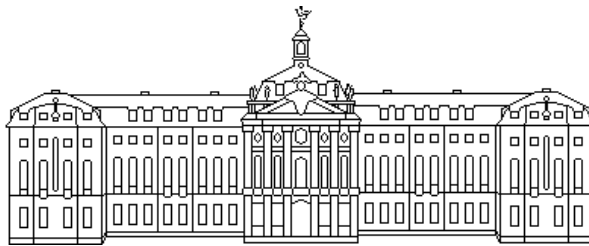


**Berechnung von  
Zwei-Teilchen-Bindungszuständen  
in der  $\phi^4$  - Theorie  
unter Berücksichtigung der Mikrokausalität**



Diplomarbeit im Fach Physik  
vorgelegt von

**Jörn Voigt**  
aus Elmshorn

an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster  
am Institut für Theoretische Physik I  
August 1995



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Crossingsymmetrische Bindungstheorie in <math>\phi_D^4</math></b>	<b>5</b>
1.1 Die $\phi^4$ -Theorie und die Vier-Punkt-Funktion . . . . .	5
1.2 Polstruktur der Greensfunktion . . . . .	8
1.3 Die Bethe-Salpeter-Gleichung . . . . .	11
1.4 Mikrokausalität und crossingsymmetrische BS-Gleichung . . . . .	15
1.5 Euklidische Formulierung . . . . .	20
1.6 Lösungsalgorithmus für die crossingsymmetrische BS-Gleichung . . . . .	21
1.7 Lösung der linearen Integralgleichung . . . . .	22
1.7.1 Das Produktkernverfahren . . . . .	22
1.7.2 Das Fredholmverfahren . . . . .	24
<b>2 Bestimmung der <math>T_4</math>-Bindungsmassen in <math>\phi_{D=1}^4</math></b>	<b>27</b>
2.1 Theorie des anharmonischen Oszillators . . . . .	27
2.2 Lösungsmodelle der crossingsymmetrischen BS-Gleichung . . . . .	33
2.2.1 Modell konstanter Kern . . . . .	34
2.2.2 Selbstkonsistenzmodell erster Stufe . . . . .	41
2.2.3 Selbstkonsistenzmodell zweiter Stufe . . . . .	57
2.3 Fazit . . . . .	61
<b>3 Untersuchung der <math>T_4</math>-Polstruktur in <math>\phi_D^4</math></b>	<b>63</b>
3.1 Iterationsprozeß in $1 < D < 4$ Dimensionen . . . . .	63
3.2 $\phi^4$ -Theorie in $D = 2$ und $D = 3$ Dimensionen . . . . .	68
3.3 $\phi^4$ -Theorie in $D = 4$ Dimensionen . . . . .	71
3.4 Fazit . . . . .	76
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>77</b>
<b>A Feynmanregeln in der <math>\phi^4</math>-Theorie</b>	<b>79</b>
<b>B Eigenschaften der Crossingoperationen</b>	<b>80</b>

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
<b>C Padéapproximation</b>	<b>83</b>
<b>D Berechnung der Integrale in <math>D = 1</math></b>	<b>85</b>
<b>E Partialwellenprojektion</b>	<b>87</b>
<b>F Der Zweiteilchenpropagator in <math>D &gt; 1</math></b>	<b>89</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>

# Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Bestimmung von Zwei-Teilchen-Bindungszuständen in der  $\phi^4$ -Theorie mittels eines Näherungsverfahrens, das das Crossingprinzip respektiert.

Jede relativistische Feldtheorie kann im Prinzip Zwei-Teilchen-Bindungszustände der Masse  $M$  ausbilden, d.h. teilchenartige Eigenzustände  $|P\rangle$  zum erhaltenen Gesamtviererimpuls  $P$ , die die Quantenzahlen eines Produkts von zwei elementaren Feldern tragen. Die Bindungsenergie eines solchen Bindungszustandes ist dabei gekennzeichnet durch die von der Vier-Punkt-Funktion  $G_4$  bzw. ihrem verbundenen amputierten Anteil, der sogenannten Off-shell T-Matrix  $T_4$ , im Minkowskischen Impulsraum bei  $s = P^2 = M^2$  ausgebildeten Pole. Die zugehörigen Residuen faktorisieren in relativimpulsabhängige Anteile. Diese sind bis auf einen Faktor die Matrixelemente des zeitgeordneten Produktes zweier Feldoperatoren zwischen Vakuum- und Bindungszustand, die als Bethe-Salpeter-Amplituden bezeichnet werden und die das relativistische Analogon zur Zweiteilchenwellenfunktion darstellen.

Die Gleichung zur Bestimmung von  $G_4$  bzw.  $T_4$  ist die Bethe-Salpeter-Gleichung, eine Integralgleichung vom Fredholmschen Typ 2. Art, in der der Integralkern definiert ist als die Summe aller Skelettgraphen, die zwei-Teilchen-irreduzibel ( $2PI$ )<sub>s</sub> im  $s$ -Kanal sind. Um diese Integralgleichung behandelbar zu machen, besteht das gängige Näherungsverfahren darin, die Skelettgraphenentwicklung des Bethe-Salpeter-Kerns abzubrechen. Durch die Auszeichnung eines Kanals beim Formulieren der Bethe-Salpeter-Gleichung führt diese Art der Näherung zur Verletzung des Crossingprinzips, wonach die drei zueinander “gekreuzten” Zwei-Teilchen-Prozesse des  $s$ -,  $t$ - und  $u$ -Kanals durch ein und dieselbe Amplitude  $T_4$  in den verschiedenen Bereichen ihrer kinematischen Variablen zu beschreiben sind.

Das Crossingprinzip ist eine unmittelbare Konsequenz der Mikrokausalität, d.h. der fundamentalen Forderung an jede relativistische Quantenfeldtheorie, daß der Kommutator zwischen zwei Meßgrößen für raumartige Abstände verschwindet, da sie die Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen durch ein und denselben Feldoperator erzwingt.

Für die Formulierung einer crossingsymmetrischen Form der Bethe-Salpeter-Gleichung ist es notwendig, den total irreduziblen Kern  $M_4$  einzuführen, der im Gegensatz zum herkömmlichen Bethe-Salpeter-Kern in allen drei Kanälen zwei-

Teilchen-irreduzibel ist. Durch Abbruch der Skelettgraphenentwicklung für  $M_4$  ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für  $T_4$ , die das Crossingprinzip respektiert. Darüberhinaus enthält  $M_4$  keine Zwei-Teilchen-Zwischenzustände mehr, d.h. alle in der Theorie vorhandenen Bindungszustände sollten ihrer Existenz nach, nicht zwingend aber ihrer numerischen Lage nach, durch die Iteration von  $M_4$  erzeugt werden.

Die Arbeit ist in folgende drei Abschnitte gegliedert:

1. In Kapitel 1 leiten wir die, für diese Arbeit entscheidende, dynamische Grundgleichung, die crossingsymmetrische Bethe-Salpeter-Gleichung für die  $\phi^4$ -Theorie ab und stellen ein iteratives Lösungsschema für diese Gleichung vor.
2. In Kapitel 2 werden wir im wesentlichen einen Algorithmus vorstellen, der es erlaubt, in  $\phi_{D=1}^4$  mit der einfachsten Näherung für  $M_4$  das vollständige Zwei-Teilchen-Bindungsspektrum seiner Existenz nach zu erfassen. Wir werden dieses mit dem formal äquivalenten Eigenwertspektrum des anharmonischen Oszillators vergleichen und stellen fest, daß die von uns bestimmten Bindungsmassen in erster Ordnung ihrer Kopplungsabhängigkeit abweichen.
3. In Kapitel 3 werden wir diesen Algorithmus für  $D > 1$  nachbilden und stellen fest:
  - (a) Die  $\phi^4$ -Theorie in  $D = 2, 3$  bildet in der betrachteten Näherung für  $M_4$  keine geraden Zwei-Teilchen-Bindungszustände aus.
  - (b) In  $D = 4$  deutet sich die Trivialität der  $\phi^4$ -Theorie an.

# Kapitel 1

## Crossingsymmetrische Bindungstheorie in $\phi_D^4$

### 1.1 Die $\phi^4$ -Theorie und die Vier-Punkt-Funktion

Die ihrer Struktur nach einfachste wechselwirkende Feldtheorie enthält nur eine Sorte von Teilchen, die miteinander wechselwirken können. Im einfachsten Fall eines neutralen Spin 0-Feldes kann die Lagrangedichte wie folgt zerlegt werden:

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_0(\phi)^{KG} + \mathcal{L}_1(\phi) \quad (1.1)$$

mit der Lagrangedichte des freien skalaren Feldes

$$\mathcal{L}_0^{KG}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi(x))^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \quad . \quad (1.2)$$

Für den Wechselwirkungsterm  $\mathcal{L}_1(\phi)$  kann man eine Reihendarstellung in  $\phi$  ansetzen. Das einfachste Modell ergibt sich, wenn die Reihe nur einen einzigen Term enthält

$$\mathcal{L}_1(\phi) := -g^2V(\phi) = -\frac{1}{4!}g^2\phi^4 \quad , \quad (1.3)$$

dabei ist  $g^2$  eine Kopplungskonstante der Dimension  $4 - D$  mit  $D = \dim \mathcal{L}(\phi)$ . Die Feldquantisierung erfolgt nach dem hier nicht weiter beschriebenen Funktionalintegralformalismus.

Die Funktionalintegraldarstellung für das erzeugende Funktional der gewöhnlichen Greensfunktionen

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0|T(\phi(x_1) \cdot \dots \cdot \phi(x_n))|0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (1.4)$$

der  $\phi^4$ -Theorie lautet

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^D x (\mathcal{L}(\phi) + J\phi)} \quad . \quad (1.5)$$

Für die Beschreibung von Streuprozessen und Bindungszuständen ist es nützlich, die Theorie im Impulsraum zu formulieren. Die n-Punkt-Funktion im Impulsraum,  $G_n(p_1, \dots, p_n)$ , ist definiert durch:

$$G_n(p_1, \dots, p_n)(2\pi)^D \delta^D(p_1 + \dots + p_n) := \int d^D x_1 \dots \int d^D x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} (-i)^2 G_n(x_1, \dots, x_n) \quad . \quad (1.6)$$

Die  $\delta$ -Distribution ist Ausdruck der Translationsinvarianz der  $G_n(x_1, \dots, x_n)$ . Die für die Bindungstheorie zentrale Vierpunktfunktion  $G_4$  kann der folgenden Reduzibilitätsanalyse unterworfen werden:

1. Übergang auf die zusammenhängende 4-Punkt-Funktion  $G_4^c$ , die keine Beiträge enthält, die sich multiplikativ aus Zwei-Punkt-Funktionen aufbauen.

$$\begin{aligned} G_4(p_1, \dots, p_4) &=: (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_4) \Delta(p_1) \Delta(p_2) \\ &+ (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \Delta(p_1) \Delta(p_3) \\ &+ (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_3) \Delta(p_1) \Delta(p_4) \\ &+ G_4^c(p_1, \dots, p_4) \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Übergang von  $G_4^c$  auf die Off-shell-T-Matrix, durch Amputation der äußeren Beine

$$G_4^c(p_1, \dots, p_4) =: ig^2 \Delta(p_1) \Delta(p_2) \Delta(p_3) \Delta(p_4) T_4(p_1, \dots, p_4) \quad . \quad (1.8)$$

Dabei steht  $\Delta$  für den exakten Propagator des  $\phi$ -Feldes

$$(2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \Delta(p_1) := \int d^D x_1 d^D x_2 e^{i(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2)} (-i) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \quad . \quad (1.9)$$

Mit Hilfe der Källen-Lehmann Spektraldarstellung können wir von  $\Delta$  den Polbeitrag der exakten Teilchenmasse abspalten:

$$\Delta(p_1) = \frac{Z_3}{p_1^2 - m^2} + \text{reg. Terme} \quad . \quad (1.10)$$

Wir begegnen hier zum ersten Mal dem Umstand, daß sich Teilchen in der Greensfunktion als Pole erster Ordnung auf der Massenschale der Teilchenimpulse äußern. Die drei unzusammenhängenden Anteile von  $G_4$  lassen sich somit als die Propagation von zwei nicht-wechselwirkenden Teilchen in den jeweiligen Kanälen interpretieren.

Es sei noch erwähnt, daß  $g^2$  aus den Vier-Punkt-Funktionen herausgezogen wurde, damit  $T_4$  in allen Dimensionen  $D$  die Massendimension 0 besitzt. Im zugrundeliegenden Einheitensystem  $\hbar = c = 1$  muß die Wirkung  $S := \int d^D x \mathcal{L}(x)$  dimensionslos sein, woraus folgt, daß  $\dim \mathcal{L} = D$  ist. Als Konsequenz dessen ergeben sich



	$\dim \phi$	$\dim g^2$	$\dim \Delta$	$\dim G_4$	$\dim T_4$
$D = 1$	$-\frac{1}{2}$	3	-2	-5	0
$D = 2$	0	2	-2	-6	0
$D = 3$	$+\frac{1}{2}$	1	-2	-7	0
$D = 4$	1	0	-2	-8	0

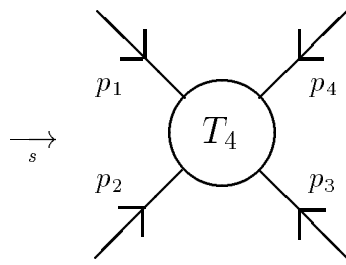
Tabelle 1.1: Massendimensionen in Abhängigkeit der raumzeitlichen Dimension

für die hier wichtigsten Größen die in Tabelle (1.1) zusammengefaßten kanonischen Massendimensionen.

Wir gehen noch kurz auf die Kinematik ein.  $T_4(p, P, p')$  läßt sich durch die Schwerpunkt- und Relativimpulse parametrisieren. Dafür müssen wir einen Kanal auszeichnen. Wir wählen o.B.d.A. den s-Kanal

$$\begin{aligned}
 p &:= \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \\
 p' &:= \frac{1}{2}(p_4 - p_3) \\
 P &:= p_1 + p_2 = -(p_3 + p_4) \quad ,
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$p$  und  $p'$  sind die Relativimpulse im Eingangs- und Ausgangs-s-Kanal und  $P$  der entsprechende Gesamtimpuls.



Mit Hilfe dieser Variablen läßt sich die nützliche Integralkernschreibweise

$$T_4(p, p', P) =: (p|T(P)|p') \tag{1.12}$$

eingeführen. Das  $\phi$ -Feld ist ein Lorentzskalar, weshalb auch die daraus aufgebaute Vier-Punkt-Funktion und die T-Matrix invariant bzgl. der Lorentzgruppe sein muß. Daraus schließen wir, daß  $T_4$  von ihren Argumenten nur über deren sechs invariante Skalarprodukte  $P^2, p^2, p'^2, p \cdot p', p \cdot P, p' \cdot P$  abhängt <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>In  $D = 1$  reduzieren sich diese auf drei.

Des weiteren unterliegt das  $\phi$ -Feld der Bosesymmetrie, d.h. die T-Matrix, die hier vier identische Teilchen mit Spin 0 beschreibt, muß invariant unter sämtlichen  $4!$  Permutationen der Impulse  $p_1, \dots, p_4$  sein. Um diese Symmetrie in den Impulsen  $p, p', P$  auszudrücken, formulieren wir die Umkehrung von Gl. (1.11):

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}P - p \\ p_2 &= \frac{1}{2}P + p \\ p_3 &= -\left(\frac{1}{2}P + p'\right) \\ p_4 &= -\left(\frac{1}{2}P - p'\right) \quad . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Daraus folgt für  $T_4$  eine Invarianz unter folgenden Transformationen:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow -p \\ p' &\rightarrow -p' \\ p \leftrightarrow p' \quad \text{und} \quad P &\rightarrow -P \quad . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Insgesamt erhält man für  $T_4$  als Abhängigkeit von ihren Argumenten:

$$T_4 = T_4(p^2, p'^2, P^2, |p \cdot p'|, |p \cdot P|, |p' \cdot P|) \quad . \quad (1.15)$$

## 1.2 Polstruktur der Greensfunktion

Wir hatten bei der Zwei- und Vier-Punkt-Funktion gesehen, daß sie Pole auf der Massenschale der Teilchenimpulse besitzen. Wir wollen nun zeigen, daß sich Zweiteilchenzustände in  $G_4$  und  $T_4$  als Pole bei  $s = P^2 = (p_1 + p_2)^2 = M^2$  äußern. Wir orientieren uns hierbei an [Re 86], [IZ 80] und [Lu 68].

Ein Bindungszustand  $|\alpha\rangle$  ist ein Eigenzustand des erhaltenen Gesamtimpulses  $P = (P^0, \vec{P})$

$$P^\nu |\alpha\rangle = P_\alpha^\nu |\alpha\rangle \quad \text{mit} \quad P_\alpha^0 = \sqrt{M^2 + \vec{P}_\alpha^2} = E_{\vec{P}_\alpha} \quad . \quad (1.16)$$

Nicht diese allein, sondern erst alle Eigenzustände  $|n\rangle$  von  $P$  zusammengenommen, bilden ein vollständiges System, soweit man voraussetzen kann, daß der Zustandsraum der QFT Hilbertraumstruktur besitzt. Für die Normierung der Bindungszustände gilt für  $D > 1$ :

$$\langle \alpha' | \alpha \rangle = 2E_{\vec{P}_\alpha} \delta^{D-1}(\vec{P}_{\alpha'} - \vec{P}_\alpha) \quad . \quad (1.17)$$

Wir werden uns im folgenden auf  $D = 4$  beschränken, gleichwohl sich die gewonnenen Aussagen für  $D > 1$  verallgemeinern lassen, und anschließend auf die speziellen

Eigenschaften für  $D = 1$  eingehen. Wir betrachten nun die Impulsraumgreensfunktion

$$\begin{aligned} G_4(p_1, \dots, p_4) & (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_4) \\ & = \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_4 e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_4 \cdot x_4)} (-i^2) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdot \dots \cdot \phi(x_4) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

und schieben zwischen dem 2. und 3. Feldoperator ein vollständiges System von  $P$ -Eigenzuständen  $|n\rangle$  ein <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \dots & = - \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_4 e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_4 \cdot x_4)} \{ \\ & \quad \sum_n \Theta(\min(t_1, t_2) - \max(t_3, t_4)) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | n \rangle \langle n | T \{ \phi(x_3) \phi(x_4) \} | 0 \rangle \\ & + \sum_n \Theta(\min(t_3, t_4) - \max(t_1, t_2)) \langle 0 | T \{ \phi(x_3) \phi(x_4) \} | n \rangle \langle n | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle \\ & + (2 \text{ Terme mit } x_2 \leftrightarrow x_3) \\ & + (2 \text{ Terme mit } x_2 \leftrightarrow x_4) \} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} & =: \sum_n I_n(p_1, \dots, p_4) \\ & =: \underbrace{\sum_\alpha I_\alpha(p_1, \dots, p_4)}_{G_B(p_1 \dots p_4) = \text{Bindungspolbeitrag}} + \sum_{n \neq \alpha} I_n(p_1, \dots, p_4) \quad , \end{aligned} \quad (1.20)$$

wobei  $\alpha$  die Zwei-Teilchen-Bindungszustände aus Gl. (1.16) bezeichnet und  $t_i = x_i^0$  gesetzt ist. Die Normierungsbedingung erfordert noch die Ersetzung der formalen Summe  $\sum_\alpha$  durch  $\int \frac{d^3 P_\alpha}{2E_{\vec{P}_\alpha}}$

$$G_B(p_1, \dots, p_4) = \int \frac{d^3 P_\alpha}{2E_{\vec{P}_\alpha}} I_\alpha(p_1, \dots, p_4) \quad . \quad (1.21)$$

Die hierbei auftretenden

$$f_\alpha(x_1, x_2) := \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \alpha \rangle \quad (1.22)$$

bezeichnet man als Ortsraum-Bethe-Salpeter-Amplituden. Aufgrund der Translationsinvarianz gilt für beliebiges  $a$

$$f_\alpha(x_1, x_2) = f_\alpha(x_1 + a, x_2 + a) e^{iP_\alpha \cdot a} \quad . \quad (1.23)$$

Speziell für  $a = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  spaltet man die Schwerpunktbewegung ab

$$f_\alpha(x_1, x_2) = f_\alpha\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, -\frac{x_1 - x_2}{2}\right) e^{-iP_\alpha \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad . \quad (1.24)$$

---

<sup>2</sup>Wir behandeln hier nicht den Fall der Entartung, der zusätzlich die Summation über einen Entartungsindex  $i$  erfordern würde.

Man führt nun Relativkoordinaten ein

$$\begin{aligned} x &:= x_1 - x_2 \\ y &:= x_3 - x_4 \end{aligned} \quad (1.25)$$

und erhält die Ortsraum Bethe-Salpeter-Amplituden der Relativbewegung

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha(x) &= f_\alpha\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) \\ \tilde{f}_\alpha^+(y) &= f_\alpha^+\left(\frac{y}{2}, -\frac{y}{2}\right) . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Mittels Fouriertransformation erhält man die Impulsraum Bethe-Salpeter-Amplituden des Zwei-Teilchen-Bindungszustandes

$$\begin{aligned} f_\alpha(p) &:= \int d^4x e^{-ip \cdot x} \tilde{f}_\alpha(x) \\ f_\alpha^+(p') &:= \int d^4y e^{-ip' \cdot y} \tilde{f}_\alpha^+(y) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Wir führen nun die Fouriertransformation (1.18) durch, indem wir

1. s-Kanalvariablen einführen,
2. Impulsraum-Bethe-Salpeter-Amplituden der Relativbewegung einbauen,
- 3.

$$\begin{aligned} \min(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}(t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|) \\ \max(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + |t_1 - t_2|) \end{aligned} \quad (1.28)$$

ausnutzen,

4. die Integraldarstellung der Sprungfunktion

$$\Theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} \quad (1.29)$$

einsetzen

und erhalten, wenn man die Koordinaten so wählt, daß  $\vec{P} = 0$  gilt, folgendes Ergebnis:

$$(p|G(P)|p') = -i(2\pi)^3 \frac{f_\alpha(p)f_\alpha^+(p')}{P^2 - M^2} + (\text{reg. Terme für } P^2 \rightarrow M^2) . \quad (1.30)$$

Wir sehen, daß sich ein Zwei-Teilchen-Zustand als Pol der Vier-Punkt-Funktion bzgl.  $s = P^2$  äußert. In  $D = 1$  [Kr 93] ist das Ergebnis ähnlich, nur daß die Summe

über die Impulseigenzustände, die ein vollständiges System bilden, explizit erhalten bleibt<sup>3</sup>:

$$(p|G_{D=1}(P)|p') = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(p)f_n^+(p')}{P^2 - M_n^2} + (\text{reg. Terme für } P^2 \rightarrow M_n^2) \quad . \quad (1.31)$$

Diese Polstruktur überträgt sich unmittelbar auf die verbundene Greensfunktion sowie auf die  $T$ -Matrix, da weder die unverbundenen Anteile noch die äußeren Beine Pole bzgl.  $s$  ausbilden. Wir ziehen die äußeren Beine aus den Bethe-Salpeter-Amplituden der Relativbewegung heraus

$$\begin{aligned} f_\alpha(p) &=: \Delta\left(\frac{1}{2}P - p\right)\Delta\left(\frac{1}{2}P + p\right)\chi_\alpha(p) \\ f_\alpha^+(p') &=: \Delta\left(\frac{1}{2}P - p'\right)\Delta\left(\frac{1}{2}P + p'\right)\chi_\alpha^+(p') \end{aligned} \quad (1.32)$$

und erhalten für die  $T$ -Matrix

$$-ig^2(p|T(P)|p') = -i(2\pi)^3 \frac{\chi_\alpha(p)\chi_\alpha^+(p')}{P^2 - M^2} + (\text{reg. Anteile für } P^2 \rightarrow M^2) \quad . \quad (1.33)$$

Aufgrund der unterschiedlichen Zeitordnungen der Ortsraumgreenfunktion  $G_4$  erhält man entsprechende Pole für  $t = Q^2 = (p_1 + p_4)^2$  und  $u = R^2 = (p_2 + p_4)^2$ .

Als Vorgehensweise zur Bestimmung der Bindungszustände liegt nun nahe:

1. Wir benötigen zunächst eine Gleichung zur Bestimmung von  $T_4$ . Dies ist die Bethe-Salpeter-Gleichung, die wir im nächsten Abschnitt ableiten werden.
2. Man löst diese mit einem geeigneten Näherungsverfahren (Abschnitt 1.7).
3. Die Lösung untersuchen wir auf Polstellen bzgl.  $s = P^2$ ,  $t = Q^2$  und  $u = R^2$ , die die Massenquadrate der Bindungszustände markieren.
4. Die Residuen an den Polstellen faktorisieren in einen  $p$ - und einen  $p'$ -abhängigen Anteil, die bis auf einen Faktor die Bethe-Salpeter-Amplituden sind.

### 1.3 Die Bethe-Salpeter-Gleichung

Im Gegensatz zur Streutheorie kann eine Bindungstheorie sicher nicht als asymptotisch frei bzgl. des Ortsraumes angesehen werden, weshalb eine perturbative Behandlung nicht möglich ist. Dies ist klar, denn kein Graph der perturbativen Entwicklung von  $T_4$  bildet einen kopplungsabhängigen Pol bzgl.  $s$  aus. Vielmehr braucht man eine unendliche Teilsumme von Graphen die zu  $T_4$  beitragen, damit sich ein solcher Pol ausbilden kann. Dies leistet nach Festlegung

---

<sup>3</sup> $n = 0$  enthält die unverbundenen Anteile.

auf einen bestimmten Kanal von  $T_4$  die ursprünglich auf [Na 50] zurückgehende Bethe-Salpeter-Gleichung. Ausführliche Darstellungen finden sich unter anderem in [IZ 80], [Lu 68] und [Re 86]. Es ist nun ein allgemeiner Vorteil, Bestimmungsgleichungen für möglichst ausgedünnte Größen (hier für  $T_4$ ) zu formulieren, damit sich Näherungen im Lösungsprozeß möglichst wenig auswirken. Um die Gleichung für  $T_4$  formulieren zu können, erweitern wir die Reduzibilitätsanalyse von  $G_4$  um einen weiteren Reduktionsschritt, der darin besteht, alle ein-Teilchen-irreduziblen Graphen ( $1PI$ ), die sich nicht durch Auftrennen einer einzigen inneren Linie in zwei disjunkte Teile zerlegen lassen, abzuspalten. Die Summe dieser Graphen bezeichnet man als irreduzible Vier-Punkt-Funktion  $\Gamma_4$ .

Graphisch erhält man folgende Definitionsgleichung für  $\Gamma_4$ :

$$T_4 = \Gamma_4 + ig^2 \left[ \Gamma_3 - \Gamma_3 + \Gamma_3 \right],$$

wobei die äußeren Beine als amputiert zu denken sind.

