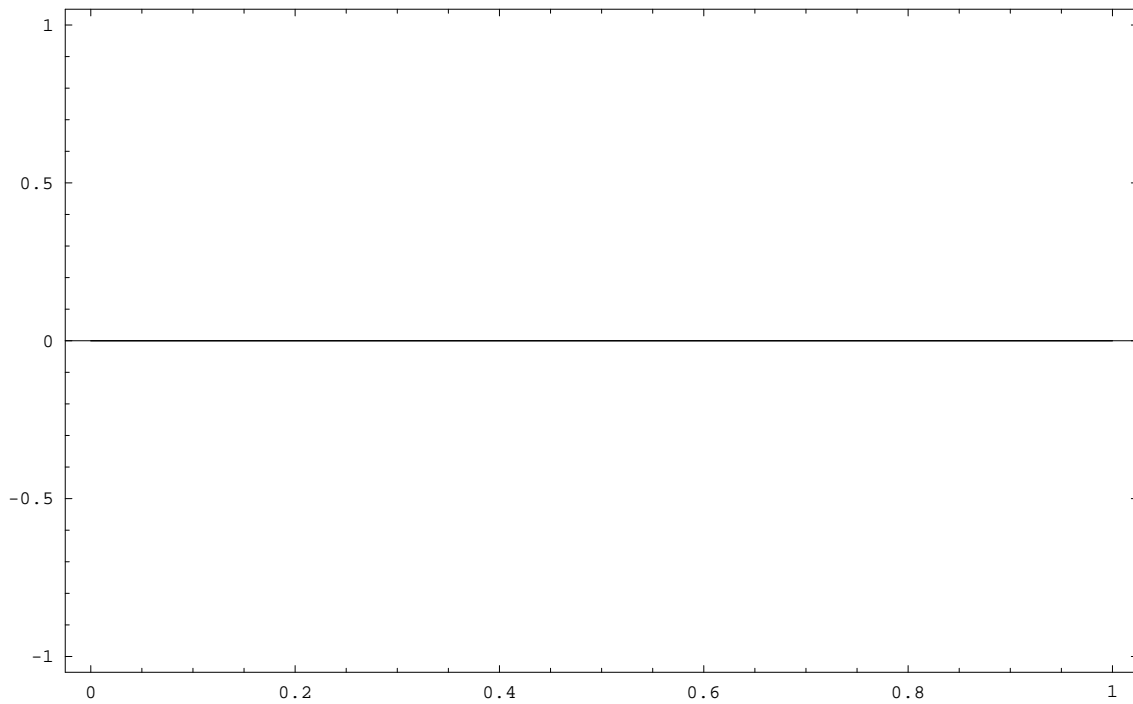


Abbildung 3.3: Abelscher Teil der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1111}(x, y)$ gemessen in Λ^4 für $x^2 - y^2 = x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1) \Lambda$

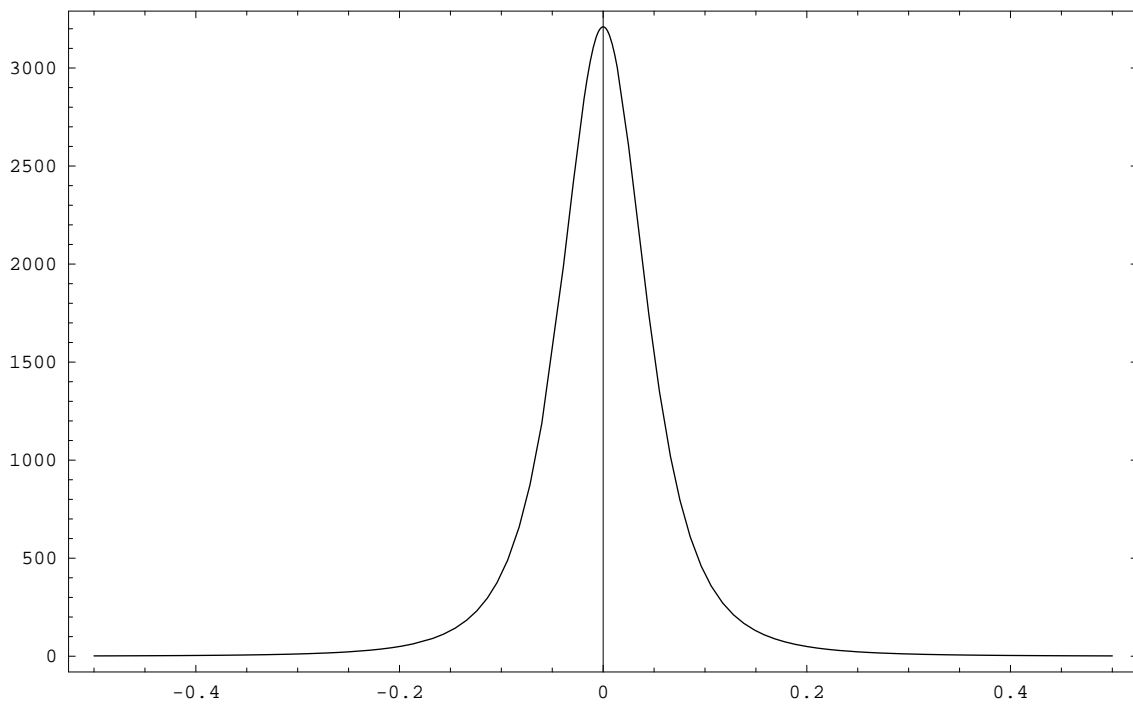


Abbildung 3.4: Abelscher Teil der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1221}(x, y)$ gemessen in Λ^4 für $x^2 - y^2 = 0,075/\Lambda$, $x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1) \Lambda$

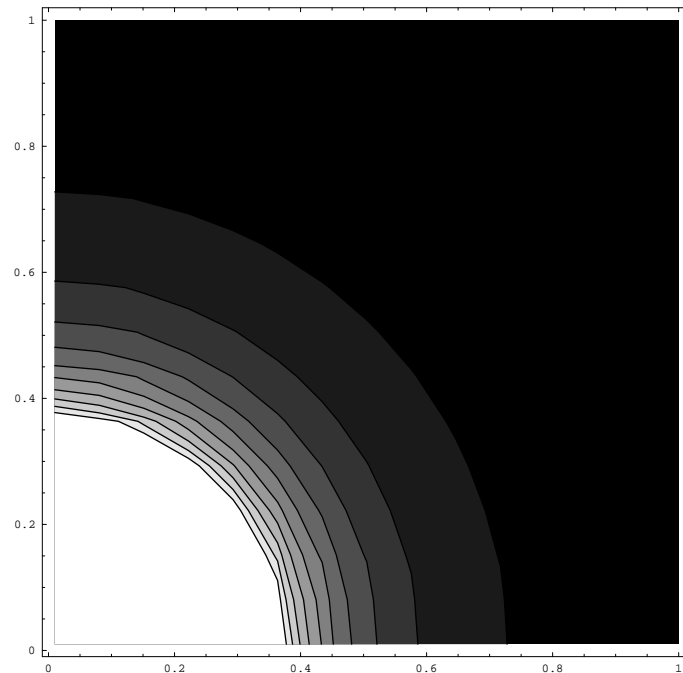


Abbildung 3.5: Isolinien des abelschen Teils der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1221}(x, y)$ für $x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1) \Lambda$ und $(x^2 - y^2) \Lambda$

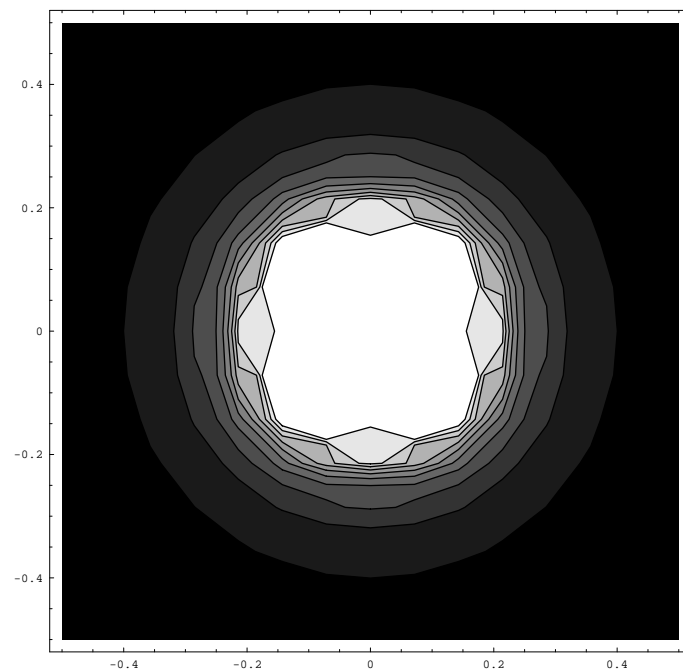


Abbildung 3.6: Isolinien des abelschen Teils der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1221}(x, y)$ für $x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1) \Lambda$ und $(x^2 - y^2) \Lambda$

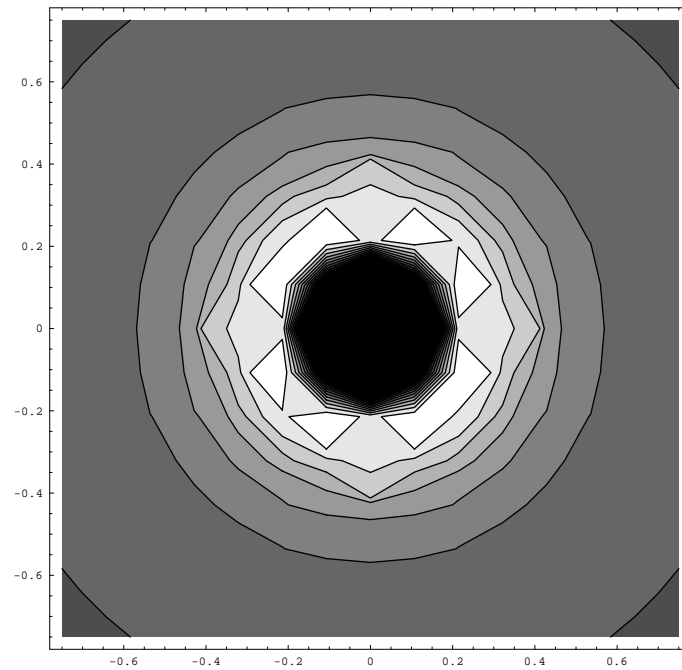


Abbildung 3.7: Isolinien des abelschen Teils der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1221}(x,y)$ für $x^3 - y^3 = 0, 175\Lambda$, $x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1)\Lambda$ (Abszisse) und $(x^2 - y^2)\Lambda$ (Ordinate)

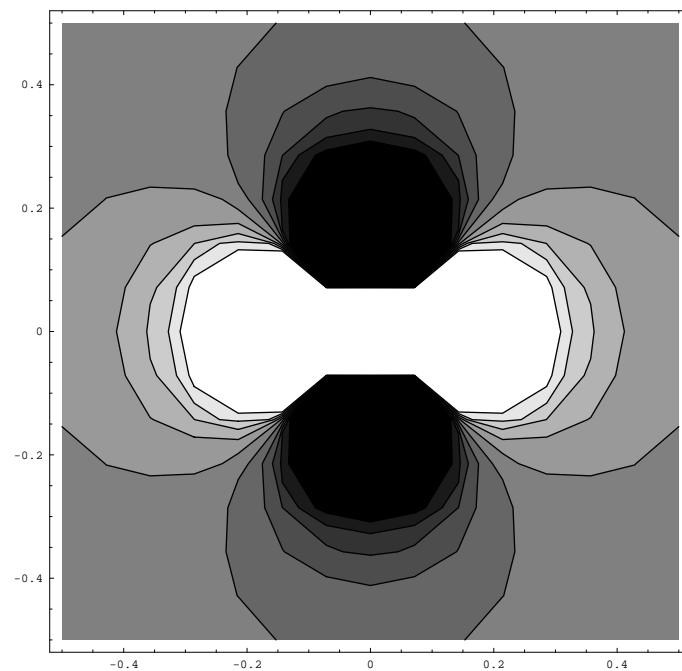


Abbildung 3.8: Isolinien des abelschen Teils der euklidischen Feldstärkenkorrelation $FSK_{1,11}^{1331}(x,y)$ für $x^3 - y^3 = x^4 - y^4 = 0$ in Abhängigkeit von $(x^1 - y^1)\Lambda$ (Abszisse) und $(x^2 - y^2)\Lambda$ (Ordinate)

Kapitel 4

Der „halb-nichtabelsche“ Teil der Feldstärkenkorrelation

4.1 Struktur des „halb-nichtabelschen“ Teils

Der „halb-nichtabelsche“ Teil der Feldstärkenkorrelation besteht aus den beiden Summanden (3.3),

$$\begin{aligned}
FSK_{2,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) &= \bar{g}_0 f_{bcd} \langle 0 | (\partial_x^\mu A_a^\nu(x) - \partial_x^\nu A_a^\mu(x)) A_c^\kappa(y) A_d^\lambda(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \bar{g}_0 f_{acd} \langle 0 | A_c^\mu(x) A_d^\nu(x) (\partial_y^\kappa A_b^\lambda(y) - \partial_y^\lambda A_b^\kappa(y)) | 0 \rangle \\
&= \bar{g}_0 f_{bcd} (\delta^{\nu\varrho} \partial_x^\mu - \delta^{\mu\varrho} \partial_x^\nu) G_{3V_{acd}}^{\varrho\kappa\lambda}(x,y,y) \\
&\quad + \bar{g}_0 f_{acd} (\delta^{\lambda\varrho} \partial_y^\kappa - \delta^{\kappa\varrho} \partial_y^\lambda) G_{3V_{cdb}}^{\mu\nu\varrho}(x,x,y). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Es handelt sich um Vakuumerwartungswerte zusammengesetzter Operatoren, weil zwei Feldoperatoren am selben Raumzeitpunkt auftreten. Dies wird später bei der Renormierung zu berücksichtigen sein.

Fourier-Transformation der ersten Green'schen Funktion (vorerst an drei verschiedenen Raumzeitpunkten) in den Impulsraum gemäß Anhang A.3 ergibt zunächst

$$\begin{aligned}
G_{3V_{acd}}^{\varrho\kappa\lambda}(x,y,z) &= \int \frac{d^D k d^D k'}{(2\pi)^{2D}} e^{i[(-k-k')\cdot x + k\cdot y + k'\cdot z]} \tilde{G}_{3V_{acd}}^{\varrho\kappa\lambda}(-k-k', k, k') \\
&= i\bar{g}_0 \int \frac{d^D k d^D k'}{(2\pi)^{2D}} e^{i[(-k-k')\cdot x + k\cdot y + k'\cdot z]} \\
&\quad \times D^{\varrho\varrho'}(k+k') D^{\kappa\kappa'}(-k) D^{\lambda\lambda'}(-k') \Gamma_{3V_{acd}}^{\varrho'\kappa'\lambda'}(-k-k', k, k'). \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Symmetrisierung der Schleifenimpulse gemäß

$$\begin{aligned}
p &= -k - k' & k &= -\frac{p}{2} + q \\
q &= \frac{k-k'}{2} & k' &= -\frac{p}{2} - q
\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \text{mit } d^D p d^D q = d^D k d^D k' \tag{4.3}$$

und Gleichsetzen von $z = y$ führt auf

$$G_{3V_{acd}}^{\varrho\kappa\lambda}(x,y,y) = \delta^{\kappa\xi} \delta^{\lambda\omega} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} e^{ip\cdot(x-y)} \tilde{G}_{3V_{acd}}^{\varrho\xi\omega} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right), \tag{4.4}$$

und entsprechend für die zweite Green'sche Funktion aus (4.1),

$$G_{3V}^{\mu\nu\varrho}(x, x, y) = \delta^{\mu\xi}\delta^{\nu\omega} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} e^{ip\cdot(y-x)} \tilde{G}_{3V}^{\varrho\xi\omega} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right). \quad (4.5)$$

Die Korrelationsfunktion wird in ihre irreduziblen Bestandteile (A.29) zerlegt,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{3V}^{\varrho\xi\omega} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right) &= D^{\varrho\varrho'}(-p) D^{\xi\xi'} \left(\frac{p}{2} - q \right) D^{\omega\omega'} \left(-\frac{p}{2} + q \right) \\ &\quad \times i\bar{g}_0 \Gamma_{3V}^{\varrho'\xi'\omega'} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

die dabei auftretende Vertexfunktion Γ_{3V} in einen farbantisymmetrischen und einen farbsymmetrischen Teil,

$$\begin{aligned} f_{bcd} \Gamma_{3V}^{\varrho'\xi'\omega'} &\stackrel{(A.33)}{=} \underbrace{f_{bcd} f_{acd}}_{=N_C \delta_{ab}} \Gamma_{3V}^{(f)\varrho'\xi'\omega'} + \underbrace{f_{bcd} d_{acd}}_{=0} \Gamma_{3V}^{(d)\varrho'\xi'\omega'} \\ &= N_C \delta_{ab} \Gamma_{3V}^{(f)\varrho'\xi'\omega'}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hier wurden die Identitäten (A.8) und (A.9) der $SU(N_C)$ -Farbalkgebra benutzt. Man erkennt, dass beide Green'sche Funktionen \tilde{G}_{3V} denselben Beitrag liefern,

$$\begin{aligned} f_{bcd} \tilde{G}_{3V}^{\varrho\xi\omega} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right) &= f_{acd} \tilde{G}_{3V}^{\varrho\xi\omega} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right) \\ &= N_C \delta_{ab} i\bar{g}_0 D^{\varrho\varrho'}(-p) D^{\xi\xi'} \left(\frac{p}{2} - q \right) D^{\omega\omega'} \left(-\frac{p}{2} + q \right) \\ &\quad \times \Gamma_{3V}^{(f)\varrho'\xi'\omega'} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Eingesetzt in (4.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} FSK_{2,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x, y) &= N_C \delta_{ab} i\bar{g}_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left[\delta^{\kappa\xi} \delta^{\lambda\omega} (\delta^{\nu\varrho} \partial^\mu - \delta^{\mu\varrho} \partial^\nu) e^{ip\cdot(x-y)} \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\mu\xi} \delta^{\nu\omega} (\delta^{\kappa\varrho} \partial^\lambda - \delta^{\lambda\varrho} \partial^\kappa) e^{ip\cdot(y-x)} \right] D^{\varrho\varrho'}(-p) \\ &\quad \times \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D^{\xi\xi'} \left(\frac{p}{2} - q \right) D^{\omega\omega'} \left(-\frac{p}{2} + q \right) \\ &\quad \times \Gamma_{3V}^{(f)\varrho'\xi'\omega'} \left(p, -\frac{p}{2} + q, -\frac{p}{2} - q \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei sich alle partiellen Ableitungen ab jetzt bezüglich x verstehen. Dieser Ausdruck besteht aus einem inneren und einem äußeren Impulsintegral. Das innere q -Integral lässt sich diagrammatisch als

$$(4.10)$$

darstellen, wobei der Vertex „ \circ “ für einen Faktor 1 steht und die äußeren Propagatoren amputiert sind. Das Diagramm entspricht der Wahrscheinlichkeitsamplitude der Aufspaltung eines Gluons in zwei Gluonen. Mit diesem inneren Integral werden wir uns zuerst beschäftigen; dabei werden wir D und Γ_{3V} wieder durch rationale Approximanten nähern.

In Landau-Eichung ($\xi_0 \rightarrow 0$) sind die Propagatoren transversal,

$$D^{\sigma\tau}(k) = t^{\sigma\tau}(k)D_T(k^2). \quad (4.11)$$

Wie beim abelschen Teil der Feldstärkenkorrelation setzt man für $D_T(k^2)$ gemäß (2.14) an. Für den in allen drei Beinen transversal projizierten antisymmetrischen Teil des 3-Gluonen-Vertex macht man Ansätze gemäß (2.18) und (2.19). Wie in Kapitel 2 erläutert, kürzen sich die $\Delta_{2VT}^{[r]}(k^2)$ gegen die $\Delta_{3VT}^{[r]}(k^2)$ auf Grund der Selbstkonsistenz in den Dyson-Schwinger-Gleichungen heraus, was mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p) &:= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{t^{\xi\xi'} \left(\frac{p}{2} - q\right) t^{\omega\omega'} \left(\frac{p}{2} + q\right)}{N_{2VT}^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2\right) N_{2VT}^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2\right)} \\ &\times \left\{ \delta^{\varrho'\xi'} \left[p - \left(-\frac{p}{2} + q\right) \right]^{\omega'} F_0^{[r]} \left(p^2, \left(\frac{p}{2} - q\right)^2; \left(\frac{p}{2} + q\right)^2 \right) \right. \\ &+ \delta^{\xi'\omega'} \left[\left(-\frac{p}{2} + q\right) - \left(-\frac{p}{2} - q\right) \right]^{\varrho'} F_0^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2, \left(\frac{p}{2} + q\right)^2; p^2 \right) \\ &\left. + \delta^{\omega'\varrho'} \left[\left(-\frac{p}{2} - q\right) - p \right]^{\xi'} F_0^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2, p^2; \left(\frac{p}{2} - q\right)^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

für das q -Integral auf

$$\begin{aligned} FSK_{2,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) &= N_C \delta_{ab} i \bar{g}_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left[\delta^{\kappa\xi} \delta^{\lambda\omega} (\delta^{\nu\varrho} \partial^\mu - \delta^{\mu\varrho} \partial^\nu) e^{ip \cdot (x-y)} \right. \\ &\left. + \delta^{\mu\xi} \delta^{\nu\omega} (\delta^{\kappa\varrho} \partial^\lambda - \delta^{\lambda\varrho} \partial^\kappa) e^{ip \cdot (y-x)} \right] \frac{t^{\varrho\varrho'}(-p) \mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p)}{N_{2VT}^{[r]}(p^2)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

führt.

4.2 Das innere Impulsintegral

Wir wenden uns nun der Berechnung des inneren q -Integrals zu. Da $F_0^{[r]}$ vom Grade r , $N_{2T}^{[r]}$ vom Grade $r+1$ in jeder Variablen ist, lässt sich eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{F_0^{[r]} \left(p^2, \left(\frac{p}{2} - q\right)^2; \left(\frac{p}{2} + q\right)^2 \right)}{N_{2VT}^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2\right) N_{2VT}^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2\right)} = \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} \frac{R_{1,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)}{\left[\left(\frac{p}{2} - q\right)^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \right] \left[\left(\frac{p}{2} + q\right)^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right]} \quad (4.14)$$

durchführen, wobei die von q unabhängigen Residuen $R_{1,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)$ durch

$$R_{1,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) = \frac{F_0^{[r]} \left(p^2, -\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2; -\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right)}{\left[\prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq l_1}}^{r+1} (\sigma_{k_1}^{[r]} - \sigma_{l_1}^{[r]}) \Lambda^2 \right] \left[\prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq l_2}}^{r+1} (\sigma_{k_2}^{[r]} - \sigma_{l_2}^{[r]}) \Lambda^2 \right]} \quad (4.15)$$

gegeben sind. Für die beiden übrigen Permutationen lauten die Residuen entsprechend

$$R_{2,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) = \frac{F_0^{[r]} \left(-\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2; p^2 \right)}{\left[\prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq l_1}}^{r+1} \left(\sigma_{k_1}^{[r]} - \sigma_{l_1}^{[r]} \right) \Lambda^2 \right] \left[\prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq l_2}}^{r+1} \left(\sigma_{k_2}^{[r]} - \sigma_{l_2}^{[r]} \right) \Lambda^2 \right]} \quad (4.16)$$

für $F_0^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} - q \right)^2, \left(\frac{p}{2} + q \right)^2; p^2 \right)$ und

$$R_{3,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) = \frac{F_0^{[r]} \left(-\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, p^2; -\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \right)}{\left[\prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq l_1}}^{r+1} \left(\sigma_{k_1}^{[r]} - \sigma_{l_1}^{[r]} \right) \Lambda^2 \right] \left[\prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq l_2}}^{r+1} \left(\sigma_{k_2}^{[r]} - \sigma_{l_2}^{[r]} \right) \Lambda^2 \right]} \quad (4.17)$$

für $F_0^{[r]} \left(\left(\frac{p}{2} + q \right)^2, p^2; \left(\frac{p}{2} - q \right)^2 \right)$.

Um die Rechnungen einfach zu halten, beschränken wir uns von jetzt an wieder auf den Fall reeller Polstellen (entsprechend stabilen Teilchen),

$$\sigma_{l_{1,2}}^{[r]} > 0. \quad (4.18)$$

An dieser Stelle sei auf eine Symmetrie zwischen den Residuen $R_{1,l_1 l_2}^{[r]}$ und $R_{3,l_1 l_2}^{[r]}$ hingewiesen: Die Symmetrie der invarianten Funktionen $F_0^{[r]}$ in ihren ersten beiden Argumenten überträgt sich auf die Residuen, woraus

$$R_{3,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) = R_{1,l_2 l_1}^{[r]}(p^2) \quad (4.19)$$

folgt. Diese Symmetrie werden wir wegen des erforderlichen Austauschs von $\sigma_{l_1}^{[r]}$ und $\sigma_{l_2}^{[r]}$ im folgenden aber nicht ausnutzen.