Für die Konstruktion der Bethe-Salpeter-Gleichung sind wir an einer besonderen Amplitude interessiert, die als die Summe aller Graphen definiert ist, die ein-Teilchen-irreduzibel in einem ausgezeichneten Kanal  $a$ , o.B.d.A dem s-Kanal ( $1PI_s$ ) sind :

$$T'_4 = T_4 - ig^2 \Gamma_3.$$

Nun gibt es aber in der  $\phi^4$ -Theorie keine n-Punkt-Funktionen ungerader Ordnung  $n$ ,<sup>4</sup> so daß  $T_4 \equiv T'_4 \equiv \Gamma_4$  gilt.

Für den für unsere Zwecke entscheidenden Reduktionsschritt führen wir den Begriff der Zwei-Teilchen-Irreduzibilität im a-Kanal ( $2PI_a$ ) ein.

Ein Graph heißt zwei-Teilchen-irreduzibel im a-Kanal ( $a = s, t, u$ ), wenn er sich durch Auftrennen zweier innerer Linien, die zusammen den Gesamtimpuls des a-Kanals tragen, nicht in zwei disjunkte Teilgraphen zerlegen läßt.

Beispiel für einen zwei-Teilchen-reduziblen Graphen ( $2PR_s$ ):

$$\xrightarrow{s} \text{loop} \rightarrow \text{cross} + \text{cross}.$$

<sup>4</sup>Dies gilt, soweit -wie in dem vorliegenden Fall- die Symmetrie  $\phi \rightarrow -\phi$  nicht spontan gebrochen ist.

Zwei innere Linien, wie sie im Beispiel auftreten und zusammen den Gesamtimpuls des a-Kanals tragen, repräsentieren den Zwei-Teilchen-Propagator  $i^2 G_s^0(p_1, \dots, p_4)$  des a-Kanals multipliziert mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  (o.B.d.A.  $a = s$ ):

$$\begin{aligned} G_s^0(p_1, \dots, p_4) &= (2\pi)^D \delta^D(p_4 + p_1) \Delta(p_1) \Delta(p_2) \\ &= (2\pi)^D \delta^D(p' - p) \Delta\left(\frac{1}{2}P - p\right) \Delta\left(\frac{1}{2}P + p\right) \\ &=: (2\pi)^D \delta^D(p' - p) G_s^0(p, P) \end{aligned} \quad (1.34)$$

mit

$$G_s^0(p, P) = \frac{1}{[(p + \frac{1}{2}P)^2 - m^2][(p - \frac{1}{2}P)^2 - m^2]} \quad , \quad (1.35)$$

sofern man die  $\Delta$ 's durch ihre Polterme nähert und  $Z_3 = 1$  setzt<sup>5</sup>.

Die Summe aller Graphen, die  $(1PI)_a$  und  $(2PI)_a$  sind, stellt eine Untermenge von  $T_4$  dar. Wir bezeichnen sie mit  $K_a$ .

In der  $\phi^4$ -Theorie reduziert sich die Skelettgraphenentwicklung auf Ein-Loop-Niveau von

$$T_4 = \text{tree} + (-ig^2) [\text{bubble} + \text{tadpole} + \text{sunset}] + \dots$$

für  $T_4$  auf

$$K_s = \text{tree} + (-ig^2) [\text{bubble} + \text{sunset}] + \dots$$

für  $K_s$ . Wir klassifizieren die Beiträge zu  $T_4$  nach seinen  $(2PI)_s$ -Anteilen und erhalten nach Umsummierung:

$$T_4 = K_s + (-ig^2) [K_s \text{ connected}] + \dots$$

Analytisch ergibt sich:

$$T_4 = K_s - ig^2 K_s \frac{1}{2} i^2 G_s^0 K_s + (ig^2)^2 K_s \frac{1}{2} i^2 G_s^0 K_s \frac{1}{2} i^2 G_s^0 K_s \mp \dots \quad . \quad (1.36)$$

<sup>5</sup>Dies ist die Näherung für den Propagator, die wir bei der Bestimmung der Bindungsmassen in Kapitel 2 und Kapitel 3 verwenden werden. Allgemein gilt Gl. (1.38) auch mit dem vollen Propagator  $G_s$  statt seiner Poltermnäherung  $G_s^0$ .

Diese Operatorgleichung summieren wir formal auf, indem wir sie als geometrische Reihe auffassen,

$$\begin{aligned} T_4 &= K_s \left( 1 + \frac{ig^2}{2} (G_s^0 K_s) + \left(\frac{ig^2}{2}\right)^2 (G_s^0 K_s)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{K_s}{\mathbb{1} - \frac{ig^2}{2} G_s^0 K_s} \end{aligned} \quad (1.37)$$

und erhalten so die Bethe-Salpeter Gleichung formuliert im s-Kanal

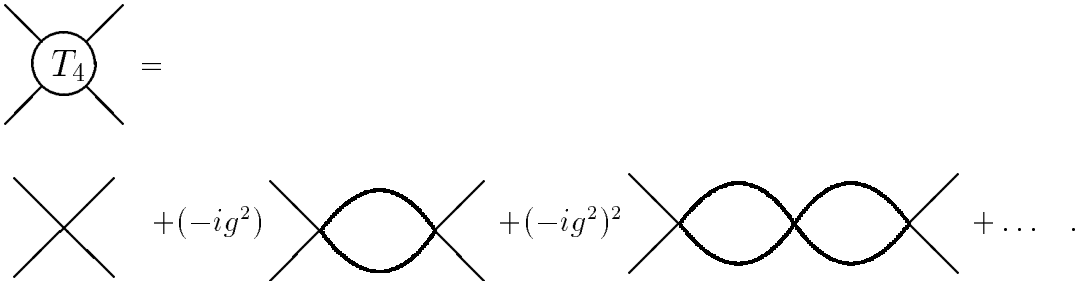
$$\begin{aligned} T_4 &= K_s + i\frac{g^2}{2} K_s G_s^0 T_4 \\ &= K_s + i\frac{g^2}{2} T_4 G_s^0 K_s \quad . \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ausgeschrieben ergibt sich :

$$\begin{aligned} (p|T_4(P)|p') &= (p|K_s(P)|p') \\ &\quad + \frac{ig^2}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (p|K_s(P)|k) (k|G_s^0(P)|k') (k'|T_4(P)|p') \\ &= (p|K_s(P)|p') \\ &\quad + \frac{ig^2}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (p|K_s(P)|k) G_s^0(k, P) (k|T_4(P)|p') \quad . \end{aligned} \quad (1.39)$$

Formal ist Gl. (1.39) eine Definitionsgleichung für den Kern  $K_s$ . Erst durch Abbruch der Skelettgraphenentwicklung für letzteren wird diese zu einer Bestimmungsgleichung für  $T_4$  und zwar eine lineare Integralgleichung vom Fredholmschen Typ 2. Art. Man erhält so eine unendliche Teilsummation von Graphen, die zu  $T_4$  beitragen.

In der einfachsten Näherung, der sogenannten Blasennäherung (im Kontext anderer Feldtheorien ist dies die Leiternäherung), wird  $K_s$  durch den Graphen niedrigster Ordnung  $K = 1$  genähert:



Dieses Beispiel veranschaulicht, daß die Bethe-Salpeter-Gleichung, die als Definitionsgleichung exakt ist, beim Lösungsprozeß mit herkömmlich genähertem Kern das Crossingprinzip, die Symmetrie von  $T_4$  in allen drei Kanälen, bricht, da in dieser Summation nur  $(2PR)_s$ -Anteile enthalten sind.



## 1.4 Mikrokausalität und crossingsymmetrische BS-Gleichung

Wir orientieren uns im wesentlichen an [GA 66], [St 90] und [Pi 79].

Die Mikrokausalität besagt, daß für einen Satz skalarer Felder  $\{\phi_i\}$  und zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^D$  mit  $(x - y)^2 < 0$  gilt:

$$[\phi_i(x), \phi_i^\dagger(y)] = 0 \quad . \quad (1.40)$$

D.h. an zwei Punkten, die nicht durch ein Signal verbunden werden können, da sie rein raumartigen Abstand haben, können sich die Felder nicht gegenseitig beeinflussen.

Dies ist eine Eigenschaft, die für freie Theorien erfüllt ist. Beispielsweise ergibt sich für das Klein-Gordon-Feld

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i\Delta_S(x - y, m) \quad , \quad (1.41)$$

wobei

$$\Delta_S(x, m) = -i(2\pi)^{-3} \int d^4q [\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)] \delta(q^2 - m^2) e^{-iqx} \quad (1.42)$$

die Schwingersche  $\Delta_S$ -Funktion ist, die für raumartige  $x$  ( $x^2 < 0$ ) verschwindet.

Da in wechselwirkenden Theorien eine explizite Lösung in Form von Gl. (1.41) nicht möglich ist, wird die Mikrokausalität als ein Grundpostulat der Feldtheorie eingeführt.

Betrachten wir nochmals den Feldoperator des Klein-Gordon-Feldes als Lösung der Feldgleichung  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$ . Dieser besitzt eine Fourierdarstellung der Form

$$\phi(x) = \int \frac{d^3q}{2\omega_q} [a(\vec{q}) f_{\vec{q}}(x) + b^\dagger(\vec{q}) f_{\vec{q}}^\dagger(x)] \quad , \quad (1.43)$$

ist also aus Teilchen- und Antiteilchenoperatoren aufgebaut.

Getrennte Feldoperatoren für die  $a$ - und  $b$ -Felder einzuführen, analog zur Fockraumformulierung der nichtrelativistischen Quantenmechanik, die den positiven und negativen Frequenzanteil von (1.43) bilden, wie

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3q}{2\omega_q} f_{\vec{q}}(x) a(\vec{q}) \\ \phi^{(-)}(x) &= \left[ \int \frac{d^3q}{2\omega_q} f_{\vec{q}}(x) b(\vec{q}) \right]^\dagger \quad , \end{aligned} \quad (1.44)$$

scheitert, da ihr Kommutator mit sich selbst, d.h.

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)] &= i\Delta_S^+(x - y) \\ [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= i\Delta_S^-(x - y) \end{aligned} \quad (1.45)$$

mit

$$\Delta_S^\pm(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q [\pm\Theta(\pm q_0)\delta(q^2 - m^2)e^{-iqx}] \quad (1.46)$$

und

$$\Delta_S^+(x) + \Delta_S^-(x) = \Delta_S(x) \quad (1.47)$$

je für sich nichtkausal ist.

Es ist ein allgemeiner Zug der relativistischen QFT, daß Mikrokausalität die Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen durch denselben Feldoperator  $\phi(x)$  erzwingt, soweit aus diesem Feldoperator und seinem Adjungierten  $\phi^\dagger$  Meßgrößen aufgebaut werden sollen <sup>6</sup>.

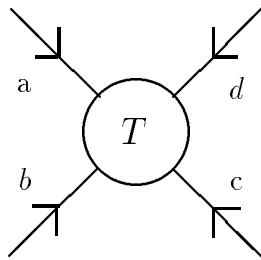
Betrachtet wird die Streuung zweier Teilchen  $a, b$  mit den Impulsen  $p_1, p_2$ , aus denen im Ausgangskanal die Antiteilchen  $\bar{c}, \bar{d}$  mit den Impulsen  $p_3, p_4$  resultieren:

$$a(p_1) + b(p_2) \longrightarrow \bar{c}(p_3) + \bar{d}(p_4) \quad . \quad (1.48)$$

Die Substitutionsregel besagt, daß auslaufende Antiteilchen auch als einlaufende Teilchen interpretiert werden können. Wir erhalten folglich zwei weitere Reaktionsgleichungen, die durch das Herüberkreuzen (Crossing) von Teilchen und Antiteilchen auseinander hervorgehen:

$$\begin{aligned} a(p_1) + c(p_3) &\longrightarrow \bar{b}(p_2) + \bar{a}(p_4) \\ a(p_1) + d(p_4) &\longrightarrow \bar{c}(p_3) + \bar{b}(p_2) \quad . \end{aligned} \quad (1.49)$$

Wir fassen diese als verschiedene Kanäle ( $s, t, u$ ) desselben Streusystems auf, so daß wir die drei Streuprozesse mit einem einzigen Diagramm beschreiben können:



Berechnen wir perturbativ die  $T$ -Matrizen ( $T \equiv T_4$ )  $T_s, T_t$  und  $T_u$  der verschiedenen Kanäle, so erhalten wir die Beziehung:

$$T_s(s, t, u) = T_t(t, s, u) = T_u(u, t, s) \quad . \quad (1.50)$$

<sup>6</sup>QFT in  $D = 1$  ist QM und insofern ist Mikrokausalität als relativistisches Prinzip keine Forderung an das System. Raumartiger Abstand heißt in  $D = 1$  aber zu gleichen Zeiten, da hier der Raum auf einen Punkt zusammengezogen ist, und insofern ist Mikrokausalität erfüllt, da ein quantenmechanischer Operator mit sich selbst zu gleichen Zeiten vertauscht.

Dabei sind  $s, t, u$  die Quadrate der Schwerpunktimpulse der jeweiligen Kanäle, die sogenannten Mandelstamschen Variablen. Ihr kinematischer Bereich ist wegen der Viererimpulserhaltung für jede der drei  $T$ -Matrizen verschieden. Für den  $s$ -Kanal gilt beispielsweise:  $s = (p_1 + p_2)^2 \geq (m_a + m_b)^2$ . Das Crossingprinzip läßt sich allgemein so formulieren:

Die  $T$ -Matrizen für die gekreuzten Streukanäle können als eine einzige analytische Funktion angesehen werden, wobei der kinematisch erlaubte Bereich der Mandelstamschen Variablen durch die Massen des jeweiligen Kanals diktiert wird.

Im allgemeinen werden die drei Kanäle andersartige Reaktionen beschreiben, in der  $\phi^4$ -Theorie allerdings, in der nur eine Teilchensorte existiert, die zudem noch identisch mit ihrem Antiteilchen ist, findet in allen drei Kanälen dieselbe physikalische Reaktion statt.

Das Crossingprinzip erzwingt hier eine Crossingsymmetrie. Die  $T$ -Matrix

$$T := T_u = T_s = T_t \quad (1.51)$$

muß symmetrisch unter Austausch der Mandelstamschen Variablen sein:

$$T(s, t, u) = T(u, t, s) = T(t, s, u) \quad . \quad (1.52)$$

Diese Crossingsymmetrie ist durch jede Lösung  $T$  der konventionell genäherten Bethe-Salpeter-Gleichung verletzt.

Ziel ist es, eine Gleichung zur Bestimmung von  $T$  zu formulieren, die einer Näherung in Form einer Skelettgraphenentwicklung zugänglich ist und zugleich die Crossingsymmetrie von  $T$  respektiert.

Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Kanalampplitude  $X_a$  des  $a$ -Kanals ein:

$$X_a := K_a G_a^0 T \quad . \quad (1.53)$$

Sie ist gleich der Summe der  $(2PR)_a$ -Beiträge von  $T$ , die formal durch

$$i \frac{g^2}{2} X_a =: [\sum (2PR)_a] \quad (1.54)$$

erfaßt sein soll. Für den Kern  $K_s$  erhält man demzufolge die Zerlegung:

$$\begin{aligned} K_s &:= [\sum (2PI)_s] \\ &= \underbrace{[\sum (2PI)]}_{=: M_4} + [\sum \{(2PR)_t \vee (2PR)_u\}] \\ &= M_4 + \frac{ig^2}{2} (X_t + X_u) - \underbrace{[\sum (2PR)_t \wedge \sum (2PR)_u]}_{= \emptyset \text{ in der } \phi^4\text{-Theorie, da Beiträge dieser Art Dreiervertices besitzen.}} \quad . \quad (1.55) \end{aligned}$$

Also

$$K_s = M_4 + \frac{ig^2}{2} (X_t + X_u) \quad . \quad (1.56)$$

Mit Gl. (1.38),(1.53) und (1.56) folgt

$$\begin{aligned}
 T &= K_s + \frac{ig^2}{2} K_s G_s^0 T \\
 &= K_s + \frac{ig^2}{2} X_s \\
 &= M_4 + \frac{ig^2}{2} (X_s + X_t + X_u)
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

und schließlich mit Gl. (1.53), (1.56) und (1.57)

$$X_s = [M_4 + \frac{ig^2}{2} (X_t + X_u)] G_s^0 [M_4 + \frac{ig^2}{2} (X_s + X_t + X_u)] \tag{1.58}$$

(analog für die anderen Kanäle). Wir wollen nun die explizite integrale Gestalt von Gl. (1.58) angeben. Aufgrund der Crossingsymmetrie hat  $X$  bzgl. der Kanalimpulse die gleiche analytische Gestalt in den drei Kanälen

$$\begin{aligned}
 (p|X_s(P)|p') &= (p|X(P)|p') \\
 (q|X_t(Q)|q') &= (q|X(Q)|q') \\
 (r|X_u(R)|r') &= (r|X(R)|r')
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

mit

$$\begin{array}{l}
 P := p_1 + p_2 \\
 p := \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \\
 p' := \frac{1}{2}(p_4 - p_3)
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 Q := p_1 + p_4 \\
 q := \frac{1}{2}(p_1 - p_4) \\
 q' := \frac{1}{2}(p_3 - p_2)
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 R := p_2 + p_4 \\
 r := \frac{1}{2}(p_3 - p_1) \\
 r' := \frac{1}{2}(p_2 - p_4)
 \end{array} ,$$

wobei alle vier Teilchenimpulse  $p_1, \dots, p_4$  (mit  $p_1 + \dots + p_4 = 0$ ) als einlaufend angenommen werden.

Um die Integralgleichung explizit angeben zu können, müssen wir sie im Variablensatz eines Kanals formulieren. Wir wählen wie üblich den  $s$ -Kanal. Dafür werden die Impulse des  $u$ - und  $t$ -Kanals als Funktion der Impulse des  $s$ -Kanals benötigt

$$\begin{array}{l}
 Q = p' - p \\
 q = \frac{1}{2}(P - p' - p) \\
 q' = -\frac{1}{2}(P + p' + p)
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 R = p' + p \\
 r = -\frac{1}{2}(P + p' - p) \\
 r' = \frac{1}{2}(P - p' + p)
 \end{array} \right. .$$

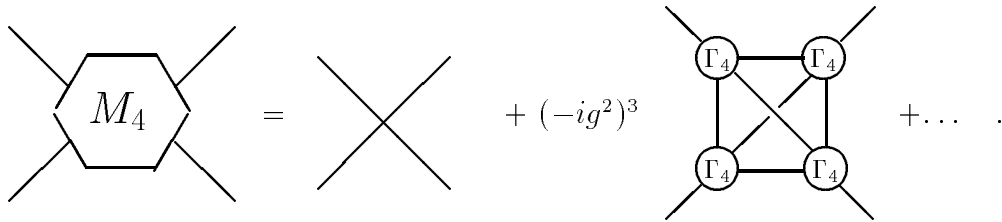
Die Integralgleichung (1.58) schreibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
 (p|X(P)|p') &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ G_s^0(k, P) \right. \\
 &\left[ (p|M_4(P)|k) + i\frac{g^2}{2} \left( \left( \frac{1}{2}P - \frac{p+k}{2} |X(k-p)| - \frac{1}{2}P - \frac{p+k}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( -\frac{1}{2}P - \frac{k-p}{2} |X(p+k)| \frac{1}{2}P - \frac{k-p}{2} \right) \right) \right] \\
 &\left[ (k|M_4(P)|p') + i\frac{g^2}{2} \left( \left( \frac{1}{2}P - \frac{p'+k}{2} |X(p'-k)| - \frac{1}{2}P - \frac{p'+k}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( -\frac{1}{2}P - \frac{p'-k}{2} |X(p'+k)| \frac{1}{2}P - \frac{p'-k}{2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + (k|X(P)|p') \right) \right\} . \tag{1.60}
 \end{aligned}$$

Dies ist eine nichtlineare Integralgleichung, die die Funktion  $X$  nichtlinear mit sich selbst an verschobenen Impulsargumenten korreliert.

Die Größe  $M_4$ , die zuerst von [BL 77] eingeführt wurde, ist definiert als die Summe aller Diagramme, die -anders als die Beträge zum Kern  $K_a$ - zwei-Teilchen-irreduzibel bzgl. aller Kanäle ( $2PI$ ) sind. Wir nennen ihn daher den total irreduziblen Kern  $M_4$ .

Er stellt eine gegenüber  $K_a$  ausgedünntere Größe dar, die im Gegensatz zu  $K_a$  crossingsymmetrisch ist, jedoch auch durch Abbruch seiner Skelettgraphenentwicklung näherungsweise bestimmt werden kann:



Dabei existieren bis auf den Graphen nullter Ordnung nur Beiträge mit mindestens drei Schleifen.<sup>7</sup> Folgende Eigenschaften des irreduziblen Kerns  $M_4$  sind hervorzuheben:

1. Ein Zwei-Teilchen-Zwischenzustand, wie er in einem allgemeinen Typ der Form  $T_a G_s^0 T_b$  realisiert ist, kann in  $M_4$  nicht realisiert sein. Die crossingsymmetrische Bethe-Salpeter-Gleichung stellt folglich ein geeignetes Hilfsmittel dar, um alle in der Theorie auftretenden Zwei-Teilchen-Zustände zunächst ihrer Existenz nach zu bestimmen.
2. Die virtuellen Zwischenzustände in  $M_4$  werden reell erst oberhalb einer Schwelle von  $3m$ . Für Näherungen im Niederenergiebereich ist  $M_4$  daher besser geeignet als  $K_a$ .

<sup>7</sup>In vier Dimensionen, in der die  $\phi^4$ -Theorie logarithmisch divergent ist (Kap. 3.3), kann nur die letzte der drei Schleifenintegrale zu Divergenzen führen, d.h.  $M_4$  enthält keine divergenten Subgraphen.

## 1.5 Euklidische Formulierung

Die obigen Gleichungen sind alle in physikalischer (minkowskischer) Raum-Zeit mit indefiniter Metrik geschrieben.

Wir stellen uns nun auf den Standpunkt der euklidischen QFT, welche postuliert, daß man die minkowskischen Greensfunktionen durch analytische Fortsetzung der entsprechenden Funktionen in der euklidischen Theorie mit positiv definiter Metrik erhält.

Die euklidischen Gleichungen erhält man formal durch 'blinde' Wickrotation, d.h. ohne dabei auf eventuelle Integrandenpole zu achten, die bei der Rotation überstrichen werden. Ein Impuls  $p$  im Minkowskischen wird dabei auf  $p_E$  im Euklidischen abgebildet, d.h. durch die Ersetzung der Energiekomponente

$$p^0 \longrightarrow ip_E^0 \quad -\infty \leq p_E^0 \leq +\infty \quad . \quad (1.61)$$

Alle lorentzinvarianten Argumente erhält man folglich im Euklidischen durch

$$a \cdot b \longrightarrow -a_E \cdot b_E = -\sum_{i=0}^D a^i b^i \quad . \quad (1.62)$$

Das Volumenelement  $\frac{d^D k}{(2\pi)^D}$  geht über in  $i\frac{d^D k_E}{(2\pi)^D}$  und für die Kanalampplitude erhält man :

$$iX_s(p^2, P^2, p'^2, P \cdot p, p \cdot p', P \cdot p') \longrightarrow -X_{sE}(-p_E^2, -P_E^2, -p_E'^2, -P_E \cdot p_E, -p_E \cdot p_E', -P_E \cdot p_E') \quad . \quad (1.63)$$

Die Teilchenpole, die die minkowskischen Größen ausbilden können, verschwinden. Dies kann man sich leicht am Teilchenpropagator  $\Delta$  deutlich machen:

$$\Delta(p^0, \vec{p}) =: -\Delta(p_E^0 = ip^0, \vec{p}) \quad (1.64)$$

$$\Delta(p_E) = \frac{Z_3}{p_E^2 + m^2} + \text{reg Terme} \quad . \quad (1.65)$$

Man erhält schließlich die euklidische, rein reelle Darstellung der Operatorgleichung (1.60):

$$\begin{aligned} (p_E | K_E(P_E) | p_E') &= (p_E | M_{4E}(P_E) | p_E') \\ &- \frac{g^2}{2} \left( \left( \frac{1}{2} P_E - \frac{p_E + p_E'}{2} | X_E(p_E' - p_E) | -\frac{1}{2} P_E - \frac{p_E + p_E'}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{2} P_E - \frac{p_E' - p_E}{2} | X_E(p_E + p_E') | \frac{1}{2} P_E - \frac{p_E' - p_E}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} (p_E | X_E(P_E) | p_E') &= \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} G_s^0(k_E, P_E) \\ &(p_E | K_E(P_E) | k_E) (k_E | K_E(P_E) - \frac{g^2}{2} X_E(P_E) | p_E') \quad . \end{aligned} \quad (1.67)$$

Im folgenden werden wir den Index  $E$  zum Kennzeichen euklidischer Größen weglassen und stattdessen bei der Fortsetzung die minkowskischen Größen mit einem Index  $M$  kennzeichnen.

## 1.6 Lösungsalgorithmus für die crossingsymmetrische BS-Gleichung

Zunächst ist es notwendig,  $M_4$  durch Abbruch seiner Skelettgraphenentwicklung zu bestimmen, bei der wir uns beschränken auf den Graphen nullter Ordnung  $M_4 = 1$ . Wir betrachten nun Gleichung (1.67) in der Operatorschreibweise. Formal ist

$$X_s = K_s G_s^0 [K_s - \frac{g^2}{2} X_s] \quad (1.68)$$

eine lineare Integralgleichung, bei der die Nichtlinearität in den Kern

$$K_s = 1 - \frac{g^2}{2} (X_t + X_u) \quad (1.69)$$

verbannt ist. Dies legt als Lösungsprozeß ein Iterationsverfahren mit zwei Schritten nahe. Als Startwert wählt man beispielsweise den Skelettgraphen niedrigster Ordnung  $K^{(0)} = 1$ .

1. Löse die Integralgleichung (1.68) im  $(n)$ -ten Iterationsschritt

$$X_s^{(n)} = K_s^{(n-1)} G_s^0 [K_s^{(n-1)} - \frac{g^2}{2} X_s^{(n)}] \quad (1.70)$$

2. Bestimme

$$K_s^{(n)} = 1 - \frac{g^2}{2} (X_t^{(n)} + X_u^{(n)}) \quad (1.71)$$

als neuen Input, indem die Crossingoperationen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t : X_s &= (p|X(P)|p') \\ &\longrightarrow (q|X(Q)|q') \\ &= \frac{1}{2}(P - p' - p)|X(p' - p)| - \frac{1}{2}(P + p' + p) \\ &= X_t \\ \mathcal{C}_u : X_s &= (p|X(P)|p') \\ &\longrightarrow (r|X(R)|r') \\ &= (-\frac{1}{2}(P + p' - p)|X(p' + p)|\frac{1}{2}(P - p' + p)) \\ &= X_u \end{aligned} \quad (1.72)$$

durchgeführt werden.