Das q -Integral ist nun von der Form

$$\mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p) = \sum_{n=1}^3 \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{R_{n,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) T_n^{\xi\omega\varrho'}(p, q)}{S(p, q)}, \quad (4.20)$$

mit dem Nenner

$$S(p, q) := \left(\frac{p}{2} - q \right)^2 \left[\left(\frac{p}{2} - q \right)^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \right] \left(\frac{p}{2} + q \right)^2 \left[\left(\frac{p}{2} + q \right)^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right] \quad (4.21)$$

und den Tensorstrukturen

$$T_1^{\xi\omega\varrho'}(p, q) := \left[\left(\frac{p}{2} - q \right)^2 \delta^{\xi\xi'} - \left(\frac{p}{2} - q \right)^\xi \left(\frac{p}{2} - q \right)^{\xi'} \right] \left[\left(\frac{p}{2} + q \right)^2 \delta^{\omega\omega'} - \left(\frac{p}{2} + q \right)^\omega \left(\frac{p}{2} + q \right)^{\omega'} \right] \\ \times \delta^{\varrho'\xi'} \left(\frac{3p}{2} - q \right)^{\omega'}, \quad (4.22)$$

$$T_2^{\xi\omega\varrho'}(p, q) := \left[\left(\frac{p}{2} - q \right)^2 \delta^{\xi\xi'} - \left(\frac{p}{2} - q \right)^\xi \left(\frac{p}{2} - q \right)^{\xi'} \right] \left[\left(\frac{p}{2} + q \right)^2 \delta^{\omega\omega'} - \left(\frac{p}{2} + q \right)^\omega \left(\frac{p}{2} + q \right)^{\omega'} \right] \\ \times \delta^{\xi'\omega'} 2q^{\varrho'}, \quad (4.23)$$

$$T_3^{\xi\omega\varrho'}(p, q) := \left[\left(\frac{p}{2} - q \right)^2 \delta^{\xi\xi'} - \left(\frac{p}{2} - q \right)^\xi \left(\frac{p}{2} - q \right)^{\xi'} \right] \left[\left(\frac{p}{2} + q \right)^2 \delta^{\omega\omega'} - \left(\frac{p}{2} + q \right)^\omega \left(\frac{p}{2} + q \right)^{\omega'} \right] \\ \times \delta^{\omega'\varrho'} \left(-\frac{3p}{2} - q \right)^{\xi'}. \quad (4.24)$$

Der Nenner wird mittels Feynman-Parametrisierung (siehe Anhang B.1) auf eine für die q -Integration günstige Form gebracht. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Am sinnvollsten ist es, zuerst die $\frac{p}{2} - q$ bzw. $\frac{p}{2} + q$ enthaltenden Faktoren gemäß der Formel

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dz \frac{1}{((1-z)A + zB)^2} \quad (4.25)$$

mit jeweils einem Feynmanparameter z_1 bzw. z_2 zusammenzufassen; die entstehenden Ausdrücke werden dann über einen weiteren Parameter z_3 kombiniert. Andere Vorgehensweisen führen auf divergente Ausdrücke, die sich kompensieren, was man ihnen aber nicht ohne weiteres ansieht. Sie eignen sich deshalb schlecht für die weitere Rechnung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{S(p, q)} &= \int_0^1 dz_1 \frac{1}{\left[(1-z_1) \left(\frac{p}{2} - q \right)^2 + z_1 \left(\left(\frac{p}{2} - q \right)^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right]^2} \\ &\quad \times \int_0^1 dz_2 \frac{1}{\left[(1-z_2) \left(\frac{p}{2} + q \right)^2 + z_2 \left(\left(\frac{p}{2} + q \right)^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right]^2} \\ &= 3! \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3(1-z_3)}{\left[(1-z_3) \left(\left(\frac{p}{2} - q \right)^2 + z_1 \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \right) + z_3 \left(\left(\frac{p}{2} + q \right)^2 + z_2 \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right]^4} \\ &= 6 \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3(1-z_3)}{(q'^2 + M^2)^4} \end{aligned} \quad (4.26)$$

mit

$$q' := q + \left(z_3 - \frac{1}{2} \right) p, \quad (4.27)$$

$$M^2 := z_3(1-z_3)p^2 + z_1(1-z_3)\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + z_2 z_3 \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2. \quad (4.28)$$

Das Integral (4.20) nimmt nun die Form

$$\mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p) = 6 \sum_{n=1}^3 \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} R_{n, l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 z_3(1-z_3) \int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{T}_n^{\xi\omega\varrho'}(p, q')}{(q'^2 + M^2)^4} \quad (4.29)$$

an, wobei

$$\tilde{T}_n^{\xi\omega\varrho'}(p, q') := T_n^{\xi\omega\varrho'} \left(p, q' + \left(\frac{1}{2} - z_3 \right) p \right) \quad (4.30)$$

die auf q' umgeschriebenen Tensorstrukturen (4.22) darstellen. Sie lauten im einzelnen

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^{\xi\omega\varrho'}(p, q') &= \delta^{\xi\varrho'} \left(2z_3^2 p^2 p^\omega q'^2 - 4z_3(1-z_3) p^\omega (p \cdot q')^2 + 2z_3(2-3z_3) p^2 p \cdot q' q'^\omega \right. \\ &\quad \left. + 2p^\omega q'^4 - 2p \cdot q' q'^2 q'^\omega \right) + 2z_3^2 p^\xi p^{\varrho'} \left(p \cdot q' q'^\omega - p^\omega q'^2 \right) \\ &\quad + 2z_3(1-z_3) \left(p^\omega p^{\varrho'} p \cdot q' q'^\xi + p^\xi p^\omega p \cdot q' q'^{\varrho'} - p^2 p^{\varrho'} q'^\xi q'^\omega - p^2 p^\xi q'^{\varrho'} q'^\omega \right) \\ &\quad + 2 \left(p \cdot q' q'^\omega - p^\omega q'^2 \right) q'^\xi q'^{\varrho'} + \text{ungerade Potenzen von } q', \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\tilde{T}_2^{\xi\omega\varrho'}(p, q') = \delta^{\xi\omega} \left(z_3^2 (1-z_3)^2 (1-2z_3) p^4 p^{\varrho'} + (1-2z_3)(2z_3^2 - 2z_3 + 1) p^2 p^{\varrho'} q'^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& -4z_3(1-z_3)(1-2z_3)p^{\varrho'}(p \cdot q')^2 - 4z_3(1-z_3)(1-2z_3)p^2 p \cdot q' q'^{\varrho'} \\
& + (1-2z_3)p^{\varrho'} q'^4 + 4(1-2z_3)p \cdot q' q'^2 q'^{\varrho'} - z_3^2(1-z_3)^2(1-2z_3)p^2 p^\xi p^\omega p^{\varrho'} \\
& - (1-2z_3)(z_3^2 - z_3 + 1)p^\xi p^\omega p^{\varrho'} q'^2 + 2z_3(1-z_3)(1-2z_3)p^\xi p^\omega p \cdot q' q'^{\varrho'} \\
& + (1-z_3)(1-2z_3)(2z_3+1)p^\omega p^{\varrho'} p \cdot q' q'^\xi + z_3(1-2z_3)(3-2z_3)p^\xi p^{\varrho'} p \cdot q' q'^\omega \\
& - 2z_3^2(1-z_3)p^2 p^\omega q'^\xi q'^{\varrho'} + 2z_3(1-z_3)^2 p^2 p^\xi q'^\omega q'^{\varrho'} \\
& - (1-2z_3)(z_3^2 - z_3 + 1)p^2 p^{\varrho'} q'^\xi q'^\omega + 2z_3 p^\omega q'^2 q'^\xi q'^{\varrho'} - 2(1-z_3)p^\xi q'^2 q'^\omega q'^{\varrho'} \\
& - (1-2z_3)p^{\varrho'} q'^2 q'^\xi q'^\omega - 2(1-2z_3)p \cdot q' q'^\xi q'^\omega q'^{\varrho'} \\
& + \text{ungerade Potenzen von } q', \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_3^{\xi\omega\varrho'}(p, q') &= \delta^{\omega\varrho'} \left(-2(1-z_3)^2 p^2 p^\xi q'^2 + 4z_3(1-z_3)p^\xi (p \cdot q')^2 + 2(1-z_3)(1-3z_3)p^2 p \cdot q' q'^\xi \right. \\
& \left. - 2p^\xi q'^4 + 2p \cdot q' q'^2 q'^\xi \right) + 2(1-z_3)^2 p^\omega p^{\varrho'} \left(p^\xi q'^2 - p \cdot q' q'^\xi \right) \\
& + 2z_3(1-z_3) \left(p^2 p^\omega q'^\xi q'^{\varrho'} + p^2 p^{\varrho'} q'^\xi q'^\omega - p^\xi p^\omega p \cdot q' q'^{\varrho'} - p^\xi p^{\varrho'} p \cdot q' q'^\omega \right) \\
& + 2 \left(p^\xi q'^2 - p \cdot q' q'^\xi \right) q'^\omega q'^{\varrho'} + \text{ungerade Potenzen von } q'. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass \tilde{T}_3 sich aus \tilde{T}_1 durch die Ersetzungen $z_3 \rightarrow 1 - z_3$, $(\omega, \xi, \varrho') \rightarrow (\xi, \varrho', \omega)$ und Multiplikation mit -1 ergibt.

Die q' -Integrale lassen sich nun durch symmetrische Integration (Anhang B.2) auf Standardform bringen. Terme mit einer ungeraden Zahl von q' fallen dabei heraus und sind deshalb in den vorstehenden Gleichungen nicht mehr explizit aufgeführt. Die verbleibenden Integrale werden dann mit Hilfe der Gleichungen (B.8) bis (B.13),

$$\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q'^2 + M^2)^4} = \frac{\Gamma(2 + \varepsilon)}{6(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-2-\varepsilon}, \tag{4.34}$$

$$\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{q'^\mu q'^\nu}{(q'^2 + M^2)^4} = \delta^{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-1-\varepsilon}, \tag{4.35}$$

$$\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{q'^2}{(q'^2 + M^2)^4} = \frac{(4 - 2\varepsilon)\Gamma(1 + \varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-1-\varepsilon}, \tag{4.36}$$

$$\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{q'^\mu q'^\nu q'^\kappa q'^\lambda}{(q'^2 + M^2)^4} = \left(\delta^{\mu\nu} \delta^{\kappa\lambda} + \delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} + \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa} \right) \frac{\Gamma(\varepsilon)}{24(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \tag{4.37}$$

$$\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{q'^\mu q'^\nu q'^2}{(q'^2 + M^2)^4} = \delta^{\mu\nu} \frac{(3 - \varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \tag{4.38}$$

$$\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{(q'^2)^2}{(q'^2 + M^2)^4} = \frac{(4 - 2\varepsilon)(3 - \varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \tag{4.39}$$

gelöst, wobei die übliche Abkürzung $\varepsilon = 2 - \frac{D}{2}$, $D = 4 - 2\varepsilon$ eingeführt wurde. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{T}_1^{\xi\omega\varrho'}(p, q')}{(q'^2 + M^2)^4} &= -z_3 \left\{ (1-z_3) \left[(p^2 \delta^{\xi\omega} - p^\xi p^\omega) p^{\varrho'} + (p^2 \delta^{\omega\varrho'} - p^\omega p^{\varrho'}) p^\xi \right] \right. \\
& \left. + (2\varepsilon - 3)z_3 (p^2 \delta^{\xi\varrho'} - p^\xi p^{\varrho'}) p^\omega \right\} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{6(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-(1+\varepsilon)} \\
& + \left\{ [4(3 - \varepsilon)(1 - \varepsilon) + 1] \delta^{\xi\varrho'} p^\omega + \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} + \delta^{\omega\varrho'} p^\xi \right\} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \\
\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{T}_2^{\xi\omega\varrho'}(p, q')}{(q'^2 + M^2)^4} &= z_3^2 (1-z_3)^2 (1-2z_3) p^2 p^{\varrho'} (p^2 \delta^{\xi\omega} - p^\xi p^\omega) \frac{\Gamma(2 + \varepsilon)}{6(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-(2+\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ (1 - 2z_3) [3 - 2\varepsilon - 2(5 - \varepsilon)z_3(1 - z_3)] (\delta^{\xi\omega} p^2 - p^\xi p^\omega) p^{\varrho'} \right. \\
& \quad \left. - z_3(1 - z_3) \right. \\
& \quad \times \left[2 \left(z_3 \delta^{\xi\varrho'} p^\omega - (1 - z_3) \delta^{\omega\varrho'} p^\xi \right) - (5 - 2\varepsilon)(2z_3 - 1) \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} \right] p^2 \left. \right\} \\
& \quad \times \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-(1+\varepsilon)} \\
& + \left\{ (1 - 2z_3) [(3 - \varepsilon)(7 - 2\varepsilon) - 1] \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} \right. \\
& \quad \left. - [2(\varepsilon - 4)z_3 + 7 - 2\varepsilon] \delta^{\omega\varrho'} p^\xi - [2(\varepsilon - 4)z_3 + 1] \delta^{\xi\varrho'} p^\omega \right\} \\
& \quad \times \frac{\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \tag{4.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{T}_3^{\xi\omega\varrho'}(p, q')}{(q'^2 + M^2)^4} & = (1 - z_3) \left\{ z_3 \left[(p^2 \delta^{\xi\varrho'} - p^\xi p^{\varrho'}) p^\omega + (p^2 \delta^{\xi\omega} - p^\xi p^\omega) p^{\varrho'} \right] \right. \\
& \quad + (2\varepsilon - 3)(1 - z_3) (p^2 \delta^{\omega\varrho'} - p^\omega p^{\varrho'}) p^\xi \left. \right\} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{6(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-(1+\varepsilon)} \\
& \quad - \left\{ [4(3 - \varepsilon)(1 - \varepsilon) + 1] \delta^{\omega\varrho'} p^\xi + \delta^{\xi\varrho'} p^\omega + \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} \right\} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sind Divergenzen in den Ausdrücken

$$\Gamma(\varepsilon) \left(\frac{M^2}{4\pi} \right)^{-\varepsilon} \tag{4.43}$$

erkennbar, was eine Renormierung notwendig macht.

Die weitere Vorgehensweise hängt von der Wahl des Renormierungsverfahrens (vgl. Abschnitt 1.4) ab. Um (1.24) aus Verfahren 2 anwenden zu können, ist eine Umformung des Ausdrucks (4.43) erforderlich, da M^2 nicht proportional zu Λ^2 ist (vgl. Def. (4.28) von M^2). Zu diesem Zweck fassen wir M^2 als Funktion der äußeren Impulsvariablen p auf und subtrahieren $M^2(p^2)$ an der Stelle $p^2 = c\Lambda^2$,

$$(M^2(p^2))^{-\varepsilon} = (M^2(c\Lambda^2))^{-\varepsilon} + \left\{ (M^2(p^2))^{-\varepsilon} - (M^2(c\Lambda^2))^{-\varepsilon} \right\}. \tag{4.44}$$

Entwicklung der geschweiften Klammer nach ε führt nach Division durch ε auf

$$\frac{1}{\varepsilon} (M^2(p^2))^{-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (M^2(c\Lambda^2))^{-\varepsilon} + \ln \frac{M^2(c\Lambda^2)}{M^2(p^2)} + O(\varepsilon). \tag{4.45}$$

$M^2(c\Lambda^2)$ weist die gewünschte Proportionalität zu Λ^2 auf, und an

$$\left(\frac{\bar{g}_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{M^2(p^2)}{4\pi} \right)^{-\varepsilon} = \underbrace{\left(\frac{z_3(1 - z_3)c + z_1(1 - z_3)\sigma_{l_1}^{[r]} + z_2 z_3 \sigma_{l_2}^{[r]}}{4\pi} \right)^{-\varepsilon}}_{\rightarrow 1 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{g}_0}{4\pi} \right)^2 (\Lambda^2)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \tag{4.46}$$

kann die Ersetzung (1.24),

$$\left(\frac{\bar{g}_0}{4\pi} \right)^2 (\Lambda^2)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\beta_0} [1 + O(\varepsilon \ln \varepsilon, \varepsilon)], \tag{4.47}$$

vorgenommen werden. Wie in Abschnitt 1.4 angekündigt, wollen wir dieses Verfahren hier aber nicht weiter verfolgen.

Stattdessen wird das $\overline{\text{MS}}$ -Schema benutzt, demzufolge eine Entwicklung nach dem Regulator ε vorzunehmen ist,

$$\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} = \exp\left[\ln\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}\right] = \exp\left[-\varepsilon\ln\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)\right] = 1 - \varepsilon\ln\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.48)$$

wobei ein Faktor $\mu^{2\varepsilon}$ von der nackten Kopplung $\bar{g}_0^2 = g^2\mu^{2\varepsilon}Z_\alpha$ abgespalten wurde. Zusammen mit der Entwicklung der Gammafunktion,

$$\begin{aligned} \Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon), \\ \Gamma(1 + \varepsilon) &= 1 + O(\varepsilon), \\ \Gamma(2 + \varepsilon) &= 1 + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.49)$$

wobei γ_E die Euler-Mascheroni-Konstante

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right) \quad (4.50)$$

darstellt, führt dies auf

$$\Gamma(\varepsilon) \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln\frac{M^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon), \quad (4.51)$$

$$\Gamma(n + \varepsilon) \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} = 1 + O(\varepsilon), \quad n \in \{1, 2\}. \quad (4.52)$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} &\mu^{2\varepsilon} \mathcal{Q}^{\xi\omega\rho'}(p) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 z_3(1-z_3) \\ &\quad \times \left\{ R_{1, l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \left[\frac{1}{2} \left(13\delta^{\xi\rho'} p^\omega + \delta^{\xi\omega} p^{\rho'} + \delta^{\omega\rho'} p^\xi \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) - 8\delta^{\xi\rho'} p^\omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{z_3}{M^2} \left[(1-z_3) \left((p^2\delta^{\xi\omega} - p^\xi p^\omega) p^{\rho'} + (p^2\delta^{\omega\rho'} - p^\omega p^{\rho'}) p^\xi \right) - 3z_3(p^2\delta^{\xi\rho'} - p^\xi p^{\rho'}) p^\omega \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + R_{2, l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \left[\frac{13}{2} (2z_3 - 1) \delta^{\xi\omega} p^{\rho'} + (1-z_3) \delta^{\omega\rho'} p^\xi - z_3 \delta^{\xi\rho'} p^\omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(20(2z_3 - 1) \delta^{\xi\omega} p^{\rho'} + (7 - 8z_3) \delta^{\omega\rho'} p^\xi + (1 - 8z_3) \delta^{\xi\rho'} p^\omega \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2M^2} \left[2z_3(1-z_3) \left(z_3 \delta^{\xi\rho'} p^\omega + (z_3 - 1) \delta^{\omega\rho'} p^\xi \right) p^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (1 - 2z_3) \left(3(5z_3(1-z_3) - 1) \delta^{\xi\omega} p^{\rho'} p^2 + (3 - 10z_3(1-z_3)) p^\xi p^\omega p^{\rho'} \right) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(M^2)^2} z_3^2 (z_3^2 - 2z_3 + 1) (2z_3 - 1) p^2 p^{\rho'} (\delta^{\xi\omega} p^2 - p^\xi p^\omega) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +R_{3,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \left[8\delta^{\omega\varrho'} p^\xi - \frac{1}{2} \left(13\delta^{\omega\varrho'} p^\xi + \delta^{\xi\varrho'} p^\omega + \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln \frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{z_3 - 1}{M^2} \left[3(1 - z_3)(p^2 \delta^{\omega\varrho'} - p^\omega p^{\varrho'}) p^\xi - z_3 \left((p^2 \delta^{\xi\varrho'} - p^\xi p^{\varrho'}) p^\omega + (p^2 \delta^{\xi\omega} - p^\xi p^\omega) p^{\varrho'} \right) \right] \right] \Big\} \\
& + O(\varepsilon). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Man erkennt Divergenzen vom Typ $\frac{1}{\varepsilon}$, die später im Rahmen des Renormierungsprozesses durch perturbative Gegenterme kompensiert werden müssen. Die Parameterintegrale können mit Hilfe der in Anhang B.3.3 angegebenen Integrationsregeln gelöst werden. Das in Anhang E.3 dokumentierte Resultat eignet sich jedoch schlecht zur Ausführung der äußeren p -Integration, da zu diesem Zweck unter anderem Integrale des Typs

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^n e^{ip \cdot (x-y)} \sqrt{\left(\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 - p^2 \right)^2 + 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 p^2} \\
& \times \ln \frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 + p^2 - \sqrt{\left(\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 - p^2 \right)^2 + 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 p^2}}{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 + p^2 + \sqrt{\left(\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 - p^2 \right)^2 + 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 p^2}} \tag{4.54}
\end{aligned}$$

berechnet werden müssten, was aussichtslos erscheint.

Wir schlagen deshalb einen anderen Weg ein: Zunächst werden nur die Feynmanparameter z_1 und z_2 ausintegriert. Anwendung der Integrationsformeln für zweiparametrische Integrale aus Anhang B.3.2 (mit $a := \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2$, $b := \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2$, $c := p^2$) auf (4.53) ergibt (nach Umbenennung $z_3 \rightarrow z$)

$$\begin{aligned}
\mu^{2\varepsilon} \mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p) & = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} R_{k,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \int_0^1 dz \left\{ b_k^{\xi\omega\varrho'}(z, p) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 d_j^{\xi\omega\varrho'}(p) \left[P_{kj1}(z, p^2) + P_{kj2}(z, p^2) \ln z + P_{kj3}(z, p^2) \ln(1-z) \right. \\
& + P_{kj4}(z, p^2) \ln \frac{p^2 z(1-z) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 (1-z) + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 z}{\mu^2} \\
& + P_{kj5}(z, p^2) \ln \frac{p^2 z + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + P_{kj6}(z, p^2) \ln \frac{p^2(1-z) + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} \\
& \left. \left. + P_{kj7}(z, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right] \right\} + O(\varepsilon), \tag{4.55}
\end{aligned}$$

wobei im Hinblick auf kommende Umformungen die Argumente der Logarithmen mit konstanten Faktoren μ^2 ergänzt und nach dem Schema $\ln(A/B) = \ln(A/\mu^2) - \ln(B/\mu^2)$ „auseinandergezogen“ worden sind. Die Tensorstrukturen wurden mit

$$\begin{aligned}
d_1^{\xi\omega\varrho'}(p) & = \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'}, \\
d_2^{\xi\omega\varrho'}(p) & = \delta^{\xi\varrho'} p^\omega, \\
d_3^{\xi\omega\varrho'}(p) & = \delta^{\omega\varrho'} p^\xi, \\
d_4^{\xi\omega\varrho'}(p) & = p^\xi p^\omega p^{\varrho'} \tag{4.56}
\end{aligned}$$

abgekürzt. Die divergenten Anteile $\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi)$, die im $\overline{\text{MS}}$ -Schema vor Ausführung der äußeren Impulsintegration durch Gegenterme kompensiert werden, sind bereits isoliert worden. Ihre Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} b_1^{\xi\omega\varrho'}(z,p) &= \frac{z(1-z) \left(\delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} + 13\delta^{\xi\varrho'} p^\omega + \delta^{\omega\varrho'} p^\xi \right)}{2}, \\ b_2^{\xi\omega\varrho'}(z,p) &= \frac{20(2z^3 - 3z^2 + z) \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} - (8z^3 - 9z^2 + z) \delta^{\xi\varrho'} p^\omega - (8z^3 - 15z^2 + 7z) \delta^{\omega\varrho'} p^\xi}{2}, \\ b_3^{\xi\omega\varrho'}(z,p) &= \frac{z(z-1) \left(\delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} + \delta^{\xi\varrho'} p^\omega + 13\delta^{\omega\varrho'} p^\xi \right)}{2}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Die Koeffizienten P_{kjm} der konvergenten Anteile, welche Polynome in z und p^2 sind, entnehme man Anhang E.1. Terme der Ordnung ε verschwinden im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$, vorausgesetzt die äußere p -Integration liefert keine neuen $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenzen, was wegen der konvergenzerzeugenden Fourier-Faktoren $e^{ip \cdot (x-y)}$ und $e^{ip \cdot (y-x)}$ in (4.13) aber nicht zu erwarten ist. Auch fallen auf Grund des Transversalprojektors $t^{\varrho\varrho'}(-p)$ in derselben Gleichung die $p^{\varrho'}$ enthaltenden Summanden (d.h. $j = 1$ und $j = 4$) heraus. Erstaunlich ist das Auftreten von zu $\ln p^2$ proportionalen Termen. Diese sind ein Hinweis auf die Existenz masseloser Teilchen ($\ln p^2$ besitzt einen Verzweigungspunkt bei $p^2 = 0$.); die einzigen in unserer Theorie vorkommenden Teilchen, die Gluonen, sollten aber durch den Schwinger-Mechanismus¹ Masse erhalten haben. Dieser unphysikalische Zug kann nach allen Erfahrungen mit QCD-Schleifenrechnungen nur durch Hinzunahme der Geister-Einschleifenkorrektur (letztes Diagramm von (3.5)) zum abelschen Teil der Feldstärkenkorrelation beseitigt werden: Die Geistervertices bleiben in Landau-Eichung perturbativ [DRI 97]; und dieses Diagramm kann deshalb kompensierende $\ln p^2$ -Terme erzeugen.

4.3 Umwandlung der Feynmanparameter- in Spektralintegrale

Anstatt den letzten Feynmanparameter z direkt auszuintegrieren, werden wir in diesem Abschnitt den Versuch unternehmen, das letzte Parameterintegral in ein Spektralintegral

$$\int_0^\infty ds \frac{\varrho(s)}{p^2 + s} \quad (4.58)$$

umwandeln, wie man es von der Källén-Lehmann-Spektraldarstellung² eines Propagators kennt. Diese gestattet bekanntlich die Schreibweise eines Propagators in der Form

$$\langle 0 | \phi(-p)\phi(p) | 0 \rangle = \int_0^\infty dm^2 \frac{\varrho(m^2)}{p^2 + m^2} \quad (4.59)$$

eines gewichteten Integrals über freie Propagatoren von (in diesem Fall skalaren) Feldern der Masse m . Die *Spektraldichte* $\varrho(m^2)$ verleiht dem Propagator Pole bei der physikalischen Teilchenmasse $p^2 = -M^2$ und bei evtl. gebundenen Zuständen sowie einen Verzweigungsschnitt entlang der negativen reellen Achse, beginnend bei $p^2 = -(2M)^2$.

In (4.58) erkennt man nun den freien Propagator eines Skalarfeldes der Masse \sqrt{s} , gewichtet mit einer Spektraldichte $\varrho(s)$. Wir erwarten, dass sie unterhalb einer positiven Schwelle $s < s_0$

¹siehe [SCHW 61]

²mehr dazu in [KUG 97], [PS 95]

identisch verschwindet, in Übereinstimmung mit einer endlichen Gluonenmasse. Unser Ziel ist, das äußere p -Integral aus (4.13) auf die vom abelschen Teil wohlbekannte Form

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + s} \quad (4.60)$$

zu bringen, die auf die modifizierte Besselfunktion K_1 führt. Das Verfahren zur Umwandlung der Feynmanparameter- in Spektralintegrale ist aus [BRO 92] und [MEY 94] bekannt.

Wir beschränken uns auf die letzten vier Summanden in (4.55), die ein p^2 im Argument des Logarithmus aufweisen. Bei den anderen drei Summanden und den divergenten Anteilen wird der Feynmanparameter z direkt ausintegriert. Die betrachteten Summanden haben die Struktur

$$\int_0^1 P_{kjm}(z, p^2) \ln \frac{p^2 [Az + B(1-z) + Cz(1-z)] + Dz + E(1-z)}{\mu^2} \quad (4.61)$$

mit Konstanten $A, B, C \in \{0, 1\}$, $D, E \in \{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2, \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, 0\}$. $P_{kjm}(z, p^2)$ besitzt als Polynom in z eine Stammfunktion $Q_{kjm}(z, p^2)$,

$$\frac{d}{dz} Q_{kjm}(z, p^2) = P_{kjm}(z, p^2), \quad (4.62)$$

die so gewählt werden kann, dass

$$Q_{kjm}(0, p^2) = 0. \quad (4.63)$$

Der erste Schritt zur Umwandlung in ein Spektralintegral besteht in einer partiellen Integration von (4.61),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \underbrace{P_{kjm}(z, p^2)}_{=\frac{d}{dz} Q_{kjm}(z, p^2)} \ln \frac{p^2 [Az + B(1-z) + Cz(1-z)] + Dz + E(1-z)}{\mu^2} \\ &= Q_{kjm}(z, p^2) \ln \frac{p^2 [Az + B(1-z) + Cz(1-z)] + Dz + E(1-z)}{\mu^2} \Big|_{z=0}^{z=1} \\ & \quad - \int_0^1 dz Q_{kjm}(z, p^2) \frac{p^2 [A - B + C(1-2z)] + D - E}{p^2 [Az + B(1-z) + Cz(1-z)] + Dz + E(1-z)} \\ &= Q_{kjm}(1, p^2) \ln \frac{Ap^2 + D}{\mu^2} - \underbrace{Q_{kjm}(0, p^2) \ln \frac{Bp^2 + E}{\mu^2}}_{=0} \\ & \quad - \int_0^1 dz \frac{Q_{kjm}(z, p^2) [p^2 (A - B + C(1-2z)) + D - E]}{\underbrace{(Az + B(1-z) + Cz(1-z))}_{>0} \left[p^2 + \frac{Dz + E(1-z)}{Az + B(1-z) + Cz(1-z)} \right]}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Jetzt fügen wir die Identität

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \delta \left(s - \frac{Dz + E(1-z)}{Az + B(1-z) + Cz(1-z)} \right), \quad (4.65)$$

ein, wobei eine Einschränkung des Integrationsbereichs auf diejenigen offenen Teilmengen der reellen Achse erlaubt ist, in denen das Argument der Delta-Distribution verschwinden kann,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz P_{kjm}(z, p^2) \ln \frac{p^2 (Az + B(1-z) + Cz(1-z)) + Dz + E(1-z)}{\mu^2} \\
&= Q_{kjm}(1, p^2) \ln \frac{Ap^2 + D}{\mu^2} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^1 dz \frac{Q_{kjm}(z, p^2) [p^2 (A - B + C(1-2z)) + D - E] \delta \left(s - \frac{Dz + E(1-z)}{Az + B(1-z) + Cz(1-z)} \right)}{\underbrace{(Az + B(1-z) + Cz(1-z))}_{>0} (p^2 + s)} \\
&= Q_{kjm}(1, p^2) \ln \frac{Ap^2 + D}{\mu^2} - \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^1 dz \frac{Q_{kjm}(z, p^2) [p^2 (A - B + C(1-2z)) + D - E]}{p^2 + s} \\
&\quad \times \delta ([Az + B(1-z) + Cz(1-z)] s - Dz - E(1-z)) \\
&= Q_{kjm}(1, p^2) \ln \frac{Ap^2 + D}{\mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kjm}(s, p^2)}{p^2 + s}, \tag{4.66}
\end{aligned}$$

und erhalten das gewünschte Spektralintegral mit der Spektraldichte

$$\begin{aligned}
\varrho_{kjm}(s, p^2) &= - \int_0^1 dz Q_{kjm}(z, p^2) [p^2 (A - B + C(1-2z)) + D - E] \\
&\quad \times \delta ([Az + B(1-z) + Cz(1-z)] s - Dz - E(1-z)). \tag{4.67}
\end{aligned}$$

Die Bezeichnung Spektraldichte entspricht wegen der vorhandenen p^2 -Abhängigkeit nicht dem üblichen Sprachgebrauch; diese ist jedoch rein polynomial, $\varrho(s, p^2) = \sum_n (p^2)^n \tilde{\varrho}_n(s)$, und das Spektralintegral lässt sich auf die Form $\int ds \frac{\varrho(s, p^2)}{p^2 + s} = \sum_n (p^2)^n \int ds \frac{\tilde{\varrho}_n(s)}{p^2 + s}$ mit der Spektraldichte $\tilde{\varrho}_n(s)$ bringen, was die Bezeichnung Spektraldichte im weiteren Sinne für $\varrho(s, p^2)$ zulässt.

Die detaillierte Auswertung des z -Integrals wird in Anhang D.2 vorgenommen; hier notieren wir nur die Ergebnisse.

- divergente Anteile:

$$c_k^{\xi\omega\varrho'}(p) := \int_0^1 dz b_k^{\xi\omega\varrho'}(z, p) \tag{4.68}$$

mit den $b_k^{\xi\omega\varrho'}(z, p)$ aus (4.57) ergibt

$$\begin{aligned}
c_1^{\xi\omega\varrho'}(p) &= \frac{\delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} + 13\delta^{\xi\varrho'} p^\omega + \delta^{\omega\varrho'} p^\xi}{12} \\
c_2^{\xi\omega\varrho'}(p) &= \frac{\delta^{\xi\varrho'} p^\omega - \delta^{\omega\varrho'} p^\xi}{4} \\
c_3^{\xi\omega\varrho'}(p) &= - \frac{\delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} + \delta^{\xi\varrho'} p^\omega + 13\delta^{\omega\varrho'} p^\xi}{12}. \tag{4.69}
\end{aligned}$$

- $m = 1$:

$$\int_0^1 dz P_{kj1}(z, p^2) = Q_{kj1}(1, p^2) \tag{4.70}$$

- $m = 2$:

$$\int_0^1 dz P_{kj2}(z, p^2) \ln z = - \int_0^1 dz \frac{Q_{kj2}(z, p^2)}{z} \quad (4.71)$$

- $m = 3$:

$$\int_0^1 dz P_{kj3}(z, p^2) \ln(1-z) = - \int_0^1 dz \frac{\tilde{Q}_{kj3}(z, p^2)}{z}, \quad (4.72)$$

wobei $\tilde{Q}_{kjm}(z, p^2)$ als Stammfunktion von $P_{kjm}(1-z, p^2)$ definiert ist,

$$\frac{d}{dz} \tilde{Q}_{kjm}(z, p^2) = P_{kjm}(1-z, p^2) \quad \text{mit} \quad \tilde{Q}_{kjm}(0, p^2) = 0. \quad (4.73)$$

- $m = 4$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz P_{kj4}(z, p^2) \ln \frac{p^2 z(1-z) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 (1-z) + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 z}{\mu^2} \\ &= Q_{kj4}(1, p^2) \ln \frac{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + \int_0^\infty ds \frac{\varrho_{kj4}(s, p^2)}{p^2 + s} \end{aligned} \quad (4.74)$$

mit

$$\begin{aligned} \varrho_{kj4}(s, p^2) &= \frac{\Theta(s - s_+)}{\sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s}} \\ &\times \left[Q_{kj4}(z_+(s), p^2) \left(p^2(2z_+(s) - 1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right. \\ &\left. + Q_{kj4}(z_-(s), p^2) \left(p^2(2z_-(s) - 1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.75)$$

wobei

$$s_+ = \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 + 2\sqrt{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} = \left(\sqrt{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2} + \sqrt{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} \right)^2, \quad (4.76)$$

$$z_\pm(s) = \frac{s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \pm \sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s}}{2s} \quad (4.77)$$

- $m = 5$:

$$\int_0^1 dz P_{kj5}(z, p^2) \ln \frac{p^2 z + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} = Q_{kj5}(1, p^2) \ln \frac{p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + \int_0^\infty ds \frac{\varrho_{kj5}(s, p^2)}{p^2 + s} \quad (4.78)$$

mit

$$\varrho_{kj5}(s, p^2) = -\Theta\left(s - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2\right) \frac{p^2}{s} Q_{kj5}\left(\frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{s}, p^2\right) \quad (4.79)$$

- $m = 6$:

$$\int_0^1 dz P_{kj6}(z, p^2) \ln \frac{p^2(1-z) + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} = Q_{kj6}(1, p^2) \ln \frac{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + \int_0^\infty ds \frac{\varrho_{kj6}(s, p^2)}{p^2 + s} \quad (4.80)$$

mit

$$\varrho_{kj6}(s, p^2) = \Theta \left(s - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \frac{p^2}{s} Q_{kj6} \left(\frac{s - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{s}, p^2 \right) \quad (4.81)$$

- $m = 7$:

$$\int_0^1 dz P_{kj7}(z, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} = Q_{kj7}(1, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \quad (4.82)$$

Wir sehen, dass sich unsere Vermutung bestätigt hat und $\varrho(s)$ tatsächlich unterhalb einer positiven Schwelle verschwindet. Aus diesem Grund ist die Verschiebung der unteren Grenze des s -Integrals auf 0 erlaubt.

Einsetzen der Integrale in (4.55) ergibt für $\mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p)$

$$\begin{aligned} \mu^{2\varepsilon} \mathcal{Q}^{\xi\omega\varrho'}(p) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} R_{k, l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \left\{ c_k^{\xi\omega\varrho'}(p) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^4 d_j^{\xi\omega\varrho'}(p) \left[A_{kj}(p^2) + Q_{kj5}(1, p^2) \ln \frac{p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + Q_{kj7}(1, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=4}^6 \int_0^\infty ds \frac{\varrho_{kjm}(s, p^2)}{p^2 + s} \right] \right\} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.83)$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} A_{kj}(p^2) &:= Q_{kj1}(1, p^2) - \int_0^1 dz \frac{Q_{kj2}(z, p^2) + \tilde{Q}_{kj3}(z, p^2)}{z} \\ &\quad + \left(Q_{kj4}(1, p^2) + Q_{kj6}(1, p^2) \right) \ln \frac{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Die Koeffizienten $A_{kj}(p^2)$, $Q_{kj5}(1, p^2)$ und $Q_{kj7}(1, p^2)$ findet man in Anhang E.2. Es handelt sich um Polynome vom Grade ≤ 2 in p^2 .

4.4 Renormierung

Nach vollständiger Ausführung der inneren q -Integration bleiben $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenzen, die vor der Berechnung des äußeren p -Integrals durch ein geeignetes Renormierungsverfahren kompensiert werden müssen. Das ist im vorliegenden Fall nicht ganz unproblematisch, da die zu renormierende Größe einen zusammengesetzten Operator enthält, also ein Produkt elementarer Feldoperatoren am selben Raumzeitpunkt y . Wir gehen deshalb kurz auf die Renormierung zusammengesetzter Operatoren ein.

proportionalen Anteile in (4.83) subtrahiert werden. Nach Durchführung der Renormierung kann die Regularisierung fallengelassen werden, d.h. $\varepsilon \rightarrow 0$, weil das p -Integral in $D = 4$ Dimensionen konvergiert. Die Kopplung $\bar{g}_0^2 = g^2 \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha$ geht wegen $Z_\alpha = 1 + O(g^2)$ in g^2 über, da wir nur in Einschleifenordnung rechnen. Einsetzen in (4.13) ergibt

$$\begin{aligned}
FSK_{2,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) &= \frac{N_C \delta_{ab} i g^2}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\delta^{\kappa\xi} \delta^{\lambda\omega} (\delta^{\nu\varrho} \partial^\mu - \delta^{\mu\varrho} \partial^\nu) e^{ip \cdot (x-y)} \right. \\
&\quad \left. + \delta^{\mu\xi} \delta^{\nu\omega} (\delta^{\kappa\varrho} \partial^\lambda - \delta^{\lambda\varrho} \partial^\kappa) e^{ip \cdot (y-x)} \right] \frac{t^{\varrho\varrho'}(-p)}{N_{2VT}^{[r]}(p^2)} \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} R_{k,l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \\
&\quad \times \sum_{j=2}^3 d_j^{\xi\omega\varrho'}(p) \left[A_{kj}(p^2) + Q_{kj5}(1, p^2) \ln \frac{p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + Q_{kj7}(1, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=4}^6 \int_0^\infty ds \frac{\varrho_{kjm}(s, p^2)}{p^2 + s} \right]. \tag{4.89}
\end{aligned}$$

Die zu $p^{\varrho'}$ proportionalen Terme ($j = 1$ und $j = 4$) werden durch den Transversalprojektor $t^{\varrho\varrho'}(-p)$ aufgehoben.

4.5 Das äußere Impulsintegral

Die in Abschnitt 4.2 vorgenommene Partialbruchzerlegung wird durch Einbeziehung des verbleibenden Nenners $N_{2VT}^{[r]}(p^2)$ fortgeführt. $R_{k,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)$ ist vom Grade r , $N_{2VT}^{[r]}(p^2)$ vom Grade $r + 1$ in p^2 , somit ist

$$\frac{R_{k,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)}{N_{2VT}^{[r]}(p^2)} = \sum_{l_3=1}^{r+1} \frac{\tau_{k,l_1 l_2 l_3}^{[r]}}{p^2 + \sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2} \tag{4.90}$$

mit den Residuen

$$\tau_{k,l_1 l_2 l_3}^{[r]} = \frac{R_{k,l_1 l_2}^{[r]}(-\sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2)}{\prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq l_3}}^{r+1} (\sigma_{k_3}^{[r]} - \sigma_{l_3}^{[r]}) \Lambda^2}. \tag{4.91}$$

Einsetzen der $R_{k,l_1 l_2}^{[r]}$ aus (4.15) bis (4.17) führt auf die symmetrischen Ergebnisse

$$\tau_{1,l_1 l_2 l_3}^{[r]} = \frac{F_0^{[r]}(-\sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)}{\prod_{n=1}^3 \left[\prod_{\substack{k_n=1 \\ k_n \neq l_n}}^{r+1} (\sigma_{k_n}^{[r]} - \sigma_{l_n}^{[r]}) \Lambda^2 \right]}, \tag{4.92}$$

$$\tau_{2,l_1 l_2 l_3}^{[r]} = \frac{F_0^{[r]}(-\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2)}{\prod_{n=1}^3 \left[\prod_{\substack{k_n=1 \\ k_n \neq l_n}}^{r+1} (\sigma_{k_n}^{[r]} - \sigma_{l_n}^{[r]}) \Lambda^2 \right]}, \tag{4.93}$$

$$\tau_{3,l_1 l_2 l_3}^{[r]} = \frac{F_0^{[r]}(-\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2, -\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2)}{\prod_{n=1}^3 \left[\prod_{\substack{k_n=1 \\ k_n \neq l_n}}^{r+1} (\sigma_{k_n}^{[r]} - \sigma_{l_n}^{[r]}) \Lambda^2 \right]} \tag{4.94}$$

für die Residuen.

Für die Ausführung des p -Integrals nutzen wir aus, dass sich die positiven Potenzen von p durch Ableitung nach x aus dem Fourier-Faktor erzeugen und vor das Integral ziehen lassen,

$$p^\mu e^{ip \cdot (x-y)} = -i \partial^\mu e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (4.95)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} FSK_{2,ab}^{\mu\nu\kappa\lambda}(x,y) &= \frac{N_C \delta_{ab} g^2}{(4\pi)^2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1, l_2, l_3=1}^{r+1} \tau_{k, l_1 l_2 l_3}^{[r]} \\ &\times \left[\delta^{\kappa\xi} \delta^{\lambda\omega} (\delta^{\nu\varrho} \partial^\mu - \delta^{\mu\varrho} \partial^\nu) - \delta^{\mu\xi} \delta^{\nu\omega} (\delta^{\kappa\varrho} \partial^\lambda - \delta^{\lambda\varrho} \partial^\kappa) \right] \\ &\times \left\{ (\delta^{\xi\varrho'} \partial^\omega A_{k2}(-\partial^2) + \delta^{\omega\varrho'} \partial^\xi A_{k3}(-\partial^2)) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \right. \\ &+ \delta^{\xi\varrho'} \partial^\omega \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(Q_{k25}(1, -\partial^2) \ln \frac{p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + Q_{k27}(1, -\partial^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \\ &+ \delta^{\omega\varrho'} \partial^\xi \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(Q_{k35}(1, -\partial^2) \ln \frac{p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + Q_{k37}(1, -\partial^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \\ &+ \sum_{m=4}^6 \sum_{n=0}^2 (-\partial^2)^n \int_0^\infty ds (\delta^{\xi\varrho'} \partial^\omega \tilde{\varrho}_{k2mn}(s) + \delta^{\omega\varrho'} \partial^\xi \tilde{\varrho}_{k3mn}(s)) \\ &\left. \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + s} \right\} \frac{\delta^{\varrho\varrho'} + \frac{\partial^\varrho \partial^{\varrho'}}{p^2}}{p^2 + \sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2} e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (4.96) \end{aligned}$$

wobei die „wahren“ Spektraldichten $\tilde{\varrho}_{kjm}(s)$ über

$$\varrho_{kjm}(s, p^2) = \sum_{n=0}^2 \tilde{\varrho}_{kjm}(s) p^{2n} \quad (4.97)$$

definiert sind. Die beiden Fourier-Faktoren in (4.89) wurden hier durch Substitution der Integrationsvariablen $p \rightarrow -p$ im zweiten Integral zusammengefasst, wobei $t^{\varrho\varrho'}(p) = t^{\varrho\varrho'}(-p)$ und $d_j^{\xi\omega\varrho'}(-p) = -d_j^{\xi\omega\varrho'}(p)$ benutzt wurde. Außerdem wurde

$$t^{\varrho\varrho'}(p) e^{ip \cdot (x-y)} = \left(\delta^{\varrho\varrho'} + \frac{\partial^\varrho \partial^{\varrho'}}{p^2} \right) e^{ip \cdot (x-y)} \quad (4.98)$$

verwendet.

Die Impulsintegrale nehmen jetzt die Form

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p^2) e^{ip \cdot (x-y)} \quad (4.99)$$

der vierdimensionalen Fourier-Transformierten einer Funktion an, die nur von der Norm $|p|$ des zu transformierenden Impulsvektors p abhängt. In Anhang D.3 wird die allgemeine Formel

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p^2) e^{ip \cdot (x-y)} = \frac{1}{4\pi^2 |x-y|} \int_0^\infty d|p| p^2 f(p^2) J_1(|p||x-y|) \quad (4.100)$$

zur Durchführung dieser Fourier-Transformation hergeleitet. Die Winkelintegration lässt sich demgemäß vollständig ausführen und führt unabhängig von der Funktion $f(p^2)$ auf eine J_1 -Besselfunktion. Ausgehend von dieser Formel wird ebenfalls in Anhang D.3 auch das letzte $|p|$ -Integral für die meisten der vorkommenden Funktionen f gelöst. Lediglich die $\ln p^2$ und $\ln(p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2)$ enthaltenden Randterme in (4.96) widersetzen sich einer derartigen Behandlung. Es ergeben sich die Formeln

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + a} e^{ip \cdot (x-y)} = \frac{\sqrt{a}}{4\pi^2 |x-y|} K_1(\sqrt{a} |x-y|), \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2(p^2 + a)} e^{ip \cdot (x-y)} &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{a} |x-y|} \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{a} |x-y|} - K_1(\sqrt{a} |x-y|) \right), \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + a)(p^2 + b)} e^{ip \cdot (x-y)} = \frac{\sqrt{a} K_1(\sqrt{a} |x-y|) - \sqrt{b} K_1(\sqrt{b} |x-y|)}{4\pi^2 (b-a) |x-y|}, \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2(p^2 + a)(p^2 + b)} e^{ip \cdot (x-y)} &= \frac{1}{4\pi^2 ab(x-y)^2} + \frac{1}{4\pi^2 (b-a) |x-y|} \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{b}} K_1(\sqrt{b} |x-y|) - \frac{1}{\sqrt{a}} K_1(\sqrt{a} |x-y|) \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Die Integrale führen wie beim abelschen Teil auf K_1 -Besselfunktionen. Man beachte, dass (4.101) selbstverständlich mit (D.11) übereinstimmt.

In (4.96) treten partielle Ableitungen von $K_1(m|x-y|)/|x-y|$ nach Komponenten von $x-y$ bis zur achten Ordnung auf. Da jeder Term den Faktor $1/(p^2 + \sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2)$ enthält, kann durch Polynomdivision

$$\frac{p^2}{p^2 + \sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2} = 1 - \frac{\sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2}{p^2 + \sigma_{l_3}^{[r]} \Lambda^2} \quad (4.105)$$

der Zählergrad und damit die Zahl der Ableitungen auf sechs reduziert werden. Wie diese Ableitungen berechnet werden, ist Anhang C.3 zu entnehmen. Wie beim abelschen Teil treten Terme mit K_0 - bzw. K_1 -Besselfunktionen auf.

Da vom Einsetzen der Ableitungen in (4.96) und Ausmultiplizieren keine Vereinfachung des Ausdrucks zu erwarten ist, führe ich diese Operationen nicht mehr durch und beende an dieser Stelle die Diskussion des „halb-nichtabelschen“ Teils der Feldstärkenkorrelation.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde die Feldstärkenkorrelation in einer nichtabelschen Eichtheorie in Einschleifenordnung im Rahmen eines systematischen nichtperturbativen Näherungsverfahrens berechnet. Der vom abelschen Teil stammende Beitrag konnte bis auf Korrekturen durch die Dyson-Schwinger-Gleichung (3.5) vollständig berechnet werden, und zwar sowohl im Euklidischen (3.17) als auch im Minkowskischen (3.23). Er zeigt Divergenzen für verschwindende Abstände sowie eine exponentiell abfallende Asymptotik, was man von einer Feldstärkenkorrelation auch erwarten würde. Auch steht dieses Resultat in Einklang mit dem Phänomen des Confinement. Ein geschlossener Ausdruck für den zweiten Beitrag auf Einschleifenniveau, den „halb-nichtabelschen“ Teil der Feldstärkenkorrelation, konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit zwar nicht ermittelt werden; dennoch lassen sich einige qualitative Aussagen treffen. Zum einen konnte eine Spektraldarstellung für den „halb-nichtabelschen“ Teil (4.96) angegeben werden, die auf die Existenz massiver Gluonen hinweist. Zum anderen treten bei der Schleifenintegration dieselben Funktionen auf wie beim abelschen Teil, nämlich modifizierte K_0 - und K_1 -Besselfunktionen, was qualitativ ähnliches asymptotisches Verhalten beider Teile nahelegt.

Da bei der Berechnung des „halb-nichtabelschen“ Teils mit reellen Propagatorpolen gerechnet wurde, was stabilen Teilchen entspricht, ist die Übertragung der Rechnung auf den physikalisch relevanten Fall konjugiert komplexer Polpaare eine naheliegende Aufgabe. Insbesondere die Bestimmung der Spektraldichten wird durch Einführung komplexer Wegintegrale zu modifizieren sein.

Ein ungelöstes Problem im zweifachen Sinne stellen die $\ln p^2$ enthaltenden Terme im „halb-nichtabelschen“ Teil dar. Zum einen können die entsprechenden Impulsintegrale meines Wissens nicht geschlossen gelöst werden; man ist möglicherweise auf Näherungen angewiesen. Darüberhinaus deuten Ausdrücke der Form $\ln p^2$ auf masselose Gluonen hin, die in unserer Theorie nicht auftreten sollten. Möglicherweise wird sich herausstellen, dass diese Terme durch den Geisterbeitrag der Korrekturen zum abelschen Teil kompensiert werden. Falls dies nicht der Fall ist, muss eine andere Erklärung gefunden werden.

Anhang A

Feynmanregeln und Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD

A.1 $SU(N_C)$ -Algebra

Die relevanten Relationen der $SU(N_C)$ -Algebra finden sich beispielsweise in [PT 84], [SIB 01].

- Strukturkonstanten der $SU(N_C)$:

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (\text{A.1})$$

mit ($N_C = 3$)

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} &= \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Als Strukturkonstanten einer halb-einfachen Lie-Algebra sind die f_{abc} total antisymmetrisch.

- Darstellungen:

Die Gluonfelder transformieren sich in der adjungierten Darstellung, definiert durch

$$(T_a)_{bc} = -i f_{abc}, \quad (\text{A.3})$$

während sich die Fermionfelder in der Fundamentaldarstellung transformieren. In diesem Fall ist

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (\text{A.4})$$

mit hermiteschen, spurfreien $N_C \times N_C$ -dimensionalen Verallgemeinerungen der Gell-Mann-

Matrizen ($N_C = 3$)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (A.5) \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Identitäten für Strukturkonstanten:

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{N_C} \delta_{ab} \mathbf{1} + d_{abc} T_c \quad (A.6)$$

mit den total symmetrischen Größen d_{abc} , die für $N_C = 3$

$$\begin{aligned}
d_{118} = d_{228} = d_{338} = -2d_{448} = -2d_{558} = -2d_{668} = -2d_{778} = -d_{888} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} &= \frac{1}{2} \quad (A.7)
\end{aligned}$$

lauten. Alle anderen nicht durch Indexpermutation erzeugbaren d_{abc} verschwinden.

$$f_{acd} d_{bcd} = 0 \quad (A.8)$$

$$f_{acd} f_{bcd} = N_C \delta_{ab} \quad (A.9)$$

A.2 Erzeugende Funktionale

Wir formulieren die erzeugenden Funktionale für die verschiedenen Green'schen Funktionen in euklidischer Impulsraumdarstellung.

- Erzeugendes Funktional Z für Korrelationsfunktionen G_n

$$Z[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] + j[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi; J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}]}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]}} \quad (A.10)$$

mit dem Quellterm im Impulsraum

$$\begin{aligned}
j[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi; J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[A_a^\mu(-p) J_a^\mu(p) + \bar{c}_a(-p) \omega_a(p) + \bar{\omega}_a(-p) c_a(p) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \left(\bar{\psi}_{(f)}^k(-p) \chi_{(f)}^k(p) + \bar{\chi}_{(f)}^k(-p) \psi_{(f)}^k(p) \right) \right] \quad (A.11)
\end{aligned}$$

- Erzeugendes Funktional W für verbundene Green'sche Funktionen $G_{(c)n}$

$$W[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] = \ln Z[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] \quad (A.12)$$

- Erzeugendes Funktional („effektive Wirkung“) Γ für Vertexfunktionen Γ_n
Dieses erhält man durch eine funktionale Legendre-Transformation aus W ,

$$\Gamma [\hat{A}, \hat{c}, \hat{\psi}] = W [J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] - j [\hat{A}, \hat{c}, \hat{\psi}; J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}], \quad (\text{A.13})$$

wobei die Quellen durch die „klassischen Felder“

$$\hat{A}_a^\mu(p) = \frac{\delta W [J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}]}{\delta J_a^\mu(p)}, \text{ analog für die anderen Felder,} \quad (\text{A.14})$$

ersetzt werden.