Bemerkung:

Im Augenblick des Lösens der einen Kanal auszeichnenden linearen Integralgleichung ist die Crossingsymmetrie verletzt. Dieses wird besonders deutlich an den Startwerten  $X_t^{(0)} = X_u^{(0)} = 0 \rightarrow K_s^{(0)} = 1 \rightarrow X_s^{(1)} \neq 0$ . Zwar ist nach Ausführung der

Crossingoperationen diese wiederhergestellt, man bietet aber der crossingsymmetrischen Gleichung durch diese zwei-prozessige Iteration, d.h. der Mititerierung des Integralkerns Freiheitsgrade, in die Instabilitäten aufgenommen werden können. Es ist folglich nicht gesagt, daß obiger Lösungsalgorithmus in die Lösung der crossingsymmetrischen Gleichung konvergiert. Konvergiert er allerdings, so definiert dies eine Lösung der Gleichung. Grundsätzlich wäre aber ein Lösungsalgorithmus der Form

$$\begin{aligned} X_s^{(n)} &\rightarrow X_s^{(n+1)} \\ X_t^{(n)} &\rightarrow X_t^{(n+1)} \\ X_u^{(n)} &\rightarrow X_u^{(n+1)} \end{aligned} \quad (1.73)$$

interessant, der die Crossingsymmetrie in jedem Iterationsteilschritt respektiert. Dafür benötigte man einen Variablensatz, in dem die Crossingoperationen eine möglichst einfache Gestalt annehmen (siehe Anhang B). Eine Schwierigkeit besteht dann allerdings darin, eine Integralgleichung in Impulsen formulieren zu müssen, die nicht zu einem ausgezeichneten Kanal gehören.

Wir werden ab jetzt den Kern  $K_s$  mit  $K$  und den Zweiteilchenpropagator  $G_s^0$  mit  $G$  bezeichnen, da Verwechslungen ausgeschlossen sind.

## 1.7 Lösung der linearen Integralgleichung

Die Theorie der linearen Integralgleichungen, insbesondere die der Fredholmschen Integralgleichungen 2.Art, ist wohluntersucht z.B. [BS 89] und [CH 69]. Im allgemeinen sind diese analytisch nicht exakt lösbar. Im folgenden werden daher zwei Näherungsverfahren vorgestellt, die im Hinblick auf Bestimmung von Bindungszuständen als besonders geeignet erscheinen und sich in der Art ihrer Näherung grundsätzlich unterscheiden.

1. Der Kern wird genähert, aber die Integralgleichung wird exakt gelöst.  
(Produktkernverfahren)
2. Der Kern bleibt exakt, aber die Integralgleichung wird genähert gelöst.  
(Fredholmverfahren)

### 1.7.1 Das Produktkernverfahren

Gl. (1.68) wird exakt lösbar, wenn der Kern ein Produktkern ist. Dies ist er in unserem Fall nicht, es gibt aber vielfältige Möglichkeiten  $K$  durch einen solchen zu



approximieren

$$K \rightarrow \tilde{K} := \sum_{i=0}^{rg} f_i(p, P) f_i(p', P) \quad , \quad (1.74)$$

mit geeigneten Funktionen  $f_i$  und  $rg = \text{Rang des Kerns}$ .<sup>8</sup> Wir wollen die Symmetrie von  $K$  bzgl  $p$  und  $p'$  in der Näherung  $\tilde{K}$  explizit einbauen. Sei also:

$$\tilde{K} = \langle f, f \rangle = f(p, P)^T f(p', P) \quad (1.75)$$

mit  $f(p, P)^T := (f_0(p, P), \dots, f_{rg}(p, P))$  .

Die genäherte Lösung von Gl. (1.68) ist von der Form

$$X_s = \langle h, h \rangle := \langle f | A(s) | f \rangle \quad . \quad (1.76)$$

(Wir bezeichnen die Lösung der Integralgleichung mit genährtem Kern als  $X_s$  und weisen explizit darauf hin, wenn wir die Lösung der Integralgleichung mit vollständigem Kern meinen.) Eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \langle h, h \rangle &= \langle f, f \rangle G \langle f, f \rangle - \frac{g^2}{2} \langle f, f \rangle G \langle h, h \rangle \\ \langle f | A(s) | f \rangle &= \langle f | I(s) | f \rangle - \frac{g^2}{2} \langle f | I(s) A(s) | f \rangle \end{aligned} \quad (1.77)$$

und schließlich

$$A(s) = \frac{I(s)}{\mathbf{1} + \frac{g^2}{2} I(s)} \quad (1.78)$$

mit

$$\begin{aligned} I(s) &:= (I_{ij}(s)) \\ I_{ij}(s) &:= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f_i(k, P) G(k, P) f_j(k, P) \quad . \end{aligned} \quad (1.79)$$

Bemerkung:

1. Die Fredholmdeterminante  $\Delta_F(s)$ , deren Nullstellen im Minkowskischen die Bindungsmassen markieren, ist hier

$$\Delta_F(s) = \det\left(1 + \frac{g^2}{2} I(s)\right) \quad . \quad (1.80)$$

2. Da  $I(s)$  symmetrisch ist, ist  $\mathbf{1} + \frac{g^2}{2} I(s)$  diagonalisierbar. Insbesondere gibt es eine Matrix  $S$ , so daß

$$D(s) := S^t \left[ \mathbf{1} + \frac{g^2}{2} I(s) \right] S \quad (1.81)$$

---

<sup>8</sup>Die Abhängigkeit  $K = K(p \cdot p')$  geht bei dieser Form verloren. Um sie zu erfassen, müßte man Funktionen  $f_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  zulassen, die Lorentztensoren höherer Stufe darstellen.

diagonal ist. Wegen

$$\frac{g^2}{2}X_s = \langle Sf | \mathbf{1} - \frac{g^2}{2}D^{-1}(s) | Sf \rangle \quad (1.82)$$

ist auch die Lösung  $X_s$  von Rang  $rg$ .

Speziell im Falle eines Produktkerns vom Rang eins gilt:

$$X_s = \langle h, h \rangle = \langle f_0(p, P) | \frac{I_{00}(s)}{1 + \frac{g^2}{2}I_{00}(s)} | f_0(p', P) \rangle \quad (1.83)$$

Also gilt insbesondere für den ersten Iterationsschritt  $K^{(0)} = 1$  (Blasennäherung) exakt:

$$X_s^{(1)} = \frac{I_{00}(s)}{1 + \frac{g^2}{2}I_{00}(s)} \quad (1.84)$$

mit

$$I_{00}(s) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G(k, P) \quad (1.85)$$

In  $D = 1$  gilt beispielsweise, wenn die Impulse mit  $m$  skaliert sind,  $I_{00} \rightarrow I_0(s) = \frac{1}{s+4}$  (siehe Anhang D). Führt man  $\lambda := \frac{g^2}{m^3}$  als dimensionslose Kopplung ein, dann gilt in Blasennäherung ( $K^{(0)} = 1$ ):

$$\frac{\lambda}{2}X_s^{(1)} = \frac{\lambda}{2}X_{sBlasen} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{s + 4 + \frac{\lambda}{2}} \quad (1.86)$$

Nach Fortsetzung  $s \rightarrow s_M := -s$  liefert dies Pole und damit Anregungsenergien  $\Delta\epsilon^2(\lambda) := \frac{\Delta E^2(\lambda)}{m^2} = 4 + \frac{\lambda}{2}$  im  $s$ -Kanal und im Gegensatz zur (gewöhnlichen) Bethe-Salpeter-Gleichung entsprechendes auch im  $t$ - und  $u$ -Kanal.

Mittels Crossingoperation erhält man den Kern des folgenden Iterationsschrittes zu:

$$K^{(1)} = 1 - \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{1}{(p-p')^2 + 4 + \frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{(p+p')^2 + 4 + \frac{\lambda}{2}} \right] \quad (1.87)$$

Dieser Kern ist offenbar kein Produktkern und muß demnach durch einen solchen approximiert werden.

## 1.7.2 Das Fredholmverfahren

Man kann Gl. (1.68) auf die normale Bethe-Salpeter-Gleichung umschreiben, indem  $T_s$  als (nichtcrossingsymmetrische)  $T$ -Matrix des  $s$ -Kanals eingeführt wird:

$$\underbrace{K - \frac{g^2}{2}X_s}_{T_s} = K - \frac{g^2}{2}KG \underbrace{\left[ K - \frac{g^2}{2}X_s \right]}_{T_s} \quad (1.88)$$

Das Fredholmverfahren ist ein Näherungsverfahren zur Bestimmung von  $T_s$ , bei dem der Kern nicht genähert werden muß. Es beruht auf der perturbativen Lösung der homogenen operatorwertigen Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} KGT_i &= \alpha_i T_i \\ \Leftrightarrow [\alpha_i \mathbf{1} - KG]T_i &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.89)$$

(Eine andere Herleitung findet man beispielsweise in [Ne 66].) Die Eigenwerte  $\alpha_i \neq 0$  bestimmt man mittels

$$\det[\mathbf{1} - \frac{1}{\alpha_i} KG] = 0 \quad . \quad (1.90)$$

Es gilt die Identität

$$\Delta_F(s, \alpha_i) = \det[\mathbf{1} - \frac{1}{\alpha_i} KG] = \exp \operatorname{tr} \ln[1 - \frac{1}{\alpha_i} KG] \quad , \quad (1.91)$$

wobei  $\Delta_F(s, \alpha_i)$  die Fredholmdeterminante im Fredholmverfahren bezeichnet. Diese Form ist für unsere Zwecke allerdings ungeeignet, da sie nur unter der Bedingung konvergiert, daß  $\frac{1}{\alpha_i} <$  kleinste Nullstelle von  $\Delta_F(s, \alpha)$ . Diese Nullstellen markieren im Minkowskischen aber gerade unsere Bindungspole. Wir entwickeln  $\ln[1 - \frac{1}{\alpha_i} KG]$  nach  $\frac{1}{\alpha_i}$ , lassen die Spur  $\operatorname{tr}$  auf jeden einzelnen Summanden wirken und entwickeln schließlich noch die  $\exp$ -Funktion.

Bis zur zweiten Ordnung ergibt sich:

$$\det[\mathbf{1} - \frac{1}{\alpha_i} KG] = 1 - \frac{1}{\alpha_i} \operatorname{tr} KG + \frac{1}{2\alpha_i^2} [-\operatorname{tr}(KG)^2 + (\operatorname{tr} KG)^2] \mp O[(\frac{1}{\alpha_i})^3] = 0 \quad (1.92)$$

mit

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} KG &= \operatorname{tr}(p|KG(s)|p') = \int dk (k|KG(s)|k) \\ \operatorname{tr}(KG)^2 &= \operatorname{tr}(p|KG(s)|p')(p'|KG(s)|p) = \int dk \int dk' (k|KG(s)|k')^2 \quad . \end{aligned} \quad (1.93)$$

Gilt für alle Eigenwerte des symmetrischen Integralkerns  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , so ist die Lösung der Gleichung (1.88) bis Ordnung  $n$  gegeben durch:

$$T_s = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{1 + \frac{g^2}{2}\alpha_i} K \quad , \quad (1.94)$$

dabei meint  $P_i$  den Projektor auf  $T_i$ , d.h.  $P_i T_j = \delta_{ij} T_i$ .

Wir zeigen dies, indem wir  $K$  nach den Eigenfunktionen  $T_j$  entwickeln:

$$K = \sum_{j=1}^n \gamma_j T_j \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned}
 (1 + \frac{g^2}{2}KG)T_s &= (1 + \frac{g^2}{2}KG) \sum_i^n \frac{P_i}{1 + \frac{g^2}{2}\alpha_i} \sum_j^n \gamma_j T_j \\
 &= (1 + \frac{g^2}{2}KG) \sum_i^n \frac{\gamma_i}{1 + \frac{g^2}{2}\alpha_i} T_i \\
 &= K \quad .
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

$P_i$  hat folgende explizite Form:

$$P_i = \prod_{j \neq i} \frac{KG - \alpha_j \mathbf{1}}{\alpha_i - \alpha_j} \quad . \tag{1.97}$$

Die Fredholmösung erhält man durch einmaliges Iterieren der Bethe-Salpeter-Gleichung

$$T_s = K - \frac{g^2}{2}KG \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{1 + \frac{g^2}{2}\alpha_i} K \quad . \tag{1.98}$$

Die Kanalampplitude des  $s$ -Kanals wird damit zu

$$\begin{aligned}
 X_s &= \frac{2}{g^2}(K - T_s) \\
 &= KGK \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{1 + \frac{g^2}{2}\alpha_i} \quad .
 \end{aligned} \tag{1.99}$$

In erster Ordnung der Fredholmtheorie (abgekürzt  $FO[1]$ ) ergibt sich

$$X_s = \frac{KGK}{1 + \frac{g^2}{2}\text{tr}KG} \tag{1.100}$$

und in zweiter Ordnung ( $FO[2]$ ) wegen

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + \alpha_2 &= \text{tr}(KG) \\
 \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= \frac{1}{2}(-\text{tr}(KG)^2 + (\text{tr}(KG))^2)
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

$$X_s = KGK \frac{1 + \frac{g^2}{2}(\text{tr}(KG) - GK)}{1 + \frac{g^2}{2}\text{tr}(KG) + \frac{g^4}{8}(-\text{tr}(KG)^2 + (\text{tr}(KG))^2)} \quad . \tag{1.102}$$

Nach Konstruktion ist die Fredholmösung eine gute Näherung für kleine Kopplungen. Wie weit ihr Gültigkeitsbereich reicht, kann nur eine Stabilitätsuntersuchung durch Heranziehen unterschiedlicher Entwicklungsordnungen zeigen.

Offenbar besitzt  $FO[1]$  die gleiche Nennergestalt wie ein Produktkern von Rang 1, kurz ( $PK Rg[1]$ ), vorausgesetzt der Produktkern wird so gebildet, daß er die Diagonalen des exakten Kerns richtig wiedergibt. Insbesondere wird also mit dem Fredholmverfahren der 1. Iterationsschritt ( $K^{(0)} = 1$ ) exakt gelöst.

Bemerkung:

Allgemein gilt (z.B.[CH 69]), daß ein Kern genau dann ein Produktkern ist, wenn er nur endlich viele Eigenwerte besitzt. Folglich löst das Fredholmverfahren der Ordnung  $n$  eine lineare Integralgleichung mit einem Produktkern von Rang  $n$  exakt.

# Kapitel 2

## Bestimmung der

## $T_4$ -Bindungsmassen in $\phi_{D=1}^4$

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß durch die im vorigen Kapitel skizzierte crossingsymmetrische Bethe-Salpeter-Gleichung alle erlaubten Zwei-Teilchen-Bindungszustände der  $\phi_{D=1}^4$ -Theorie ihrer Existenz nach erfaßt werden. Da diese Theorie dem wohluntersuchten anharmonischen Oszillator entspricht, läßt sich durch Vergleich mit quantenmechanischer Störungstheorie zeigen, daß diese in nullter Ordnung  $\lambda$  richtig liegen, aber bereits in erster Ordnung falsch sind. Andererseits definiert die Blasennäherung (erster Iterationsschritt) eine analytische Fortsetzung der störungstheoretischen Ergebnisse auf Ein-Schleifen-Niveau, was nahelegt, daß die Ursache auf fundamentalem Niveau zu finden ist. Dabei kann es sich zum einen um die Poltermnäherung des Propagators  $\Delta$  handeln, als auch um die eventuell noch nicht vollständige Berücksichtigung der Mikrokausalität.

### 2.1 Theorie des anharmonischen Oszillators

Die  $\phi^4$ -Theorie in einer raumzeitlichen Dimension beschreibt eine Feldtheorie in einem punktförmigen zeitlich oszillierendem Universum. Wir haben folglich ein rein diskretes Spektrum und keine asymptotisch freien Zustände zu erwarten. Formal ist diese Theorie äquivalent zum quantenmechanischen anharmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator [BW 69]

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{\lambda}{4!} x^4 \quad (2.1)$$

und der Vertauschungsrelation

$$[x, -i \frac{d}{dx}] = i \quad . \quad (2.2)$$

Dieser Zusammenhang wird deutlich, wenn man sich die Lagrangefunktion der  $\phi^4$ -Theorie in einer Dimension vor Augen führt

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(t) - \frac{1}{4!} g^2 \phi^4(t) \quad , \quad (2.3)$$

den zu  $\phi(t)$  konjugierten Impuls bestimmt

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right)} = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

und schließlich mittels Legendretransformation die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right)} - L \quad (2.5)$$

ermittelt. Prägen wir nun die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\left[ \phi(t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(t) \right] = i \quad (2.6)$$

auf und betrachten  $H$  in der  $\phi$ -Darstellung, so muß  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  der Differentialoperator  $-i \frac{d}{d\phi}$  sein, woraus folgt:

$$H = -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g^2 \phi^4 \quad . \quad (2.7)$$

Mittels

$$\begin{aligned} x^2 &:= m\phi^2 \\ \lambda &:= \frac{g^2}{m^3} \\ \frac{H}{m} &\rightarrow H \end{aligned} \quad (2.8)$$

ist die Analogie hergestellt.

Wegen

$$P = P^0 = H \quad P_\alpha = \epsilon = M \quad (2.9)$$

interpretiert man die Bindungsmassen  $M$  als Eigenwerte  $\epsilon$  des Hamiltonoperators  $H$ . Betrachtet man einen solchen Polbeitrag von  $T_4$  im Euklidischen  $\frac{1}{P^2 + M^2}$  und transformiert diesen in den Ortsraum

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &:= \int \frac{dP}{2\pi} \frac{1}{P^2 + M^2} e^{iPt} \\ &= \frac{1}{2M} e^{-M|t|} \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

so ist klar, daß man die Bindungsmasse erhält als

$$M = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln \mathcal{F}(t) \quad . \quad (2.11)$$

Nach [Kl 93] zieht man in ähnlicher Weise die Bindungsenergien direkt aus der Zeitentwicklungsamplitude  $(x't'|xt)$

$$(x't'|xt) = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4!} \lambda x^4 \right] \right\} \quad . \quad (2.12)$$

Entwickeln wir diese in eine Störungsreihe bezüglich  $\lambda$

$$\begin{aligned} (x't'|xt) &= \int \mathcal{D}x \left[ 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int_t^{t'} dt x(t)^4 \right. \\ &\quad + \left. \left( \frac{i \lambda}{2! 4!} \right)^2 \int_t^{t'} dt_2 x(t_2)^4 \int_t^{t'} dt_1 x(t_1)^4 + \dots \right] \\ &\quad \cdot \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt \left[ \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} x^2 \right] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (2.13)$$

und projizieren auf Eigenzustände des harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} \int dx' dx \psi_n^*(x') (x't'|xt) \psi_n(x) &= \int dx' dx \psi_n^*(x') (x't'|xt)_w \psi_n(x) \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - i \frac{\lambda}{4!} \langle n | \mathcal{A} | n \rangle + \left( \frac{i \lambda}{2! 4!} \right)^2 \langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle \mp \dots \right\} \quad , \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei  $(x't'|xt)_w$  die Zeitentwicklungsamplitude des harmonischen Oszillators meint, dann erhalten wir für die Wechselwirkung

$$\mathcal{A} = \int_t^{t'} dt x(t)^4 \quad (2.15)$$

die Erwartungen

$$\langle n | \mathcal{A} | n \rangle = e^{i(n+\frac{1}{2})(t'-t)} \int_t^{t'} dx' dx dx_1 \psi_n^*(x') (x't'|xt)_w x_1^4 (x_1 t_1 | xt)_w \psi_n(x) \quad (2.16)$$

in erster Ordnung und die Erwartungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle &= e^{i(n+\frac{1}{2})(t'-t)} \int_t^{t'} dt_2 \int_t^{t'} dt_1 \int dx dx' dx_2 dx_1 \\ &\quad \cdot \psi_n^*(x') (x't'|x_2 t_2)_w x_2^4 (x_2 t_2 | x_1 t_1)_w x_1^4 (x_1 t_1 | xt)_w \psi_n(x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

in zweiter Ordnung.

Die Verschiebung der  $n$ -ten Oszillatorenergie gegenüber der Grundzustandsenergie  $\epsilon_n(\lambda = 0) = n + \frac{1}{2}$  erhält man, indem man die Reihe so umsummiert, daß sie

in einer Exponentialfunktion auftaucht. So ergibt sich schließlich nach Vorschrift (2.11)

$$\begin{aligned}\epsilon_n(\lambda) &= n + \frac{1}{2} + \lim_{t'-t \rightarrow \infty} \frac{i}{t'-t} \ln \left( \int dx' dx \psi_n^*(x') (x't'|xt) \psi_n(x) \right) \\ &= n + \frac{1}{2} + \lim_{t'-t \rightarrow \infty} \frac{i}{t-t'} \left\{ +i \frac{\lambda}{4!} \langle n | \mathcal{A} | n \rangle - \left( i \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle_c \pm \dots \right\} ,\end{aligned}\quad (2.18)$$

wobei man die  $\langle n | \mathcal{A}^j | n \rangle_c$  mittels Kumulantenentwicklung erhält. Z.B.

$$\langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle_c = \langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle - \langle n | \mathcal{A} | n \rangle^2 \quad . \quad (2.19)$$

Zur expliziten Berechnung der Erwartungen benutzen wir die Spektraldarstellung der Zeitentwicklungsamplitude des harmonischen Oszillators

$$(x't'|xt)_w = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x') \psi_n^*(x) e^{-i(n+\frac{1}{2})(t'-t)} \quad . \quad (2.20)$$

Damit berechnet man

$$\langle n | \mathcal{A} | n \rangle = (t' - t) V_{nn} \quad (2.21)$$

und

$$\frac{1}{2} \langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{mn}}{\epsilon_m - \epsilon_n} i(t' - t) + V_{nn} V_{nn} \frac{(t' - t)^2}{2} \quad (2.22)$$

mit

$$\begin{aligned}V_{nm} &:= \int dx \psi_n^*(x) x^4 \psi_m(x) \\ &= \langle n | x^4 | m \rangle \quad .\end{aligned}\quad (2.23)$$

Für die Kumulanten in zweiter Ordnung erhält man schließlich:

$$\frac{1}{2} \langle n | \mathcal{A}^2 | n \rangle_c = - \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{mn}}{\epsilon_m - \epsilon_n} i(t' - t) \quad . \quad (2.24)$$

Die Energie in  $n$ -ter Ordnung erhält man nun am einfachsten durch Berechnung der Größen  $V_{nm}$ , indem man die aus der Quantenmechanik des harmonischen Oszillators gebräuchlichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $a$  und  $a^+$  einführt. Mit  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+)$ ,  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n |0\rangle$  und  $[a, a^+] = 1$  folgt

$$\begin{aligned}\epsilon_n(\lambda) &= n + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4!} \frac{3}{4} (2n^2 + 2n + 1) \\ &\quad - \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \frac{1}{8} (34n^3 + 51n^2 + 59n + 21) + \dots \quad .\end{aligned}\quad (2.25)$$



Da ihre Entwicklungskoeffizienten für große  $k$  mit  $k!$  anwachsen, hat diese Entwicklung den Konvergenzradius null. Allerdings läßt sich aus ihr mittels Padéfortsetzung eine Funktion  $\epsilon_{pade,n}(\lambda)$  definieren. Beispielsweise erhält man aus Gl. (2.25) für die Ordnung  $\frac{O[\lambda^1]}{O[\lambda^1]}$  die Padéfortsetzung

$$\epsilon_{pade,n}(\lambda) = \frac{\frac{1+2n}{2} + \lambda \left( \frac{1+2n+2n^2}{32} - \frac{(-1-2n)(21+59n+51n^2+34n^3)}{288(1+2n+2n^2)} \right)}{1 + \lambda \frac{(21+59n+51n^2+34n^3)}{144(1+2n+2n^2)}}. \quad (2.26)$$

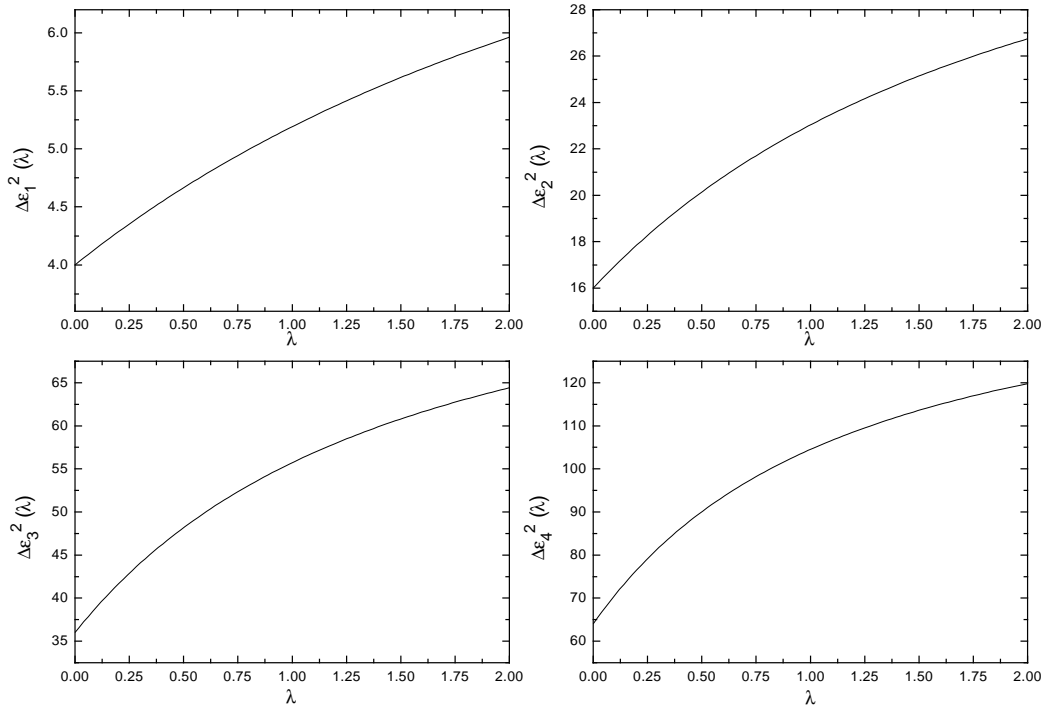


Abb.2.1:  $\Delta\epsilon_n^2(\lambda) = (\epsilon_{2n}(\lambda) - \epsilon_0(\lambda))^2$

Die ersten vier Quadrate der geraden Anregungsenergien durch Padéfortsetzung der Störungsreihe (2.25)

Bemerkung:

Es waren zuerst Bender und Wu [BW 69], die eine für große Kopplungen konvergente störungstheoretische Entwicklung für die Grundzustandsenergie angeben konnten, indem sie Gl. (2.12) nach  $\lambda$  entwickelten und die auftretenden Integrale für große Ordnungen mittels Sattelpunktmethode berechneten. Tatsächlich handelt es sich hierbei allerdings um eine extreme Starkkopplungsentwicklung. Eine modernere, ebenfalls semiklassische Näherung besteht darin, diese störungstheoretische Rechnung mit einem Variationsverfahren zu verbinden und so gute Ergebnisse für beliebig große  $\lambda$  zu erzielen, was wir hier allerdings nicht weiter verfolgen wollen.

Ziel ist es nun, anhand dieser Vergleichsergebnisse das Ergebnis unseres Algorithmus in erster Ordnung  $\lambda$  zu überprüfen.

Zu beachten ist zunächst, daß es Einschränkungen dadurch geben wird, daß die Residuen einiger Bindungspole null werden. Beim quantenmechanischen anharmonischen Oszillator ist die Parität wegen  $[H, P] = 0$  eine erhaltene Größe. Für das Spektrum bedeutet dies, daß es mit abwechselnder Parität geordnet ist.