Die Green'schen Funktionen G_n , $G_{(c)n}$, Γ_n erhält man durch n -fache Funktionalableitung der Funktionale Z , W , Γ nach ihren Argumenten (Quellen bzw. klassischen Feldern) und anschließendes Setzen aller Argumente auf Null. Einzelheiten entnehme man [DRI 97].

A.3 Korrelationsfunktionen

Die Beziehung zwischen den vollen Green'schen Funktionen im Orts- und Impulsraum formulieren wir für beliebige Skalar-, Vektor- oder Spinorfelder ϕ_j , wobei j den Feldtyp repräsentiert:

$$\begin{aligned} G_{j_1 \dots j_n}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | \phi_{j_1}(x_1) \cdots \phi_{j_n}(x_n) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_n}{(2\pi)^{nD}} e^{i(k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n)} \langle 0 | \tilde{\phi}_{j_1}(k_1) \cdots \tilde{\phi}_{j_n}(k_n) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\langle 0 | \tilde{\phi}_{j_1}(k_1) \cdots \tilde{\phi}_{j_n}(k_n) | 0 \rangle = (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + \dots + k_n) \tilde{G}_{j_1 \dots j_n}(k_1, \dots, k_n) \Big|_{k_1 + \dots + k_n = 0} \quad (\text{A.16})$$

In diesen allgemeinen Relationen sind sämtliche Lorentz-, Farb- und Spinorindices unterdrückt. Die Kennzeichnung „ $\tilde{}$ “ von Größen im Impulsraum wird in dieser Arbeit weggelassen, wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind. Die vollen Green'schen Funktionen werden durch Diagramme wie

$$G_{3V} \hat{=} \text{---} \circlearrowleft G_{3V} \text{---} \quad (\text{A.17})$$

dargestellt. Die eingezeichneten „Beine“ geben Zahl und Typ der äußeren Felder an und sollen nicht andeuten, dass an den äußeren Linien nackte Propagatoren sitzen.

A.4 Vertexfunktionen

Wir geben nur die sieben oberflächlich divergenten Vertices der QCD an. Die vollen Propagatoren sind jeweils das negative Inverse des entsprechenden Zweipunkt-Vertex, der Selbstenergie. Die Drei- und Vierpunkt-Vertices verstehen sich als in den äußeren Beinen amputiert. Alle Impulse sind einlaufend.

- Gluon-Propagator:

$$D_{ab}^{\mu\nu}(p) = \delta_{ab} D^{\mu\nu}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \mu \\ a \end{array} \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \leftarrow p \\ \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ b \end{array} \quad (\text{A.18})$$

- Geist-Propagator:

$$D_{Gab}(p) = \delta_{ab} D(p^2) \hat{=} \begin{array}{c} \leftarrow p \\ a \text{ --- } b \end{array} \quad (\text{A.19})$$

- Fermion-Propagator:

$$S_{(f)}^{jk}(p) = \delta^{jk} S_{(f)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \leftarrow p \\ j \text{ --- } k \end{array} \quad (\text{A.20})$$

- Drei-Gluonen-Vertex:

$$i\bar{g}_0 \Gamma_{3V}^{\mu\nu\kappa}(k, p, q) \hat{=} \begin{array}{c} \kappa c \\ q \\ \text{---} \\ \text{---} \Gamma_{3V} \\ \text{---} \\ \mu a \quad k \quad p \\ \text{---} \\ \nu b \end{array} \quad (\text{A.21})$$

- Vier-Gluonen-Vertex:

$$(i\bar{g}_0)^2 \Gamma_{4V}^{\mu\nu\kappa\lambda}(k, p, q, r) \hat{=} \begin{array}{c} \nu b \\ p \\ \text{---} \\ \text{---} \Gamma_{4V} \\ \text{---} \\ \lambda d \\ r \\ \text{---} \\ \mu a \quad k \quad q \quad \kappa c \end{array} \quad (\text{A.22})$$

- Fermion-Gluon-Vertex:

$$i\bar{g}_0 \Gamma_{V\bar{F}F(f)}^{\mu j k}(p, q, r) \hat{=} \begin{array}{c} j \\ q \\ \text{---} \\ \text{---} \Gamma_{V\bar{F}F(f)} \\ \text{---} \\ p \quad \mu a \\ \text{---} \\ k \\ r \end{array} \quad (\text{A.23})$$

- Geist-Gluon-Vertex:

$$i\bar{g}_0 \Gamma_{V\bar{G}G}^{\mu}(k, p, q) \hat{=} \begin{array}{c} \mu a \\ k \\ \text{---} \\ \text{---} \Gamma_{V\bar{G}G} \\ \text{---} \\ p \quad b \\ \text{---} \\ c \\ q \end{array} \quad (\text{A.24})$$

A.5 Beziehungen zwischen Vertexfunktionen

- Gluonpropagator:

$$G_{2V}^{\mu\nu}(-k, k) = D_{ab}^{\mu\nu}(k) = \delta_{ab} D^{\mu\nu}(k) \quad (\text{A.25})$$

Transversal- und Longitudinalprojektor:

$$t^{\mu\nu}(k) = \delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (\text{A.26})$$

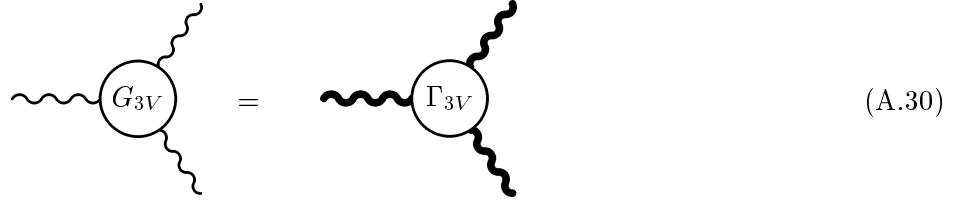
$$l^{\mu\nu}(k) = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (\text{A.27})$$

Zerlegung des Gluonpropagators bezüglich seiner Tensorstruktur:

$$D^{\mu\nu}(k) = t^{\mu\nu}(k) D_T(k^2) + l^{\mu\nu}(k) D_L(k^2) \quad (\text{A.28})$$

- Zerlegung von G_{3V} :

$$G_{3V}^{\mu\nu\kappa}(k, p, q) = i\bar{g}_0 D^{\mu'\mu}(k) D^{\nu'\nu}(p) D^{\kappa'\kappa}(q) \Gamma_{3V}^{\mu'\nu'\kappa'}(k, p, q) \quad (\text{A.29})$$



$$\text{Diagrammatic equation (A.30): } G_{3V} = \Gamma_{3V} \quad (\text{A.30})$$

- Zerlegung von $G_{(c)4V}$:

$$G_{(c)4V}^{\mu\nu\kappa\lambda}(k, p, q, r) = D^{\mu'\mu}(k) D^{\nu'\nu}(p) D^{\kappa'\kappa}(q) D^{\lambda'\lambda}(r) T_{4abcd}^{\mu'\nu'\kappa'\lambda'}(k, p, q, r) \quad (\text{A.31})$$

mit dem verbundenen, amputierten Teil der Vier-Gluonen-Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} T_{4abcd}^{\mu\nu\kappa\lambda}(k, p, q, r) = & \Gamma_{3V}^{\mu\nu\varrho}(k, p, -k-p) D^{\omega\varrho}(k+p) \Gamma_{3V}^{\kappa\lambda\omega}(q, r, k+p) \\ & + \Gamma_{3V}^{\mu\kappa\varrho}(k, q, -k-q) D^{\omega\varrho}(k+q) \Gamma_{3V}^{\nu\lambda\omega}(p, r, k+q) \\ & + \Gamma_{3V}^{\mu\lambda\varrho}(k, r, -k-r) D^{\omega\varrho}(k+r) \Gamma_{3V}^{\nu\kappa\omega}(p, q, k+r) \\ & + \Gamma_{4V}^{\mu\nu\kappa\lambda}(k, p, q, r) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

- Farbstruktur von Γ_{3V} :

$$\Gamma_{3V}^{\mu\nu\kappa}(k, p, q) = f_{abc} \Gamma_{3V}^{(f)\mu\nu\kappa}(k, p, q) + d_{abc} \Gamma_{3V}^{(d)\mu\nu\kappa}(k, p, q) \quad (\text{A.33})$$

mit d_{abc} : vollständig symmetrischer Tensor aus (A.6)

A.6 Störungstheoretische Vertices

Durch Fourier-Transformation der Felder gelangt man von (1.1) zur Wirkung der QCD im Impulsraum,

$$\begin{aligned}
S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} A_a^\mu(-p) \left[-\delta_{ab} \left(\delta^{\mu\nu} p^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi_0}\right) p^\mu p^\nu \right) \right] A_b^\nu(p) \\
& -\frac{1}{6} \bar{g}_0 \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} A_a^\mu(p) A_b^\nu(q) A_c^\kappa(-p-q) \\
& \times (-i f_{abc}) [\delta^{\mu\nu} (q-p)^\kappa + \delta^{\nu\kappa} (-p-2q)^\mu + \delta^{\kappa\mu} (2p+q)^\nu] \\
& -\frac{1}{24} \bar{g}_0^2 \int \frac{d^4 p d^4 q d^4 k}{(2\pi)^{12}} A_a^\mu(p) A_b^\nu(q) A_c^\kappa(k) A_d^\lambda(-p-q-k) \\
& \times [f_{abe} f_{cde} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa} - \delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda}) + f_{ace} f_{bde} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\kappa} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\kappa\lambda}) \\
& + f_{ade} f_{bce} (\delta^{\mu\kappa} \delta^{\nu\lambda} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\kappa\lambda})] \\
& - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{c}_a(-p) [-\delta_{ab} p^2] c_b(p) \\
& - \bar{g}_0 \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \bar{c}_a(p) c_b(-p-q) A_c^\mu(q) (-i f_{abc} p^\mu) \\
& - \sum_{f=1}^{N_F} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_{(f)}^j(-p) [-\delta^{jk} (\not{p} + m_{(f)})] \psi_{(f)}^k(p) \\
& - \sum_{f=1}^{N_F} \bar{g}_0 \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \bar{\psi}_{(f)}^j(p) \left(-(T_a)^{jk} \gamma^\mu \right) \psi_{(f)}^k(-p-q) A_a^\mu(q), \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

an der sich die störungstheoretischen („nackten“) Vertices ablesen lassen, die den oberflächlich divergenten Vertices in niedrigster perturbativer Ordnung entsprechen. Die nackten Propagatoren stellen dabei das negative Inverse der entsprechenden nackten Zweipunkt-Vertices dar,

$$D^{(0)}(p) = - \left[\Gamma_{2V}^{(0)}(-p, p) \right]^{-1}. \quad (\text{A.35})$$

Diese Notation unterdrückt alle Indices. Ähnliche Beziehungen gelten für Geist- und Fermionpropagator. Wie bei den „angezogenen“ Vertices verstehen sich in der folgenden Aufstellung sämtliche Impulse als einlaufend.

- nackter Gluon-Propagator:

$$D^{(0)\mu\nu}_{ab}(p) = \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \left[\delta^{\mu\nu} - (1 - \xi_0) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \quad (\text{A.36})$$

$$\hat{=} \quad \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ a \quad \text{~~~~~} \quad b \\ \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\not{p}} \end{array}$$

- nackter Geist-Propagator:

$$D_G^{(0)ab}(p) = \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \quad (\text{A.37})$$

$$\hat{=} \quad \begin{array}{c} \not{p} \\ a \quad \text{-----} \quad b \end{array}$$

- nackter Fermion-Propagator:

$$S_{(f)}^{(0)jk}(p) = \delta^{jk} \frac{1}{\not{p} + m_{(f)}} \stackrel{(1.6)}{=} -\delta^{jk} \frac{\not{p} - m_{(f)}}{p^2 + m_{(f)}^2} \quad (\text{A.38})$$

$$\hat{=} \begin{array}{c} \overleftarrow{p} \\ j \longrightarrow \bullet \longleftarrow k \end{array}$$

- nackter Drei-Gluonen-Vertex:

$$\Gamma_{3Vabc}^{(0)\mu\nu\kappa}(k, p, q) = if_{abc} [\delta^{\mu\nu}(k-p)^\kappa + \delta^{\nu\kappa}(p-q)^\mu + \delta^{\kappa\mu}(q-k)^\nu] \quad (\text{A.39})$$

$$\hat{=} \begin{array}{c} \kappa c \\ q \\ \mu a \text{---} k \text{---} \bullet \text{---} p \text{---} \\ \nu b \end{array}$$

- nackter Vier-Gluonen-Vertex:

$$\Gamma_{4Vabcd}^{(0)\mu\nu\kappa\lambda} = f_{eab}f_{ecd}(\delta^{\mu\lambda}\delta^{\nu\kappa} - \delta^{\mu\kappa}\delta^{\nu\lambda}) \\ + f_{eac}f_{edb}(\delta^{\mu\nu}\delta^{\kappa\lambda} - \delta^{\mu\lambda}\delta^{\kappa\nu}) \\ + f_{ead}f_{ebc}(\delta^{\mu\kappa}\delta^{\lambda\nu} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\lambda\kappa}) \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{=} \begin{array}{c} \nu b \quad \lambda d \\ \mu a \quad \kappa c \end{array}$$

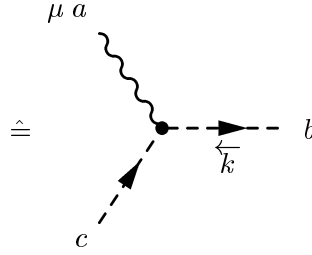
- nackter Fermion-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{V\bar{F}F(f)a}^{(0)\mu jk} = -(T_a)^{jk}\gamma^\mu \quad (\text{A.41})$$

$$\hat{=} \begin{array}{c} j \\ \bullet \\ k \end{array} \text{---} \mu a$$

- nackter Geist-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{V\bar{G}Gabc}^{(0)\mu}(k) = -if_{abc}k^\mu \quad (\text{A.42})$$



A.7 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Die Herleitung der Dyson-Schwinger-Gleichungen erfolgt über die Forderung, dass das Pfadintegral über eine Funktionalableitung nach einem der Felder verschwindet¹. Beispielsweise gilt in der QCD bei Ableitung nach dem Eichfeld $A_a^\mu(x)$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta A_a^\mu(x)} e^{-S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] + j[A, \dots; J, \dots]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \left[-\frac{\delta S[A, \dots]}{\delta A_a^\mu(x)} + J_a^\mu(x) \right] e^{-S[A, \dots] + j[A, \dots; J, \dots]}, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

was auf die funktionale Dyson-Schwinger-Gleichung im Gluonkanal führt,

$$\left\{ -\frac{\delta S[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]}{\delta A_a^\mu(x)} \Big|_{A_a^\mu(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta J_a^\mu(x)}, \dots} + J_a^\mu(x) \right\} Z[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] = 0. \quad (\text{A.44})$$

Die Felder in $\frac{\delta S}{\delta A}$ sind in diesem Ausdruck durch Funktionalableitungen nach ihren Quellen zu ersetzen, wobei \bar{c} und $\bar{\psi}$ auf Grund ihrer Graßmannwertigkeit ein Minuszeichen erhalten. Ausführung der Ableitungen ergibt die ausführlichere Version dieser Gleichung,

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{1}{\xi_0} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J_a^\nu(x)} + \partial^2 \frac{\delta}{\delta J_a^\mu(x)} \right. \\ &+ \bar{g}_0 f_{abc} \left(\partial^\nu \frac{\delta}{\delta J_b^\nu(x)} \frac{\delta}{\delta J_c^\mu(x)} + \frac{\delta}{\delta J_b^\nu(x)} \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J_c^\mu(x)} + \frac{\delta}{\delta J_c^\nu(x)} \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J_b^\nu(x)} \right) \\ &+ \bar{g}_0^2 f_{abc} f_{bde} \frac{\delta}{\delta J_a^\mu(x)} \frac{\delta}{\delta J_c^\nu(x)} \frac{\delta}{\delta J_e^\nu(x)} + \bar{g}_0 f_{abc} \left(\partial^\mu \frac{\delta}{\delta \omega_b(x)} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_c(x)} \\ &\left. + \bar{g}_0 \sum_{f=1}^{N_F} \frac{\delta}{\delta \chi_{(f), \alpha}^j(x)} (T_a)^{jk} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\chi}_{(f), \beta}^k(x)} + J_a^\mu(x) \right\} Z[J, \omega, \bar{\omega}, \chi, \bar{\chi}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Die funktionalen Dyson-Schwinger-Gleichungen bilden den Ausgangspunkt für die Dyson-Schwinger-Gleichungen der Vertexfunktionen Γ_N . Man erhält sie durch $(N-1)$ -fache funktionale Ableitung von (A.45) nach den den Feldern zugeordneten Quellen und anschließendes Nullsetzen derselben. Die Dyson-Schwinger-Gleichungen lassen sich sowohl im Orts- als auch im Impulsraum

¹Voraussetzung ist hinreichend schnelles Abfallen des Gewichtsfaktors $\exp(-S)$ im Unendlichen. Dies ist bei den meisten realistischen Theorien der Fall, so auch bei der QCD.

formulieren; die letztgenannte Variante ergibt sich wie üblich durch eine Fourier-Transformation. Beispielsweise lautet die Dyson-Schwinger-Gleichung für den 2-Gluonen-Vertex im Impulsraum

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2V_{ab}}^{\mu\nu}(k, -k) &= \Gamma_{2V_{ab}}^{(0)\mu\nu}(k, -k) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{g}_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Gamma_{3V_{acd}}^{(0)\mu\rho\sigma}(k, -p, p-k) D_{ec}^{\lambda\rho}(p) D_{hd}^{\tau\sigma}(k-p) \Gamma_{3V_{beh}}^{\nu\lambda\tau}(-k, p, k-p) \\
&+ \frac{1}{6}\bar{g}_0^4 \Gamma_{4V_{acde}}^{(0)\mu\rho\sigma\lambda} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} D_{hd}^{\tau\sigma}(p) D_{le}^{\kappa\lambda}(k-p-q) D_{mc}^{\xi\rho}(q) \\
&\times \Gamma_{4V_{hlm b}}^{\tau\kappa\xi\nu}(p, k-p-q, q, -k) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{g}_0^4 \Gamma_{4V_{acde}}^{(0)\mu\rho\sigma\lambda} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} D_{hd}^{\tau\sigma}(p) D_{le}^{\kappa\lambda}(k-p-q) D_{mc}^{\xi\rho}(q) \\
&\times \Gamma_{3V_{hmn}}^{\tau\xi\delta}(p, q, -p-q) D_{on}^{\omega\delta}(p+q) \Gamma_{3V_{lbo}}^{\kappa\nu\omega}(k-p-q, -k, p+q) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{g}_0^2 \Gamma_{4V_{abcd}}^{(0)\mu\nu\rho\sigma} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} D_{cd}^{\rho\sigma}(p) \\
&- \bar{g}_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Gamma_{V\bar{G}G_{acd}}^{(0)\mu}(p) D_{Gce}(p) D_{Ghd}(p+k) \Gamma_{V\bar{G}G_{beh}}^{\nu}(-p, p+k, -k) \\
&- \bar{g}_0^2 \sum_{f=1}^{N_F} \Gamma_{V\bar{F}F(f)}^{(0)\mu ij}{}_{a\alpha\beta} \\
&\times \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{Sp} \left[S_{(f)}^{jj'}(-p) \Gamma_{V\bar{F}F(f)}^{\nu j' i'}(p, k-p, -k) S_{(f)}^{i' i}(k-p) \right]. \tag{A.46}
\end{aligned}$$

Die graphische Version dieser Gleichung ist in (1.15) dargestellt.

Anhang B

Schleifenintegrale

B.1 Feynman-Parametrisierung

Feynman-Parametrisierung¹:

Die Zusammenfassung der Nenner in Schleifenintegralen geschieht mittels Feynman-Parametrisierung in der Form

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dz_1 z_1^{n-2} \int_0^1 dz_2 z_2^{n-3} \cdots \int_0^1 dz_{n-1} \\ \times \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1}}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}} \quad (\text{B.1})$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - z_1, \\ x_2 &= z_1(1 - z_2), \\ x_3 &= z_1 z_2(1 - z_3), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= z_1 \cdots z_{n-2}(1 - z_{n-1}), \\ x_n &= z_1 \cdots z_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Für $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ reduziert sich (B.1) auf

$$\frac{1}{a_1 \cdots a_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dz_1 z_1^{n-2} \int_0^1 dz_2 z_2^{n-3} \cdots \int_0^1 dz_{n-1} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^{-n}. \quad (\text{B.3})$$

B.2 Impulsintegration

Mit Hilfe symmetrischer Integration²,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^\mu k^\nu f(k^2) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 f(k^2), \quad (\text{B.4})$$

¹siehe [BL 93]

²siehe [YND 83]

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^\mu k^\nu k^\kappa k^\lambda f(k^2) = \frac{\delta^{\mu\nu}\delta^{\kappa\lambda} + \delta^{\mu\kappa}\delta^{\nu\lambda} + \delta^{\mu\lambda}\delta^{\nu\kappa}}{D(D+2)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^2 f(k^2), \quad (\text{B.5})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^{\mu_1} \dots k^{\mu_{2n-1}} f(k^2) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (\text{B.6})$$

lassen sich die Impulsintegrale auf Standardform bringen und mit der Standardformel der D -dimensionalen euklidischen Integration

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + M^2)^\beta} = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \alpha\right) \Gamma\left(\beta - \alpha - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma(\beta)} (M^2)^{\frac{D}{2} + \alpha - \beta} \quad (\text{B.7})$$

lösen. In dieser Arbeit werden insbesondere

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + M^2)^4} = \frac{\Gamma(2 + \varepsilon)}{6(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-2-\varepsilon}, \quad (\text{B.8})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + M^2)^4} = \delta^{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-1-\varepsilon}, \quad (\text{B.9})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 + M^2)^4} = \frac{(4 - 2\varepsilon)\Gamma(1 + \varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-1-\varepsilon}, \quad (\text{B.10})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu k^\kappa k^\lambda}{(k^2 + M^2)^4} = \left(\delta^{\mu\nu}\delta^{\kappa\lambda} + \delta^{\mu\kappa}\delta^{\nu\lambda} + \delta^{\mu\lambda}\delta^{\nu\kappa}\right) \frac{\Gamma(\varepsilon)}{24(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \quad (\text{B.11})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu k^2}{(k^2 + M^2)^4} = \delta^{\mu\nu} \frac{(3 - \varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon}, \quad (\text{B.12})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^2}{(k^2 + M^2)^4} = \frac{(4 - 2\varepsilon)(3 - \varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{12(4\pi)^{2-\varepsilon}} (M^2)^{-\varepsilon} \quad (\text{B.13})$$

mit $D = 4 - 2\varepsilon$ benötigt.

B.3 Parameterintegration

B.3.1 Hilfsintegrale

Mittels elementarer Integrationsregeln (siehe [BRN 00]) erhält man die folgenden Integrale³. Außerdem wurden die Integrale mit Hilfe des Computeralgebrasystems Mathematica numerisch überprüft.

- Rationale Funktionen:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{Ax + B} = \frac{1}{A} \ln \frac{A+B}{B} \quad (\text{B.14})$$

Mit iterierter partieller Integration folgt allgemein für $n \in \mathbf{N}$

$$\int_0^1 dx \frac{x^n}{Ax + B} = \sum_{j=1}^n \frac{\left(-\frac{B}{A}\right)^{n-j}}{jA} + \frac{\left(-\frac{B}{A}\right)^n}{A} \ln \frac{A+B}{B} \quad (\text{B.15})$$

³Weitere findet man in [DD 84].

und speziell

$$\int_0^1 dx \frac{x}{Ax+B} = \frac{1}{A} - \frac{B}{A^2} \ln \frac{A+B}{B}, \quad (\text{B.16})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{Ax+B} = \frac{1}{2A} - \frac{B}{A^2} + \frac{B^2}{A^3} \ln \frac{A+B}{B}, \quad (\text{B.17})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^3}{Ax+B} = \frac{1}{3A} - \frac{B}{2A^2} + \frac{B^2}{A^3} - \frac{B^3}{A^4} \ln \frac{A+B}{B}, \quad (\text{B.18})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^4}{Ax+B} = \frac{1}{4A} - \frac{B}{3A^2} + \frac{B^2}{2A^3} - \frac{B^3}{A^4} + \frac{B^4}{A^5} \ln \frac{A+B}{B}, \quad (\text{B.19})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^5}{Ax+B} = \frac{1}{5A} - \frac{B}{4A^2} + \frac{B^2}{3A^3} - \frac{B^3}{2A^4} + \frac{B^4}{A^5} - \frac{B^5}{A^6} \ln \frac{A+B}{B}. \quad (\text{B.20})$$

• Logarithmen:

$$\int_0^1 dx \ln(Ax+B) = -1 + \ln(A+B) + \frac{B}{A} \ln \frac{A+B}{B} \quad (\text{B.21})$$

Wiederum durch iterierte partielle Integration folgt allgemein für $n \in \mathbf{N}^0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^n \ln(Ax+B) &= \frac{1}{n+1} \left[\ln(A+B) - \sum_{j=0}^n \frac{\left(-\frac{B}{A}\right)^{n-j}}{j+1} \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{B}{A}\right)^{n+1} \ln \frac{A+B}{B} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

und speziell

$$\int_0^1 dx x \ln(Ax+B) = -\frac{1}{4} + \frac{B}{2A} + \frac{\ln(A+B)}{2} - \frac{B^2}{2A^2} \ln \frac{A+B}{B}, \quad (\text{B.23})$$

$$\int_0^1 dx x^2 \ln(Ax+B) = -\frac{1}{9} + \frac{B}{6A} - \frac{B^2}{3A^2} + \frac{\ln(A+B)}{3} + \frac{B^3}{3A^3} \ln \frac{A+B}{B}, \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^3 \ln(Ax+B) &= -\frac{1}{16} + \frac{B}{12A} - \frac{B^2}{8A^2} + \frac{B^3}{4A^3} \\ &\quad + \frac{\ln(A+B)}{4} - \frac{B^4}{4A^4} \ln \frac{A+B}{B}, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^4 \ln(Ax+B) &= -\frac{1}{25} + \frac{B}{20A} - \frac{B^2}{15A^2} + \frac{B^3}{10A^3} - \frac{B^4}{5A^4} \\ &\quad + \frac{\ln(A+B)}{5} + \frac{B^5}{5A^5} \ln \frac{A+B}{B}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\int_0^1 dx x^5 \ln(Ax + B) = -\frac{1}{36} + \frac{B}{30A} - \frac{B^2}{24A^2} + \frac{B^3}{18A^3} - \frac{B^4}{12A^4} + \frac{B^5}{6A^5} + \frac{\ln(A+B)}{6} - \frac{B^6}{6A^6} \ln \frac{A+B}{B}. \quad (\text{B.27})$$

- Die folgenden Integrale werden durch Zerlegung des Arguments des Logarithmus in Linearfaktoren auf die soeben berechneten zurückgeführt. In diesem Zusammenhang sei auf folgendes Problem hingewiesen: Die zu verwendende Formel

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B \quad (\text{B.28})$$

setzt $-\pi < \arg A + \arg B \leq \pi$ voraus, wenn „ln“ wie üblich den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Ansonsten läuft man in einen Nebenzweig. Die Gültigkeit dieser Bedingung wurde bei der Herleitung der folgenden Formeln nicht explizit überprüft. Häufig ist es aber möglich, die hergeleiteten Formeln über den Gültigkeitsbereich von (B.28) hinaus analytisch fortzusetzen. Dies scheint hier der Fall zu sein, was durch die numerische Überprüfung mit Mathematica nahegelegt wird.

$$\int_0^1 dx \ln(Ax^2 + Bx + C) = -2 + \ln(A+B+C) + \frac{B}{2A} \ln \frac{A+B+C}{C} + \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \ln \frac{B+2C-\sqrt{B^2-4AC}}{B+2C+\sqrt{B^2-4AC}} \quad (\text{B.29})$$

$$\int_0^1 dx x \ln(Ax^2 + Bx + C) = -\frac{1}{2} + \frac{B}{2A} + \frac{\ln(A+B+C)}{2} + \left(\frac{C}{2A} - \frac{B^2}{4A^2}\right) \ln \frac{A+B+C}{C} + \frac{B}{4A^2} \sqrt{B^2-4AC} \ln \frac{B+2C+\sqrt{B^2-4AC}}{B+2C-\sqrt{B^2-4AC}} \quad (\text{B.30})$$

$$\int_0^1 dx x^2 \ln(Ax^2 + Bx + C) = -\frac{2}{9} + \frac{B+4C}{6A} - \frac{B^2}{3A^2} + \frac{\ln(A+B+C)}{3} + \left(\frac{B^3}{6A^3} - \frac{BC}{2A^2}\right) \ln \frac{A+B+C}{C} + \left(\frac{B^2}{6A^3} - \frac{C}{6A^2}\right) \sqrt{B^2-4AC} \ln \frac{B+2C-\sqrt{B^2-4AC}}{B+2C+\sqrt{B^2-4AC}} \quad (\text{B.31})$$

$$\int_0^1 dx x^3 \ln(Ax^2 + Bx + C) = -\frac{1}{8} + \frac{B+3C}{12A} - \frac{B^2+6BC}{8A^2} + \frac{B^3}{4A^3} + \frac{\ln(A+B+C)}{4} - \left(\frac{B^4}{8A^4} - \frac{B^2C}{2A^3} + \frac{C^2}{4A^2}\right) \ln \frac{A+B+C}{C} + \left(\frac{B^3}{8A^4} - \frac{BC}{4A^3}\right) \sqrt{B^2-4AC} \ln \frac{B+2C+\sqrt{B^2-4AC}}{B+2C-\sqrt{B^2-4AC}} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx x^4 \ln(Ax^2 + Bx + C) &= -\frac{2}{25} + \frac{3B + 8C}{60A} - \frac{2B^2 + 9BC + 12C^2}{30A^2} + \frac{B^3 + 8B^2C}{10A^3} \\
&\quad - \frac{B^4}{5A^4} + \frac{\ln(A + B + C)}{5} \\
&\quad + \left(\frac{B^5}{10A^5} - \frac{B^3C}{2A^4} + \frac{BC^2}{2A^3} \right) \ln \frac{A + B + C}{C} \\
&\quad + \left(\frac{B^4}{10A^5} - \frac{3B^2C}{10A^4} + \frac{C^2}{10A^3} \right) \sqrt{B^2 - 4AC} \\
&\quad \times \ln \frac{B + 2C - \sqrt{B^2 - 4AC}}{B + 2C + \sqrt{B^2 - 4AC}} \tag{B.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx x^5 \ln(Ax^2 + Bx + C) &= -\frac{1}{18} + \frac{2B + 5C}{60A} - \frac{B^2 + 4BC + 4C^2}{24A^2} \\
&\quad + \frac{B^3 + 6B^2C + 15BC^2}{18A^3} - \frac{B^4 + 10B^3C}{12A^4} + \frac{B^5}{6A^5} \\
&\quad + \frac{\ln(A + B + C)}{6} \\
&\quad - \left(\frac{B^6}{12A^6} - \frac{B^4C}{2A^5} + \frac{3B^2C^2}{4A^4} - \frac{C^3}{6A^3} \right) \ln \frac{A + B + C}{C} \\
&\quad + \left(\frac{B^5}{12A^6} - \frac{B^3C}{3A^5} + \frac{BC^2}{4A^4} \right) \sqrt{B^2 - 4AC} \\
&\quad \times \ln \frac{B + 2C + \sqrt{B^2 - 4AC}}{B + 2C - \sqrt{B^2 - 4AC}} \tag{B.34}
\end{aligned}$$

B.3.2 Parameterintegrale mit zwei Integrationsvariablen

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 z_3(1 - z_3) = z_3(1 - z_3) \tag{B.35}$$

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 z_3^2(1 - z_3) = z_3^2(1 - z_3) \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3(1 - z_3)}{az_1(1 - z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1 - z_3)} \\
&= \frac{cz_3^2 - (b + c)z_3}{ab} \ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a - b - c)z_3 + a} \\
&\quad + \frac{z_3 - 1}{b} \ln \frac{cz_3 + a}{-cz_3^2 - (a - b - c)z_3 + a} + \frac{c(z_3^2 - z_3)}{ab} \ln \frac{cz_3 + a}{c} \\
&\quad + \frac{z_3 - 1}{b} \ln(1 - z_3) - \frac{z_3}{a} \ln z_3 \tag{B.37}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^2(1 - z_3)}{az_1(1 - z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1 - z_3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{cz_3^3 - (b+c)z_3^2}{ab} \ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} \\
&+ \frac{z_3^2 - z_3}{b} \ln \frac{cz_3 + a}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \frac{c(z_3^3 - z_3^2)}{ab} \ln \frac{cz_3 + a}{c} \\
&+ \frac{z_3^2 - z_3}{b} \ln(1 - z_3) - \frac{z_3^2}{a} \ln z_3
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^3(1-z_3)}{az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3)} \\
&= \frac{cz_3^4 - (b+c)z_3^3}{ab} \ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} \\
&+ \frac{z_3^3 - z_3^2}{b} \ln \frac{cz_3 + a}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \frac{c(z_3^4 - z_3^3)}{ab} \ln \frac{cz_3 + a}{c} \\
&+ \frac{z_3^3 - z_3^2}{b} \ln(1 - z_3) - \frac{z_3^3}{a} \ln z_3
\end{aligned} \tag{B.39}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^4(1-z_3)}{az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3)} \\
&= \frac{cz_3^5 - (b+c)z_3^4}{ab} \ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} \\
&+ \frac{z_3^4 - z_3^3}{b} \ln \frac{cz_3 + a}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \frac{c(z_3^5 - z_3^4)}{ab} \ln \frac{cz_3 + a}{c} \\
&+ \frac{z_3^4 - z_3^3}{b} \ln(1 - z_3) - \frac{z_3^4}{a} \ln z_3
\end{aligned} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^3(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \\
&= \frac{z_3^2}{ab} \left(\ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \ln \frac{cz_3 + a}{c} \right)
\end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^4(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \\
&= \frac{z_3^3}{ab} \left(\ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \ln \frac{cz_3 + a}{c} \right)
\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^5(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \\
&= \frac{z_3^4}{ab} \left(\ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \ln \frac{cz_3 + a}{c} \right)
\end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \frac{z_3^6 (1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \\
&= \frac{z_3^5}{ab} \left(\ln \frac{-cz_3 + b + c}{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a} + \ln \frac{cz_3 + a}{c} \right)
\end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 z_3(1-z_3) \ln \frac{az_1(1-z_3) + bz_1z_3 + cz_3(1-z_3)}{\mu^2} \\
&= \frac{3z_3^2}{2} - \frac{3z_3}{2} - (z_3^2 - z_3) \ln \frac{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a}{\mu^2} \\
& \quad + \frac{c^2z_3^4 - 2(b+c)cz_3^3 + (b+c)^2z_3^2}{2ab} \ln \frac{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a}{-cz_3 + b + c} \\
& \quad + \frac{2cz_3^3 + (a-4c)z_3^2 - 2(a-c)z_3 + a}{2b} \ln \frac{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a}{cz_3 + a} \\
& \quad + \frac{c^2(z_3^4 - 2z_3^3 + z_3^2)}{2ab} \ln \frac{c}{cz_3 + a} + \frac{2cz_3^3 - (b+2c)z_3^2}{2a} \ln z_3 \\
& \quad - \frac{2cz_3^3 + (a-4c)z_3^2 - 2(a-c)z_3 + a}{2b} \ln(1-z_3)
\end{aligned} \tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 z_3^2(1-z_3) \ln \frac{az_1(1-z_3) + bz_1z_3 + cz_3(1-z_3)}{\mu^2} \\
&= \frac{3z_3^3}{2} - \frac{3z_3^2}{2} - (z_3^3 - z_3^2) \ln \frac{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a}{\mu^2} \\
& \quad + \frac{c^2z_3^5 - 2(b+c)cz_3^4 + (b+c)^2z_3^3}{2ab} \ln \frac{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a}{-cz_3 + b + c} \\
& \quad + \frac{2cz_3^4 + (a-4c)z_3^3 - 2(a-c)z_3^2 + az_3}{2b} \ln \frac{-cz_3^2 - (a-b-c)z_3 + a}{cz_3 + a} \\
& \quad + \frac{c^2(z_3^5 - 2z_3^4 + z_3^3)}{2ab} \ln \frac{c}{cz_3 + a} + \frac{2cz_3^4 - (b+2c)z_3^3}{2a} \ln z_3 \\
& \quad - \frac{2cz_3^4 + (a-4c)z_3^3 - 2(a-c)z_3^2 + az_3}{2b} \ln(1-z_3)
\end{aligned} \tag{B.46}$$

B.3.3 Parameterintegrale mit drei Integrationsvariablen

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 z_3(1-z_3) = \frac{1}{6} \tag{B.47}$$

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 z_3^2(1-z_3) = \frac{1}{12} \tag{B.48}$$

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3(1-z_3)}{az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3)} \tag{B.49}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3c} + \frac{1}{2b} \ln \frac{b}{a+c} + \frac{(b+c)^3}{6abc^2} \ln \frac{b}{b+c} + \frac{c}{6ab} \ln \frac{c}{a+c} \\
&\quad + \left(\frac{a^2}{6bc^2} + \frac{a}{2bc} \right) \ln \frac{a}{a+c} + \left(\frac{(a-b-c)^3}{12abc^2} + \frac{a-b-c}{2bc} \right) \ln \frac{b}{a} \\
&\quad + \left(\frac{(a-b-c)^2}{12abc^2} + \frac{1}{3bc} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \ln \frac{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}} \\
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^2(1-z_3)}{az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3)} \tag{B.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6c} - \frac{a-b}{4c^2} + \frac{1}{6b} \ln \frac{b}{a+c} + \frac{c}{12ab} \ln \frac{c}{a+c} + \frac{(b+c)^4}{12abc^3} \ln \frac{b}{b+c} \\
&\quad + \left(\frac{a^3}{12bc^3} + \frac{a^2}{6bc^2} \right) \ln \frac{a+c}{a} + \left(\frac{(a-b-c)^4}{24abc^3} + \frac{(a-b-c)^2}{4bc^2} + \frac{a}{4bc} \right) \ln \frac{a}{b} \\
&\quad + \left(\frac{(a-b-c)^3}{24abc^3} + \frac{a-b-c}{6bc^2} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \ln \frac{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^3(1-z_3)}{az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3)} \tag{B.51} \\
&= \frac{1}{10c} - \frac{13a-47b}{120c^2} + \frac{2a^2-3ab+2b^2}{10c^3} + \left(\frac{a^4}{20bc^4} + \frac{a^3}{12bc^3} \right) \ln \frac{a}{a+c} + \frac{1}{12b} \ln \frac{b}{a+c} \\
&\quad + \frac{c}{20ab} \ln \frac{c}{a+c} + \frac{(b+c)^5}{20abc^4} \ln \frac{b}{b+c} + \left(\frac{(a-b-c)^5}{40abc^4} + \frac{(a-b-c)^3}{6bc^3} + \frac{a(a-b-c)}{4bc^2} \right) \ln \frac{b}{a} \\
&\quad + \left(\frac{(a-b-c)^4}{40abc^4} + \frac{7(a-b-c)^2}{60bc^3} + \frac{a}{15bc^2} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \\
&\quad \times \ln \frac{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^4(1-z_3)}{az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3)} \tag{B.52} \\
&= \frac{1}{15c} - \frac{8a-59b}{120c^2} + \frac{5a^2-27ab+31b^2}{60c^3} - \frac{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}{6c^4} \\
&\quad + \left(\frac{a^5}{30bc^5} + \frac{a^4}{20bc^4} \right) \ln \frac{a+c}{a} + \frac{1}{20b} \ln \frac{b}{a+c} + \frac{c}{30ab} \ln \frac{c}{a+c} + \frac{(b+c)^6}{30abc^5} \ln \frac{b}{b+c} \\
&\quad + \left(\frac{(a-b-c)^6}{60abc^5} + \frac{(a-b-c)^4}{8bc^4} + \frac{a(a-b-c)^2}{4bc^3} + \frac{a^2}{12bc^2} \right) \ln \frac{a}{b} \\
&\quad + \left(\frac{(a-b-c)^5}{60abc^5} + \frac{11(a-b-c)^3}{120bc^4} + \frac{a(a-b-c)}{10bc^3} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \\
&\quad \times \ln \frac{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^3(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \quad (\text{B.53}) \\
&= -\frac{2}{3c^2} + \frac{a^2}{3bc^3} \ln \frac{a+c}{a} + \frac{1}{3ab} \ln \frac{a+c}{c} + \frac{(b+c)^3}{3abc^3} \ln \frac{b+c}{b} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^3}{6abc^3} + \frac{a-b-c}{2bc^2} \right) \ln \frac{a}{b} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^2}{6abc^3} + \frac{1}{6bc^2} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \ln \frac{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^4(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \quad (\text{B.54}) \\
&= -\frac{1}{c^2} + \frac{3(a-b)}{4c^3} + \frac{a^3}{4bc^4} \ln \frac{a}{a+c} + \frac{1}{4ab} \ln \frac{a+c}{c} + \frac{(b+c)^4}{4abc^4} \ln \frac{b+c}{b} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^4}{8abc^4} + \frac{(a-b-c)^2}{2bc^3} + \frac{a}{4bc^2} \right) \ln \frac{b}{a} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^3}{8abc^4} + \frac{a-b-c}{4bc^3} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \ln \frac{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^5(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \quad (\text{B.55}) \\
&= -\frac{37}{30c^2} + \frac{11a-19b}{10c^3} - \frac{4a^2-6ab+4b^2}{5c^4} + \frac{a^4}{5bc^5} \ln \frac{a+c}{a} + \frac{1}{5ab} \ln \frac{a+c}{c} \\
&+ \frac{(b+c)^5}{5abc^5} \ln \frac{b+c}{b} + \left(\frac{(a-b-c)^5}{10abc^5} + \frac{(a-b-c)^3}{2bc^4} + \frac{a(a-b-c)}{2bc^3} \right) \ln \frac{a}{b} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^4}{10abc^5} + \frac{3(a-b-c)^2}{10bc^4} + \frac{a}{10bc^3} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \\
&\times \ln \frac{a+b+c - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 \frac{z_3^6(1-z_3)}{(az_1(1-z_3) + bz_2z_3 + cz_3(1-z_3))^2} \quad (\text{B.56}) \\
&= -\frac{17}{12c^2} + \frac{4a-10b}{3c^3} - \frac{7a^2-18ab+17b^2}{6c^4} + \frac{5a^3-10a^2b+10ab^2-5b^3}{6c^5} \\
&+ \frac{a^5}{6bc^6} \ln \frac{a}{a+c} + \frac{1}{6ab} \ln \frac{a+c}{c} + \frac{(b+c)^6}{6abc^6} \ln \frac{b+c}{b} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^6}{12abc^6} + \frac{(a-b-c)^4}{2bc^5} + \frac{3a(a-b-c)^2}{4bc^4} + \frac{a^2}{6bc^3} \right) \ln \frac{b}{a} \\
&+ \left(\frac{(a-b-c)^5}{12abc^6} + \frac{(a-b-c)^3}{3bc^5} + \frac{a(a-b-c)}{4bc^4} \right) \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \frac{a+b+c+\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}{a+b+c-\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}} \\
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 z_3(1-z_3) \ln \frac{az_1(1-z_3)+bz_2z_3+cz_3(1-z_3)}{\mu^2} \quad (\text{B.57}) \\
& = -\frac{37}{90} + \frac{3(a+b)}{40c} + \frac{2a^2-3ab+2b^2}{30c^2} + \frac{1}{6} \ln \frac{b}{\mu^2} \\
& + \left(\frac{a^4}{60bc^3} + \frac{a^3}{12bc^2} + \frac{a^2}{6bc} \right) \ln \frac{a}{a+c} + \frac{2a+c}{12b} \ln \frac{b}{a+c} + \frac{c^2}{60ab} \ln \frac{c}{a+c} \\
& + \frac{(b+c)^5}{60abc^3} \ln \frac{b}{b+c} + \left(\frac{(a-b-c)^5}{120abc^3} + \frac{(a-b-c)^3}{12bc^2} + \frac{a(a-b-c)}{4bc} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-c)^4}{120abc^3} + \frac{(a-b-c)^2}{15bc^2} + \frac{2a}{15bc} \right) \sqrt{(a-b-c)^2+4ac} \\
& \times \ln \frac{a+b+c+\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}{a+b+c-\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 z_3^2(1-z_3) \ln \frac{az_1(1-z_3)+bz_2z_3+cz_3(1-z_3)}{\mu^2} \quad (\text{B.58}) \\
& = -\frac{37}{180} + \frac{a+2b}{40c} - \frac{5a^2+6ab-13b^2}{120c^2} - \frac{a^3-2a^2b+2ab^2-b^3}{24c^3} + \frac{1}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} \\
& + \left(\frac{a^5}{120bc^4} + \frac{a^4}{30bc^3} + \frac{a^3}{24bc^2} \right) \ln \frac{a+c}{a} + \frac{5a+4c}{120b} \ln \frac{b}{a+c} + \frac{c^2}{120ab} \ln \frac{c}{a+c} \\
& + \frac{(b+c)^6}{120abc^4} \ln \frac{b}{b+c} + \left(\frac{(a-b-c)^6}{240abc^4} + \frac{(a-b-c)^4}{24bc^3} + \frac{a(a-b-c)^2}{8bc^2} + \frac{a^2}{12bc} \right) \ln \frac{a}{b} \\
& + \left(\frac{(a-b-c)^5}{240abc^4} + \frac{(a-b-c)^3}{30bc^3} + \frac{a(a-b-c)}{15bc^2} \right) \sqrt{(a-b-c)^2+4ac} \\
& \times \ln \frac{a+b+c-\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}{a+b+c+\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}}
\end{aligned}$$

Anhang C

Besselfunktionen

C.1 Formelsammlung

Die benötigten Rechenregeln¹ für Besselfunktionen und modifizierte Besselfunktionen sind in diesem Abschnitt zusammengestellt. Soweit nicht anders angegeben, ist $z, \nu \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^0$.

C.1.1 Reihendarstellungen

- Besselfunktionen erster Art:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad (\text{C.1})$$

- Besselfunktionen zweiter Art (Neumannfunktionen):

$$\begin{aligned} N_n(z) &= -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right) J_n(z) \\ &\quad - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1)] \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

mit

$$\Psi(1) = -\gamma_E, \quad \Psi(n) = -\gamma_E + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{für } n \geq 2 \quad (\text{C.3})$$

Für $n = 0$ entfällt die erste Summe in (C.2).

C.1.2 Asymptotisches Verhalten

- Besselfunktionen dritter Art (Hankelfunktionen):

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P(\nu, z) + iQ(\nu, z)] e^{i[z - (\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})\pi]} \quad \text{für } -\pi < \arg z < 2\pi \quad (\text{C.4})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P(\nu, z) - iQ(\nu, z)] e^{-i[z - (\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4})\pi]} \quad \text{für } -2\pi < \arg z < \pi \quad (\text{C.5})$$

¹Die Formeln in diesem Abschnitt sind [AS 65] und [MOS 66] entnommen.

mit

$$P(\nu, z) \stackrel{|z| \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{128z^2} + O(1/z^4) \quad (\text{C.6})$$

$$Q(\nu, z) \stackrel{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + O(1/z^3) \quad (\text{C.7})$$

- Modifizierte Besselfunktionen:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + O(1/z^2) \right] \quad \text{für } |\arg z| < \frac{3}{2}\pi \quad (\text{C.8})$$

C.1.3 Beziehungen zwischen Besselfunktionen

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) \quad (\text{C.9})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z) \quad (\text{C.10})$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right) \quad (\text{C.11})$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2i} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) \quad (\text{C.12})$$

C.1.4 Ableitungsregeln

- Hankelfunktionen:

$$\frac{d}{dz} H_\nu^{(k)}(z) = H_{\nu-1}^{(k)}(z) - \frac{\nu}{z} H_\nu^{(k)}(z) \quad \text{mit } k \in \{1, 2\} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{d}{dz} H_\nu^{(k)}(z) = -H_{\nu+1}^{(k)}(z) + \frac{\nu}{z} H_\nu^{(k)}(z) \quad \text{mit } k \in \{1, 2\} \quad (\text{C.14})$$

- Modifizierte Besselfunktionen:

$$\frac{d}{dz} K_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} K_\nu(z) \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{d}{dz} K_\nu(z) = -K_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} K_\nu(z) \quad (\text{C.16})$$

C.1.5 Integraldarstellungen

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 dt (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) \quad \text{für } \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \quad (\text{C.17})$$

Die folgenden Integraldarstellungen der modifizierten Besselfunktion K_ν findet man in [MOS 66] S. 85 bzw. S. 105:

$$K_\nu(2\sqrt{az}) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z}\right)^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty dt t^{-(\nu+1)} \exp\left(-zt - \frac{a}{t}\right) \quad \text{für } \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} a > 0 \quad (\text{C.18})$$

$$K_{\nu-\mu}(az) = \left(\frac{2}{a}\right)^\mu z^{\mu-\nu} \Gamma(1+\mu) \int_0^\infty dt t^{\nu+1} (t^2+z^2)^{-(\mu+1)} J_\nu(at) \quad \text{für } \operatorname{Re} z > 0, \quad (\text{C.19})$$

$$-1 < \operatorname{Re} \nu < 2 \operatorname{Re} \mu + \frac{3}{2}$$

C.2 Verhalten einiger Besselfunktionen für kleine Argumente

Gesucht sind Näherungsformeln für die Hankelfunktionen $H_0^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ sowie für die modifizierten Besselfunktionen K_0 und K_1 für kleine Argumente. Diese erhält man leicht aus den Reihendarstellungen (C.1) von J_n und (C.2) von N_n ,

$$J_0(z) = 1 + O(z^2), \quad (C.20)$$

$$J_1(z) = \frac{z}{2} + O(z^3), \quad (C.21)$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} + \frac{2\gamma_E}{\pi} - \frac{z^2}{2\pi} \ln z + O(z^2, z^4 \ln z), \quad (C.22)$$

$$N_1(z) = -\frac{2}{\pi z} + \frac{z}{\pi} \ln \frac{z}{2} + \frac{\gamma_E - \frac{1}{2}}{\pi} z - \frac{z^3}{8\pi} \ln z + O(z^3, z^5 \ln z). \quad (C.23)$$

Die Reihendarstellungen werden in die Definition (C.10) der Hankelfunktionen eingesetzt und führen auf

$$H_0^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi i} \ln \frac{z}{2} + 1 - \frac{2\gamma_E i}{\pi} + \frac{iz^2}{2\pi} \ln z + O(z^2, z^4 \ln z), \quad (C.24)$$

$$H_1^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi z} - \frac{iz}{\pi} \ln \frac{z}{2} + \frac{z}{2} - i \frac{\gamma_E - \frac{1}{2}}{\pi} z + \frac{iz^3}{8\pi} \ln z + O(z^3, z^5 \ln z). \quad (C.25)$$

Einsetzen in die aus (C.11) und (C.9) folgende Beziehung

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(iz) + iN_n(iz)] \quad (C.26)$$

ergibt

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} - \gamma_E - \frac{z^2}{4} \ln z + O(z^2, z^4 \ln z), \quad (C.27)$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \ln \frac{z}{2} + \left(\gamma_E - \frac{1}{2}\right) \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} \ln z + O(z^3, z^5 \ln z). \quad (C.28)$$

C.3 Ableitungen von $K_1(m|x|)/|x|$

Im Hauptteil der Arbeit werden bis zu sechsfache partielle Ableitungen von $K_1(m|x|)/|x|$ nach verschiedenen Komponenten des euklidischen Vierervektors x^μ benötigt, die wir hier zusammenstellen wollen. Man erhält sie durch wiederholte Anwendung der Ableitungsregeln (C.15) und (C.16) in der Form

$$\partial^\mu K_0(m|x|) = -\frac{mx^\mu}{|x|} K_1(m|x|), \quad (C.29)$$

$$\partial^\mu K_1(m|x|) = -\frac{mx^\mu}{|x|} K_0(m|x|) - \frac{x^\mu}{|x|^2} K_1(m|x|). \quad (C.30)$$

Da Ableitung von K_0 auf K_1 , Ableitung von K_1 auf K_0 und K_1 führt, ist das Auftreten höherer K_ν vermeidbar.