Da die Bethe-Salpeter-Amplitude  $\langle 0|T[\phi(t_1)\phi(t_2)]|\alpha\rangle$ , als Übergangsamplitude zwischen Grund- und Bindungszustand, für Übergänge zwischen Zuständen ungleicher Parität den Wert 0 annehmen sollte, erwartet man, daß nur die geraden Zustände angeregt werden, wir folglich für ein Spektrum mit folgendem Grenzwertverhalten  $\lambda \rightarrow 0$  erhalten:

$$\Delta\epsilon_n^2 = 4n^2 + \frac{\lambda}{2}n^2(2n+1) \quad (2.27)$$

Das Starkkopplungsverhalten erhält man mittels einer einfachen Umskalierung von

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4!}x^4 \quad (2.28)$$

Zu diesem Zweck machen wir die Substitution [ZJ 90]

$$x \rightarrow \lambda^{-\frac{1}{6}}x' \quad (2.29)$$

und erhalten wegen

$$\begin{aligned} H &= \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx'}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{2}{3}}x'^2 + \frac{1}{4!}x'^4\right\}\lambda^{\frac{1}{3}} \\ &=: \tilde{H}\lambda^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

schließlich:

$$E(\lambda \rightarrow \infty) \sim \lambda^{\frac{1}{3}} \quad (2.31)$$

Es ist allerdings nicht gesagt, daß diese nichtanalytische Kopplungsabhängigkeit in der Näherung  $M_4 = 1$  enthalten ist.

## 2.2 Lösungsmodelle der crossingsymmetrischen BS-Gleichung

Was wir mit unserem Konstruktionsmechanismus erhalten, ist ein unendliches Spektrum von teilchenartigen Bindungszuständen, bzw. deren erlaubten Anregungsenergien, d.h. alle mit nicht-verschwindenden Residuen, deren Bindungsmassen wir als Eigenwerte des Hamiltonoperators interpretieren. Wir werden drei spezielle Lösungsmodelle studieren, die auf Selbstkonsistenzansätzen für die Kanalamplitude  $X_s$  bzw. dem Kern  $K$  beruhen. Man kann diese auffassen als Verallgemeinerung der iterativ erhaltenen funktionellen Abhängigkeit obiger Größen.

1. Im Modell konstanter Kern wird der nullte Iterationsschritt  $K^{(0)} = 1$  dahingehend erweitert, daß wir in jedem Iterationsschritt eine Kernnäherung  $K^{(n)} \rightarrow \tilde{K}^{(n)}$  durchführen, wobei  $\tilde{K}$  impulsunabhängig ist. Wir werden anhand dieses Modells verschiedene Strukturuntersuchungen vornehmen.
  - (a) Korrektur der ersten, mittels Blasennäherung erhaltenen, Bindungsmasse durch Crossing.
  - (b) Vergleich dieses Ergebnisses mit dem, das man mittels quantenmechanischer Störungstheorie erhält.
  - (c) Konvergenzstudien der Iteration.
2. Im Selbstkonsistenzmodell erster Stufe erweitern wir die Lösung des ersten Iterationsschrittes für  $X_s$  (Gl. 1.86) zum Selbstkonsistenzansatz

$$X_s^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{s + M_i^2} \quad , \quad (2.32)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Iterationsschritte ist. Mit diesem Modell läßt sich im Prinzip das gesamte Spektrum des anharmonischen Oszillators seiner Existenz nach bestimmen. Wir werden im einzelnen folgende Untersuchungen machen:

- (a) Studium des Verhaltens der Bindungsmassen für kleine  $\lambda$  und Vergleich mit quantenmechanischer Störungstheorie. Insbesondere berücksichtigen wir näherungsweise  $M_4$ , indem wir ihn als freie zahlenwertige Größe  $Z$  mitführen und untersuchen deren Einfluß auf die numerische Lage speziell der ersten vier geraden Bindungsmassen in erster Ordnung von  $\lambda$ .
- (b) Wir definieren eine konvergenzverbessernde Iteration, bestimmen exemplarisch die ersten acht Bindungsmassen und untersuchen den Einfluß der Variation der gemachten Näherungen (Stützstellen in den Relativimpulsen). In dem Bereich, in dem sich die Bindungsmassen als stabil gegenüber dieser Variation herausstellen, geben wir  $X$ -Amplituden an.

(c) Wir definieren einen festen Selbstkonsistenzansatz für  $X_s$ , indem wir  $n$  in Gl. (2.32) als festen Wert vorgeben und erhalten als analytische Reduktion der crossingsymmetrischen Bethe-Salpeter-Gleichung ein nichtlineares Gleichungssystem, mittels dem das Verhalten für große Kopplungen untersucht werden kann.

3. Im Selbstkonsistenzmodell zweiter Stufe wird der zweite Iterationsschritt (bei vollständiger Mitnahme der Impulsabhängigkeit) verallgemeinert, so daß die Relativimpulsabhängigkeit näherungsweise mit berücksichtigt wird.

### 2.2.1 Modell konstanter Kern

Wir betrachten zunächst die Blasennäherung ( $K = 1$ ) der Bethe-Salpeter-Gleichung für die  $T$ -Matrix des  $s$ -Kanals  $T_s$ . Aus Kapitel 1.7 entnehmen wir:

$$T_s = 1 - \frac{\lambda}{2} X_s = 1 - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{s + 4 + \frac{\lambda}{2}} \quad . \quad (2.33)$$

Das erste Anregungsenergiequadrat liegt folglich bei

$$\Delta\epsilon^2(\lambda) = 4 + \frac{\lambda}{2} \quad . \quad (2.34)$$

Ein Vergleich mit Gl. (2.27) für  $n = 1$  zeigt, daß diese in erster Ordnung von  $\lambda$  um den Faktor 3 zu klein ist. Die crossingsymmetrische Erweiterung (1. Iterationsschritt) liefert entsprechende Pole in den beiden anderen Kanälen

$$T = 1 - \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{1}{s + 4 + \frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{t + 4 + \frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{u + 4 + \frac{\lambda}{2}} \right] \quad . \quad (2.35)$$

Wir wollen nun anhand des Modells konstanter Kern untersuchen, inwieweit Crossing die erste mittels Blasennäherung berechnete Anregungsenergie korrigiert. Dazu betrachten wir die Kernnäherung, in der in jedem Iterationsschritt die Relativimpulse  $p, p'$  auf feste Werte  $\bar{p}, \bar{p}'$  gesetzt werden. Wir wählen explizit

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \bar{p} = 0 \\ p' &\rightarrow \bar{p}' = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

und erhalten die Kernnäherung  $\tilde{K}$  durch

$$K \rightarrow \tilde{K} := (p^2 = 0 | K | p^2 = 0) \quad . \quad (2.37)$$

Der Kern  $\tilde{K}$  ist folglich zahlenwertig, da sich eine  $s$ -Abhängigkeit des Kerns erst durch Iteration unter Mitnahme der Relativimpulsabhängigkeit installiert. Wir erhalten somit folgenden Iterationsprozeß:

1. Nach Gl. (1.68) ist die im (n)-ten Iterationsschritt zu lösende Integralgleichung

$$X_s^{(n)} = \tilde{K}^{(n-1)} G \tilde{K}^{(n-1)} - \frac{g^2}{2} \tilde{K}^{(n-1)} G X_s^{(n)} \quad . \quad (2.38)$$

mit

$$G = G(k^2, s) = \frac{1}{[(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \quad . \quad (2.39)$$

2. Nach  $FO[1]$  (Gl. (1.100)) bzw.  $PK Rg 1$  (Gl. (1.84)) ergibt sich für  $X_s$

$$X_s^{(n)} = \frac{\tilde{K}^{(n-1)2}}{s + 4 + \frac{\lambda}{2}\tilde{K}^{(n-1)}} \quad . \quad (2.40)$$

3. Mittels Crossingoperation erhält man für den vollständigen Kern

$$\begin{aligned} K^{(n)} &= 1 - \frac{\lambda}{2}(X_t^{(n)} + X_u^{(n)}) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{2}\tilde{K}^{(n)2} \left( \frac{1}{(p - p')^2 + 4 + \frac{\lambda}{2}\tilde{K}^{(n)}} + \frac{1}{(p + p')^2 + 4 + \frac{\lambda}{2}\tilde{K}^{(n)}} \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.41)$$

4. Den Integralkern  $\tilde{K}^n$  des folgenden Iterationsschrittes erhält man durch die Näherung (2.37).

Faßt man den Iterationsprozeß zu einer Gleichung zusammen, erhält man die Rekursionsbeziehung

$$\tilde{K}^{(n+1)} = 1 - \lambda \frac{\tilde{K}^{(n)2}}{4 + \frac{\lambda}{2}\tilde{K}^{(n)}} \quad . \quad (2.42)$$

Iteriert man den Kern und läßt sich das Quadrat der Bindungsenergie in Einheiten der Propagatormasse

$$\Delta\epsilon^{2(n)}(\lambda) = 4 + \frac{\lambda}{2}\tilde{K}^{(n)} \quad (2.43)$$

als Funktion von  $\lambda$  plotten, so sieht man in (Abb. 2.2), daß das Iterationsverfahren nur auf einem begrenzten Kopplungsbereich konvergiert.

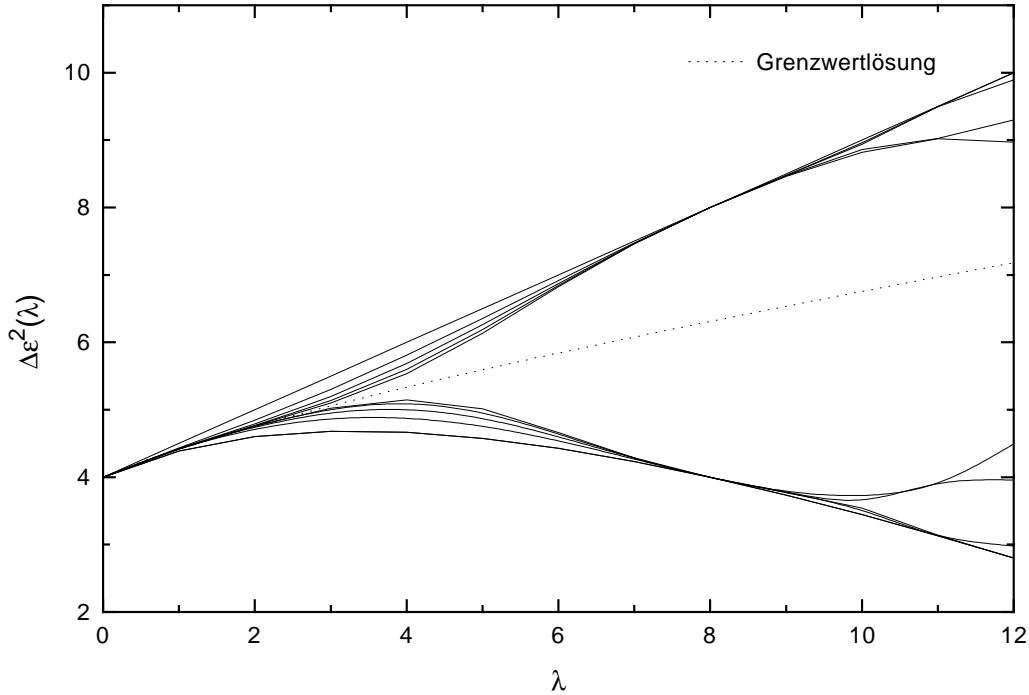


Abb.2.2:  $\Delta\epsilon^{2(n)}(\lambda)$   
 “normale” Iteration + Grenzwertlösung  
 Schrittweite  $\Delta\lambda = 1$ , Iterationsschritte  $n = 13 \dots 20$

Berechnet man ungeachtet dessen den “Grenzwert”, indem man in Gl. (2.42)

$$\tilde{K}^{(n+1)} = \tilde{K}^{(n)} =: \tilde{K} \quad (2.44)$$

setzt, nach  $\tilde{K}$  auflöst und in Gl. (2.43) einsetzt, so erhält man

$$\Delta\epsilon^2(\lambda) = 4 + \frac{1}{6} \left[ - \left( 4 - \frac{\lambda}{2} \right) \pm \sqrt{\left( 4 - \frac{\lambda}{2} \right)^2 + 24\lambda} \right] \quad (2.45)$$

Hierbei ist nur “+” eine physikalisch sinnvolle Lösung, da sonst ab einem gewissen Kopplungswert negative Energien auftreten würden. Für diese erhält man die Reihendarstellung

$$\Delta\epsilon_+^2(\lambda) = 4 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{5\lambda^3}{64} + O[\lambda^4] \quad (2.46)$$

In (Abb. 2.3) sieht man, daß diese die Blasennäherung erst in zweiter Ordnung von  $\lambda$  korrigiert und damit falsch bleibt. Ein Vergleich unserer analytischen Ergebnisse (2.45) mit den numerisch exakten Werten [Rd 65] zeigt zwar auch, daß der funktionelle Verlauf von (3)  $\epsilon_{(exakt)}^2(\lambda)$  im Gegensatz zu dem der Blasennäherung

(2)  $\epsilon_{(Blasen)}^2(\lambda)$  durch (1)  $\epsilon_{(Cros)}^2(\lambda)$  gut wiedergegeben ist, rein numerisch gesehen aber die Bindungsenergien zur "falschen" Seite korrigiert werden.

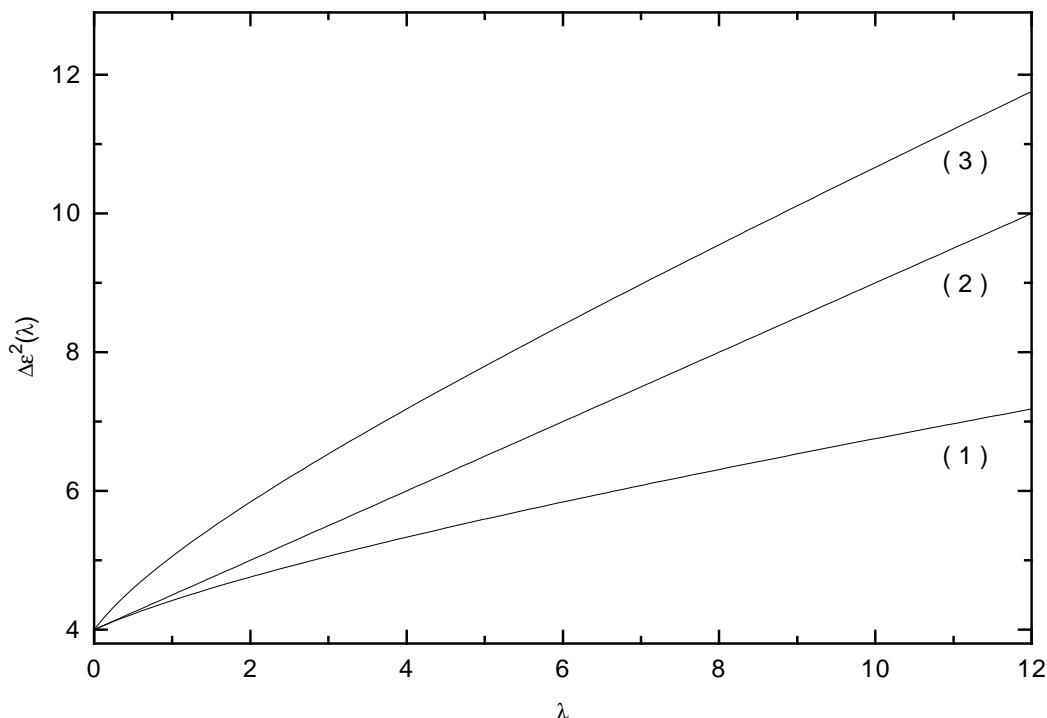


Abb.2.3:  $\Delta\epsilon^2(\lambda)$

- (1): Crossinglösung  $M_4 = 1$
- (2): Blasennäherung
- (3): exakte Lösung [Rd 65]

Betrachten wir  $T$  einmal vom störungstheoretischen Standpunkt in erster Ordnung. Zunächst gilt für  $T_s$ :

$$T_{s,pert} = 1 - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{s+4} \quad . \quad (2.47)$$

Padéfortsetzung der Ordnung  $\frac{O[\lambda]}{O[\lambda]}$  liefert

$$T_{s,pade} = 1 - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{s+4+\frac{\lambda}{2}} \quad . \quad (2.48)$$

Das ist genau das Ergebnis, das man auch mittels Blasennäherung erhält, was nahelegt, daß die Berechnung von  $T_4$  mittels der Bethe-Salpeter-Gleichung "vernünftig" ist.

Für die crossingsymmetrische  $T$ -Matrix gilt

$$T_{pert} = 1 - \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{1}{s+4} + \frac{1}{t+4} + \frac{1}{u+4} \right] \quad . \quad (2.49)$$

Wir betrachten nun die symmetrische Funktion  $T_{sym}(s = t = u)$

$$T_{sym} = 1 - \frac{3}{2}\lambda \frac{1}{s+4} \quad , \quad (2.50)$$

und setzen diese mittels Padé-Entwicklung fort

$$T_{sym,pade} = 1 - \frac{3}{2}\lambda \frac{1}{s+4+\frac{3}{2}\lambda} \quad . \quad (2.51)$$

Wir erhalten so die in erster Ordnung korrekte Anregungsenergie für den ersten angeregten geraden Zustand (vergl. (2.27) für  $n = 1$ ). Allerdings läßt sich dieses Verfahren nicht, zumindest nicht in kanonischer Art und Weise, erweitern, so daß sich die Eigenwerte für höhere angeregte Zustände wie eben beschrieben, aus den Ergebnissen für die Bindungsmassen gewinnen lassen. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß die Berücksichtigung der Mikrokausalität in noch nicht vollständiger Weise vollzogen wurde. Es wird sich hierbei aber nicht um eine Folge des Lösungsprozesses handeln, auch wenn dieser die Crossingsymmetrie in einem Iterationsteilschritt, dem Lösen der linearen Inegralgleichung, bricht. Dieser wird, wie wir mittels (Abb. 2.2) verifizieren können, in bestimmten Bereichen der Kopplung nicht konvergieren, konvergiert er aber, so definiert dies eine Lösung der crossingsymmetrischen Gleichung. Denkbar ist demnach, daß es einer anderen dynamischen Gleichung zur Berücksichtigung der Mikrokausalität bedarf, die mehr als nur Zwei-Teilchen-Prozesse berücksichtigt. Wahrscheinlich aber ist es durchaus eine Eigenschaft der Mikrokausalität, die Bindungsmasse  $M^2$ , die man mittels Blasennäherung erhält, nach unten zu korrigieren, nur das letztere bereits zu niedrig liegt.

Um dieses Problem zu klären, werden wir den Einfluß der Näherung für  $M_4$  studieren. In Kapitel 1.4 haben wir gesehen, daß  $M_4$  außer der 1 nur Beiträge mit mindestens drei Schleifen besitzt. Oder anders gesagt:  $M_4$  ist erst in Ordnung  $\lambda^3$  an höhere Greensfunktionen gekoppelt. Eine Korrektur der Bindungsmassen in erster Ordnung von  $\lambda$  durch höhere Ordnungen der Skelettgraphenentwicklung von  $M_4$  sollte demnach nicht möglich sein, dennoch wollen wir den Einfluß von  $M_4$  auf die Bindungsmassen durch eine unbestimmte zahlenwertige Größe  $Z$  in sehr grober Näherung mit berücksichtigen:

$$(p|M_4(P)|p') \rightarrow Z \in \mathbb{R} \quad . \quad (2.52)$$

Dazu werden wir  $Z$  an das Ergebnis quantenmechanischer Störungstheorie für die erste Anregungsenergie der Ordnung  $O[\lambda^1]$  "anfitten". Es gilt

$$K = Z - \lambda \frac{K^2}{4 + \frac{\lambda}{2}K} \quad . \quad (2.53)$$

Für  $\Delta\epsilon^2$  folgt als Funktion von  $Z$ , wenn man nur "+" als Lösung betrachtet

$$\Delta\epsilon_Z^2(\lambda) := 4 + \frac{1}{6} \left[ -\left(4 - \frac{\lambda}{2}Z\right) + \sqrt{\left(4 - \frac{\lambda}{2}Z\right)^2 + 24\lambda Z} \right] \quad (2.54)$$

$$= 4 + \frac{\lambda}{2}Z + O[\lambda^2] \quad . \quad (2.55)$$



Durch Vergleich mit Gl. (2.27) für  $n = 1$  finden wir

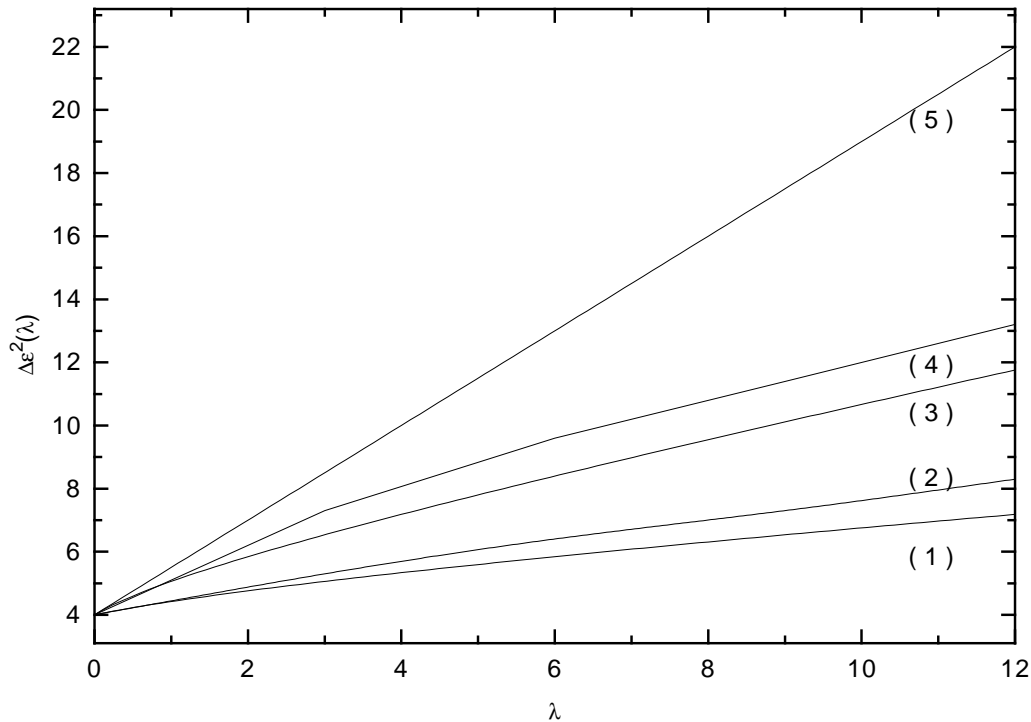
$$Z = 3 \tag{2.56}$$

Aus (Abb. 2.4) können wir Aussagen gewinnen über ... .

1. ...die Qualität der Näherung konstanter Kern:  
Die exakte numerische Lösung der crossingsymmetrischen Bethe-Salpter-Gleichung (kurz: cs BS-Gl.) für  $M_4 \rightarrow Z = 1$  (2) stimmt bis auf 10% mit der analytischen Lösung (2.45) der cs BS-Gl. in der Näherung konstanter Kern überein (1).
2. ...den Einfluß des Crossings bei angefittem  $M_4 \rightarrow Z = 3$ :  
Crossing (3) korrigiert die Blasennäherung (5) mit  $Z = 3$  bis auf Fehler von 10% zur exakten Lösung (4).

Bemerkung zu 1)

In der Arbeit [Kr 93] wurde die crossingsymmetrische Gleichung ( $M_4 \rightarrow Z = 1$ ) diskretisiert, numerisch gelöst, die gewonnenen Daten mit rationalen Funktionen angefitet und damit die erste Anregungsenergie bestimmt. Man kann daher davon ausgehen, daß das Modell konstanter Kern bereits eine gute Approximation der ersten Anregungsenergie auf einem nicht zu groß gewählten Kopplungsbereich innerhalb der Näherung  $M_4 = 1$  darstellt.


 Abb.2.4:  $\Delta\epsilon^2(\lambda)$ 

- (1): Crossinglösung (analytisch)  $Z = 1$
- (2): numerische Crossinglösung  $Z = 1$  [Kr 93]
- (3): Crossinglösung (analytisch)  $Z = 3$
- (4): exakte Lösung [Rd 65]
- (5): Blasennäherung mit  $Z = 3$

Wenden wir uns dem nichtanalytischen Verhalten für große  $\lambda$  zu, so erkennen wir, daß dieses durch das betrachtete Modell nicht richtig erfaßt wird:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta\epsilon_Z(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{6}\lambda Z} \quad . \quad (2.57)$$

Dabei könnte es sich um eine Folge der Kernnäherung handeln, denkbar ist aber auch, daß die Nichtanalytizität in  $M_4$  steckt, also  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M_4 = \lambda^{-\frac{1}{3}}$ .

### Konvergenzstudie des Iterationsprozesses konstanter Kern

Daß der Iterationsprozeß nur auf einem beschränktem Kopplungsbereich konvergiert, ist, nach unseren Ausführungen in Kapitel 1.6, keine Folge der hier speziell betrachteten Kernnäherung, sondern eine Eigenschaft des allgemeinen Lösungsprozesses mittels Iteration. Wir wollen nun eine einfache konvergenzverbessernde Iteration speziell für diese Kernnäherung angeben, die wir in Kapitel 2.2.2 auf das dort betrachtete Modell übertragen werden.

Wir schreiben Gl. (2.42) als Fixpunktgleichung

$$K = f(K) \quad (2.58)$$

mit

$$f(K) = Z - \lambda \frac{K^2}{4 + \frac{\lambda}{2}K} \quad (2.59)$$

Der bisher betrachtete Iterationsprozeß entspricht dem Lösen dieser nichtlinearen Gleichung mittels Fixpunktiteration:

$$K^{(n+1)} = f(K^{(n)}) \quad (2.60)$$

Soweit man beliebig gute Startwerte vorgeben kann, ist der Konvergenzbereich in  $\lambda$  gegeben durch

$$|f'(K_e)| < 1 \quad (2.61)$$

wobei  $K_e$  die exakte Lösung von Gl. (2.58) ist. Solches wird erreicht, indem man die Gleichung für feste Kopplungswerte löst und diese in geeigneten kleinen Schritten hochfährt.

Wir bilden  $f'(K)$ , setzen die exakte Lösung  $K_e$  ein und lösen die Gleichung für  $\lambda$  numerisch. Dies ergibt die Grenzen  $\lambda_{grenz}$  des Konvergenzbereichs

$$\begin{aligned} \lambda_{grenz}(Z = 1) &= 5.25 \\ \lambda_{grenz}(Z = 3) &= 1.75 \quad (2.62) \end{aligned}$$

Wir ändern daher die Fixpunktgleichung ein wenig ab.

$$\begin{aligned} K &= f(K) \\ \Leftrightarrow K &= \underbrace{(K^n f(K))^{1/(n+1)}}_{=: f_n(K)} \quad (2.63) \end{aligned}$$

$$|f'_n(K)| = \left| \frac{1}{n+1} (n + f'(K)) \right| < 1 \quad (2.64)$$

Wir betrachten  $n = 1$ . Wegen  $1 \geq f'(K_e) \geq -2$  gilt  $|f'_1(K_e)| < 1$ . Wir erwarten folglich eine prinzipielle Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$ .