1.

$$\partial^{\mu_1} \frac{1}{|x|} K_1(m|x|) = -\frac{x^{\mu_1}}{|x|^2} \left(mK_0(m|x|) + \frac{2}{|x|} K_1(m|x|) \right) \quad (C.31)$$

2.

$$\begin{aligned} \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} \frac{1}{|x|} K_1(m|x|) &= \frac{m}{|x|^2} \left(\frac{4x^{\mu_1} x^{\mu_2}}{|x|^2} - \delta^{\mu_1 \mu_2} \right) K_0(m|x|) \\ &\quad + \frac{1}{|x|^3} \left(\frac{8x^{\mu_1} x^{\mu_2}}{|x|^2} + m^2 x^{\mu_1} x^{\mu_2} - 2\delta^{\mu_1 \mu_2} \right) K_1(m|x|) \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2} \partial^{\mu_3} \frac{1}{|x|} K_1(m|x|) &= \frac{m}{|x|^4} \left[4(\delta^{\mu_2 \mu_3} x^{\mu_1} + \delta^{\mu_1 \mu_3} x^{\mu_2} + \delta^{\mu_1 \mu_2} x^{\mu_3}) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{24}{|x|^2} + m^2 \right) x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} \right] K_0(m|x|) \\ &\quad + \frac{1}{|x|^3} \left[\left(\frac{8}{|x|^2} + m^2 \right) (\delta^{\mu_2 \mu_3} x^{\mu_1} + \delta^{\mu_1 \mu_3} x^{\mu_2} + \delta^{\mu_1 \mu_2} x^{\mu_3}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{|x|^2} \left(\frac{6}{|x|^2} + m^2 \right) x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} \right] K_1(m|x|) \quad (\text{C.33}) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \partial^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_4} \frac{1}{|x|} K_1(m|x|) &= \frac{4m}{|x|^4} \left[\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{6}{|x|^2} + \frac{m^2}{4} \right) (\delta^{\mu_3 \mu_4} x^{\mu_1} x^{\mu_2} + \delta^{\mu_2 \mu_4} x^{\mu_1} x^{\mu_3} + \delta^{\mu_2 \mu_3} x^{\mu_1} x^{\mu_4} \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\mu_1 \mu_4} x^{\mu_2} x^{\mu_3} + \delta^{\mu_1 \mu_3} x^{\mu_2} x^{\mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4}) \right] \\ &\quad + 3 \left(\frac{16}{|x|^4} + \frac{m^2}{|x|^2} \right) x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4} K_0(m|x|) \\ &\quad + \frac{1}{|x|^3} \left[\left(\frac{8}{|x|^2} + m^2 \right) (\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3}) \right. \\ &\quad \left. - 8 \left(\frac{6}{|x|^4} + \frac{m^2}{|x|^2} \right) (\delta^{\mu_3 \mu_4} x^{\mu_1} x^{\mu_2} + \delta^{\mu_2 \mu_4} x^{\mu_1} x^{\mu_3} + \delta^{\mu_2 \mu_3} x^{\mu_1} x^{\mu_4} \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\mu_1 \mu_4} x^{\mu_2} x^{\mu_3} + \delta^{\mu_1 \mu_3} x^{\mu_2} x^{\mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{|x|^2} \left(\frac{384}{|x|^4} + \frac{72m^2}{|x|^2} + m^4 \right) x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4} K_1(m|x|) \quad (\text{C.34}) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \partial^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_5} \frac{1}{|x|} K_1(m|x|) &= \left[- \left(\frac{24m}{|x|^6} + \frac{m^3}{|x|^4} \right) (\delta^{\mu_2 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_5} x^{\mu_1} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_5)) \right. \\ &\quad + \left(\frac{192m}{|x|^8} + \frac{12m^3}{|x|^6} \right) (\delta^{\mu_4 \mu_5} x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_5)) \\ &\quad \left. - \left(\frac{1920m}{|x|^{10}} + \frac{144m^2}{|x|^8} + \frac{m^4}{|x|^6} \right) x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4} x^{\mu_5} \right] K_0(m|x|) \\ &\quad + \left[- \left(\frac{48}{|x|^7} + \frac{8m^2}{|x|^5} \right) (\delta^{\mu_2 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_5} x^{\mu_1} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_5)) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{384}{|x|^9} + \frac{72m^2}{|x|^7} + \frac{m^4}{|x|^5} \right) \\
& \times (\delta^{\mu_4\mu_5} x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_5)) \quad (\text{C.35}) \\
& - \left(\frac{3840}{|x|^{11}} + \frac{768m^2}{|x|^9} + \frac{18m^4}{|x|^7} \right) x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4} x^{\mu_5} \Big] K_1(m|x|)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\partial^{\mu_1} \dots \partial^{\mu_6} \frac{1}{|x|} K_1(m|x|) & = \left[- \left(\frac{24m}{|x|^6} + \frac{m^3}{|x|^4} \right) (\delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4} \delta^{\mu_5\mu_6} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_6)) \right. \\
& + 12 \left(\frac{16m}{|x|^8} + \frac{m^3}{|x|^6} \right) (\delta^{\mu_3\mu_4} \delta^{\mu_5\mu_6} x^{\mu_1} x^{\mu_2} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_6)) \\
& - \left(\frac{1920m}{|x|^{10}} + \frac{144m^3}{|x|^8} + \frac{m^5}{|x|^6} \right) \\
& \times (\delta^{\mu_5\mu_6} x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_6)) \\
& + 24 \left(\frac{960m}{|x|^{12}} + \frac{80m^3}{|x|^{10}} + \frac{m^5}{|x|^8} \right) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_6} \Big] K_0(m|x|) \\
& \left[- 8 \left(\frac{6}{|x|^7} + \frac{m^2}{|x|^5} \right) (\delta^{\mu_1\mu_2} \delta^{\mu_3\mu_4} \delta^{\mu_5\mu_6} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_6)) \right. \\
& + \left(\frac{384}{|x|^9} + \frac{72m^2}{|x|^7} + \frac{m^4}{|x|^5} \right) \\
& \times (\delta^{\mu_3\mu_4} \delta^{\mu_5\mu_6} x^{\mu_1} x^{\mu_2} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_6)) \\
& - 6 \left(\frac{640}{|x|^{11}} + \frac{128m^2}{|x|^9} + \frac{3m^4}{|x|^7} \right) \\
& \times (\delta^{\mu_5\mu_6} x^{\mu_1} x^{\mu_2} x^{\mu_3} x^{\mu_4} + \text{Perm.}(\mu_1, \dots, \mu_6)) \quad (\text{C.36}) \\
& \left. + \left(\frac{46080}{|x|^{13}} + \frac{9600m^2}{|x|^{11}} + \frac{288m^4}{|x|^9} + \frac{m^6}{|x|^7} \right) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_6} \Big] K_1(m|x|)
\end{aligned}$$

Mit „Perm. $(\mu_1 \dots \mu_n)$ “ sind alle Terme gemeint, die sich aus dem vorangehenden Summanden durch Permutation der Indices μ_1 bis μ_n ergeben.

Anhang D

Hilfsrechnungen

D.1 Skalarer Propagator in Ortsraumdarstellung

D.1.1 Euklidische Fassung

Der Propagator eines freien Skalarfeldes der Masse m im euklidischen Impulsraum ist bekanntlich

$$\tilde{D}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (\text{D.1})$$

Gesucht ist ein Ausdruck für diesen Propagator im D -dimensionalen Ortsraum,

$$D(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{D}(k) e^{ik \cdot x}, \quad (\text{D.2})$$

der gemäß [STI 01] folgendermaßen ermittelt werden kann: Zunächst wird der Nenner $k^2 + m^2$ mittels Schwinger-Parametrisierung exponenziert,

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \stackrel{m^2 \geq 0}{=} \int_0^\infty ds e^{-s(k^2 + m^2)}, \quad (\text{D.3})$$

was auf

$$D(x) = \int_0^\infty ds e^{-sm^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \exp\left(-\frac{1}{2}k^\mu A^{\mu\nu} k^\nu + k^\mu i x^\mu\right) \quad (\text{D.4})$$

mit der hermiteschen Matrix

$$A^{\mu\nu} := 2s\delta^{\mu\nu} \quad (\text{D.5})$$

führt. Die Berechnung des D -dimensionalen Gauß'schen Integrals in (D.4),

$$\int d^D k \exp\left(-\frac{1}{2}k^\mu A^{\mu\nu} k^\nu + k^\mu i x^\mu\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^D}{\det A}} \exp\left[\frac{1}{2}i x^\mu (A^{-1})^{\mu\nu} i x^\nu\right], \quad (\text{D.6})$$

ergibt mit

$$(A^{-1})^{\mu\nu} = \frac{\delta^{\mu\nu}}{2s}, \quad \det A = (2s)^D \quad (\text{D.7})$$

den Propagator

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty ds \frac{e^{-sm^2}}{s^{\frac{D}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \\
&\stackrel{t:=sm^2}{=} \frac{m^{D-2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{D}{2}} \exp\left(-t - \frac{m^2 x^2}{4t}\right). \tag{D.8}
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist Bestandteil einer Integraldarstellung (C.18) der modifizierten Besselfunktion $K_{\frac{D}{2}-1}$ mit $z = 1$, $a = \frac{m^2 x^2}{4}$,

$$K_{\frac{D}{2}-1}(m|x|) = \frac{1}{2} \left(\frac{m|x|}{2}\right)^{\frac{D}{2}-1} \int_0^\infty dt t^{-\frac{D}{2}} \exp\left(-t - \frac{m^2 x^2}{4t}\right). \tag{D.9}$$

Der gesuchte Propagator lautet somit

$$D(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2} = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \left(\frac{m}{|x|}\right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(m|x|). \tag{D.10}$$

Die Rechnung gilt zunächst nur für $m^2 > 0$; das Ergebnis kann jedoch zu komplexen m^2 analytisch fortgesetzt werden.

In dieser Arbeit wird nur der Spezialfall $D = 4$ benötigt,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2} = \frac{m}{4\pi^2 |x|} K_1(m|x|). \tag{D.11}$$

D.1.2 Minkowskische Fassung

Der minkowskische Propagator in 4 Dimensionen ergibt sich aus der euklidischen Variante durch die Ersetzung

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2} \rightarrow i \int \frac{d^4 k_M}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(k \cdot x)_M}}{k_M^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{D.12}$$

Bei der Transformation von (D.11) ist neben $x^2 \rightarrow -x_M^2$ zu beachten, dass $x_M^2 = 0$ auch für $x_M \neq 0$ sein kann. Da sich $K_1(z)$ für $z \rightarrow 0$ gemäß (C.28) wie z^{-1} verhält, ist der Propagator für $|x_M| \equiv \sqrt{x_M^2} \approx 0$

$$\frac{m}{4\pi^2 \sqrt{x^2}} K_1(m\sqrt{x^2}) \rightarrow \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{-x_M^2}} K_1(m\sqrt{-x_M^2}) \stackrel{x_M^2 \approx 0}{\approx} \frac{-1}{4\pi^2 x_M^2} \tag{D.13}$$

Für die Singularität bei $x_M^2 = 0$ ist die Umgehungsvorschrift

$$\frac{1}{x_M^2} \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x_M^2 - i\varepsilon} \tag{D.14}$$

zu verwenden, woraus sich mit der Dirac-Identität

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x_M^2 - i\varepsilon} = \text{P} \left(\frac{1}{x_M^2} \right) + i\pi \delta(x_M^2) \tag{D.15}$$

(P : Cauchyscher Hauptwert) für $x_M^2 \approx 0$ ergibt:

$$i \int \frac{d^4 k_M}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(k \cdot x)_M}}{k_M^2 - m^2 + i\varepsilon} \stackrel{x_M^2 \rightarrow 0}{=} P \left(\frac{-1}{4\pi^2 x_M^2} \right) - \frac{i}{4\pi} \delta(x_M^2) \quad (\text{D.16})$$

Der Hauptwert gibt nur Beiträge für $x_M^2 \neq 0$ und kann vernachlässigt werden, weil wir uns an dieser Stelle nur für den Beitrag für $x_M^2 = 0$ interessieren.

Für $x_M^2 > 0$ gilt $\sqrt{x^2} \rightarrow \sqrt{-x_M^2} = i\sqrt{x_M^2}$ und gemäß (C.12)

$$K_1(iz) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(z). \quad (\text{D.17})$$

Für den Propagator erhält man

$$i \int \frac{d^4 k_M}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(k \cdot x)_M}}{k_M^2 - m^2 + i\varepsilon} \stackrel{x_M^2 > 0}{=} \frac{m}{i4\pi^2 \sqrt{x_M^2}} K_1(im\sqrt{x_M^2}) = \frac{im}{8\pi \sqrt{x_M^2}} H_1^{(2)}(m\sqrt{x_M^2}). \quad (\text{D.18})$$

Entsprechend ist für $x_M^2 < 0$ $\sqrt{x^2} \rightarrow \sqrt{-x_M^2}$, und der Propagator ist

$$i \int \frac{d^4 k_M}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(k \cdot x)_M}}{k_M^2 - m^2 + i\varepsilon} \stackrel{x_M^2 < 0}{=} \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{-x_M^2}} K_1(m\sqrt{-x_M^2}). \quad (\text{D.19})$$

Zusammenfassung aller drei Ausdrücke:

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^4 k_M}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(k \cdot x)_M}}{k_M^2 - m^2 + i\varepsilon} &= \frac{1}{4\pi i} \delta(x_M^2) + \Theta(x_M^2) \frac{im}{8\pi \sqrt{x_M^2}} H_1^{(2)}(m\sqrt{x_M^2}) \\ &+ \Theta(-x_M^2) \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{-x_M^2}} K_1(m\sqrt{-x_M^2}) \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

D.2 Spektraldichten

In diesem Anhang erfolgt die Berechnung der in Abschnitt 4.3 benötigten Spektraldichten. Den Ausgangspunkt bildet Integral (4.66),

$$\begin{aligned} &\int_0^1 P_{kjm}(z, p^2) \ln \frac{p^2 [Az + B(1-z) + Cz(1-z)] + Dz + E(1-z)}{\mu^2} \\ &= Q_{kjm}(1, p^2) \ln \frac{Ap^2 + D}{\mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kjm}(s, p^2)}{p^2 + s}, \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

mit der Spektraldichte (4.67),

$$\begin{aligned} \varrho_{kjm}(s, p^2) &= - \int_0^1 dz Q_{kjm}(z, p^2) \left[p^2 [A - B + C(1-2z)] + D - E \right] \\ &\quad \times \delta([Az + B(1-z) + Cz(1-z)]s - Dz - E(1-z)). \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Die Auswertung des z -Integrals gestaltet sich besonders einfach für die Summanden, bei denen z höchstens linear in das Argument des Logarithmus eingeht ($m \geq 5$). Dann ist $C = 0$ und

$$\varrho_{kjm}(s, p^2) = -(A - B + D - E)p^2 \int_0^1 dz Q_{kjm}(z, p^2) \delta[((A - B)s - D + E)z + Bs - E]. \quad (\text{D.23})$$

Sofern das Argument der Delta-Distribution eine Nullstelle bezüglich z besitzt, liegt diese bei

$$z_0(s) = \frac{E - Bs}{(A - B)s - D + E}. \quad (\text{D.24})$$

Offenbar kann $\varrho_{kjm}(s, p^2)$ nur für die s von Null verschieden sein, für die $0 \leq z_0(s) \leq 1$ ist.

Die weitere Auswertung wird separat für alle drei Summanden vorgenommen. Es sei daran erinnert, dass $\sigma_{l_{1,2}}^{[r]} > 0$ angenommen wurde.

- $m = 5$: $A = 1, B = C = 0, D = E = \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2$

$$z_0(s) = \frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{s} \quad (\text{D.25})$$

Es ist $0 \leq z_0(s) \leq 1$ nur für $s \geq \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 > 0$. Dann ist

$$\int_0^1 dz P_{kj5}(z, p^2) \ln \frac{p^2 z + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} = Q_{kj5}(1, p^2) \ln \frac{p^2 + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kj5}(s, p^2)}{p^2 + s} \quad (\text{D.26})$$

mit der Spektraldichte (D.23),

$$\begin{aligned} \varrho_{kj5}(s, p^2) &= -p^2 \int_0^1 dz Q_{kj5}(z, p^2) \delta(s z - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2) \\ &= -\frac{p^2}{s} \int_0^1 dz Q_{kj5}(z, p^2) \delta(z - z_0(s)) \\ &= -\Theta\left(s - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2\right) \frac{p^2}{s} Q_{kj5}\left(\frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{s}, p^2\right) \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

- $m = 6$: $A = C = 0, B = 1, D = E = \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2$

$$z_0(s) = \frac{s - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{s} \quad (\text{D.28})$$

$$0 \leq z_0(s) < 1 \Leftrightarrow s \geq \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 > 0 \quad (\text{D.29})$$

Es folgt

$$\int_0^1 dz P_{kj6}(z, p^2) \ln \frac{p^2(1 - z) + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} = Q_{kj6}(1, p^2) \ln \frac{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kj6}(s, p^2)}{p^2 + s} \quad (\text{D.30})$$

mit der Spektraldichte

$$\begin{aligned}
\varrho_{kj6}(s, p^2) &= p^2 \int_0^1 dz Q_{kj6}(z, p^2) \delta(-sz + s - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2) \\
&= \frac{p^2}{s} \int_0^1 dz Q_{kj6}(z, p^2) \delta(z - z_0(s)) \\
&= \Theta\left(s - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right) \frac{p^2}{s} Q_{kj6}\left(\frac{s - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{s}, p^2\right)
\end{aligned} \tag{D.31}$$

- $m = 7$: $A = B = 1$, $C = D = E = 0$

Das Argument der Delta-Distribution $\delta(s)$ hängt nicht von z ab, folglich gibt es auch keine Nullstelle. Das Ergebnis ist mit dem durch direkte Integration erhaltenen identisch:

$$\int_0^1 dz P_{kj7}(z, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} = Q_{kj7}(1, p^2) \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kj7}(s, p^2)}{p^2 + s} \tag{D.32}$$

mit

$$\varrho_{kj7}(s, p^2) = 0. \tag{D.33}$$

Es bleibt noch der Summand ($m = 4$) mit $A = B = 0$, $C = 1$, $D = \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2$, $E = \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2$, der sich von den soeben betrachteten durch einen in z quadratischen Term in Argument der Delta-Distribution unterscheidet. Hier ist zunächst

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz P_{kj4}(z, p^2) \ln \frac{p^2 z(1-z) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2(1-z) + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 z}{\mu^2} \\
&= Q_{kj4}(1, p^2) \ln \frac{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{\mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kj4}(s, p^2)}{p^2 + s}.
\end{aligned} \tag{D.34}$$

Die Spektraldichte ergibt sich aus (D.22) zu

$$\begin{aligned}
\varrho_{kj4}(s, p^2) &= - \int_0^1 dz Q_{kj4}(z, p^2) \left(p^2(1-2z) - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \\
&\quad \times \delta\left(z(1-z)s - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2(1-z) - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 z\right) \\
&= \int_0^1 dz Q_{kj4}(z, p^2) \left(p^2(2z-1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \\
&\quad \times \delta\left(-sz^2 + \left(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right) z - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2\right).
\end{aligned} \tag{D.35}$$

Auch in diesem Fall verschwindet die Spektraldichte für $s < 0$, was man wie folgt einsieht: Das Argument der Delta-Distribution in (D.35) ist $-\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 < 0$ für $z = 0$, $-\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 < 0$ für $z = 1$. Dazwischen verläuft es quadratisch in z , und zwar durch den Faktor $-s > 0$ nach *oben* gekrümmt; somit ist das Argument der Delta-Distribution negativ für alle $0 \leq z \leq 1$ im Falle

$s < 0$, und die Spektraldichte verschwindet. Weiter bemerken wir, dass für $s = 0$ die Nullstelle des Arguments der Delta-Distribution bei

$$z_0 = \frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} \notin [0, 1] \quad (\text{D.36})$$

liegt, was ebenfalls $\varrho_{kj4}(0, p^2) = 0$ bewirkt. Wir können uns also auf $s > 0$ beschränken.

$$\begin{aligned} \varrho_{kj4}(s, p^2) &= \int_0^1 dz Q_{kj4}(z, p^2) \frac{p^2(2z-1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{s} \\ &\quad \times \delta \left(z^2 - \underbrace{\frac{s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{s} z + \frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{s}}_{=: f(z)} \right) \\ &= \int_0^1 dz Q_{kj4}(z, p^2) \frac{p^2(2z-1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2}{s} \delta((z-z_+)(z-z_-)), \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

wobei die Nullstellen von $f(z)$ durch

$$z_{\pm}(s) = \frac{s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \pm \sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s}}{2s} \quad (\text{D.38})$$

gegeben sind. Sie fallen zusammen, wenn der Radikand verschwindet. Das ist der Fall bei $s = s_+$ und $s = s_-$ mit

$$s_{\pm} = \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \pm 2\sqrt{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} = \left(\sqrt{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2} \pm \sqrt{\sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} \right)^2, \quad 0 \leq s_- < s_+. \quad (\text{D.39})$$

Im Fall einfacher Nullstellen $z_+ \neq z_-$, d.h. $s_+ \neq s_-$, führt Anwendung der Identität

$$\delta(f(z)) = \frac{\delta(z-z_+)}{|f'(z_+)|} + \frac{\delta(z-z_-)}{|f'(z_-)|} \quad (\text{D.40})$$

mit den Ableitungen von $f(z)$ nach z an den Stellen z_{\pm} ,

$$f'(z_{\pm}) = \pm \frac{1}{s} \sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s}, \quad (\text{D.41})$$

auf

$$\varrho_{kj4}(s, p^2) = \int_0^1 dz \frac{Q_{kj4}(z, p^2) \left(p^2(2z-1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right)}{\sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s}} (\delta(z-z_+) + \delta(z-z_-)). \quad (\text{D.42})$$

Zur Auswertung dieses Integrals muss herausgearbeitet werden, wann die Nullstellen $z_{\pm}(s)$ im Intervall $[0, 1]$ liegen. Zuerst stellen wir fest, dass $z_{\pm}(s) \neq 0$ und $z_{\pm}(s) \neq 1$ für alle $s > 0$:

$$\begin{aligned} z_{\pm} &= 0 \\ \Leftrightarrow s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 &= \mp \sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s} \\ \Rightarrow (s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 &= (s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s \\ \Leftrightarrow \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

Die Bedingung $z_{\pm}(s) = 0$ ist demnach für kein $s > 0$ erfüllbar.

$$\begin{aligned}
z_{\pm} &= 1 \\
\Leftrightarrow 2s &= s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \pm \sqrt{\left(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s} \\
\Rightarrow \left(s - \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 + \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right)^2 &= \left(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s \\
\Leftrightarrow -2\left(\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right) s &= 2\left(\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2\right) s - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s \\
\Leftrightarrow \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 s &= 0
\end{aligned} \tag{D.44}$$

Auch die Bedingung $z_{\pm}(s) = 1$ wird von keinem $s > 0$ erfüllt.

Nach dieser Vorbemerkung untersuchen wir $z_{\pm}(s)$ separat für die drei Bereiche $s \leq s_-$, $s_- < s < s_+$ und $s \geq s_+$.

- $s_- < s < s_+$:

Wegen (D.38) ist

$$s_- < s < s_+ \Leftrightarrow z_{\pm} \notin \mathbf{R}, \tag{D.45}$$

was

$$\varrho_{kj4}(s, p^2) = 0 \quad \text{für} \quad s_- < s < s_+ \tag{D.46}$$

nach sich zieht.

- $s \leq s_-$:

Zunächst untersuchen wir das Verhalten von z_{\pm} für $s \rightarrow 0$. Wie man leicht (ggf. unter Zuhilfenahme der Regeln von de l'Hospital) sieht, ist

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} z_+ &= \infty, \quad \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 > \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, \\
\lim_{s \rightarrow 0} z_+ &= \frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} < 0, \quad \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 < \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, \\
\lim_{s \rightarrow 0} z_- &= -\infty, \quad \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 < \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2, \\
\lim_{s \rightarrow 0} z_- &= \frac{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2}{\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2} > 1, \quad \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 > \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2.
\end{aligned} \tag{D.47}$$

Den Spezialfall $\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 = \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2$ brauchen wir nicht zu betrachten, weil dann $s_- = 0$ ist. Mit der Stetigkeit und Reellität von $z_{\pm}(s)$ und (D.47) folgt

$$z_{\pm}(s) \notin [0, 1] \Rightarrow \varrho_{kj4}(s, p^2) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < s \leq s_-. \tag{D.48}$$

- $s \geq s_+$:

Im Grenzfall $s \rightarrow \infty$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \infty} z_+(s) &= 1_-, \\
\lim_{s \rightarrow \infty} z_-(s) &= 0_+,
\end{aligned} \tag{D.49}$$

und mit (D.43), (D.44) sowie der Stetigkeit und Reellität von $z_{\pm}(s)$ folgt

$$0 < z_{\pm}(s) < 1 \quad \text{für} \quad s \geq s_+. \tag{D.50}$$

Für $s > s_+$ ergibt sich die Spektraldichte ϱ_{kj4} dann aus (D.42).

Zusammengefasst lautet die Spektraldichte

$$\begin{aligned} \varrho_{kj4}(s, p^2) &= \frac{\Theta(s - s_+)}{\sqrt{(s + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2)^2 - 4\sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 s}} \\ &\times \left[Q_{kj4}(z_+(s), p^2) \left(p^2(2z_+(s) - 1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_{kj4}(z_-(s), p^2) \left(p^2(2z_-(s) - 1) + \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2 - \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

mit z_{\pm} aus (D.38) und s_{\pm} aus (D.39).

Es sei noch angemerkt, dass sich auch die restlichen beiden Integrale in (4.55) (d.h. $m = 2$ und $m = 3$ in (4.61)) als Spektralintegrale schreiben lassen; hier ist es jedoch günstiger, den Feynmanparameter z direkt auszuintegrieren.