## 2.2.2 Selbstkonsistenzmodell erster Stufe

Ziel ist es, einen Lösungsalgorithmus zu definieren, der es prinzipiell erlaubt, alle Bindungszustände zu bestimmen. Die grundlegende Idee, die wir dabei verfolgen, ist, die crossingsymmetrische Gleichung (1.67) mit (1.66) durch den Iterationsprozess Gl. (1.70)...(1.72) und einen Selbstkonsistenzansatz für  $X_s$  auf einen Koeffizienteniterationsprozeß

$$C_i^{(n)} \rightarrow C_i^{(n+1)} =: f(C_i^{(n)}) \quad (2.65)$$

zu reduzieren. Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, welche Eigenschaften des Systems für die Existenz und Lage der Bindungszustände wesentlich und welche vernachlässigbar sind. Konkret bedeutet dies:

1. Welche funktionelle Abhängigkeit von  $X_s$  ist als wesentlich anzusehen?
2. Welches ist das geeignete approximative Lösungsverfahren für die in jedem Iterationsschritt zu lösende lineare Integralgleichung, so daß die Information über Bindungszustände nicht verlorengeht?

zu 1) Nach Kapitel 2 erwarten wir für  $X_s$  folgende Form:

$$X_s = \sum_{i=1}^n \frac{\chi_i(p^2, s)\chi_i(p'^2, s)}{s + M_i^2} . \quad (2.66)$$

Die Bindungsmassen sind folglich keine Funktionen der Relativimpulse. Wir erwarten nun, daß schon beim Lösungsprozeß nur die  $s$ -Abhängigkeit von Bedeutung ist, nicht aber die Abhängigkeit von den Relativimpulsen. Diese werden daher in jedem Iterationsschritt auf feste Werte gesetzt. Wir können dann später die Stabilität dieser Näherung untersuchen, indem wir den Einfluß der Wahl unterschiedlicher Stützstellen auf die Bindungsmassen beobachten. Die Crossingoperationen reduzieren sich entsprechend auf

$$\mathcal{C}_t : s \rightarrow (p - p')^2 \quad \mathcal{C}_u : s \rightarrow (p + p')^2 . \quad (2.67)$$

zu 2) Das Fredholmverfahren ist per Konstruktion eine gute Approximation für kleine Kopplungen. Da wir eine stetige Abhängigkeit der Energie von der Kopplung erwarten, sollte  $FO[\lambda^1]$  aber auch Vorhersagen für größere Kopplungen machen, die durch die Mitnahme höherer Fredholmordnungen numerisch korrigiert werden können. Von der Nennerstruktur identisch, von der Zählerstruktur her aber einfacher ist das  $PK Rg 1$ -Verfahren, bei dem der Kern so approximiert wird, daß die Diagonalwerte richtig wiedergegeben werden.<sup>1</sup> Aus diesem Grunde, aber auch in Hinblick auf die Übertragung des folgenden Algorithmus auf  $D > 1$  werden wir dieses Verfahren benutzen, um die lineare Integralgleichung zu lösen.

Gl. (2.66) mit  $n = 1$  erhält man iterativ als Ergebnis des 2. Iterationsschrittes mit  $\chi^{(1)}(p^2, s) = \chi^{(1)}(p'^2, s) = Z$  und  $M^{2(1)} = 4 + \frac{\lambda}{2}$ . Der vollständige Integralkern  $K^{(1)}$  des folgenden Iterationsschrittes ergibt sich aus Gleichung Gl. (1.71).

$$K^{(1)}(p^2, p'^2) = Z - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{Z^2}{(p - p')^2 + M^{2(1)}} + \frac{Z^2}{(p + p')^2 + M^{2(1)}} \right) . \quad (2.68)$$

---

<sup>1</sup>Wir sind in diesem speziellen Zugang gezwungen, uns zu entscheiden, ob wir das Verhalten für  $p \approx p'$  oder für  $p \gg p'$  und  $p \ll p'$  gut beschreiben wollen. Wir können den ursprünglichen Kern folglich für betragsmäßig kleine  $p, p'$  oder große  $p, p'$  bis auf die Diagonale  $p \approx p'$  erfassen.

Die Diagonalwerte sind

$$K_d^{(1)}(k^2) := K^{(1)}(k^2, k^2) = Z - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{Z^2}{M^{2(1)}} + \frac{Z^2}{4k^2 + M^{2(1)}} \right) . \quad (2.69)$$

Um die Symmetrie des vollen Kerns bezüglich seiner Argumente  $p^2, p'^2$  in der Produktkernapproximation vom Rang 1 einzubauen, wählt man

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{(1)}(p^2, p'^2) &= \sqrt{Z - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{Z^2}{M^{2(1)}} + \frac{Z^2}{4p^2 + M^{2(1)}} \right)} \\ &\quad \cdot \sqrt{Z - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{Z^2}{M^{2(1)}} + \frac{Z^2}{4p'^2 + M^{2(1)}} \right)} \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$=: \kappa^{(1)}(p^2) \kappa^{(1)}(p'^2) . \quad (2.71)$$

Nach Gl. (1.84) ergibt sich  $X_s$  als Lösung der Integralgleichung zu

$$X_s^{(2)}(p^2, s, p'^2) = \kappa^{(1)}(p^2) \frac{\text{tr}(K^{(1)}G(s))}{1 + \frac{\lambda}{2} \text{tr}(K^{(1)}G(s))} \kappa^{(1)}(p'^2) \quad (2.72)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{tr}(K^{(1)}G)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} K_d^{(1)}(k^2) G(k^2, s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[ Z - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{Z^2}{M^{2(1)}} + \frac{Z^2}{4k^2 + M^{2(1)}} \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \\ &= \left( Z - \frac{\lambda}{2} \frac{Z^2}{M^{2(1)}} \right) I_0(s) - \frac{\lambda}{2} I_1(s, M^{2(1)}) Z^2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

mit

$$\begin{aligned} I_0(s) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \\ &= \frac{1}{s + 4} , \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} I_1(s, M^2) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{4k^2 + M^2} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \\ &= \frac{4 + M}{M(4 + s)((2 + M)^2 + s)} . \end{aligned} \quad (2.75)$$

(Berechnung der Integrale in Anhang D.)

Anmerkung:  $\text{tr}(KG) = \text{tr}(\tilde{K}G) = \text{tr}(K_dG)$

Bringt man  $X_s$  auf den Hauptnenner, so sieht man, daß  $X_s$  von der Ordnung  $\frac{O[s^1]}{O[s^2]}$  ist. Nach Partialbruchzerlegung erhält man

$$X_s^{(2)}(p^2, s, p'^2) = \kappa^{(1)}(p^2) \left( \frac{Y_1^{(2)}}{s + M_1^{2(2)}} + \frac{Y_2^{(2)}}{s + M_2^{2(2)}} \right) \kappa^{(1)}(p'^2) \quad . \quad (2.76)$$

Wir setzen nun die Relativimpulse  $p^2$  und  $p'^2$  auf feste Werte  $\bar{p}^2 = \bar{p}'^2$  und erhalten als genäherte Kanalampplitude

$$\tilde{X}_s^{(2)} = \left( \frac{N_1^{(2)}}{s + M_1^{2(2)}} + \frac{N_2^{(2)}}{s + M_2^{2(2)}} \right) \quad (2.77)$$

mit

$$N_{1,2}^{(2)} = K_d^{(2)}(\bar{p}^2) \cdot Y_{1,2}^{(2)} \quad . \quad (2.78)$$

Allgemein wird so in jedem Iterationsschritt ein weiterer Bindungszustand erzeugt. Wir erhalten damit ein allgemeines Iterationsschema, das wir für feste Kopplungswerte mit dem Startwert

$$K^{(0)} = 1 \rightarrow N_1 = Z^2, \quad M_1^{2(1)} = 4 + \frac{\lambda}{2} \quad (2.79)$$

lösen.

1. Lösung des n-ten Iterationsschrittes

$$X_s^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{(n)}}{s + M_i^{2(n)}} \quad (2.80)$$

2. Kerndiagonalwerte nach Crossing:

$$K_d^{(n)}(k^2) = Z - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} + \frac{N_i^{(n)}}{4k^2 + M_i^{2(n)}} \right) \quad (2.81)$$

3. Lösen der Integralgleichung und Stützstellenapproximation in den Relativimpulsen  $p, p' \rightarrow \bar{p}, \bar{p}'$  liefert

$$\tilde{X}_s^{(n+1)} = \frac{\kappa^{(n)}(\bar{p}^2) \kappa^{(n)}(\bar{p}'^2)}{\frac{1}{\text{tr}(K_d^{(n)}G)(s)} + \frac{\lambda}{2}} \quad (2.82)$$

mit

$$\text{tr}(K_d^{(n)}G)(s) = \left( Z - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} \right) I_0(s) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n I_1(s, M_i^{2(n)}) N_i \quad . \quad (2.83)$$

Wegen  $\bar{p}^2 = \bar{p}'^2$  gilt noch:

$$K_d^{(n)}(\bar{p}^2) = \kappa^{(n)}(\bar{p}^2) \kappa^{(n)}(\bar{p}'^2) \quad . \quad (2.84)$$

Die Form (2.80) mit  $(n+1)$  statt  $(n)$  erhält man mittels Partialbruchzerlegung.

Indem wir den Iterationsprozeß für feste Kopplungswerte laufen lassen, erhalten wir als Reduktion der crossingsymmetrischen Integralgleichung einen zahlenwertigen Koeffizientenabbildungsprozeß

$$\begin{aligned} N_i^{(n)} &\rightarrow N_i^{(n+1)} \\ M_i^{2(n)} &\rightarrow M_i^{2(n+1)} \quad , \end{aligned} \quad (2.85)$$

der so zunächst wieder nur auf einem kleinen Kopplungsbereich in die gesuchte physikalische Lösung konvergiert. Wir tragen die Bindungsmassen  $M_i^{2(n)}$  für die ersten vier Bindungszustände und die Iterationsschritte  $n = 20 \dots 25$  über  $\lambda$  ab (Abb. 2.5). Wir wählen die Iterationszahl zunächst bewußt niedrig, damit die einzelnen Iterationsschritte sichtbar bleiben. Die Kurve verzweigt sich auf dem gewählten Kopplungsbereich in zwei Äste, wobei die Lösungen mit ungeradem  $n$  in den oberen und die mit geradem in den unteren Ast laufen. Wir stellen fest, daß

1. die Existenz eines  $\lambda_{\text{grenz}}$  tatsächlich keine Folge des speziellen Näherungsmodells ist, sondern eine Eigenschaft des formalen Iterationsprozesses aus Kapitel 1.6 und
2.  $\lambda_{\text{grenz}}$  unabhängig vom Niveau ist.

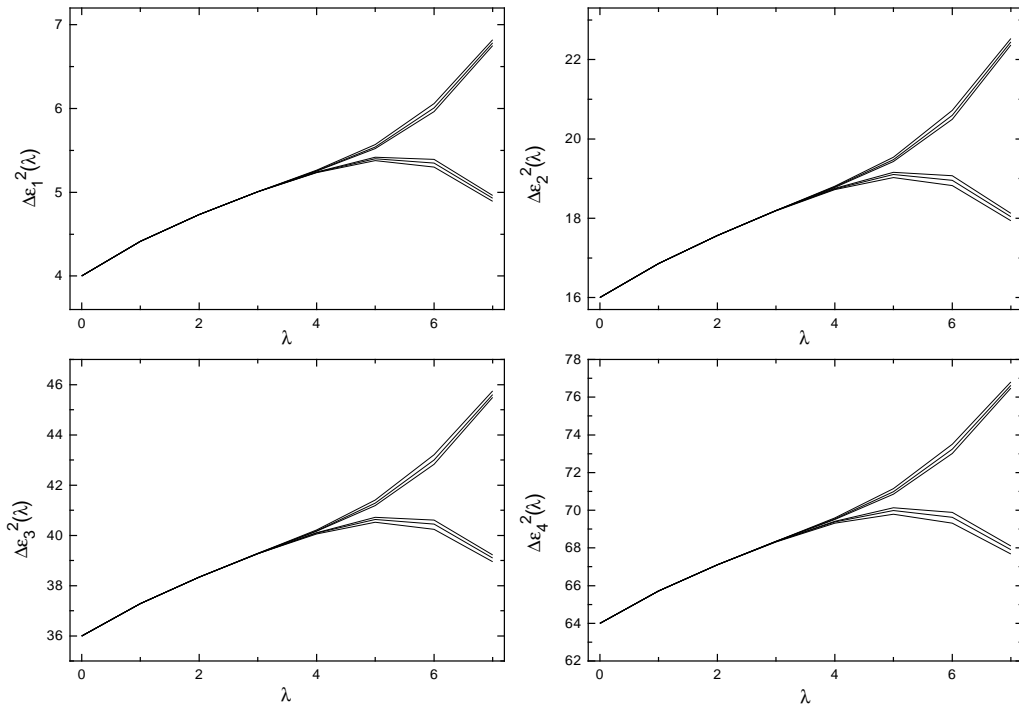


Abb.2.5:  $\Delta\epsilon_i^{2(n)}(\lambda) = M_i^{2(n)}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, 4$   
 Schrittweite  $\Delta\lambda = 1$ , Iterationsschritt  $n = 20 \dots 25$ ,  $Z = 1$

Wir lassen den gleichen Iterationsprozess für  $Z = 3$  mit erhöhter Iterationsschrittzahl laufen. Die einzelnen Iterationsschritte deuten sich nur noch durch die Verbrei-

terung der Linien an. Wie schon beim konstanten Kern ist der Konvergenzbereich für  $Z = 3$  kleiner als für  $Z = 1$ .

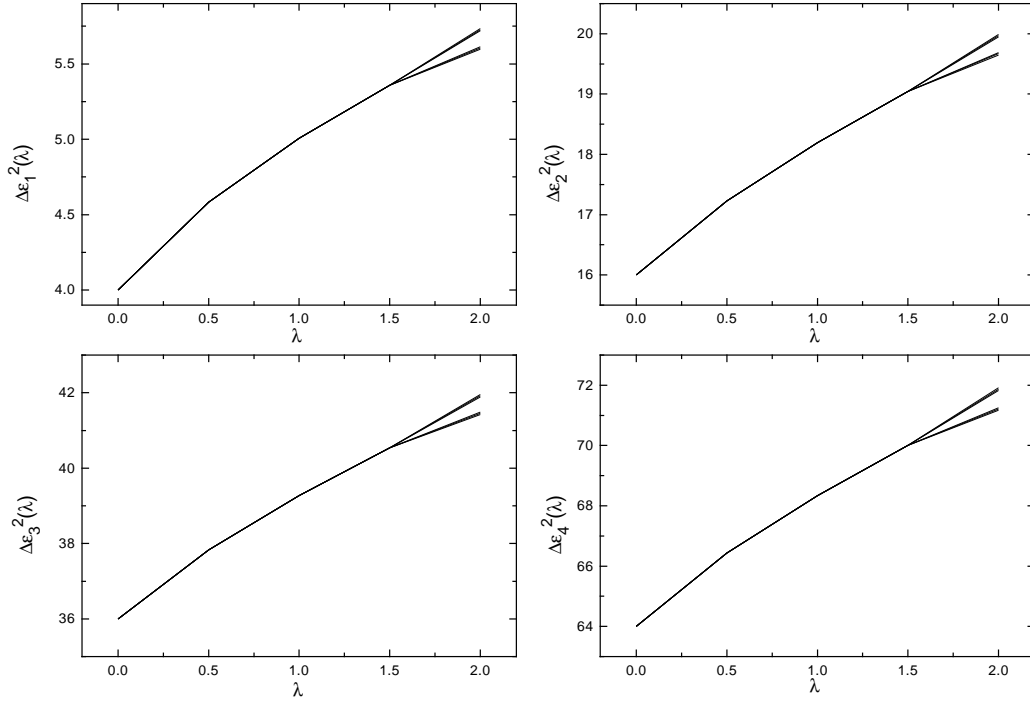


Abb.2.6:  $\Delta \epsilon_i^{2(n)}(\lambda) = M_i^{2(n)}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, 4$   
 $\Delta \lambda = 0.5$ , Iterationsschritt  $n = 20 \dots 25$ ,  $Z = 3$

Bemerkung:

Eine grundsätzliche Alternative wäre beispielsweise, einen Produktkern von Rang 2 nach der Vorschrift zu bilden, das Verhalten für große  $p, p'$  bis auf die Diagonalen  $p = p'$  richtig wiederzugeben. Wir definieren

$$X_\sigma(p^2, s, p'^2) := \frac{\lambda}{2}(X_t + X_u) \quad . \quad (2.86)$$

Naheliegen ist es, als Approximationsvorschrift eine halbseitige On-shellapproximation zu wählen. (Wir setzen  $Z = 1$ ):

$$X_\sigma(p^2, s, p'^2) \rightarrow \tilde{X}_\sigma(p^2, s, p'^2) := X_\sigma(p^2, s, 0) \frac{1}{X_\sigma(0, s, 0)} X_\sigma(0, s, p'^2) \quad . \quad (2.87)$$

Damit erhält man als Produktkernapproximation:

$$\tilde{K}(p^2, s, p'^2) = 1 - \left( \sqrt{\frac{1}{X_\sigma(0, s, 0)}} X_\sigma(p^2, s, 0) \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{X_\sigma(0, s, 0)}} X_\sigma(0, s, p'^2) \right) \quad . \quad (2.88)$$

Speziell für den Kern des 2. Iterationsschrittes heißt dies

$$\tilde{K}^{(2)}(p^2, p'^2) = 1 - \frac{\sqrt{\lambda(\frac{\lambda}{4} + 2)}}{p^2 + 4 + \frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda(\frac{\lambda}{4} + 2)}}{p'^2 + 4 + \frac{\lambda}{2}} \quad . \quad (2.89)$$



Für die Fortsetzung dieses Algorithmus ist eine Näherung von  $X_\sigma(p^2, s, 0)$  durch eine Folge einfacher rationaler Approximanten nötig. Wählen wir hier die erste Stufe zeigt sich, daß diese Vorgehensweise neben den erwarteten Polen reelle Polartefakte ausbildet, für die es vom quantenmechanischen Standpunkt aus keine Interpretation gibt.

### Studium des Verhaltens für $\lambda \rightarrow 0$

Setzt man  $\lambda = 0$ , so verschwinden alle Residuen und damit auch alle Bindungszustände bis auf den ersten  $\Delta\epsilon_1^2(\lambda = 0) = 4$ .

Wir bestimmen daher das Verhalten in nullter Ordnung von  $\lambda$ , indem wir den Iterationsprozeß für kleine  $\lambda$  laufen lassen. Wir wählen speziell  $\lambda = 10^{-10}$ , die symmetrischen Stützstellen  $\bar{p}^2 = \bar{p}'^2 = 1$  und zunächst  $Z = 1$ :

$$\begin{aligned} X_s^{(2)} &= \frac{1.}{4. + s} + \frac{1.24999 \cdot 10^{-11}}{16. + s} \\ X_s^{(3)} &= \frac{1.}{4. + s} + \frac{1.25008 \cdot 10^{-11}}{16. + s} + \frac{3.12426 \cdot 10^{-12}}{36. + s} \\ X_s^{(4)} &= \frac{1.}{4. + s} + \frac{1.24992 \cdot 10^{-11}}{16. + s} + \frac{3.12639 \cdot 10^{-12}}{36. + s} + \frac{1.38806 \cdot 10^{-12}}{64. + s} \\ X_s^{(5)} &= \frac{1.}{4. + s} + \frac{1.25 \cdot 10^{-11}}{16. + s} + \frac{3.12801 \cdot 10^{-12}}{36. + s} + \frac{1.38076 \cdot 10^{-12}}{64. + s} + \frac{7.84379 \cdot 10^{-13}}{100. + s} \end{aligned} \quad (2.90)$$

In nullter Ordnung von  $\lambda$  liefert das Modell folglich, numerisch richtig, die vollständigen, erlaubten Anregungsenergien aus dem Grundzustand<sup>2</sup>.

Wir wollen nun das Verhalten der Bindungszustände in erster Ordnung in  $\lambda$  studieren. Dazu legen wir eine rationale Funktion (Padé 2. Art) durch die Punkte  $(\lambda_j, \epsilon_i^2(\lambda_j))$  mit  $\lambda_j = (0.4, \dots, 2.0)$ ,  $i = (1, \dots, 4)$  und für  $Z = 1$ . Entwicklung in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_1^2 &= 4 + 0.497\lambda + O[\lambda^2] \\ \Delta\epsilon_2^2 &= 16 + 0.99\lambda + O[\lambda^2] \\ \Delta\epsilon_3^2 &= 36 + 1.46\lambda + O[\lambda^2] \\ \Delta\epsilon_4^2 &= 64 + 1.91\lambda + O[\lambda^2] \end{aligned} \quad (2.91)$$

<sup>2</sup>Auch wenn die Residuen der höher angeregten Zustände mit steigender Kopplung größer und das des ersten kleiner werden (Abb. 2.9), wird deutlich, daß es Schwierigkeiten geben wird, wenn man versucht aus numerischen Daten, die mittels Diskretisierung der crossingsymmetrischen Gleichung gewonnen wurden, durch Interpolation mit rationalen Funktionen auf mehr als nur einen Bindungszustand zu schließen, wie in [Kr 93] geschehen.

Dieses legt als Gesetz nahe

$$\Delta\epsilon_n^2 = (2n)^2 + \frac{n}{2}\lambda + O[\lambda^2] \quad (2.92)$$

und damit für die Anregungsenergie selbst

$$\Delta\epsilon_n = 2n + \frac{1}{8}\lambda + O[\lambda^2] \quad . \quad (2.93)$$

Dieses stimmt nicht mit dem quantenmechanischen Ergebnis in erster Ordnung

$$\Delta\epsilon_n = 2n + \frac{\lambda}{8}n(2n+1) + O[\lambda^2] \quad (2.94)$$

überein. Wir lassen den Iterationsprozeß nun für  $Z = 3$  laufen, um den Einfluß des “Anfittens” von  $Z$  auf höhere Anregungsenergien in erster Ordnung ihrer Kopplungsabhängigkeit zu studieren. Es ist dabei zu hoffen, daß dieses Nachführen eines Parameters genügt, damit sich Gl. (2.94) installiert.

Dieses wird leider nicht bestätigt, denn man findet

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_1^2 &= 4 + 1.60\lambda + O[\lambda^2] \\ \Delta\epsilon_2^2 &= 16 + 2.88\lambda + O[\lambda^2] \\ \Delta\epsilon_3^2 &= 36 + 4.18\lambda + O[\lambda^2] \\ \Delta\epsilon_4^2 &= 64 + 5.20\lambda + O[\lambda^2] \quad , \end{aligned} \quad (2.95)$$

d.h.

$$\Delta\epsilon_n^2 \approx (2n)^2 + \frac{n}{2}\lambda Z + O[\lambda^2] \quad (2.96)$$

und damit

$$\Delta\epsilon_n \approx 2n + \frac{1}{8}\lambda Z + O[\lambda^2] \quad . \quad (2.97)$$

Das bedeutet, daß das zahlenwertige Nachführen von  $Z$  nur eine Anregungsenergie in 1. Ordnung von  $\lambda$  korrigieren kann und nicht so etwas ist, wie der “Träger” einer Quantenzahl.

Es stellt sich die Frage, ob dieses tatsächlich eine Folge des allgemeinen Modells ist oder aber aus den innerhalb des Modells durchgeführten Näherungen resultiert. Zur Klärung dieser Frage stellen wir uns vor, wir würden die Lösung, die wir mit obigem Iterationprozess mit einem *PK Rg 1* ( $K^{[1]} = f(p^2)f(p'^2)$ ) gefunden haben, als Input für einen weiteren Iterationsschritt heranziehen, in dem die lineare Integralgleichung mittels einem *PK Rg 2* gelöst wird, der ebenfalls die Symmetrie in den Argumenten  $p^2$  und  $p'^2$  explizit enthält und insbesondere die Diagonalwerte des exakten Kerns richtig wiedergeben soll.

Sei

$$K^{[2]}(p^2, p'^2) = A(p^2)B(p'^2) + B(p^2)A(p'^2) \quad . \quad (2.98)$$

Wir definieren

$$(f, g) := \int \frac{dk}{2\pi} f(k^2) G(k^2, s) g(k^2) \quad . \quad (2.99)$$

Dann stimmen die Fredholmdeterminanten

$$\Delta_F^{[1]}(s) = 1 + \frac{\lambda}{2}(f, f) \quad (2.100)$$

und

$$\Delta_F^{[2]}(s) = 1 + \frac{\lambda}{2}[(A, B) + (B, A)] + \frac{\lambda^2}{4}[(A, A)(B, B) - (A, B)^2] \quad (2.101)$$

in erster Ordnung von  $\lambda$  wegen  $f(k^2) = \sqrt{A(k^2)B(k^2) + B(k^2)A(k^2)}$  überein, d.h. die Ergebnisse sind innerhalb des Modells bis zur ersten Ordnung in  $\lambda$  richtig.

Um ein genaueres Bild des Einflusses von  $M_4$  auf die Bindungsmassen zu gewinnen, müßte dessen funktionellen Abhängigkeit bestimmt werden. Dafür bedarf es allerdings dem Lösen einer (nichtlinearen) Integralgleichung, die die Kopplung von  $M_4$  an  $T$  beschreibt.

Ein Erfolg dieses Verfahrens in bezug auf die Korrektur der Kopplungsabhängigkeit der Bindungsmassen in erster Ordnung  $\lambda$  muß, in Hinblick auf die Skelettgraphenentwicklung von  $M_4$ , als ohnehin unwahrscheinlich angesehen werden.

Die wesentliche Näherung, neben  $M_4 = 1$ , ist die Näherung des exakten Propagators des  $\phi$ -Feldes  $\Delta(p_i^2)$  durch seinen Polbeitrag. Diese verletzt die Schwinger-Dyson Gleichung

$$\begin{aligned} [\Delta(p^2)]^{-1} &= p^2 - m^2 + \frac{\lambda}{2}(-i) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Delta(q^2) \\ &+ \frac{\lambda}{6}(-i)^3 \int \frac{d^D q_1 d^D q_2}{(2\pi)^{2D}} \Delta(q_1^2) \Delta(q_2^2) \Delta((p - q_1 - q_2)^2) \Gamma_4(q_1, q_1, -p + q_1 + q_2, p), \end{aligned} \quad (2.102)$$

über die  $\Delta(p_i^2)$  und die Vierpunktfunktion  $\Gamma_4 \equiv T_4$  gekoppelt sind.

Durch die Poltermnäherung von  $\Delta$  beschränken wir uns insbesondere auf den Term nullter Ordnung seiner Skelettgraphenentwicklung. Dieses legt die Vermutung nahe, daß die Poltermnäherung verantwortlich ist für die Abweichung der Bindungsmassen vom erwarteten Wert in erster Ordnung  $\lambda$ . Für eine vollständige Beschreibung wäre es daher nötig, das gekoppelte Integralgleichungssystem - Schwinger-Dyson-Gleichung und crossingsymmetrische Bethe-Salpeter-Gleichung - beispielsweise durch ein 3-prozessiges Iterationsverfahren zu lösen. Für erste Studien wäre die Bestimmung eines festen Korrekturterms in erster Ordnung  $\lambda$  zum Polterm, den man entweder durch Abbruch seiner Skelettgraphenentwicklung gewinnt oder aber durch Lösen der Schwinger-Dyson-Gleichung für einen festen Input für  $\Gamma_4$  (z.B.  $\Gamma_4 = 1$ ), allerdings ausreichend.