- $m = 2$: $A = B = C = E = 0$, $D = \mu^2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz P_{kj2}(z, p^2) \ln z &= \underbrace{Q_{kj2}(z, p^2) \ln z}_{=0} \Big|_{z=0}^{z=1} - \int_0^1 dz \frac{Q_{kj2}(z, p^2)}{z} \\ &= -p^2 \int_0^1 dz \frac{Q_{kj2}(z, p^2)}{z p^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds \delta(s)}_{=1} \\ &= -p^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds \delta(s) \int_0^1 dz \frac{Q_{kj2}(z, p^2)}{z(p^2 + s)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kj2}(s, p^2)}{p^2 + s} \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

mit

$$\varrho_{kj2}(s, p^2) = -p^2 \delta(s) \int_0^1 dz \frac{Q_{kj2}(z, p^2)}{z} \quad (\text{D.53})$$

- $m = 3$: $A = B = C = D = 0$, $E = \mu^2$

Auch $P_{kjm}(1 - z, p^2)$ ist ein Polynom in z und besitzt eine Stammfunktion bezüglich z , die als $\tilde{Q}_{kjm}(z, p^2)$ bezeichnet werden soll. Wir wählen sie so, dass $\tilde{Q}_{kjm}(0, p^2) = 0$ ist.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz P_{kj3}(z, p^2) \ln \underbrace{(1 - z)}_{=:y} &= \int_0^1 dy \underbrace{P_{kj3}(1 - y, p^2)}_{=\frac{d}{dy} \tilde{Q}_{kj3}(y, p^2)} \ln y \\ &= \underbrace{\tilde{Q}_{kj3}(z, p^2) \ln z}_{=0} \Big|_{z=0}^{z=1} - p^2 \int_0^1 dz \frac{\tilde{Q}_{kj3}(z, p^2)}{z p^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds \delta(s)}_{=1} \\ &= -p^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds \delta(s) \int_0^1 dz \frac{\tilde{Q}_{kj3}(z, p^2)}{z(p^2 + s)} \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\varrho_{kj3}(s, p^2)}{p^2 + s} \quad (\text{D.54})$$

mit

$$\varrho_{kj3}(s, p^2) = -p^2 \delta(s) \int_0^1 dz \frac{\tilde{Q}_{kj3}(z, p^2)}{z} \quad (\text{D.55})$$

D.3 Das Fourierintegral

In diesem Abschnitt soll das auf Seite 53 benötigte Fourierintegral

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p^2) e^{ip \cdot (x-y)} \quad (\text{D.56})$$

berechnet werden. Der erste Schritt ist der Übergang zu vierdimensionalen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} p^1 &= |p| \sin \vartheta \sin \varphi \sin \psi, \\ p^2 &= |p| \sin \vartheta \sin \varphi \cos \psi, \\ p^3 &= |p| \sin \vartheta \cos \varphi, \\ p^4 &= |p| \cos \vartheta \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

mit $0 \leq \vartheta, \varphi < \pi$ und $0 \leq \psi < 2\pi$ (siehe [BEL 91]). Das vierdimensionale Volumenelement lautet

$$d^4 p = |p|^3 \sin^2 \vartheta \sin \varphi d|p| d\vartheta d\varphi d\psi. \quad (\text{D.58})$$

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass $p \cdot (x-y) = |p||x-y| \cos \vartheta$ gilt. Da der Integrand weder von φ noch von ψ abhängt, können diese beiden Winkel direkt ausintegriert werden,

$$\int_0^\pi d\varphi \sin \varphi \int_0^{2\pi} d\psi = 4\pi. \quad (\text{D.59})$$

Im ϑ -Integral wird $u := \cos \vartheta$, $d\vartheta = -du / \sin \vartheta$ substituiert,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta e^{i|p||x-y| \cos \vartheta} &= \int_{-1}^1 du \underbrace{\sin(\arccos u)}_{\sqrt{1-u^2}} e^{i|p||x-y|u} \\ &= 2 \int_0^1 du \sqrt{1-u^2} \cos(|p||x-y|u). \end{aligned} \quad (\text{D.60})$$

In diesem letzten Integral erkennt man eine Integraldarstellung (C.17) der Besselfunktion J_1 ,

$$\int_0^1 du \sqrt{1-u^2} \cos(|p||x-y|u) = \frac{\pi}{2|p||x-y|} J_1(|p||x-y|). \quad (\text{D.61})$$

Zusammenfassen aller Integrale ergibt

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p^2) e^{ip \cdot (x-y)} = \frac{1}{4\pi^2|x-y|} \int_0^\infty d|p| p^2 f(p^2) J_1(|p||x-y|). \quad (\text{D.62})$$

Die weitere Vorgehensweise hängt von der Funktion $f(p^2)$ ab.

1. $f(p^2) = \frac{1}{p^2+a}$

Mit der Integraldarstellung (C.19) der modifizierten Besselfunktion K_1 ergibt sich

$$\int_0^\infty d|p| \frac{p^2}{p^2+a} J_1(|p||x-y|) = \sqrt{a} K_1(\sqrt{a}|x-y|). \quad (\text{D.63})$$

2. $f(p^2) = \frac{1}{(p^2+a)(p^2+b)}$

Dieser Fall kann durch die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(p^2+a)(p^2+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{p^2+a} - \frac{1}{p^2+b} \right) \quad (\text{D.64})$$

auf den vorhergehenden zurückgeführt werden.

$$\int_0^\infty d|p| \frac{p^2}{(p^2+a)(p^2+b)} J_1(|p||x-y|) = \frac{1}{b-a} \left(\sqrt{a} K_1(\sqrt{a}|x-y|) - \sqrt{b} K_1(\sqrt{b}|x-y|) \right) \quad (\text{D.65})$$

Im Spezialfall $b \rightarrow a$ geht dieser Ausdruck in den Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d|p| \frac{p^2}{(p^2+a)^2} J_1(|p||x-y|) &= -\frac{d}{dt} \sqrt{t} K_1(\sqrt{t}|x-y|) \Big|_{t=a} \\ &\stackrel{(\text{C.15})}{=} -\frac{1}{2\sqrt{a}} K_1(\sqrt{a}|x-y|) + \frac{|x-y|}{2} \\ &\quad \times \left(K_0(\sqrt{a}|x-y|) + \frac{1}{\sqrt{a}|x-y|} K_1(\sqrt{a}|x-y|) \right) \\ &= \frac{|x-y|}{2} K_0(\sqrt{a}|x-y|) \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

über.

3. $f(p^2) = \frac{1}{p^2(p^2+a)}$

Das ist Fall 2 für $b = 0$. Mit der Darstellung (C.28) für kleine Argumente, $K_1(\sqrt{b}|x-y|) \rightarrow 1/\sqrt{b}|x-y|$, folgt

$$\int_0^\infty d|p| \frac{1}{(p^2+a)} J_1(|p||x-y|) = \frac{1}{a|x-y|} - \frac{1}{\sqrt{a}} K_1(\sqrt{a}|x-y|). \quad (\text{D.67})$$

4. $f(p^2) = \frac{1}{p^2(p^2+a)(p^2+b)}$

Dieselbe Partialbruchzerlegung wie in Fall 2 führt auf

$$\frac{1}{p^2(p^2+a)(p^2+b)} = \frac{1}{(b-a)p^2} \left(\frac{1}{p^2+a} - \frac{1}{p^2+b} \right), \quad (\text{D.68})$$

was wiederum eine Rückführung auf Fall 3 bedeutet.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d|p| \frac{1}{(p^2+a)(p^2+b)} J_1(|p||x-y|) &= \frac{1}{ab|x-y|} + \frac{1}{b-a} \\ &= \times \left(\frac{1}{\sqrt{b}} K_1(\sqrt{b}|x-y|) - \frac{1}{\sqrt{a}} K_1(\sqrt{a}|x-y|) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

Auch dieses Ergebnis lässt sich für $b \rightarrow a$ als Differentialquotient darstellen,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d|p| \frac{1}{(p^2 + a)^2} J_1(|p||x - y|) &= \frac{1}{a^2|x - y|} + \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{t}} K_1(\sqrt{t}|x - y|) \Big|_{t=a} \\
&\stackrel{(C.15)}{=} \frac{1}{a^2|x - y|} - \frac{1}{2\sqrt{a^3}} K_1(\sqrt{a}|x - y|) - \frac{|x - y|}{2a} \\
&\quad \times \left(K_0(\sqrt{a}|x - y|) + \frac{1}{\sqrt{a}|x - y|} K_1(\sqrt{a}|x - y|) \right) \\
&= \frac{1}{a^2|x - y|} - \frac{|x - y|}{2a} K_0(\sqrt{a}|x - y|) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{a^3}} K_1(\sqrt{a}|x - y|). \tag{D.70}
\end{aligned}$$

Für die restlichen beiden Funktionen mit logarithmischen Anteilen,

$$f(p^2) = \frac{1}{p^2 + c} \ln \frac{p^2 + a}{b} \quad \text{und} \quad f(p^2) = \frac{1}{p^2(p^2 + c)} \ln \frac{p^2 + a}{b}, \tag{D.71}$$

sind mir keine Formeln bekannt.

Anhang E

Tabellen

Dieser Anhang beinhaltet eine Auflistung der im Hauptteil der Arbeit verwendeten Koeffizienten $P_{kjm}(z, p^2)$ der konvergenten Anteile der inneren Schleifenintegration, sortiert nach den Residuen $R_{1,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)$. Deren Stammfunktionen $Q_{kjm}(1, p^2)$ bezüglich z sowie die auf Seite 50 definierten Größen $A_{kj}(p^2)$ sind angegeben, sofern sie benötigt werden. Als Abkürzung wird $a = \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2$ und $b = \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2$ verwendet.

E.1 Polynome $P_{kjm}(z, p^2)$

- zu $R_{1,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)$:

$$\begin{aligned}
 P_{111} &= -\frac{3(z^2 - z)}{4} \\
 P_{112} &= -\frac{3p^2}{2a}(z^3 - z^2) + \frac{bz^2}{4a} \\
 P_{113} &= \frac{3p^2}{2b}z(z-1)^2 + \frac{a}{4b}(z-1)^2 \\
 P_{114} &= -\frac{5p^4}{4ab}(z^4 - 2z^3 + z^2) - \frac{3p^2}{2b}(z^3 - 2z^2 + z) + \frac{3p^2}{2a}(z^3 - z^2) \\
 &\quad + \frac{z^2 - z}{2} - \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} - \frac{bz^2}{4a} \\
 P_{115} &= \frac{5p^4}{4ab}(z^4 - 2z^3 + z^2) + \frac{3p^2}{2b}(z^3 - 2z^2 + z) + \frac{a}{4b}(z^2 - 2z + 1) \\
 P_{116} &= \frac{5p^4}{4ab}(z^4 - 2z^3 + z^2) - \frac{3p^2}{2a}(z^3 - z^2) + \frac{bz^2}{4a} \\
 P_{117} &= -\frac{5p^4}{4ab}(z^4 - 2z^3 + z^2)
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}
 P_{121} &= -\frac{7(z^2 - z)}{4} \\
 P_{122} &= -\frac{p^2}{2a}(19z^3 - 13z^2) + \frac{13bz^2}{4a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{123} &= \frac{p^2}{2b} (19z^3 - 32z^2 + 13z) + \frac{13a}{4b} (z^2 - 2z + 1) \\
P_{124} &= -\frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 38z^3 + 13z^2) - \frac{p^2}{2b} (19z^3 - 32z^2 + 13z) + \frac{p^2}{2a} (19z^3 - 13z^2) \\
&\quad + \frac{13(z^2 - z)}{2} - \frac{13a(z^2 - 2z + 1)}{4b} - \frac{13bz^2}{4a} \\
P_{125} &= \frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 38z^3 + 13z^2) + \frac{p^2}{2b} (19z^3 - 32z^2 + 13z) + \frac{13a(z^2 - 2z + 1)}{4b} \\
P_{126} &= \frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 38z^3 + 13z^2) - \frac{p^2}{2a} (19z^3 - 13z^2) + \frac{13bz^2}{4a} \\
P_{127} &= -\frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 38z^3 + 13z^2) \tag{E.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{131} &= -\frac{3(z^2 - z)}{4} \\
P_{132} &= -\frac{3p^2}{2a} (z^3 - z^2) + \frac{bz^2}{4a} \\
P_{133} &= \frac{3p^2}{2b} (z^3 - 2z^2 + z) + \frac{a}{4b} (z^2 - 2z + 1) \\
P_{134} &= -\frac{5p^4}{4ab} (z^4 - 2z^3 + z^2) - \frac{3p^2}{2b} (z^3 - 2z^2 + z) + \frac{3p^2}{2a} (z^3 - z^2) \\
&\quad + \frac{z^2 - z}{2} - \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} - \frac{bz^2}{4a} \\
P_{135} &= \frac{5p^4}{4ab} (z^4 - 2z^3 + z^2) + \frac{3p^2}{2b} (z^3 - 2z^2 + z) + \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} \\
P_{136} &= \frac{5p^4}{4ab} (z^4 - 2z^3 + z^2) - \frac{3p^2}{2a} (z^3 - z^2) + \frac{bz^2}{4a} \\
P_{137} &= -\frac{5p^4}{4ab} (z^4 - 2z^3 + z^2) \tag{E.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{141} &= 0 \\
P_{142} &= \frac{1}{a} (5z^3 - 2z^2) \\
P_{143} &= -\frac{1}{b} (5z^3 - 7z^2 + 2z) \\
P_{144} &= \frac{p^2}{ab} (5z^4 - 7z^3 + 2z^2) - \frac{1}{a} (5z^3 - 2z^2) + \frac{1}{b} (5z^3 - 5z^2 - 2z + 1) \\
P_{145} &= -\frac{p^2}{ab} (5z^4 - 7z^3 + 2z^2) - \frac{1}{b} (5z^3 - 7z^2 + 2z) \\
P_{146} &= -\frac{p^2}{ab} (5z^4 - 7z^3 + 2z^2) + \frac{1}{a} (5z^3 - 2z^2) \\
P_{147} &= \frac{p^2}{ab} (5z^4 - 7z^3 + 2z^2) \tag{E.4}
\end{aligned}$$

- zu $R_{2,l_1 l_2}^{[r]}(p^2)$:

$$\begin{aligned}
P_{211} &= -\frac{26z^3 - 39z^2 + 13z}{2} \\
P_{212} &= \frac{p^2}{2a} (70z^4 - 105z^3 + 41z^2 - 3z) - \frac{b}{a} (10z^3 - 5z^2) \\
P_{213} &= -\frac{p^2}{2b} (70z^4 - 175z^3 + 146z^2 - 44z + 3) - \frac{5a}{b} (2z^3 - 5z^2 + 4z - 1) \\
P_{214} &= \frac{p^4}{2ab} (54z^5 - 135z^4 + 114z^3 - 36z^2 + 3z) \\
&\quad - \frac{p^2}{2a} (70z^4 - 105z^3 + 41z^2 - 3z) + \frac{p^2}{2b} (70z^4 - 175z^3 + 146z^2 - 44z + 3) \\
&\quad - 10 (2z^3 - 3z^2 + z) + \frac{5a}{b} (2z^3 - 5z^2 + 4z - 1) + \frac{5b}{a} (2z^3 - z^2) \\
P_{215} &= -\frac{p^4}{2ab} (54z^5 - 135z^4 + 114z^3 - 36z^2 + 3z) \\
&\quad - \frac{p^2}{2b} (70z^4 - 175z^3 + 146z^2 - 44z + 3) - \frac{5a}{b} (2z^3 - 5z^2 + 4z - 1) \\
P_{216} &= -\frac{p^4}{2ab} (54z^5 - 135z^4 + 114z^3 - 36z^2 + 3z) \\
&\quad + \frac{p^2}{2a} (70z^4 - 105z^3 + 41z^2 - 3z) - \frac{5b}{a} (2z^3 - z^2) \\
P_{217} &= \frac{p^4}{2ab} (54z^5 - 135z^4 + 114z^3 - 36z^2 + 3z) \tag{E.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{221} &= z^3 - z^2 \\
P_{222} &= -\frac{p^2}{2a} (10z^4 - 9z^3 + z^2 - 2z) + \frac{b}{4a} (8z^3 - z^2) \\
P_{223} &= \frac{p^2}{2b} (10z^4 - 21z^3 + 12z^2 - z) + \frac{a}{4b} (8z^3 - 17z^2 + 10z - 1) \\
P_{224} &= -\frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 25z^4 + 14z^3 - z^2) \\
&\quad + \frac{p^2}{2a} (10z^4 - 11z^3 + z^2) - \frac{p^2}{2b} (10z^4 - 21z^3 + 12z^2 - z) \\
&\quad + \frac{8z^3 - 9z^2 + z}{2} - \frac{a}{4b} (8z^3 - 17z^2 + 10z - 1) - \frac{b}{4a} (8z^3 - z^2) \\
P_{225} &= \frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 25z^4 + 14z^3 - z^2) + \frac{p^2}{2b} (10z^4 - 21z^3 + 12z^2 - z) \\
&\quad + \frac{a}{4b} (8z^3 - 17z^2 + 10z - 1) \\
P_{226} &= \frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 25z^4 + 14z^3 - z^2) - \frac{p^2}{2a} (10z^4 - 11z^3 + z^2) \\
&\quad + \frac{b}{4a} (8z^3 - z^2) \\
P_{227} &= -\frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 25z^4 + 14z^3 - z^2) \tag{E.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{231} &= z^3 - 2z^2 + z \\
P_{232} &= -\frac{p^2}{2a} (10z^4 - 19z^3 + 9z^2) + \frac{b}{4a} (8z^3 - 7z^2) \\
P_{233} &= \frac{p^2}{2b} (10z^4 - 29z^3 + 28z^2 - 9z) + \frac{a}{4b} (8z^3 - 23z^2 + 22z - 7) \\
P_{234} &= -\frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 35z^4 + 34z^3 - 11z^2) \\
&\quad + \frac{p^2}{2a} (10z^4 - 19z^3 + 9z^2) - \frac{p^2}{2b} (10z^4 - 29z^3 + 28z^2 - 9z) \\
&\quad + \frac{8z^3 - 15z^2 + 7z}{2} - \frac{a}{4b} (8z^3 - 23z^2 + 22z - 7) - \frac{b}{4a} (8z^3 - 7z^2) \\
P_{235} &= \frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 35z^4 + 34z^3 - 11z^2) + \frac{p^2}{2b} (10z^4 - 29z^3 + 28z^2 - 9z) \\
&\quad + \frac{a}{4b} (8z^3 - 23z^2 + 22z - 7) \\
P_{236} &= \frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 35z^4 + 34z^3 - 11z^2) - \frac{p^2}{2a} (10z^4 - 19z^3 + 9z^2) \\
&\quad + \frac{b}{4a} (8z^3 - 7z^2) \\
P_{237} &= -\frac{p^4}{4ab} (12z^5 - 35z^4 + 34z^3 - 11z^2) \tag{E.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{241} &= 0 \\
P_{242} &= -\frac{1}{2a} (20z^4 - 30z^3 + 16z^2 - 3z) \\
P_{243} &= \frac{1}{2b} (20z^4 - 50z^3 + 46z^2 - 19z + 3) \\
P_{244} &= -\frac{3p^2}{2ab} (8z^5 - 20z^4 + 18z^3 - 7z^2 + z) \\
&\quad + \frac{1}{2a} (20z^4 - 30z^3 + 16z^2 - 3z) - \frac{1}{2b} (20z^4 - 50z^3 + 46z^2 - 19z + 3) \\
P_{245} &= \frac{p^2}{2ab} (24z^5 - 60z^4 + 54z^3 - 21z^2 + 3z) \\
&\quad + \frac{1}{2b} (20z^4 - 50z^3 + 46z^2 - 19z + 3) \\
P_{246} &= \frac{p^2}{2ab} (24z^5 - 60z^4 + 54z^3 - 21z^2 + 3z) - \frac{1}{2a} (20z^4 - 30z^3 + 16z^2 - 3z) \\
P_{247} &= -\frac{p^2}{2ab} (24z^5 - 60z^4 + 54z^3 - 21z^2 + 3z) \tag{E.8}
\end{aligned}$$

• zu $R_{3,l_1l_2}^{[r]}(p^2)$:

$$P_{311} = \frac{3(z^2 - z)}{4}$$

$$\begin{aligned}
P_{312} &= \frac{p^2}{2a} (z^3 - 3z^2) - \frac{bz^2}{4a} \\
P_{313} &= -\frac{p^2}{2b} (z^3 - 4z^2 + 3z) - \frac{a}{4b} (z^2 - 2z + 1) \\
P_{314} &= \frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) - \frac{p^2}{2a} (z^3 - 3z^2) + \frac{p^2}{2b} (z^3 - 4z^2 + 3z) \\
&\quad - \frac{z^2 - z}{2} + \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} + \frac{bz^2}{4a} \\
P_{315} &= -\frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) - \frac{p^2}{2b} (z^3 - 4z^2 + 3z) - \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} \\
P_{316} &= -\frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) + \frac{p^2}{2a} (z^3 - 3z^2) - \frac{bz^2}{4a} \\
P_{317} &= \frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) \tag{E.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{321} &= \frac{3(z^2 - z)}{4} \\
P_{322} &= \frac{p^2}{2a} (z^3 - 3z^2) - \frac{bz^2}{4a} \\
P_{323} &= -\frac{p^2}{2b} (z^3 - 4z^2 + 3z) - \frac{a}{4b} (z^2 - 2z + 1) \\
P_{324} &= \frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) - \frac{p^2}{2a} (z^3 - 3z^2) + \frac{p^2}{2b} (z^3 - 4z^2 + 3z) \\
&\quad - \frac{z^2 - z}{2} + \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} + \frac{bz^2}{4a} \\
P_{325} &= -\frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) - \frac{p^2}{2b} (z^3 - 4z^2 + 3z) - \frac{a(z^2 - 2z + 1)}{4b} \\
P_{326} &= -\frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) + \frac{p^2}{2a} (z^3 - 3z^2) - \frac{bz^2}{4a} \\
P_{327} &= \frac{p^4}{4ab} (z^4 - 6z^3 + 5z^2) \tag{E.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{331} &= \frac{7(z^2 - z)}{4} \\
P_{332} &= \frac{p^2}{2a} (19z^3 - 25z^2 + 6z) - \frac{13bz^2}{4a} \\
P_{333} &= -\frac{p^2}{2b} (19z^3 - 44z^2 + 31z - 6) - \frac{13a}{4b} (z^2 - 2z + 1) \\
P_{334} &= \frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 62z^3 + 49z^2 - 12z) \\
&\quad - \frac{p^2}{2a} (19z^3 - 25z^2 + 6z) + \frac{p^2}{2b} (19z^3 - 44z^2 + 31z - 6) \\
&\quad - \frac{13(z^2 - z)}{2} + \frac{13a(z^2 - 2z + 1)}{4b} + \frac{13bz^2}{4a} \\
P_{335} &= -\frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 62z^3 + 49z^2 - 12z) - \frac{p^2}{2b} (19z^3 - 44z^2 + 31z - 6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{13a(z^2 - 2z + 1)}{4b} \\
P_{336} &= -\frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 62z^3 + 49z^2 - 12z) + \frac{p^2}{2a} (19z^3 - 25z^2 + 6z) - \frac{13bz^2}{4a} \\
P_{337} &= \frac{p^4}{4ab} (25z^4 - 62z^3 + 49z^2 - 12z)
\end{aligned} \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}
P_{341} &= 0 \\
P_{342} &= -\frac{1}{a} (3z^3 - 8z^2 + 3z) \\
P_{343} &= \frac{1}{b} (3z^3 - 11z^2 + 11z - 3) \\
P_{344} &= -\frac{p^2}{ab} (3z^4 - 11z^3 + 11z^2 - 3z) + \frac{1}{a} (3z^3 - 8z^2 + 3z) \\
& \quad -\frac{1}{b} (3z^3 - 11z^2 + 11z - 3) \\
P_{345} &= \frac{p^2}{ab} (3z^4 - 11z^3 + 11z^2 - 3z) + \frac{1}{b} (3z^3 - 11z^2 + 11z - 3) \\
P_{346} &= \frac{p^2}{ab} (3z^4 - 11z^3 + 11z^2 - 3z) - \frac{1}{a} (3z^3 - 8z^2 + 3z) \\
P_{347} &= -\frac{p^2}{ab} (3z^4 - 11z^3 + 11z^2 - 3z)
\end{aligned} \tag{E.12}$$

E.2 Ausintegrierte Koeffizienten

- $A_{kj}(p^2)$:

$$A_{11} = \frac{1}{8} - \frac{7(a+b)p^2}{96ab} - \frac{a^2+b^2}{36ab} - \left(\frac{p^2}{8b} + \frac{a}{12b} + \frac{1}{12} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.13}$$

$$A_{12} = \frac{7}{24} - \frac{(13a+37b)p^2}{288ab} - \frac{13(a^2+b^2)}{36ab} - \left(\frac{7p^2}{24b} + \frac{13a}{12b} + \frac{13}{12} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.14}$$

$$A_{13} = \frac{1}{8} - \frac{7(a+b)p^2}{96ab} - \frac{a^2+b^2}{36ab} - \left(\frac{p^2}{8b} + \frac{a+b}{12b} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.15}$$

$$A_{14} = -\frac{25a+13b}{144ab} - \frac{5}{12b} \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.16}$$

$$A_{21} = \frac{31(a-b)p^2}{1440ab} - \frac{5(a^2-b^2)}{12ab} - \left(\frac{p^2}{24b} + \frac{5a}{6b} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.17}$$

$$A_{22} = -\frac{1}{12} - \frac{(153a+397b)p^2}{1440ab} - \frac{5a^2+7b^2}{72ab} - \left(\frac{p^2}{8b} + \frac{a}{12b} - \frac{1}{4} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.18}$$

$$A_{23} = \frac{1}{12} + \frac{(127a+153b)p^2}{1440ab} + \frac{7a^2+5b^2}{72ab} + \left(\frac{5p^2}{24b} + \frac{5a}{12b} + \frac{1}{4} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.19}$$

$$A_{24} = \frac{121(a-b)}{360ab} - \frac{1}{6b} \ln \frac{b}{\mu^2} \tag{E.20}$$

$$A_{31} = -\frac{1}{8} + \frac{(47a + 39b)p^2}{288ab} + \frac{3a^2 + b^2}{36ab} + \left(\frac{5p^2}{24b} + \frac{a}{12b} + \frac{1}{12} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \quad (\text{E.21})$$

$$A_{32} = -\frac{1}{8} + \frac{(47a + 39b)p^2}{288ab} + \frac{3a^2 + b^2}{36ab} + \left(\frac{5p^2}{24b} + \frac{a}{12b} + \frac{1}{12} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \quad (\text{E.22})$$

$$A_{33} = -\frac{7}{24} + \frac{(37a + 13b)p^2}{288ab} + \frac{13(a^2 + b^2)}{36ab} - \left(\frac{5p^2}{24b} - \frac{13a}{12b} - \frac{13}{12} \right) \ln \frac{b}{\mu^2} \quad (\text{E.23})$$

$$A_{34} = -\frac{13a - 7b}{144ab} + \frac{5}{12b} \ln \frac{b}{\mu^2} \quad (\text{E.24})$$