Die Korrektur der Blasennäherung durch Mitnahme des Poltermresiduums  $Z_3$  als freien Parameter

$$X_s^{Z_3} = \frac{Z_3^2}{s + 4 + \frac{\lambda}{2}Z_3^2} \quad . \quad (2.103)$$

hat zwar empfindliche Einfluß auf die Lage der Bindungsmasse, korrigiert diese aber wegen

$$\begin{aligned} Z_3 &= \lim_{p^2 \rightarrow m^2} (p^2 - m^2)\Delta(p^2) \\ &= 1 - \int_{m^2}^{\infty} ds \rho(s) \\ &< 1 \end{aligned} \quad (2.104)$$

in die falsche Richtung.

Von einem weiteren Studium des Einflusses der Propagatornäherung auf das Bindungsspektrum sehen wir ab, da im Rahmen dieser Arbeit die Strukturanalyse der crossingsymmetrischen Bethe-Salpeter-Gleichung im Vordergrund stehen soll.

## Konvergenzverbesserte Iteration

Der oben beschriebene Iterationsprozeß, stellt letztlich nur ein Hilfsmittel dar, um die crossingsymmetrische Gleichung zu lösen. Als fundamental betrachten wir daher nicht den Iterationsprozeß, sondern die durch die Selbstkonsistenzbedingung

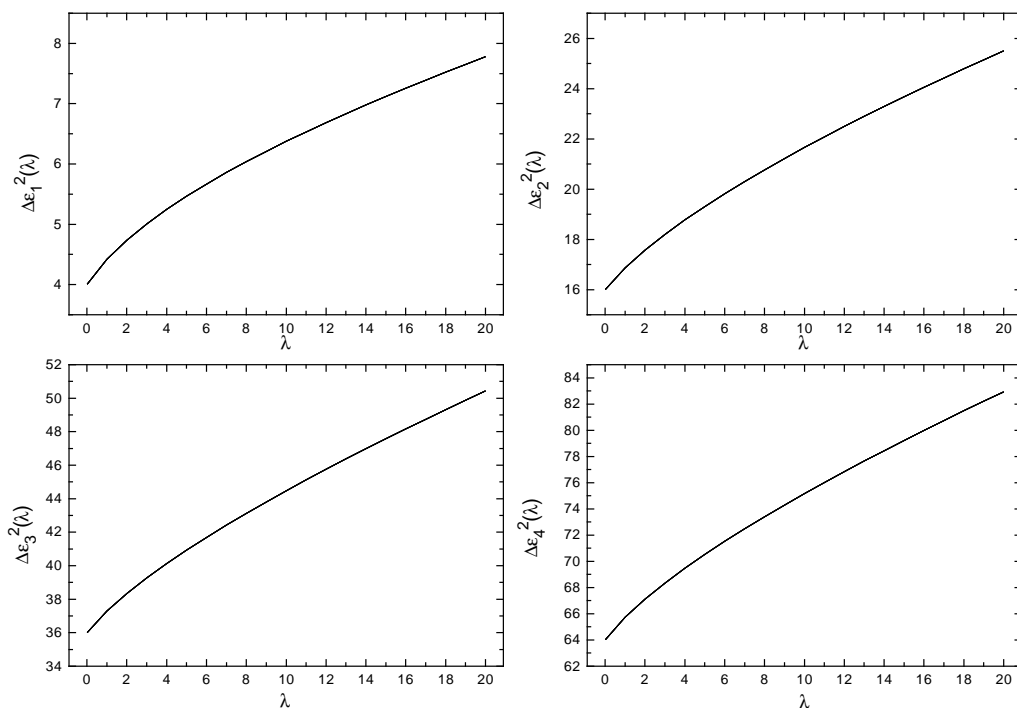
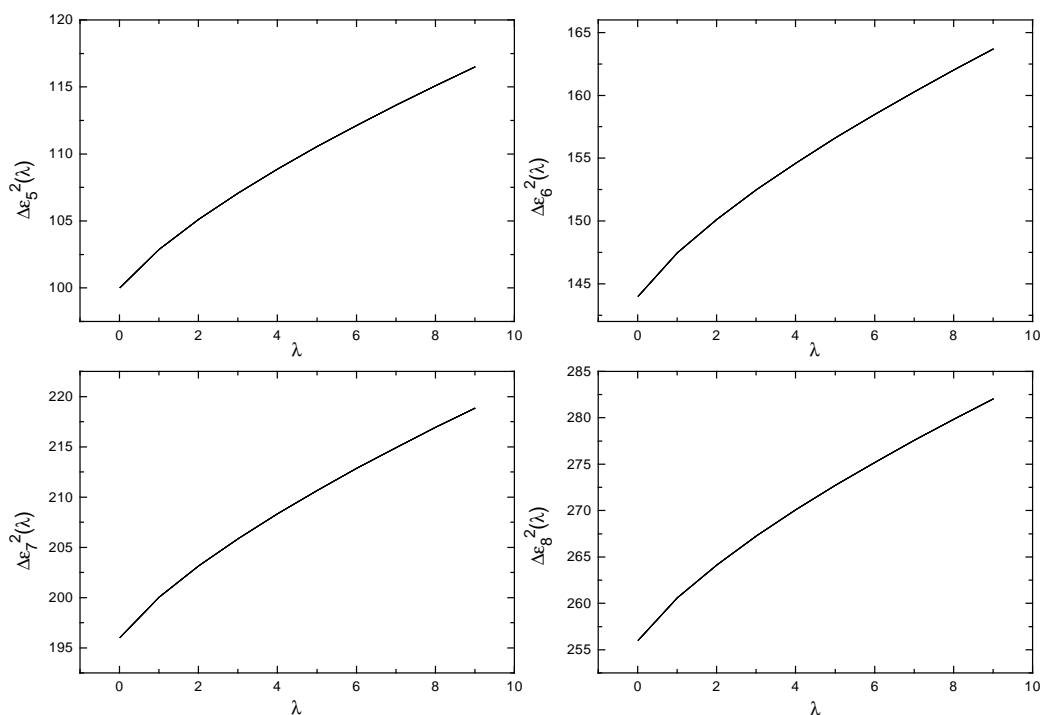
$$C_i^{(n)} = C_i^{(n+1)} =: C_i \quad (2.105)$$

definierte Lösung.

Analog zum Modell konstanter Kern definieren wir eine leicht abgewandelte Fixpunktiteration

$$C_i^{(n+1)} = \sqrt{f(C_i^{(n)}) \cdot C_i^{(n)}} \quad , \quad (2.106)$$

die auf einem etwas erweiterten Kopplungsbereich in die durch Gl. (2.105) definierte Lösung konvergiert. Wir plotten die Bindungsmassen 1-4 (Abb. 2.7) und 5-8 (Abb. 2.8), wobei  $Z = 1$  gesetzt wurde, für die Iterationsschritte 40...45, so daß die Bindungsmassen der sechs Iterationsschritte bis auf  $10^{-4}$  übereinstimmen. Das Verfahren ist über den gewählten Kopplungsbereich hinaus nicht stabil. Zudem wird der Konvergenzbereich für Bindungszustände höherer Ordnung kleiner.


 Abb.2.7:  $\Delta\epsilon_i^{2(n)}(\lambda) = M_i^{2(n)}(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 

 Abb.2.8:  $\Delta\epsilon_i^{2(n)}(\lambda) = M_i^{2(n)}(\lambda)$ ,  $i = 5, \dots, 8$   
 verbesserte Iteration,  $n = 35 \dots 40$ ,  $\Delta\lambda = 1$ ,  $Z = 1$

Wir untersuchen nun das Verhalten der Residuen  $N_i(\lambda)$  in Abhängigkeit von der Kopplung. Die  $N_i$ 's mit  $i > 1$  wachsen mit steigender Kopplung zunächst an. Aus Gl. (2.111) können wir aber ablesen, daß sie ein Großkopplungsverhalten haben, das mit dem der Bindungsmassen in Zusammenhang steht.

Sei  $M_i(\lambda \rightarrow \infty) \sim \lambda^a$ . Dann gilt für  $Z \neq \text{Fkt}(\lambda)$  wegen der Forderung  $f \neq 0$  und endlich :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{N_i}{M_i^2} = 1 \quad (2.107)$$

und damit

$$N_i(\lambda \rightarrow \infty) = \lambda^{2a-1} \quad (2.108)$$

Für  $a < \frac{1}{2}$  erwarten wir, daß die Residuen für große Kopplungen gegen Null gehen. Während  $N_1$  dies auf dem gesamten gewählten Kopplungsbereich tut, kann man das Umschlagen des Steigungsverhaltens auf dem gewählten Kopplungsbereich nur noch für  $N_2$  beobachten.

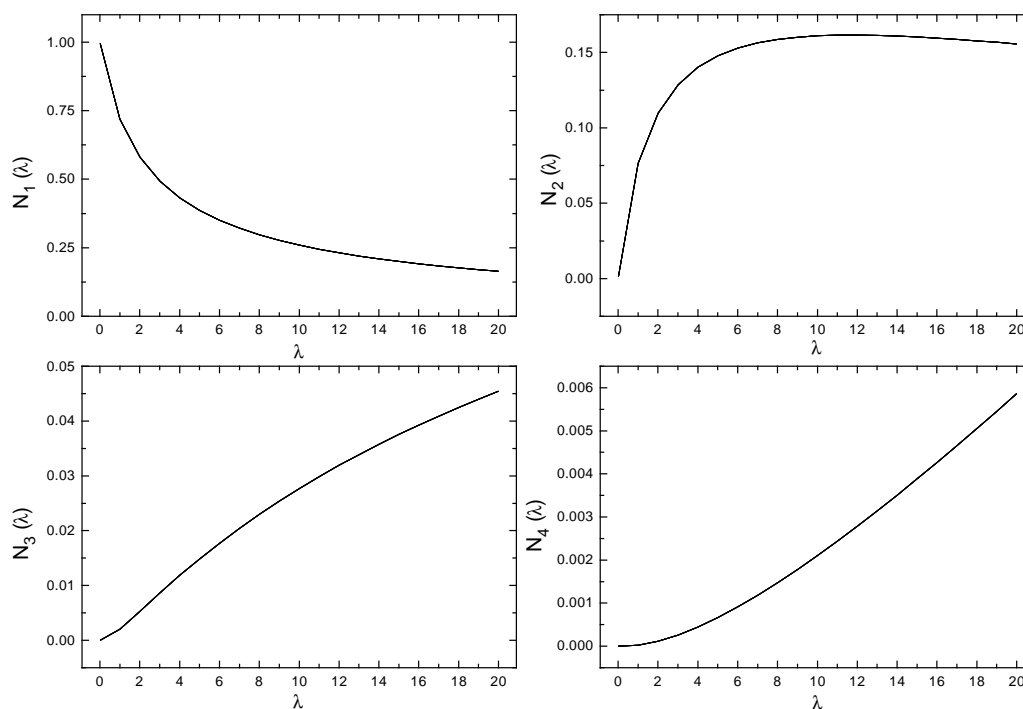


Abb.2.9:  $N_i^{(n)}(\lambda)$   $i = 1, \dots, 4$   
 verbesserte Iteration,  $n = 35 \dots 40$ ,  $\Delta\lambda = 1$ ,  $Z = 1$

## Stabilitätsuntersuchungen für Relativimpulsstützstellen

Die Bindungsmassen sind keine direkten Funktionen der Relativimpulse. Wir nahmen daher an, daß letztere auch nicht zum Konstruktionsmechanismus beitragen und haben sie in unseren bisherigen Rechnungen auf die Werte  $\bar{p} = \bar{p}' = 1$  gesetzt.

Wir wollen nun untersuchen, in welchem Kopplungsbereich diese Annahme tatsächlich gerechtfertigt ist.

Hierzu betrachten wir in (Abb. 2.10) die ersten vier Bindungszustände im 35. Iterationsschritt für die symmetrischen Stützstellen  $\bar{p} = \{1, 5, 9\}$  in der genäherten Kanalamplitude  $\tilde{X}_s$  (2.82).

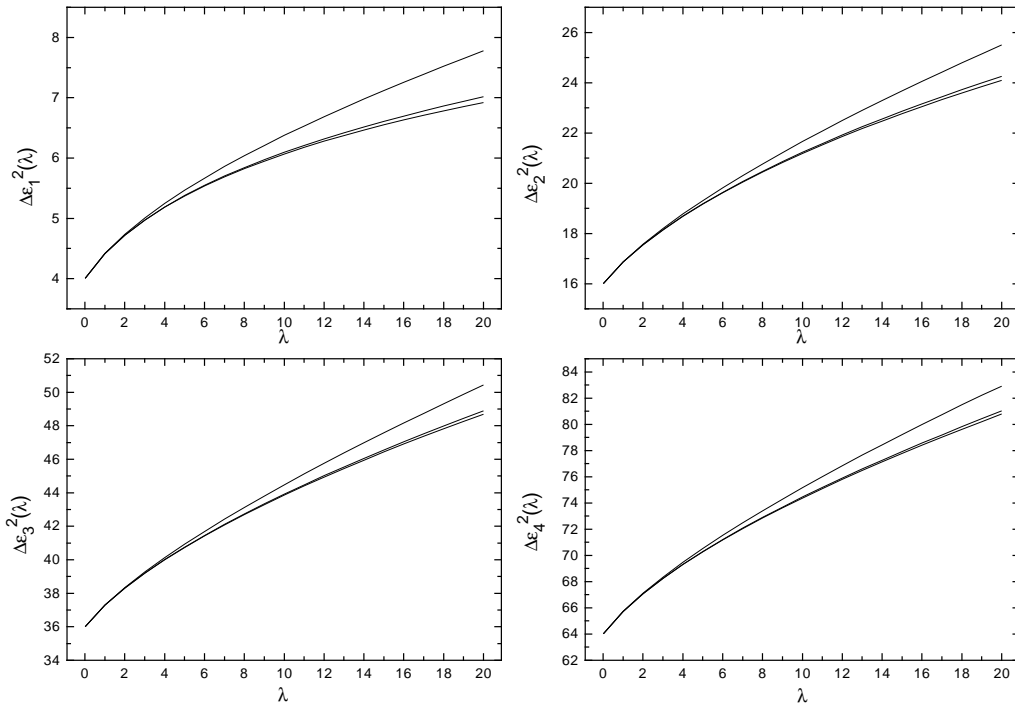


Abb.2.10:  $\Delta\epsilon_i^2(\lambda) = M_i^2(\lambda)$   $i = (1, \dots, 4)$   
 $\bar{p} = 1, 5, 9$ ,  $n = 35$ ,  $Z = 1$ ,  $\Delta(\lambda) = 1$

Wir beobachten, daß etwa ab einem Kopplungswert  $\lambda_0 = 6$  die Relativimpulse sehr wohl einen mit der Kopplung steigenden Einfluß auf die Bindungsmassen haben, wobei die Funktionen  $\Delta\epsilon(\lambda, \bar{p} = 5)$  und  $\Delta\epsilon(\lambda, \bar{p} = 9)$  dichter beieinander liegen. Man muß sich an dieser Stelle daran erinnern, daß die eigentlich berechnete Größe die Kanalamplitude  $X_s$  ist, und das System versucht, deren Kopplungsabhängigkeit im Rahmen der gemachten Näherungen möglichst gut wiederzugeben und daß sich so als Artefakt der Näherung eine Kopplungsabhängigkeit der Bindungsmassen einstellt.

## Bethe-Salpeter-Amplituden

In dem Bereich, in dem die Bindungsmassen unabhängig von der Kopplung sind, macht es auch Sinn,  $X$ -Amplituden  $\chi(p)$  für diskrete Kopplungswerte zu definieren. Es gilt

$$N_i(\bar{p}_i^2) = \chi(\bar{p}_i^2) \cdot \chi(\bar{p}_i'^2) \quad . \quad (2.109)$$

Durch diese Stützstellen legen wir eine rationale Funktion (Padéapproximante 2.Art).

Wir entnehmen (Abb. 2.11), daß die  $X$ -Amplituden für  $p > 5$  unabhängig von den Relativimpulsen werden. Dies ist neben der Stabilitätsuntersuchung eine weitere Rechtfertigung des Stützstellenansatzes in  $p$ . Damit sind für den hier verifizierten Bereich die Bethe-Salpeter Amplitude  $f_n(p)$  (Gl. (1.32)) im wesentlichen, d.h. bis auf Kopplungsabhängigkeiten, das Produkt der Propagatoren  $\Delta(\frac{1}{2}P \pm p)$ .

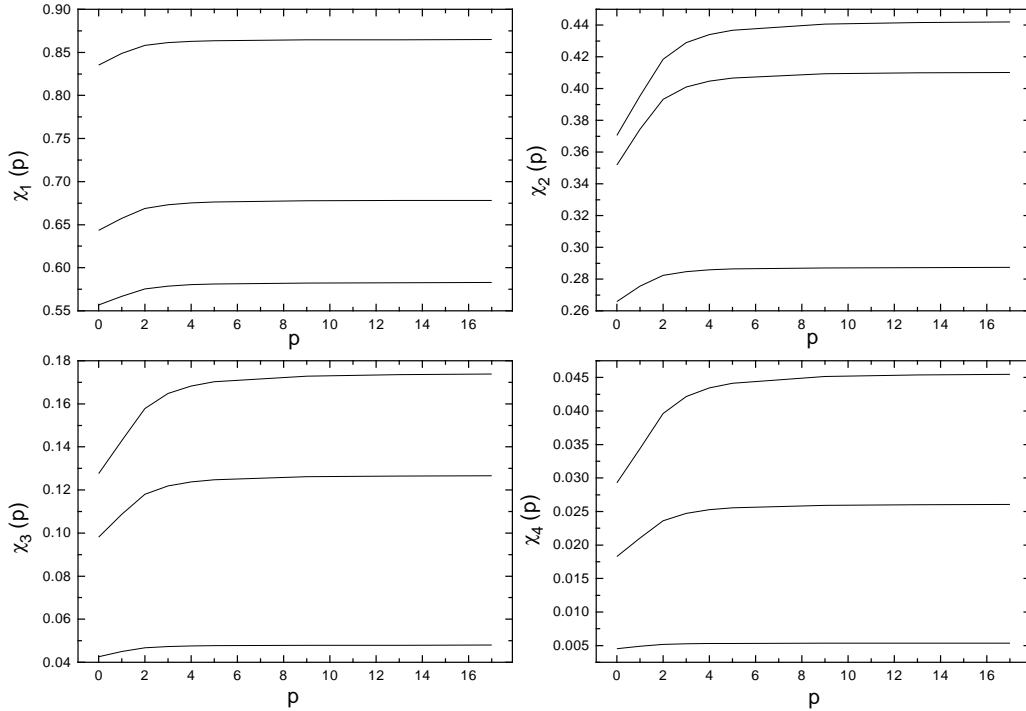


Abb.2.11:  $\chi_i(p)$ ,  $i = 1 \dots 4$   
 Kurven in aufsteigender Reihenfolge mit  $\lambda = 1, 4, 7$ ,  $n = 25$

## Analytische Reduktion der crossingsymmetrischen Integralgleichung

Wir betrachten das numerische Gewicht der Summanden in  $X_s$ . Nach (Abb. 2.9) nimmt dieses mit der Ordnung des betrachteten Bindungszustandes ab.

Ist man nun bereit, sich auf eine vorher festgelegte Anzahl  $n$  von Bindungszuständen zu beschränken, so kann man folglich in jedem Iterationsschritt den  $(n + 1)$ -ten wegfallen lassen und erhält als analytische Reduktion der crossingsymmetrischen Integralgleichung ein nichtlineares Gleichungssystem von der Ordnung  $2n$  für  $\{N_i, M_i^2\}$ , das als eine unter eventuell mehreren Lösungen die gesuchte enthält. Unser bisher betrachteter Iterationsprozeß entspricht einer Lösung dieses Gleichungssystems mittels Fixpunktiteration.

Will man dieses mittels Numerikroutinen lösen, benötigt man das Gleichungssystem explizit und nicht als Abbildungsvorschrift. Dazu muß man zunächst Gl.



(2.80) ... (2.84) zu einer Gleichung zusammenfassen und Selbstkonsistenz fordern

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{s + M_i^2} = f(s, \{N_i\}, \{M_i^2\}) \quad , \quad (2.110)$$

mit

$$f(s, \{N_i\}, \{M_i^2\}) := \frac{Z - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i}{M_i^2} + \frac{N_i}{4\bar{p}^2 + M_i^2} \right)}{\frac{1}{(Z - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{M_i^2}) I_0(s) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n I_1(s, M_i^2) N_i} + \frac{\lambda}{2}} \quad . \quad (2.111)$$

Anschließend gleichen wir die ersten  $2n$  Taylorkoeffizienten ab

$$(-1)^{m+1} \frac{N_i}{(M_i^2)^m} = f^{(m)}(0, \{N_i\}, \{M_i^2\}) \quad m = \{1 \dots 2n\} \quad (2.112)$$

bzw. Gl. (2.110) für  $2n$  Stützstellen in  $s$ . Beides ist exakt, da man  $f$  durch Padéfortsetzung  $\frac{O[s^{n-1}]}{O[s^n]}$  wiedergewinnen kann. Lösungen dieses Gleichungssystems mittels NAG- bzw. IMSL-Routinen sind allerdings nur für bis zu drei Bindungszustände auf beschränktem Kopplungsbereich numerisch stabil.

Die Ursache hierfür wird klar, wenn man dieses System mittels konvergenzverbesserter Fixpunktiteration löst und verbesserte Startwerte vorgibt, indem man die Kopplung in Schritten  $\Delta\lambda$  hochfährt und  $C_i^{(n_0)}(\lambda)$  mit z.B.  $n_0 = 10$  als Startwert für  $C_i^1(\lambda + \Delta\lambda)$  benutzt. Da das numerische Gewicht der zu  $X_s$  beitragenden Summanden nur schwach abnimmt (für höhere Anregungsenergien liegen sie immer dichter beieinander), müssen wir, um beispielsweise 4 Bindungszustände zu erhalten, Gleichung (2.110) für  $n = 7$  formulieren. Die so definierte Fixpunktiteration konvergiert allerdings nur für die ersten vier Bindungszustände, die wir auslesen, während sie für die oberen drei alternierend in zwei unterschiedliche Zweige der Kurve läuft. Eine Lösung mittels Numerikroutinen kann eine solche Trennung nicht vornehmen.

Für die ersten vier Bindungsmassen erwarten wir aber, mit unserem verbesserten Iterationsprozeß eine theoretische Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$ . Dies gilt theoretisch, da man sich vor Durchführung des Iterationsprozesses auf einen maximalen Kopplungsbereich festlegen muß, um die Schrittweite entsprechend klein zu wählen. Wir verifizieren dies für den Kopplungsbereich  $\lambda = \{0 \dots 875\}$  und die Bindungszustände  $1 \dots 4$  .

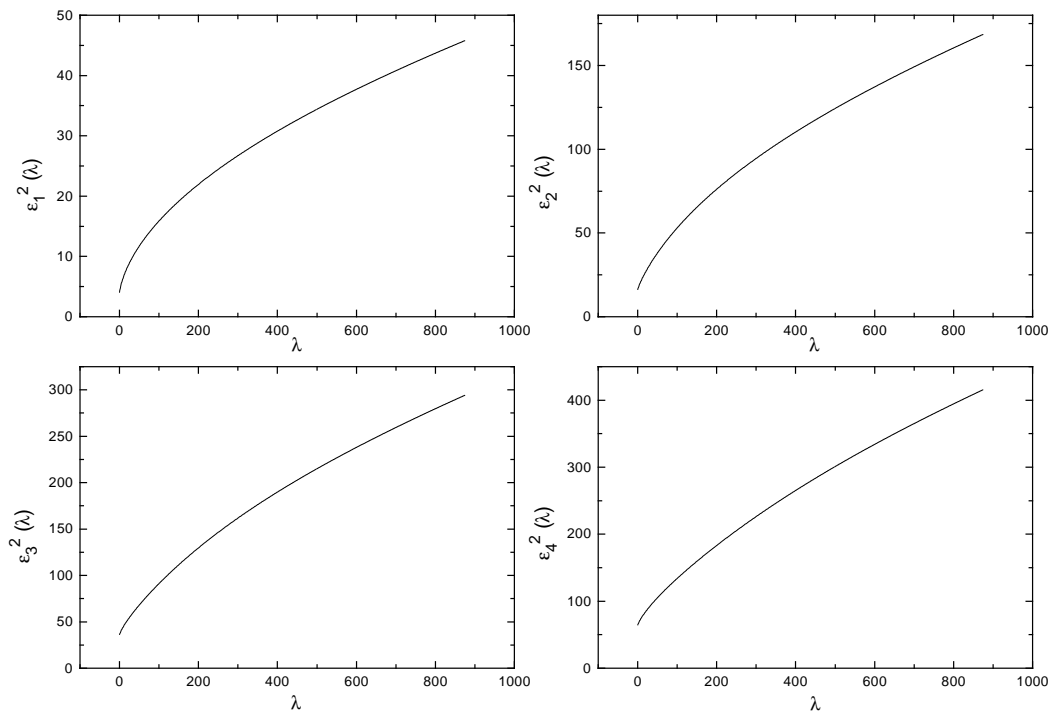


Abb.2.12:  $\Delta\epsilon_i^2(\lambda) = M_i^2(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, 4$   
 Selbstkonsistenz-Gleichungssystem mit den Relativimpulsstützstellen  $\bar{p} = \bar{p}' = 10$ ,  
 Lösung mittels verbesserter Fixpunktiteration,  
 $n = 20 \dots 25$ ,  $\Delta\lambda = 1$

## Verhalten für große Kopplungen

Um das Verhalten für große Kopplungen zu studieren, tragen wir die Anregungsenergien als Funktion der Kopplung in einem doppeltlogarithmischen Plot ab (Abb. 2.13), in der Erwartung, daß sich für große  $\lambda$  eine führende potenzartige Abhängigkeit abzeichnet:

$$\epsilon(\lambda) = \lambda^a f(\lambda) \quad (2.113)$$

mit

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = C = \text{konst} \quad . \quad (2.114)$$

Für große Kopplungen gilt demnach näherungsweise

$$\ln \epsilon(\lambda) \approx \ln C + a \ln \lambda \quad . \quad (2.115)$$

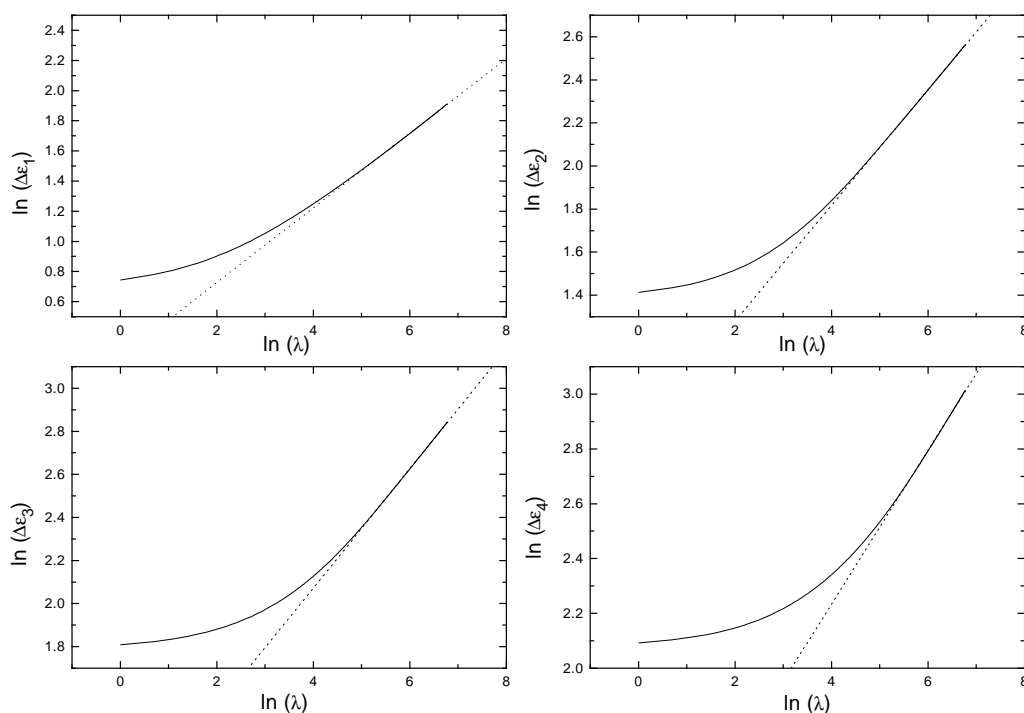


Abb.2.13:  $(\ln(\Delta\epsilon_i))(\ln(\lambda))$ ,  $i = 1, \dots, 4$   
 Doppeltlogarithmischer Plot mit Steigungsgeraden

Die eingezeichneten Geraden haben die Steigung

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0.24762 \\
 a_2 &= 0.26866 \\
 a_3 &= 0.2771 \\
 a_4 &= 0.28063 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.116}$$

Offenbar genügt aber der betrachtete Kopplungsbereich  $\lambda = \{0 \dots 875\}$  noch nicht, um die Potenz der Abhängigkeit abzulesen. Wenngleich sich eine nichtanalytische Kopplungsabhängigkeit  $\lambda^a$  abzeichnet, ist die Annäherung an das nach Gl. (2.31) zu erwartende  $a = \frac{1}{3}$  freilich noch sehr grob. Da die Kurven nur äußerst schwach steigend sind, müßte man einen um Größenordnungen erweiterten Kopplungsbereich betrachten, um numerisch gesicherte Aussagen über  $a$  gewinnen zu können. Dazu sind allerdings wesentlich leistungsfähigere Routinen, als die von uns verwendeten Mathematica-Numerikroutinen nötig.

### 2.2.3 Selbstkonsistenzmodell zweiter Stufe

Wir werden nun untersuchen, ob sich unsere bisherigen Ergebnisse durch einen erweiterten Selbstkonsistenzansatz reproduzieren lassen. Anstatt in (2.82)  $\kappa(p^2)$  an einem festen Wert  $\bar{p}$  zu nehmen, nähern wir  $\kappa(p^2)$  durch einen Padé 1. Art der

Ordnung  $\frac{O[p^2]}{O[p^2]}$

$$X_s^{(n)} = \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n)} p^2}{1 + b_1^{(n)} p^2} \left[ \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i^{(n)}}{s + M_i^{2(n)}} \right] \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n)} p^2}{1 + b_1^{(n)} p^2} \quad (2.117)$$

und betrachten dies als Grundlage für den neuen Selbstkonsistenzansatz. Daraus folgt für die Kanalampplituden der anderen Kanäle

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} &= \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{1}{4}(P - p' - p)^2}{1 + b_1^{(n)} \frac{1}{4}(P - p' - p)^2} \left[ \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i^{(n)}}{(p' - p)^2 + M_i^{2(n)}} \right] \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{1}{4}(P + p' + p)^2}{1 + b_1^{(n)} \frac{1}{4}(P + p' + p)^2} \\ X_u^{(n)} &= \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{1}{4}(P + p' - p)^2}{1 + b_1^{(n)} \frac{1}{4}(P + p' - p)^2} \left[ \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i^{(n)}}{(p' + p)^2 + M_i^{2(n)}} \right] \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{1}{4}(P - p' + p)^2}{1 + b_1^{(n)} \frac{1}{4}(P - p' + p)^2} \end{aligned} \quad (2.118)$$

mit

$$\begin{aligned} n'(n) &= n \text{ für } 1 \leq n \leq 2 \quad , \\ n'(n) &= 5(n - 2) + 2 \text{ für } n \geq 3 \quad . \end{aligned} \quad (2.119)$$

Dabei ist  $n'(n)$  nicht die Anzahl der Bindungspole, sondern aller Pole, inklusive der komplexen. Die Kerndiagonalwerte werden zu

$$\begin{aligned} K_d^{(n)}(s, k^2) &:= (k|K|k) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{a_0^{(n)} + \frac{1}{4}a_1^{(n)}(P - 2k)^2}{1 + \frac{1}{4}b_1^{(n)}(P - 2k)^2} \left[ \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} \right] \frac{a_0^{(n)} + \frac{1}{4}a_1^{(n)}(P + 2k)^2}{1 + \frac{1}{4}b_1^{(n)}(P + 2k)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_0^{(n)} + \frac{1}{4}a_1^{(n)}P^2}{1 + \frac{1}{4}b_1^{(n)}P^2} \left[ \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i}{4k^2 + M_i^{2(n)}} \right] \frac{a_0^{(n)} + \frac{1}{4}a_1^{(n)}P^2}{1 + \frac{1}{4}b_1^{(n)}P^2} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.120)$$

Als Lösung der Integralgleichung im  $(n)$ -ten Iterationsschritt erhält man, wenn man  $K_d(s, k^2)$  durch  $K_d(4, k^2)$  approximiert

$$X_s^{(n+1)} = \sqrt{K_d^{(n)}(4, p^2)} \frac{1}{\Delta_F^{(n+1)}(s)} \sqrt{K_d^{(n)}(4, p^2)} \quad (2.121)$$

mit

$$\Delta_F^{(n+1)}(s) = \frac{1}{\text{tr}(K^{(n)}G)(s)} + \frac{\lambda}{2} \quad (2.122)$$

und

$$\begin{aligned} \text{tr}(K^{(n)}G)(s) &= \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{a_1^{(n)}}{b_1^{(n)}} \right)^2 \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} \right) I_0(s) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{a_0^{(n)} + \frac{1}{4}a_1^{(n)}s}{1 + \frac{1}{4}b_1^{(n)}s} \right)^2 \sum_{i=1}^{n'(n)} N_i^{(n)} I_1(s, M_i^{2(n)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda \frac{a_1^{(n)}}{b_i^{(n)}} \sum_{i=1}^{n'(n)} \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} \frac{4(a_0^{(n)} b_1^{(n)} - a_1^{(n)})}{b_1^{(n)2}} I_2\left(s, \frac{4}{b_1^{(n)}}\right) \\
& - \frac{\lambda}{2} \frac{16(a_0^{(n)} b_1^{(n)} - a_1^{(n)})^2}{b_1^{(n)4}} \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} I_3\left(s, \frac{4}{b_1^{(n)}}\right) \quad . \quad (2.123)
\end{aligned}$$

Neben den Integralen  $I_0$  (2.74) ,  $I_1$  (2.75) benötigt man ferner

$$\begin{aligned}
I_2(s, M^2) & := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{M^2 + (\pm 2k + \sqrt{s})^2} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \\
& = \frac{8 + 6M + M^2 + 2s}{M(2+M)(4+s)(4+4M+M^2+4s)} \quad (2.124)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_3(s, M^2) & := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{M^2 + (-2k + \sqrt{s})^2} \frac{1}{M^2 + (+2k + \sqrt{s})^2} \\
& \quad \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \\
& = \frac{4 + 6M + M^2 + s}{M(2+M)(4+s)(M^2+s)(4+4M+M^2+4s)} \quad (2.125)
\end{aligned}$$

(Berechnung der Integrale in Anhang D)

Die Form (2.117) mit  $(n+1)$  statt  $(n)$  gewinnt man wieder mittels Padéapproximation der Ordnung  $\frac{O[p^2]}{O[p^2]}$  von  $\sqrt{K_d^{(n)}(4, p^2)}$  und Partialbruchzerlegung von  $\frac{1}{\Delta_F^{(n+1)}(s)}$ . Die Ergebnisstruktur ist wie in den beiden folgenden Beispielen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_F^{(3)}(s, \lambda = 1)} & = -\frac{0.00741615}{4.17712 + s} + \frac{0.0559432}{4.26763 + s} - \frac{1.87991 \cdot 10^{-8}}{4.34483 + s} \\
& \quad + \frac{0.391288 - 0.15607 i}{4.41626 - 0.197002 i + s} + \frac{0.391288 + 0.15607 i}{4.41626 + 0.197002 i + s} \\
& \quad + \frac{0.0871892}{16.8076 + s} + \frac{0.00322187}{37.5572 + s} \quad (2.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_F^{(4)}(s, \lambda = 1)} & = \frac{-0.0148545 - 2.52843 \cdot 10^{-12} i}{4.17642 + 7.00303 \cdot 10^{-13} i + s} + \frac{0.0469172 + 6.07582 \cdot 10^{-12} i}{4.28566 - 1.67362 \cdot 10^{-12} i + s} \\
& \quad + \frac{3.45073 \cdot 10^{-7} - 1.35211 \cdot 10^{-17} i}{4.33209 + s} \\
& \quad + \frac{0.390477 + 0.073605 i}{4.38726 + 0.136749 i + s} + \frac{0.390477 - 0.073605 i}{4.38726 - 0.136749 i + s} \\
& \quad + \frac{-0.000752164 - 2.00951 \cdot 10^{-10} i}{16.3519 + 2.11609 \cdot 10^{-9} i + s} + \frac{0.00561564 + 4.16791 \cdot 10^{-10} i}{16.5339 - 7.61895 \cdot 10^{-9} i + s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-3.85434 \cdot 10^{-7} - 1.35674 \cdot 10^{-10} i}{16.6825 + 5.94725 \cdot 10^{-9} i + s} \\
& + \frac{0.0454729 + 0.0124461 i}{16.8462 + 0.391237 i + s} + \frac{0.0454728 - 0.0124462 i}{16.8462 - 0.391237 i + s} \\
& + \frac{0.00247116 + 1.26103 \cdot 10^{-18} i}{37.2077 + s} + \frac{0.0000401323 + 4.96422 \cdot 10^{-21} i}{66.0708 + s}
\end{aligned} \tag{2.127}$$

Man sieht, daß wir keine rein numerische Korrektur der Bindungszustände erhalten, sondern diese, als Folge der Padéapproximation von  $\sqrt{K_D(4, p^2)}$ , in drei Summanden aufspalten.

Zwischen den Bindungszustandstripeln treten paarweise komplex-konjugierte Pole auf, die reguläre Beiträge von  $X_s$  approximieren. Um hieraus Aussagen über Bindungsmassen zu ziehen, fassen wir die zu einem Bindungszustand beitragenden Summanden zusammen, approximieren diese durch einen Padé der Ordnung  $\frac{O[s^0]}{O[s^1]}$ , vernachlässigen die imaginären Beiträge für das Endresultat, (nicht aber beim Iterationsprozeß), die um Größenordnungen kleiner sind als die reellen, und interpretieren den dort auftretenden Pol als tatsächliche Bindungsmasse. Faßt man noch die komplex-konjugierten Pole zusammen, erhält man beispielsweise für obige Reihen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{\Delta}_F^{(3)}(s, \lambda = 1)} &= \frac{0.048531}{4.28216 + s} + \frac{0.087189}{16.8076 + s} + \frac{0.003221}{37.55717 + s} \\
&+ \frac{3.51755 + 0.782576 s}{19.5422 + 8.83252 s + s^2}
\end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{\Delta}_F^{(4)}(s, \lambda = 1)} &= \frac{0.0320784}{4.3403 + s} + \frac{0.00486036}{16.5627 + s} + \frac{0.0024711}{37.2076 + s} + \frac{0.00004013}{66.0707 + s} \\
&+ \frac{3.44638 + 0.780954 s}{19.2668 + 8.77453 s + s^2} + \frac{1.54183 + 0.0909457 s}{283.948 + 33.6925 s + s^2}
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Aus (Abb. 2.14) können wir entnehmen, daß die ersten Iterationsschritte zwar die erwarteten Bindungspole liefern, unglücklicherweise aber ist der Iterationsprozeß für jeglichen Kopplungsbereich nicht stabil.

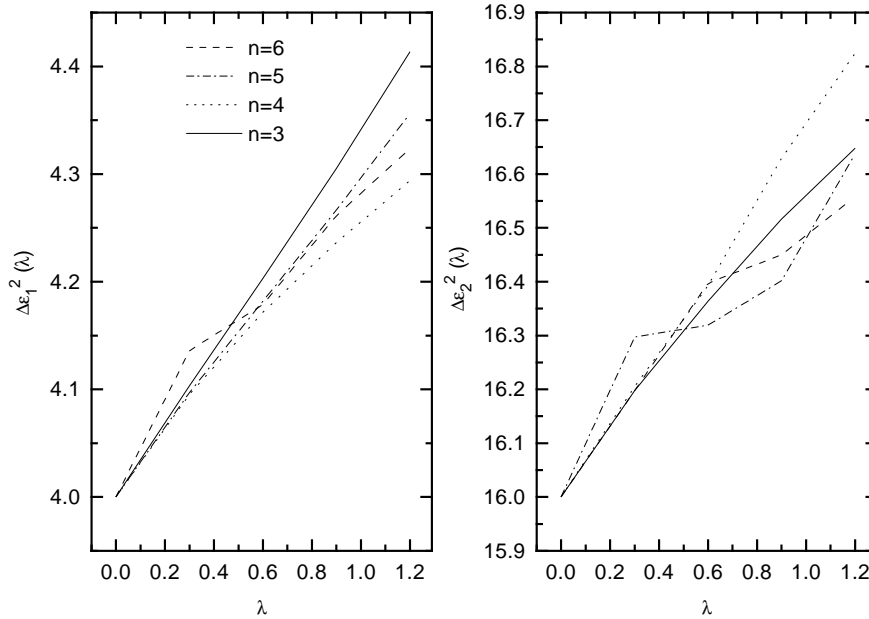


Abb.2.14:  $\Delta\epsilon_i^2(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ ,  
 $n = 3 \dots 6$ ,  $\Delta\lambda = 0.3$

## 2.3 Fazit

Wir konnten einen Iterationsprozeß zur Lösung der crossingymmetrischen Gleichung definieren, der es ermöglicht, im Prinzip alle Bindungszustände ihrer Existenz nach zu erfassen. Insbesondere konnten wir eine verbesserte Iteration formulieren, die eine Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$  zuläßt. Die grundlegende Idee war dabei, eine durch Iteration erzeugte funktionelle Abhängigkeit der Kanalampplitude zu verallgemeinern und als Selbstkonsistenzansatz zu wählen. Es zeigte sich, daß das einfachste Verfahren, das auf der Verallgemeinerung des ersten Iterationsschrittes beruhte, das einzig numerisch stabile ist. Dieser Ansatz scheint auch gerechtfertigt, da der erste Iterationsschritt eine analytische Fortsetzung des störungstheoretischen Ergebnis für einen Kanal auf Ein-Schleifen Niveau definiert.

Andererseits mußten wir feststellen, daß die von uns ermittelten Bindungszustände in erster Ordnung von  $\lambda$  falsch sind, also insbesondere die erste Anregungsenergie, die man mittels Blasennäherung erhält, durch Crossing erst in zweiter Ordnung von  $\lambda$  korrigiert wird.

Wir mußten beim Studium des Einflusses von  $M_4$  auf die Bindungsmassen feststellen, daß ein zahlenwertiges Nachführen von  $M_4 \rightarrow Z$  nur eine Bindungsmasse in erster Ordnung von  $\lambda$  korrigieren kann.

Daß die Bindungsmassen gerade in erster Ordnung  $\lambda$  falsch liegen, legt nahe, daß

die Ursache für die Abweichung in der Näherung des Propagators durch seinen Term nullter Ordnung liegt, insbesondere da eine Korrektur der Bindungsmassen durch die Mitnahme höherer Ordnungen der Skelettgraphenentwicklung von  $M_4$  erst in dritter Ordnung  $\lambda$  zu erwarten ist.



# Kapitel 3

## Untersuchung der $T_4$ -Polstruktur in $\phi_D^4$

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß die  $\phi^4$ -Theorie in zwei und drei Dimensionen keine geraden Bindungszustände ausbildet. In vier Dimensionen zeichnet sich bereits auf dem Niveau der Bethe-Salpeter-Gleichung die Trivialität der  $\phi^4$ -Theorie ab. Löst man die Theorie in  $D = 4 - 2\varepsilon$  Dimensionen, so stellt man fest, daß man sich dem Kontinuumslimit nicht beliebig nähern kann.

### 3.1 Iterationsprozeß in $1 < D < 4$ Dimensionen

Gegenüber  $D = 1$  erfordert die Lösung der crossingsymmetrischen Bethe-Salpeter-Gleichung in  $D > 1$  die Berechnung  $D$ -dimensionaler Integrale. Allgemein festzustellen ist, daß wir drei äußere Impulse  $p, P$  und  $p'$  haben. Der Integrationsimpuls  $k$  wird daher in den Integranden in Form seines Betrages  $k^2$  und seiner mit den äußeren Impulsen gebildeten Skalarprodukte ( $k \cdot p, k \cdot P, k \cdot p'$ ) auftreten.

Wir werden folgende Darstellung des Vektorintegrals  $\int d^D k$  verwenden:

$$\int d^D k = \int_0^\infty dk k^{D-1} \int_0^{2\pi} d\theta_{D-1} \int_0^\pi d\theta_i \prod_{i=1}^{D-2} (\sin \theta_i)^{D-1-i} \quad . \quad (3.1)$$

Alternativ kann man den  $j$ -dimensionalen Unterraum betrachten, der durch die äußeren Impulse aufgespannt wird [Co 85].

Wir zerlegen den Integrationsimpuls  $k$  in einen Anteil  $k_{\parallel}$ , der in diesem Raum liegt, und einen dazu orthogonalen Anteil  $k_{\perp}$

$$k = k_{\parallel} + k_{\perp} = \sum_{i=0}^{j-1} k^i e_i + k_{\perp} \quad (3.2)$$

und erhalten so

$$\int d^D k = \int dk^0 \dots dk^{j-1} \int d^{D-j} k_{\perp}$$

$$= S_{D-j} \int dk^0 \cdots dk^{j-1} \int_0^\infty dk_\perp k_\perp^{D-j-1} \quad , \quad (3.3)$$

wobei  $S_\nu$  die  $\nu$ -dimensionale Kugeloberfläche meint.

Zur Lösung der crossingsymmetrischen Bethe-Salpeter-Gleichung wollen wir im wesentlichen die Vorgehensweise aus  $D = 1$  übernehmen, d.h. wir streben mit dem Input  $M_4 = 1$  auf der Basis einer Stützstellenapproximation in den Relativimpulsen die Definition eines zu Kapitel 2 analogen Selbstkonsistenzansatz an und lösen die in jedem Iterationsschritt auftretende lineare Integralgleichung mittels einer symmetrischen Produktkernapproximation von Rang 1, welche wiederum die Eigenschaft besitzt, die Diagonalwerte des vollständigen Kerns richtig wiederzugeben.

Die Lösung des ersten Iterationsschrittes (Blasennäherung) ist zunächst noch exakt gegeben durch

$$X_s^{(1)} = \frac{I_0(s; D)}{1 + m^{D-4} \frac{g^2}{2} I_0(s; D)} \quad (3.4)$$

$$I_0(s; D) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G(k, P) \quad , \quad (3.5)$$

Mit dem Zweiteilchenpropagator

$$\begin{aligned} G(k, P) &:= \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}P)^2 + 1][(k - \frac{1}{2}P)^2 + 1]} \\ &= \frac{1}{(k^2 + \frac{1}{4}s + 1)^2 - k^2 s (\hat{k}\hat{P})^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.6)$$

folgt

$$I_0(s; D) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left( \Gamma(2 - \frac{D}{2}) - \frac{2}{3} \frac{s}{s+4} \Gamma(3 - \frac{D}{2}) {}_2F_1[1, \frac{-1+D}{2}, \frac{5}{2}, \frac{s}{s+4}] \right) \quad , \quad (3.7)$$

wobei alle Impulse mit  $m$  skaliert sind. **Bemerkung:** In  $D = 2, 3$  und für den endlichen Anteil in  $D = 4$  wird dieses zu einer elementaren Funktion (Anhang F).

Wir stellen fest:

1. Der Fredholmnenner  $\Delta_F(s) = 1 + m^{D-4} \frac{g^2}{2} I_0(s; D)$  bildet im Minkowskischen für  $1 < D < 4$ , also insbesondere für  $D = \{2, 3\}$ , keine Nullstellen aus. Folglich zeigt die Blasennäherung keine Bindungszustände. Ob dies in der Theorie begründet liegt oder aber eine Folge der Näherung ist, soll die Lösung der crossingsymmetrischen Gleichung zeigen.

**Bemerkung:** Wir definieren in Verallgemeinerung von  $D = 1$  für  $D \neq 4$  eine dimensionslose Kopplung:

$$\lambda := g^2 \cdot m^{D-4} \quad . \quad (3.8)$$

2. In  $D = 4$  ist  $I_0(s; D)$  divergent, genaugenommen der Beitrag  $I_0(0; 4)$ . Wir betrachten die Theorie in  $D = 4 - 2\epsilon < 4$  und werden untersuchen, ob der Kontinuumsliches  $\epsilon \rightarrow 0$  durchgeführt werden kann.

Wir wollen analog zu  $D = 1$  in  $D > 1$  eine analytische Reduktion der crossing-symmetrischen Gleichung auf ein nichtlineares Gleichungssystem durchführen, und dieses durch einen Iterationsprozeß lösen. Dazu nehmen wir nicht  $X_s$  als Input für den Integralkern des nächsten Iterationsschrittes, sondern dessen Padéapproximante (1. Art) der Ordnung  $\frac{O[s]^{l-1}}{O[s]^l}$ , wobei  $l$  gleich der Anzahl der gewünschten Polstellen ist. Den Selbstkonsistenzansatz ( $l$ -te Stufe der rationalen Approximation) erhalten wir durch Partialbruchzerlegung. Die in jedem Iterationsschritt auftretende lineare Integralgleichung werden wir wieder mittels einer  $PK Rg$  1-Näherung für den Kern  $K$  lösen. Um nach einmaliger Iteration den Selbstkonsistenzansatz wiederzugewinnen, muß  $\text{tr}KG(s)$  als Reihe in  $s$  bis zur Ordnung  $O[s^{2l-1}]$  angegeben werden, woraus man die Reihendarstellung von  $X_s$  bis  $O[s^{2l-1}]$  und damit deren Padéapproximante der Ordnung  $\frac{O[s^{l-1}]}{O[s]^l}$  gewinnt.

1. Lösung des ( $n$ )-ten Iterationsschrittes

$$\tilde{X}_s^{(n)} = \sum_{i=1}^l \frac{N_i^{(n)}}{s + M_i^{(n)2}} \quad . \quad (3.9)$$

2. Vollständiger Integralkern des folgenden Iterationsschrittes nach Crossing

$$K^{(n)} = 1 - \frac{\lambda}{2} \left\{ \sum_{i=1}^l \frac{N_i^{(n)}}{(p-p')^2 + M_i^{2(n)}} + \frac{N_i^{(n)}}{(p+p')^2 + M_i^{2(n)}} \right\} \quad . \quad (3.10)$$

3. Diagonalwertapproximation

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{(n)}(p^2, p'^2) &= \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l \left( \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} + \frac{N_i^{(n)}}{4p^2 + M_i^{2(n)}} \right)} \\ &\cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l \left( \frac{N_i^{(n)}}{M_i^{2(n)}} + \frac{N_i^{(n)}}{4p'^2 + M_i^{2(n)}} \right)} \quad . \quad (3.11) \end{aligned}$$

4. (formale) Lösung des ( $n+1$ )-ten Iterationsschrittes

$$X_s^{(n+1)} = \frac{1}{\frac{1}{\text{tr}(K^{(n)}G)(s)} + \frac{\lambda}{2}} \tilde{K}^{(n)}(1, 1) \quad , \quad (3.12)$$

wobei  $p^2 = p'^2 = 1$  gesetzt wurde.

5.  $\text{tr}(K^{(n)}G(s))$  ist als Reihe in  $s$  bis zur Ordnung  $O[s^{2l-1}]$  gegeben. Nach Padéapproximation gibt es Koeffizienten  $a_i^{(n+1)}, b_i^{(n+1)}$ , so daß gilt

$$\tilde{X}_s^{(n+1)} = \frac{\sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(n+1)} s^i}{\sum_{i=0}^l b_i^{(n+1)} s^i} . \quad (3.13)$$

Die Selbstkonsistenzform (3.9) gewinnen wir mittels Partialbruchzerlegung wieder.