• $Q_{kj5}(1, p^2)$:

$$Q_{115} = \frac{p^4}{24ab} + \frac{p^2}{8b} + \frac{a}{12b} \quad (\text{E.25})$$

$$Q_{125} = -\frac{p^4}{24ab} + \frac{7p^2}{24b} + \frac{13a}{12b} \quad (\text{E.26})$$

$$Q_{135} = \frac{p^4}{24ab} + \frac{p^2}{8b} + \frac{a}{12b} \quad (\text{E.27})$$

$$Q_{145} = \frac{p^2}{12ab} + \frac{1}{12b} \quad (\text{E.28})$$

$$Q_{215} = \frac{p^2}{24b} + \frac{5a}{6b} \quad (\text{E.29})$$

$$Q_{225} = \frac{p^4}{24ab} + \frac{p^2}{8b} + \frac{a}{12b} \quad (\text{E.30})$$

$$Q_{235} = -\frac{p^4}{24ab} - \frac{5p^2}{24b} - \frac{5a}{12b} \quad (\text{E.31})$$

$$Q_{245} = \frac{1}{6b} \quad (\text{E.32})$$

$$Q_{315} = -\frac{11p^4}{120ab} - \frac{5p^2}{24b} - \frac{a}{12b} \quad (\text{E.33})$$

$$Q_{325} = -\frac{11p^4}{120ab} - \frac{5p^2}{24b} - \frac{a}{12b} \quad (\text{E.34})$$

$$Q_{335} = \frac{p^4}{24ab} + \frac{5p^2}{24b} - \frac{13a}{12b} \quad (\text{E.35})$$

$$Q_{345} = \frac{p^2}{60ab} - \frac{5}{12b} \quad (\text{E.36})$$

• $Q_{kj7}(1, p^2)$:

$$Q_{117} = -\frac{p^4}{24ab} \quad (\text{E.37})$$

$$Q_{127} = \frac{p^4}{24ab} \quad (\text{E.38})$$

$$Q_{137} = -\frac{p^4}{24ab} \quad (\text{E.39})$$

$$Q_{147} = -\frac{p^2}{12ab} \quad (\text{E.40})$$

$$Q_{217} = 0 \quad (\text{E.41})$$

$$Q_{227} = -\frac{p^4}{24ab} \quad (\text{E.42})$$

$$Q_{237} = \frac{p^4}{24ab} \quad (\text{E.43})$$

$$Q_{247} = 0 \quad (\text{E.44})$$

$$Q_{317} = \frac{11p^4}{120ab} \quad (\text{E.45})$$

$$Q_{327} = \frac{11p^4}{120ab} \quad (\text{E.46})$$

$$Q_{337} = -\frac{p^4}{24ab} \quad (\text{E.47})$$

$$Q_{347} = -\frac{p^2}{60ab} \quad (\text{E.48})$$

E.3 Inneres Impulsintegral

Hier findet man das auf Seite 45 erwähnte Ergebnis der Berechnung aller drei zum inneren Impulsintegral gehörenden Parameterintegrale. Für die vorzunehmende p -Integration stellen sie einen schlechten Ausgangspunkt dar. Gegenüber dem Hauptteil der Arbeit ist $z_3 \rightarrow z$ substituiert worden. Wie schon in den ersten beiden Teilen dieses Anhangs werden die Abkürzungen $a = \sigma_{l_1}^{[r]} \Lambda^2$ und $b = \sigma_{l_2}^{[r]} \Lambda^2$ verwendet.

$$\begin{aligned} \mu^{2\varepsilon} Q^{\xi\omega\rho'}(p) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{l_1, l_2=1}^{r+1} \left\{ R_{1, l_1 l_2}^{[r]}(p^2) \left[\frac{\delta^{\xi\omega} p^{\rho'} + 13\delta^{\xi\rho'} p^\omega + \delta^{\omega\rho'} p^\xi}{12} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \right. \right. \\ &\quad + \delta^{\xi\omega} p^{\rho'} \left[\frac{49}{180} - \frac{43(a+b)}{240p^2} - \frac{14a^2 - 21ab + 14b^2}{60p^4} - \frac{1}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} \right. \\ &\quad + \frac{2a - p^2}{24b} \ln \frac{a + p^2}{b} + \left(\frac{7a^4}{120bp^6} + \frac{5a^3}{24bp^4} + \frac{a^2}{4bp^2} \right) \ln \frac{a + p^2}{a} + \frac{p^4}{40ab} \ln \frac{p^2}{a + p^2} \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{7(b + p^2)^5}{120abp^6} - \frac{(b + p^2)^4}{12abp^4} \right) \ln \frac{b + p^2}{b} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{7(a-b-p^2)^5}{240abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^4}{24abp^4} + \frac{5(a-b-p^2)^3}{24bp^4} + \frac{(a-b-p^2)}{4bp^2} \right. \\
& + \left. \frac{3a(a-b-p^2)}{8bp^2} + \frac{a}{4b} \right) \ln \frac{a}{b} \\
& + \left(\frac{7(a-b-p^2)^4}{240abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^4} + \frac{3(a-b-p^2)^2}{20bp^4} + \frac{(a-b-p^2)}{6bp^2} + \frac{2a}{15bp^2} \right) \\
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + \delta^{\xi e'} p^\omega \left[\frac{187}{180} - \frac{13a + 133b}{80p^2} - \frac{62a^2 - 93ab + 62b^2}{60p^4} - \frac{13}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} \right. \\
& + \left(\frac{31a^4}{120bp^6} + \frac{19a^3}{12bp^4} + \frac{13a^2}{12bp^2} \right) \ln \frac{a+p^2}{a} + \left(\frac{13a}{12b} + \frac{19p^2}{24b} \right) \ln \frac{a+p^2}{b} \\
& + \frac{31p^4}{120ab} \ln \frac{a+p^2}{p^2} + \frac{31(b+p^2)^5}{120abp^6} \ln \frac{b+p^2}{b} \\
& + \left(\frac{31(a-b-p^2)^5}{240abp^6} + \frac{25(a-b-p^2)^3}{24bp^4} + \frac{19a(a-b-p^2)}{8bp^2} \right) \ln \frac{a}{b} \\
& + \left(\frac{31(a-b-p^2)^4}{240abp^6} + \frac{47(a-b-p^2)^2}{60bp^4} + \frac{16a}{15bp^2} \right) \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \\
& \times \ln \frac{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + \delta^{\omega e'} p^\xi \left[\frac{49}{180} - \frac{43(a+b)}{240p^2} - \frac{14a^2 - 21ab + 14b^2}{60p^4} - \frac{1}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} \right. \\
& + \left(\frac{7a^4}{120bp^6} + \frac{5a^3}{24bp^4} + \frac{a^2}{4bp^2} \right) \ln \frac{a+p^2}{a} + \frac{2a-p^2}{24b} \ln \frac{a+p^2}{b} + \frac{p^4}{40ab} \ln \frac{p^2}{a+p^2} \\
& + \left(\frac{7(b+p^2)^5}{120abp^6} - \frac{(b+p^2)^4}{12abp^4} \right) \ln \frac{b+p^2}{b} \\
& + \left(\frac{7(a-b-p^2)^5}{240abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^4}{24abp^4} + \frac{5(a-b-p^2)^3}{24bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4bp^2} \right. \\
& + \left. \frac{3a(a-b-p^2)}{8bp^2} + \frac{a}{4b} \right) \ln \frac{a}{b} \\
& + \left(\frac{7(a-b-p^2)^4}{240abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^4} + \frac{3(a-b-p^2)^2}{20bp^4} + \frac{a-b-p^2}{6bp^2} + \frac{2a}{15bp^2} \right) \\
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + p^\xi p^\omega p^{e'} \left[\frac{1}{6p^2} - \frac{a-35b}{24p^4} + \frac{2a^2 - 3ab + 2b^2}{2p^6} + \frac{1}{12b} \ln \frac{b}{a+p^2} + \frac{p^2}{12ab} \ln \frac{p^2}{a+p^2} \right. \\
& + \left(\frac{a^4}{4bp^8} + \frac{7a^3}{12bp^6} + \frac{a^2}{3bp^4} \right) \ln \frac{a}{a+p^2} + \left(\frac{(b+p^2)^5}{4abp^8} - \frac{(b+p^2)^4}{6abp^6} \right) \ln \frac{b}{b+p^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{8abp^8} + \frac{(a-b-p^2)^4}{12abp^6} + \frac{5(a-b-p^2)^3}{6bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^2}{2bp^4} \right. \\
& + \left. \frac{5a(a-b-p^2)}{4bp^4} + \frac{a}{2bp^2} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{8abp^8} + \frac{(a-b-p^2)^3}{12abp^6} + \frac{7(a-b-p^2)}{12bp^6} + \frac{a-b-p^2}{3bp^4} + \frac{a}{3bp^4} \right) \\
& \times \left[\sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \right] \\
& + R_{2,1|12}^{[r]}(p^2) \left[\frac{\delta^{\omega\varrho'} p^\xi - \delta^{\xi\varrho'} p^\omega}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \right. \\
& + \delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} \left[-\frac{41a-65b}{48p^2} - \frac{11(a^2-b^2)}{12p^4} - \frac{5(a^3-2a^2b+2ab^2-5b^3)}{6p^6} \right. \\
& + \left(\frac{13a^4}{24bp^6} + \frac{7a^3}{12bp^4} + \frac{a^2}{6bp^2} + \frac{a^5}{6bp^8} + \frac{3a}{4b} \right) \ln \frac{a+p^2}{a} + \left(\frac{5a}{6b} + \frac{p^2}{24b} \right) \ln \frac{b}{a+p^2} \\
& + \left(\frac{11(b+p^2)^5}{24abp^6} - \frac{(b+p^2)^6}{6abp^8} - \frac{3(b+p^2)^4}{8abp^4} + \frac{(b+p^2)^3}{12abp^2} \right) \ln \frac{b+p^2}{b} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^6}{12abp^8} + \frac{11(a-b-p^2)^5}{48abp^6} + \frac{13(a-b-p^2)^4}{24bp^6} + \frac{3(a-b-p^2)^4}{16abp^4} \right. \\
& + \frac{5(a-b-p^2)^3}{3bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^2} + \frac{a(a-b-p^2)^2}{2bp^4} + \frac{13(a-b-p^2)^2}{8bp^2} \\
& + \frac{15a(a-b-p^2)}{8bp^2} + \frac{a-b-p^2}{2b} - \frac{7a^2}{12bp^2} + \frac{17a}{8b} \left. \right) \ln \frac{a}{b} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{12abp^8} + \frac{11(a-b-p^2)^4}{48abp^6} + \frac{3(a-b-p^2)^3}{8bp^6} + \frac{3(a-b-p^2)^3}{16abp^4} \right. \\
& + \frac{29(a-b-p^2)^2}{24bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{24abp^2} - \frac{a(a-b-p^2)}{12bp^4} + \frac{5(a-b-p^2)}{4bp^2} \\
& \left. - \frac{a}{12bp^2} + \frac{5}{12b} \right) \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + \delta^{\xi\varrho'} p^\omega \left[-\frac{1}{2} + \frac{5a-9b}{240p^2} - \frac{a^2-b^2}{12p^4} + \left(\frac{a^4}{24bp^6} + \frac{a^3}{bp^4} + \frac{a^2}{12bp^2} \right) \ln \frac{a+p^2}{a} \right. \\
& + \frac{1}{4} \ln \frac{b}{\mu^2} + \left(\frac{a}{12b} + \frac{p^2}{8b} \right) \ln \frac{b}{a+p^2} + \frac{p^4}{24ab} \ln \frac{p^2}{a+p^2} + \frac{(b+p^2)^5}{24abp^6} \ln \frac{b}{b+p^2} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{48abp^6} - \frac{(a-b-p^2)^4}{24bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{8bp^4} - \frac{a(a-b-p^2)^2}{4bp^4} \right. \\
& + \left. \frac{a(a-b-p^2)}{8bp^2} - \frac{a^2}{4bp^2} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{48abp^6} - \frac{(a-b-p^2)^3}{24bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^2}{12bp^4} - \frac{a(a-b-p^2)}{6bp^4} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + \delta^{\omega \varrho'} p^\xi \left[\frac{1}{2} - \frac{15a+29b}{240p^2} - \frac{a^2-b^2}{12p^4} + \left(\frac{a^4}{24bp^6} + \frac{5a^3}{24bp^4} + \frac{5a^2}{12bp^2} \right) \ln \frac{a+p^2}{a} \right. \\
& - \frac{1}{4} \ln \frac{b}{\mu^2} + \left(\frac{5a}{12b} + \frac{5p^2}{24b} \right) \ln \frac{a+p^2}{b} + \frac{p^4}{24ab} \ln \frac{a+p^2}{p^2} \\
& + \left(\frac{(b+p^2)^5}{24abp^6} - \frac{(b+p^2)^4}{12abp^4} \right) \ln \frac{b}{b+p^2} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{48abp^6} - \frac{(a-b-p^2)^4}{24bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^4}{24abp^4} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24bp^4} \right. \\
& - \left. \frac{a(a-b-p^2)^2}{4bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4bp^2} - \frac{3a(a-b-p^2)}{8bp^2} - \frac{a^2}{4bp^2} + \frac{a}{4b} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{48abp^6} - \frac{(a-b-p^2)^3}{24bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^4} - \frac{a(a-b-p^2)}{6bp^4} \right. \\
& \left. + \frac{a-b-p^2}{6bp^2} - \frac{a}{3bp^2} \right) \\
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + p^\xi p^\omega p^{\varrho'} \left[\frac{23(a-b)}{24p^4} + \frac{4(a^2-b^2)}{3p^6} + \frac{5a^3 - 10a^2b + 10ab^2 - 5b^3}{6p^8} \right. \\
& + \left(\frac{a^5}{6bp^{10}} + \frac{3a^4}{4bp^8} + \frac{17a^3}{12bp^6} + \frac{17a^2}{12bp^4} + \frac{3a}{4bp^2} \right) \ln \frac{a}{a+p^2} + \frac{1}{6b} \ln \frac{b}{a+p^2} \\
& + \left(\frac{(b+p^2)^6}{6abp^{10}} - \frac{(b+p^2)^5}{4abp^8} + \frac{(b+p^2)^4}{6abp^6} - \frac{(b+p^2)^3}{12abp^4} \right) \ln \frac{b+p^2}{b} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^6}{12abp^{10}} + \frac{(a-b-p^2)^5}{8abp^8} + \frac{(a-b-p^2)^4}{12abp^6} + \frac{3(a-b-p^2)^4}{4bp^8} \right. \\
& + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^4} + \frac{5(a-b-p^2)^3}{4bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^2}{bp^4} + \frac{7a(a-b-p^2)^2}{4bp^6} \\
& + \left. \frac{5a(a-b-p^2)}{2bp^4} + \frac{a-b-p^2}{2bp^2} + \frac{3a}{2bp^2} + \frac{2a^2}{3bp^4} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{12abp^{10}} + \frac{(a-b-p^2)^4}{8abp^8} + \frac{(a-b-p^2)^3}{12abp^6} + \frac{7(a-b-p^2)^3}{12bp^8} \right. \\
& + \frac{(a-b-p^2)^2}{bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^2}{24abp^4} + \frac{3a(a-b-p^2)}{4bp^6} + \frac{5(a-b-p^2)}{6bp^4} + \frac{3a}{4bp^4} \\
& \left. + \frac{5}{12bp^2} \right) \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + R_{3,l_1l_2}^{[r]}(p^2) \left[\frac{\delta^{\xi\omega} p^{\varrho'} + \delta^{\xi\varrho'} p^\omega + 13\delta^{\omega\varrho'} p^\xi}{12} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta^{\xi\omega} p^{\rho'} \left[\frac{5}{36} + \frac{5(a+b)}{48p^2} + \frac{2a^2-3ab+2b^2}{12p^4} - \frac{1}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} + \frac{2a+3p^2}{24b} \ln \frac{a+p^2}{b} \right. \\
& + \left(\frac{a^4}{24bp^6} + \frac{a^3}{8bp^4} + \frac{a^2}{12bp^2} \right) \ln \frac{a}{a+p^2} + \frac{p^4}{24ab} \ln \frac{a+p^2}{p^2} \\
& + \left(\frac{(b+p^2)^5}{24abp^6} - \frac{(b+p^2)^4}{12abp^4} \right) \ln \frac{b}{b+p^2} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{48abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^4}{24abp^4} + \frac{(a-b-p^2)^3}{8bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4bp^2} \right. \\
& \left. + \frac{a(a-b-p^2)}{8bp^2} + \frac{a}{4b} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{48abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{12bp^4} + \frac{a-b-p^2}{6bp^2} \right) \\
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2+4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2+\sqrt{(a-b-p^2)^2+4ap^2}}{a+b+p^2-\sqrt{(a-b-p^2)^2+4ap^2}} \\
& +\delta^{\xi\rho'} p^{\omega} \left[\frac{5}{36} + \frac{5(a+b)}{48p^2} + \frac{2a^2-3ab+2b^2}{12p^4} - \frac{1}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} + \frac{2a+3p^2}{24b} \ln \frac{a+p^2}{b} \right. \\
& + \left(\frac{a^4}{24bp^6} + \frac{a^3}{8bp^4} + \frac{a^2}{12bp^2} \right) \ln \frac{a}{a+p^2} + \frac{p^4}{24ab} \ln \frac{a+p^2}{p^2} \\
& + \left(\frac{(b+p^2)^5}{24abp^6} - \frac{(b+p^2)^4}{12abp^4} \right) \ln \frac{b}{b+p^2} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{48abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^4}{24abp^4} + \frac{(a-b-p^2)^3}{8bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4bp^2} \right. \\
& \left. + \frac{a(a-b-p^2)}{8bp^2} + \frac{a}{4b} \right) \ln \frac{b}{a} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{48abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{24abp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{12bp^4} + \frac{a-b-p^2}{6bp^2} \right) \\
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2+4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2+\sqrt{(a-b-p^2)^2+4ap^2}}{a+b+p^2-\sqrt{(a-b-p^2)^2+4ap^2}} \\
& +\delta^{\omega\rho'} p^{\xi} \left[\frac{59}{36} + \frac{11a-13b}{16p^2} + \frac{2a^2-3ab+2b^2}{12p^4} - \frac{13}{12} \ln \frac{b}{\mu^2} + \frac{26a-5p^2}{24b} \ln \frac{a+p^2}{b} \right. \\
& + \left(\frac{a^4}{24bp^6} + \frac{5a^3}{24bp^4} + \frac{5a^2}{12bp^2} + \frac{3a}{2b} \right) \ln \frac{a}{a+p^2} + \frac{p^4}{24ab} \ln \frac{p^2}{a+p^2} \\
& + \left(\frac{(b+p^2)^5}{24abp^6} - \frac{(b+p^2)^4}{2abp^4} + \frac{(b+p^2)^3}{2abp^2} \right) \ln \frac{b}{b+p^2} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{48abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^4}{4abp^4} - \frac{(a-b-p^2)^3}{24bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4abp^2} \right. \\
& \left. + \frac{3(a-b-p^2)^2}{2bp^2} - \frac{7a(a-b-p^2)}{8bp^2} + \frac{3(a-b-p^2)}{2b} + \frac{3a}{2b} \right) \ln \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{48abp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{4abp^4} - \frac{(a-b-p^2)^2}{12bp^4} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4abp^2} \right. \\
& + \left. \frac{a-b-p^2}{bp^2} - \frac{2a}{3bp^2} + \frac{1}{b} \right) \\
& \times \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \\
& + p^\xi p^\omega p^{\epsilon'} \left[-\frac{1}{6} - \frac{35a-b}{24p^4} - \frac{2a^2-3ab+2b^2}{2p^6} + \frac{7}{12b} \ln \frac{a+p^2}{b} \right. \\
& + \left(\frac{a^4}{4bp^8} + \frac{13a^2}{12bp^6} + \frac{11a^2}{6bp^4} + \frac{3a}{2bp^2} \right) \ln \frac{a+p^2}{a} \\
& + \frac{p^2}{12ab} \ln \frac{a+p^2}{p^2} + \left(\frac{(b+p^2)^5}{4abp^8} - \frac{2(b+p^2)^4}{3abp^6} + \frac{(b+p^2)^3}{2abp^4} \right) \ln \frac{b+p^2}{b} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^5}{8abp^8} + \frac{(a-b-p^2)^4}{3abp^6} + \frac{5(a-b-p^2)^3}{6bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^3}{4abp^4} \right. \\
& + \left. \frac{2(a-b-p^2)^2}{bp^4} + \frac{5a(a-b-p^2)}{4bp^4} + \frac{3(a-b-p^2)}{2bp^2} + \frac{2a}{bp^2} \right) \ln \frac{a}{b} \\
& + \left(\frac{(a-b-p^2)^4}{8abp^8} + \frac{(a-b-p^2)^3}{3abp^6} + \frac{7(a-b-p^2)^2}{12bp^6} + \frac{(a-b-p^2)^2}{4abp^4} \right. \\
& + \left. \frac{4(a-b-p^2)}{3bp^4} + \frac{a}{3bp^4} + \frac{1}{bp^2} \right) \\
& \times \left. \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2} \ln \frac{a+b+p^2 - \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}}{a+b+p^2 + \sqrt{(a-b-p^2)^2 + 4ap^2}} \right] \Bigg\} \\
& + O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{E.49}$$

Literaturverzeichnis

- [AS 65] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1965)
- [BC 80] J. Ball, T. Chiu, „Analytic properties of the vertex function in gauge theories. II“, *Phys. Rev.* **D22**, 2550 (1980)
- [BEL 91] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford Science Publications, Oxford (1991)
- [BJO 69] J. Bjørken, „Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum“, *Phys. Rev.* **179**, 1547 (1969)
- [BL 93] D. Bailin, A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Revised Edition, Institute of Physics Publishing, Bristol (1993)
- [BLO 69] E. Bloom et al., „High-Energy Inelastic e - p Scattering at 6° and 10° “, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969)
- [BRN 00] I. Bronstein et. al., *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main (2000)
- [BRO 92] L. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1992)
- [BRS 76] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, „Renormalization of gauge theories“, *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976)
- [DD 84] A. Devoto, D. Duke, „Table of Integrals and Formulae for Feynman Diagram Calculations“, *Riv. Nuovo Cim.* **7**, 1 (1984)
- [DIR 33] P. Dirac, „The Lagrangian in Quantum Mechanics“, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **3**, 64 (1933)
- [DRI 97] L. Driesen, *Die Basisvertizes der Quantenchromodynamik und ihr Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation, Münster (1997)
- [DYS 49] F. Dyson, „The S Matrix in Quantum Electrodynamics“, *Phys. Rev.* **75**, 1736 (1949)
- [EIN 56] A. Einstein, *Grundzüge der Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig (1956)
- [FEY 48] R. Feynman, „Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics“, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948)

- [FEY 69] R. Feynman, „Very High-Energy Collisions of Hadrons“, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969)
- [FP 67] L. Fadde'ev, V. Popov, „Feynman Diagrams for the Young-Mills Field“, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967)
- [GEL 64] M. Gell-Mann, „A schematic Model of Baryons and Mesons“, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964)
- [GN 74] D. Gross, A. Neveu, „Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories“, *Phys. Rev.* **D10**, 3235 (1974)
- [GW 73] D. Gross, F. Wilczek, „Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories“, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973)
- [HOO 71] G. 't Hooft, „Renormalization of massless Yang-Mills fields“, *Nucl. Phys.* **B33**, 173 (1971)
- [HV 72] G. 't Hooft, M. Veltman, „Regularization and Renormalization of Gauge Fields“, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972)
- [JSL 87] C.-R. Ji, A. Sill, R. Lombard-Nelsen, „Leading-order perturbative QCD calculation of nucleon Dirac form factors“, *Phys. Rev.* **D36**, 165 (1987)
- [KUG 97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer-Verlag, Berlin (1997)
- [LSW 94] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz, U. Wolff, „A precise determination of the running coupling in the SU(3) Yang-Mills Theory“, *Nucl. Phys.* **B413**, 481 (1994)
- [MOS 66] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin (1966)
- [MEY 94] A. Meyer, *Hadronische Zwischenzustände in der e^-e^+ -Annihilation*, Diplomarbeit, Münster (1994)
- [MM 94] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [MUT 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapur (1987)
- [OS 73] K. Osterwalder, R. Schrader, „Axioms for Euclidean Green's Functions“, *Commun. math. Phys.* **31**, 83 (1973)
- [OS 75] K. Osterwalder, R. Schrader, „Axioms for Euclidean Green's Functions II“, *Commun. math. Phys.* **42**, 281 (1975)
- [PT 84] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag, Berlin (1984)
- [PS 95] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, Cambridge, USA (1995)
- [POL 73] H. Politzer, „Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?“, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973)

- [RIV 87] R. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- [SCH 96] M. Schmelling, *Status of the Strong Coupling Constant*, Plenary Talk given at the XXVIII International Conference on High Energy Physics, Warschau (1996), e-Print archive hep-ph/9701002
- [SCHW 51] J. Schwinger, „On the Green’s Functions of Quantized Fields, I and II“, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**, 452 (1951)
- [SCHW 61] J. Schwinger, „Gauge Invariance and Mass“, *Phys. Rev.* **125**, 397 (1962)
- [SIB 01] K. Sibold, *Theorie der Elementarteilchen*, Teubner, Leipzig (2001)
- [STI 96] M. Stingl, „A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics“, *Z. Physik* **A353**, 423 (1996), e-Print archive hep-th/9502157
- [STI 01] M. Stingl, *Persönliche Mitteilungen* (2001–2003), unveröffentlicht
- [STI 02] M. Stingl, *Field-Theory Amplitudes as Resurgent Functions*, preprint MS-TP-01-4, Münster (2002), e-Print archive hep-ph/0207349
- [WEI 67] S. Weinberg, „A Model of Leptons“, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967)
- [WIL 69] K. Wilson, „Non-Lagrangian Models of Current Algebra“, *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969)
- [YM 54] C. Yang, R. Mills, „Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance“, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954)
- [YND 83] F. J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interactions*, Third Revised and Enlarged Edition, Springer-Verlag, Berlin (1983)

Hilfsmittel

Die Diagramme wurden mit Hilfe des Computeralgebrasystems MATHEMATICA von Wolfram Research berechnet und gezeichnet.

Für die Erstellung der Feynman-Graphen wurde das L^AT_EX-Ergänzungspaket FEYNMF von Thorsten Ohl verwendet.

Danksagung

Herrn Professor Dr. Manfred Stingl danke ich für die interessante Aufgabenstellung und die umfangreiche Betreuung. Seine Ratschläge waren bei der Erstellung der vorliegenden Arbeit sehr hilfreich.

Dem Institut für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster danke ich für die großzügige Bereitstellung eines Arbeitsplatzes, Rechners, der Institutsbibliothek und des Institutsdruckers sowie des in Raum 407 in großen Mengen vorhandenen Schreibpapiers.

Den Mitgliedern des Instituts, insbesondere der Arbeitsgruppen Münster und Stingl, danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und stets vorhandene Diskussionsbereitschaft.

Herrn Thomas Vöcking danke ich für die unkomplizierte gemeinsame Nutzung von Raum 407 und des dort stehenden Rechners Kepler.

Meinen Eltern danke ich für ihre Unterstützung.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Münster, den 18. Januar 2003