Als konkrete Darstellung des  $D$ -dimensionalen Integrals wählen wir Gl. (3.1) mit  $P = (P^0, \vec{P}_D)$ ,  $P^0 = \sqrt{s}$  und  $\vec{P}_D = \vec{0}$  als Polarachse, so daß sich die Winkelintegration auf eine hypergeometrische Funktion zurückführen läßt:

$$\begin{aligned} \text{tr} KG(s) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} K_d(k^2) G(k, P) \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^D} k^{D-1} K_d(k^2) \int_0^{2\pi} d\theta_{D-1} \prod_{i=1}^{D-2} \int_0^\pi d\theta_i \sin\theta_i^{D-1-i} G(k, P) \\ &= \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk k^{D-1} K_d(k^2) \frac{1}{(k^2 + \frac{1}{4}s + 1)^2} \\ &\quad \cdot \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{D-3}{2}} \frac{1}{1 - \frac{k^2 s}{(k^2 + \frac{1}{4}s + 1)^2} x^2} \\ &= \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk K_d(k^2) k^{D-1} \frac{\sqrt{\pi}}{(k^2 + \frac{1}{4}s + 1)^2} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1, \frac{D}{2}, \frac{k^2 s}{(k^2 + \frac{1}{4}s + 1)^2}\right] \\ &=: \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dk k^{D-1} f(k^2, s; D) K_d(k^2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $K_d(k^2) = \tilde{K}(k^2, k^2)$ . Um  $\text{tr} KG(s)$  als Reihe in  $s$  angeben zu können, entwickeln wir  $f(k^2, s; D)$  um  $s = 0$ , so daß sich die Taylorkoeffizienten von  $\text{tr} KG(s)$  als eindimensionale, zahlenwertige (die Kopplung ist auf einen festen Wert gesetzt) und damit numerisch berechenbare Integrale ergeben. Wir geben  $f(k^2, s; D)$  exemplarisch bis  $O[s^3]$  an.

$$\begin{aligned} f(k^2, s; D) &= \sum_{j=0}^3 f^j(k^2, D) s^j + O[s^4] \\ &= \frac{1}{1+k^2} - s \frac{1}{D} \left\{ \frac{1}{(1+k^2)^4} + \frac{D-2}{2} \frac{1}{(1+k^2)^3} \right\} \\ &\quad + s^2 \frac{1}{D(2+D)} \left\{ \frac{3}{(1+k^2)^6} + \frac{D-4}{(1+k^2)^5} + \frac{16-10D+3D^2}{16} \frac{1}{(1+k^2)^4} \right\} \\ &\quad - s^3 \frac{1}{D(2+D)(4+D)} \left\{ \frac{15}{(1+k^2)^8} + \frac{9(D-6)}{2} \frac{1}{(1+k^2)^7} + \right. \\ &\quad \left. \frac{112-42D+5D^2}{(1+k^2)^6} + \frac{-32+20D-4D^2+D^3}{16} \frac{1}{(1+k^2)^5} \right\} + O[s^4] . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dies geht in die integrale Form der Reihendarstellung für  $\text{tr}KG(s)$  ein, bei der wir  $I_0(s; D)$  (Gl.(3.5)) und

$$I_1(s; D; M^2) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} G(k, P) \frac{1}{4k^2 + M^2} \quad (3.16)$$

verwenden:

$$\begin{aligned} \text{tr}KG(s) &= \left(1 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l \frac{N_i}{M_i^2}\right) I_0(s; D) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l N_i I_1(s, M_i^2; D) \\ &= \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \left[ \left(1 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l \frac{N_i}{M_i^2}\right) \sum_{j=1}^l s^j \underbrace{\int_0^\infty dk k^{D-1} f^j(k^2, D)}_{I_j^0(D)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l N_i \sum_{j=1}^l s^j \underbrace{\int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{1}{4k^2 + M_i^2} f^j(k^2, D)}_{I_j^1(M_i^2, D)} \right] \\ &= \sum_{j=0}^l s^j \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l \frac{N_i}{M_i^2}\right) I_j^0(D) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^l N_i I_j^1(M_i^2, D) \right\} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Bemerkung:

Eine Padéapproximante kann das Grenzwertverhalten einer nichtanalytischen Funktion für  $s \rightarrow \infty$  nicht erfassen. Da der Propagator aber nach außen stark abfällt, liefert der Integrand nur bis zu einem endlichen  $k^2$  (hängt unmittelbar mit  $s$  über Crossingoperation zusammen) einen wesentlichen Beitrag zum Integral, und in diesem Bereich stellt die Padéapproximante für  $D \neq 4$  eine gute Näherung dar. Insbesondere ist die gewählte Padéapproximante die günstigste, da sie abgesehen von dem Verhalten für kleine  $s$ , das für große  $s$  am besten erfasst. Wegen

$\lim_{s \rightarrow \infty} \{I_0(s), I_1(s, M^2)\} = 0$  gilt nämlich für das exakte  $X_s$ :

$$X_{s,\text{exakt}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad (3.18)$$

und zwar schwächer als  $\frac{1}{s}$ .

Offenbar hat  $\text{tr}KG(s)$  in Gleichung (3.14) einen Verzweigungspunkt in  $s_E = -s_M = -4$ . Den Schnitt legen wir konventioneller Weise von  $s_E = -4 \dots -\infty$ , wodurch eine eindeutige Fortsetzung der Funktion gegeben ist. Daher definiert die Padéapproximante eine analytische Fortsetzung aus dem Euklidischen nach  $0 < s_M < 4$ . Da Zwei-Teilchen-Bindungszustände sich gerade unterhalb der Kontinuumschwelle  $s_M = 4$  ausbilden, zeigt unser Algorithmus die Bindungsmassen dieser

Bindungszustände als Pole bezüglich  $s_M \in \{0 \dots 4\}$  in  $X_s$  an. Der Schnitt deutet sich durch abwechselnde Null- und Polstellen des Padébruches an. Anders gesagt:  $X_s$  wird im Euklidischen dargestellt durch eine Folge abwechselnder Pole und Nullstellen entlang des Schnittes.

### 3.2 $\phi^4$ -Theorie in $D = 2$ und $D = 3$ Dimensionen

Wir führen den Iterationsprozeß für die Stufen  $l = 2, 3, 4$  der rationalen Approximation von  $X_s$  auf dem Kopplungsbereich  $\lambda \in \{0 \dots 20\}$  durch. Dabei zeigt sich (Abb. 3.1 und 3.2), daß in  $D = 2$  und in  $D = 3$  keine Pole für  $s_M \in \{0 \dots 4\}$  auftreten, d.h. die  $\phi^4$ -Theorie bildet (mit dem Input  $M_4 = 1$ ) in zwei und drei Dimensionen keine geraden Bindungszustände aus. Dies wurde bereits von [GJ 81] bewiesen. Die Aussage gilt nur für gerade Zustände, da die Parität auch in  $D > 1$  eine erhaltene Größe ist und somit die Bethe-Salpeter-Amplituden der ungeraden Zustände verschwinden.

Stattdessen zeigen sich jeweils  $l$  Polartefakte entlang des Schnittes oberhalb  $s_M = 4$ . Vergleicht man die drei übereinanderliegenden Plots, kann man beobachten, daß die Polartefaktniveaus aufspalten. Das unterste nähert sich schrittweise von oben der Teilchenschwelle  $s_M = 4$  an, während das oberste sich immer weiter von dem darunterliegenden entfernt.

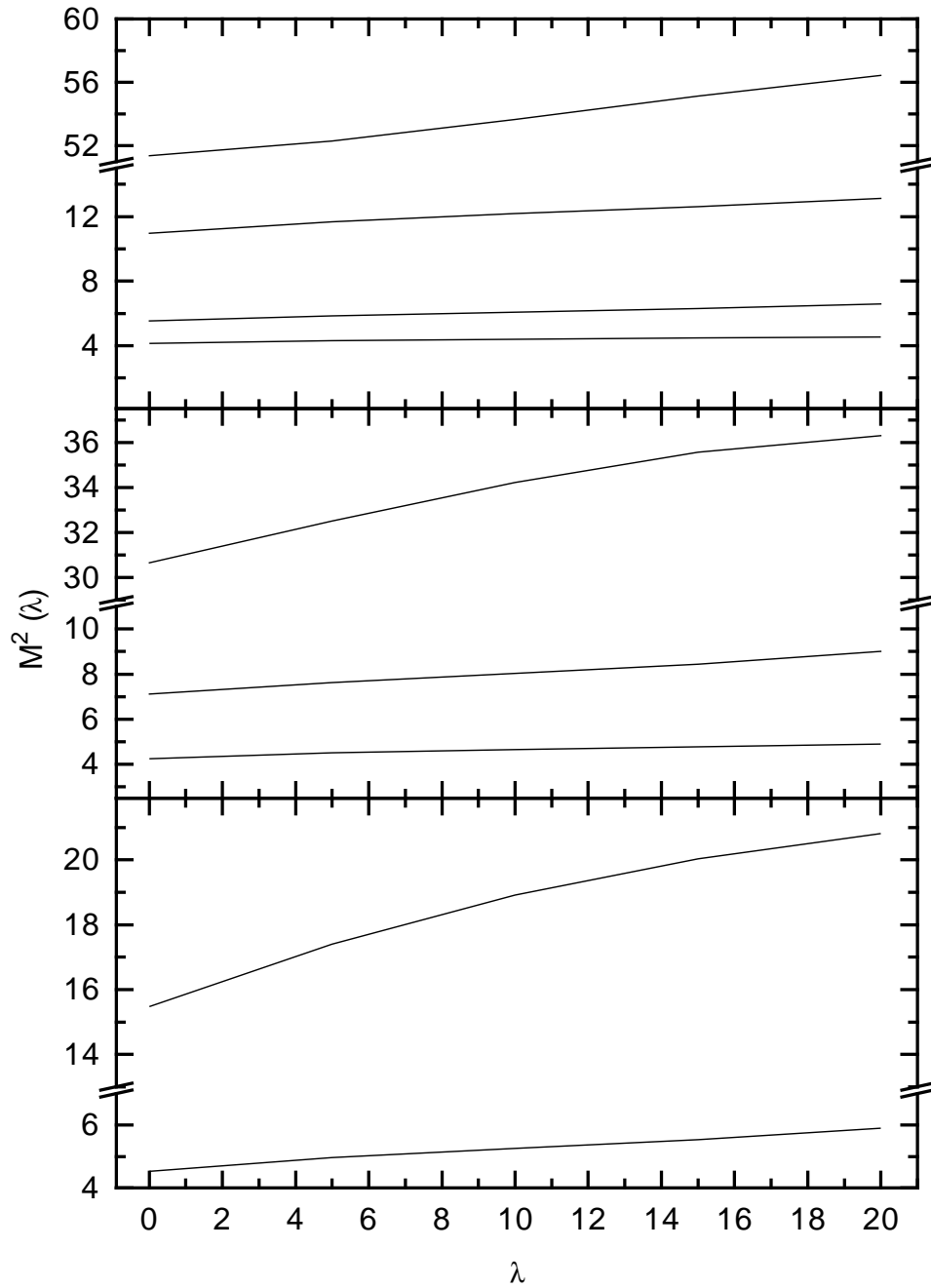


Abb.3.1:  $D = 2$ , Polartefakte  $M^2 > 4$  entlang des Schnitts für die Stufen 2, 3, 4 der rationalen Approximation

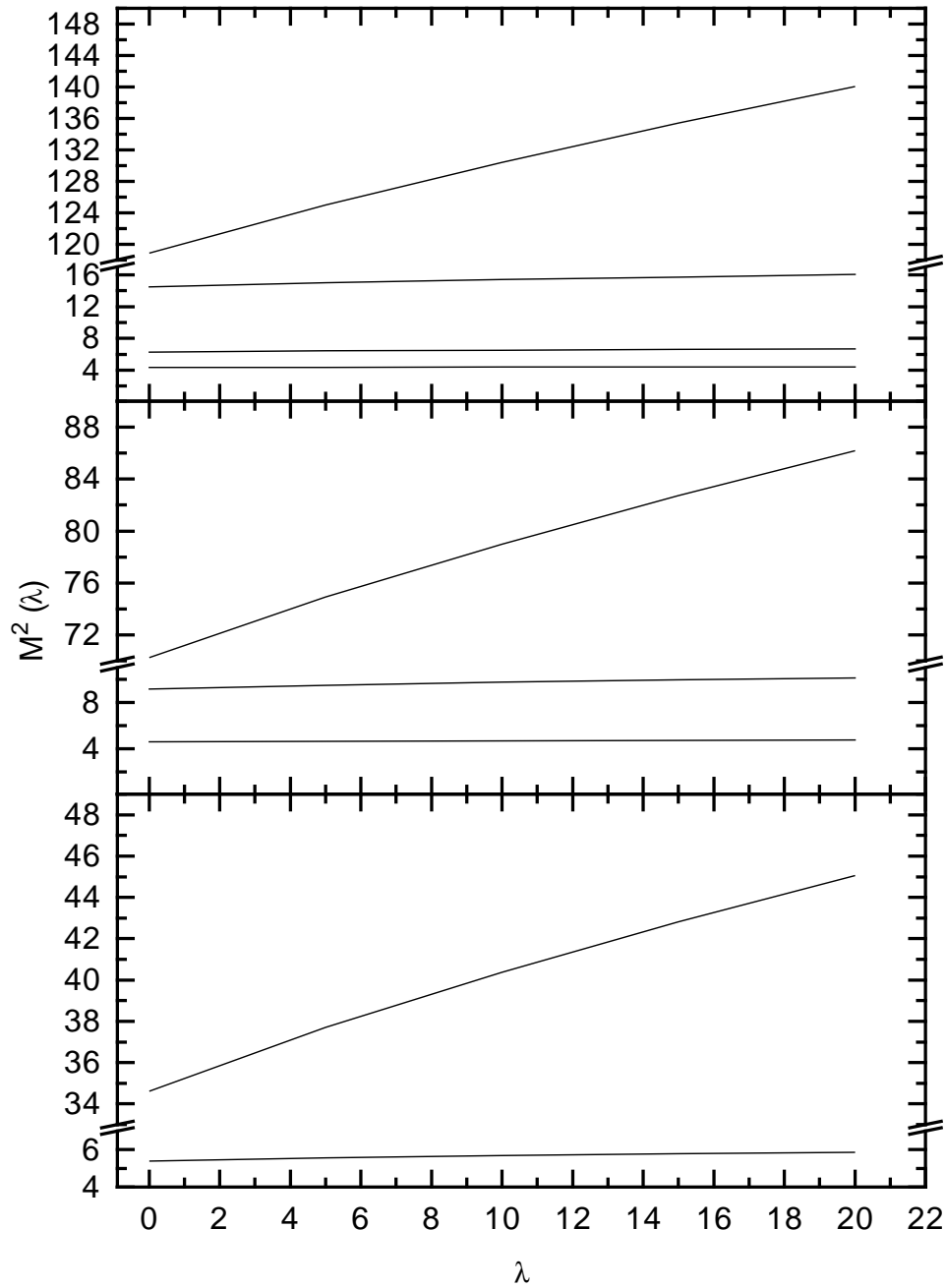


Abb.3.2:  $D = 3$ , Polartefakte  $M^2 > 4$  entlang des Schnitts für die Stufen 2, 3, 4 der rationalen Approximation



### 3.3 $\phi^4$ -Theorie in $D = 4$ Dimensionen

Wir betrachten zunächst den ersten Iterationsschritt und ziehen, anders als in  $D < 4$ , die Kopplung nicht aus den Vier-Punkt-Funktionen heraus.

Startwert ist  $K^{(0)} := M_4 = g^2$ , d.h.

$$T_s := T_s^{(1)} = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{2} \text{tr} G(s)} \quad (3.19)$$

mit

$$G(k, P) := \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}P)^2 + m^2][(k - \frac{1}{2}P)^2 + m^2]} \quad (3.20)$$

(Die Definition von  $G(k, P)$  ist damit anders als in  $D < 4$  .)

Wegen

$$\text{tr} G(s) := \int d^4 k G(k, P) \sim \int^\Lambda k^3 dk \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 \sim \ln \Lambda \quad (3.21)$$

ist die Vierpunktfunktion logarithmisch divergent, d.h. sie muß durch Wahl eines Regularisierungsverfahrens definiert werden. In dimensioneller Regularisierung ergibt sich bei Entwicklung bis  $O[\varepsilon^0]$

$$\text{tr} G(s) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \mu^{-2\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{m^2 e^\gamma}{\mu^2 4\pi} \right) + 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{s+4}{s}} \arctanh \sqrt{\frac{s}{s+4}} \right) \right\} \quad (3.22)$$

Dabei bezeichnet  $\mu$  die in dimensioneller Regularisierung auftretende willkürliche Massenskala und die Impulse sind mit  $m$  skaliert (Anhang F).

Im Kontinuumslimit  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist die (nackte) Kopplung eine divergente Größe der Massendimension 0. Ziel ist es nun, um die Wohldefiniertheit zu erreichen, die divergenten Anteile mittels Subtraktion einer neudefinierten endlichen Größe, der renormierten Kopplung  $g_R^2$ , zuzuschlagen. Wir werden im folgenden zeigen, daß eine renormierte Kopplung zwar definiert werden kann, im Kontinuumslimit  $\varepsilon := \frac{4-D}{2} \rightarrow 0$  diese aber gleich null gesetzt werden muß. Die Wechselwirkung schaltet sich folglich wieder ab und die Theorie wird damit trivial.

Wir fordern, daß jeder Iterationsschritt eine Lösung definiert, d.h. in jedem Iterationsschritt soll eine renormierte Kopplung  $g_R^2$  definierbar sein. Unbestimmt ist, welche endlichen (impulsunabhängigen) Anteile man den divergenten Anteilen zuschlägt. Dies wird zwar jeweils eine unterschiedliche renormierte Kopplung definieren, die Physik aber muß unabhängig vom gewählten Subtraktionspunkt sein. Wir wählen die die "minimale" Subtraktion, d.h. die von

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \mu^{-2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.23)$$

Für die  $T$ -Matrix erhält man mittels multiplikativer Einkanal-Renormierung

$$\begin{aligned} T_s(s) &= \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{2} \text{tr} G(s)} \\ &= \frac{\mu^{2\varepsilon} g_R^2}{1 + \frac{g_R^2}{2} \text{tr} G_R(s)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

mit

$$g_R^2 := \frac{\mu^{-2\varepsilon} g^2}{1 + \frac{g^2}{2} \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon}} \quad (3.25)$$

und

$$\text{tr} G(s)_R = \text{tr} G(s) - \frac{1}{(4\pi)^2} \mu^{-2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \quad . \quad (3.26)$$

Gl. (3.25) besitzt die (exakte) Umkehrung

$$g^2 := \frac{\mu^{+2\varepsilon} g_R^2}{1 - \frac{g_R^2}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon}} \quad . \quad (3.27)$$

Bemerkung: Die perturbativen Einkanalbeziehungen auf Einschleifenniveau gewinnt man mittels Taylorentwicklung erster Ordnung, d.h. die Blasennäherung definiert, wie schon in  $D = 1$ , eine analytische Fortsetzung der Ein-Schleifen-störungstheoretischen Ergebnisse.

Wir wollen nun untersuchen, ob wir den Kontinuumsliches durchführen können. Wir erinnern an die Definition der  $\beta$ -Funktion:

$$\beta(g_R^2, \varepsilon) := \mu \frac{d}{d\mu} \Big|_{g^2} g_R^2 \quad . \quad (3.28)$$

Einsetzen von Gl. (3.25) und Gl. (3.27) gibt

$$\beta(g_R^2, \varepsilon) = -2\varepsilon g_R^2 + \underbrace{\frac{(g_R^2)^2}{(4\pi)^2}}_{=: \beta(g_R^2)} \quad . \quad (3.29)$$

Bemerkung:

1. Die  $\beta$ -Funktion entspricht der, die man perturbativ auf Ein-Schleifen-Niveau erhält:  $\beta(g_R^2) = \beta_{P1}(g_R^2)$ .
2. Die Beziehung zwischen  $g_R^2$  und  $g^2$ , Gl.(3.25) und Gl.(3.27), erhält man auch über die Leading-Log-Summation [Br 92]

$$g^2 = g_R^2 \mu^{2\varepsilon} \exp \left\{ - \int_0^{g_R^2} \frac{dg'^2}{g'^2} \frac{\beta_v(g'^2)}{-2\varepsilon g'^2 + \beta_v(g'^2)} \right\} \quad , \quad (3.30)$$

indem man  $\beta_v(g_R^2) = \frac{(g_R^2)^2}{(4\pi)^2}$  setzt.

Wir schreiben die Gl. (3.28) um

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu} \Big|_{g^2} - 2\varepsilon\right) \frac{1}{g_R^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \quad (3.31)$$

und erhalten so die laufende Kopplung

$$\frac{1}{g_R^2(\mu_1)} = \frac{1}{g_R^2(\mu_0)} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{2\varepsilon}\right] \quad (3.32)$$

Dies wird im physikalischen Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  zu

$$g_R^2(\mu_1) = \frac{g_R^2(\mu_0)}{1 - \frac{g_R^2(\mu_0)}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu_1}{\mu_0}} \quad (3.33)$$

d.h. mit  $\mu$  steigt auch  $g_R^2(\mu)$ . Die  $\phi^4$ -Theorie ist demnach im Hochenergielimes eine Starkkopplungstheorie, sie ist nicht "asymptotisch" frei. Für

$$\mu_1 = \mu_0 e^{\frac{2(4\pi)^2}{g_R^2(\mu_0)}} \quad (3.34)$$

besitzt  $g_R^2$  einen Pol (Landau-Pol) (Gl. (3.33)). Die Kopplung divergiert und ist damit nicht physikalisch. Betrachten wir schließlich den Kontinuums-limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  von  $g^2 = g^2(g_R^2)$ , Gl. (3.27), so verschwindet der Nenner für

$$\varepsilon = \frac{g_R^2}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \quad (3.35)$$

Also geht  $g^2 \rightarrow \infty$ , bevor  $\varepsilon = 0$  erreicht ist. Dies läßt sich nur dadurch vermeiden, daß die renormierte Kopplung auf Null gesetzt wird. Angenommen, man könnte eine renormierte Kopplung definieren, indem man  $\text{tr} G(s=0)$  subtrahiert, so würde dies für  $T$  wegen  $\text{tr} G(s)_R \in [0, -\infty]$  Pole im Euklidischen liefern. Nach Crossing-operation und Diagonalwertbildung

$$\mathcal{DC}_t : s \rightarrow 4k^2 \quad (3.36)$$

liefert dies Pole auf dem Integrationsweg und der Iterationsprozeß bricht ab.

Die Ursache hierfür ist das "falsche" Vorzeichen von  $\text{tr} G(s)$  und damit das "falsche" Vorzeichen des führenden Terms der  $\beta$ -Funktion.

Wir nehmen nun an, wir hätten statt der perturbativen Entwicklung

$$T_s = g^2 \left[ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad -g^2 \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right]$$

die folgende:

$$T_s^{(-)} = g^2 \left[ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + g^2 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right] .$$

Als neue renormierte Kopplung der Blasennäherung erhalten wir so

$$g_R^{2(-)} := \frac{\mu^{-2\varepsilon} g^{2(-)}}{1 - \frac{g^{2(-)}}{2} \frac{\mu^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon}} \quad (3.37)$$

und damit als neue  $\beta$ -Funktion

$$\beta^{(-)}(g_R^{2(-)}) = -\frac{(g_R^{2(-)})^2}{(4\pi)^2} \quad (3.38)$$

und die entsprechende laufende Kopplung

$$g_R^{2(-)}(\mu_1) = \frac{g_R^{2(-)}(\mu_0)}{1 + \frac{g_R^{2(-)}(\mu_0)}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu_1}{\mu_0}} . \quad (3.39)$$

Für große  $\mu$  wird  $g_R^{2(-)}$  klein. Wir stellen folglich zwei Dinge fest:

1. Die so undefinierte Theorie ist asymptotisch frei und renormierbar.
2. Der Iterationsprozeß bricht nicht ab.

Offenbar deutet sich hier auf einfachem Niveau die Trivialität der  $\phi^4$ -Theorie in  $D = 4$  in einer aus der Renormierungsgruppensummation unter Verwendung der Ein-Loop- $\beta$ -Funktion bekannten Art und Weise an. Um eventuell doch Aussagen für  $D = 4$  gewinnen zu können, betrachten wir die Theorie in  $D < 4$  in der Hoffnung, daß sich eventuelle Strukturen, in unserem Fall Bindungszustände, bereits hier ausbilden und sich durch Extrapolation nach  $D = 4$  fortsetzen lassen. Zu diesem Zweck lassen wir den Iterationsprozeß für verschiedene, kleine  $\varepsilon$  laufen und definieren die dimensionslose Kopplung  $\lambda_\varepsilon = m^{-2\varepsilon} g^2$ .

$$\begin{aligned} X_s^{\varepsilon=0.001}(\lambda = 0.313) &= \frac{2.14643 \cdot 10^{-7}}{7.03527+s} + \frac{27570.6}{3.5842 \cdot 10^6+s} \\ X_s^{\varepsilon=0.001}(\lambda = 0.314) &= \frac{6.75312 \cdot 10^{-8}}{7.06696+s} + \frac{25108.2}{5.81812 \cdot 10^6+s} \\ X_s^{\varepsilon=0.001}(\lambda = 0.315) &= \frac{3.31844 \cdot 10^{-9}}{7.37722+s} + \frac{14889.3}{1.54479 \cdot 10^7+s} \\ X_s^{\varepsilon=0.001}(\lambda = 0.316) &= \frac{56330.2}{-2.38382 \cdot 10^7+s} + \frac{2.0933 \cdot 10^{-8}}{6.88417+s} \\ X_s^{\varepsilon=0.001}(\lambda = 0.317) &= \frac{38079.3}{-6.72155 \cdot 10^6+s} + \frac{1.19392 \cdot 10^{-7}}{6.94746+s} \\ X_s^{\varepsilon=0.001}(\lambda = 0.318) &= \frac{35005.3}{-3.91424 \cdot 10^6+s} + \frac{2.97665 \cdot 10^{-7}}{6.9651+s} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
X_s^{\varepsilon=0.0001}(\lambda = 0.0313) &= \frac{3.1412210^{-7}}{7.00278+s} + \frac{3.141410^6}{3.3561910^7+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.0001}(\lambda = 0.0314) &= \frac{1.2786710^{-7}}{7.00456+s} + \frac{3.1058610^6}{5.2085510^7+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.0001}(\lambda = 0.0315) &= \frac{2.4199210^{-8}}{7.01098+s} + \frac{3.0080310^6}{1.1609210^8+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.0001}(\lambda = 0.0316) &= \frac{3.8569110^6}{-5.1017310^8+s} + \frac{2.0808610^{-9}}{6.96223+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.0001}(\lambda = 0.0317) &= \frac{3.2566410^6}{-7.9850410^7+s} + \frac{6.048610^{-8}}{6.99258+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.0001}(\lambda = 0.0318) &= \frac{3.1966210^6}{-4.3335710^7+s} + \frac{1.9840210^{-7}}{6.99574+s}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
X_s^{\varepsilon=0.00001}(\lambda = 0.00313) &= \frac{3.2502310^{-7}}{7.00027+s} + \frac{3.1883210^8}{3.3459510^8+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.00001}(\lambda = 0.00314) &= \frac{1.3490810^{-7}}{7.00044+s} + \frac{3.1751110^8}{5.1801210^8+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.00001}(\lambda = 0.00315) &= \frac{2.7339210^{-8}}{7.00102+s} + \frac{3.1545110^8}{1.1450110^9+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.00001}(\lambda = 0.00316) &= \frac{3.2554510^8}{-5.4753810^9+s} + \frac{1.2783910^{-9}}{6.99509+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.00001}(\lambda = 0.00317) &= \frac{3.1672210^8}{-8.0807310^8+s} + \frac{5.5699710^{-8}}{6.99922+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.00001}(\lambda = 0.00318) &= \frac{3.1510410^8}{-4.3643610^8+s} + \frac{1.895910^{-7}}{6.99956+s}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
X_s^{\varepsilon=0.000001}(\lambda = 0.000313) &= \frac{3.2611810^{-7}}{7.00003+s} + \frac{3.1940610^{10}}{3.3459810^9+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.000001}(\lambda = 0.000314) &= \frac{1.356210^{-7}}{7.00004+s} + \frac{3.1835610^{10}}{5.1797510^9+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.000001}(\lambda = 0.000315) &= \frac{2.7663210^{-8}}{7.0001+s} + \frac{3.1722310^{10}}{1.1446110^{10}+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.000001}(\lambda = 0.000316) &= \frac{3.1753210^{10}}{-5.4896810^{10}+s} + \frac{1.2088810^{-9}}{6.99949+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.000001}(\lambda = 0.000317) &= \frac{3.1560610^{10}}{-8.0849610^9+s} + \frac{5.5231510^{-8}}{6.99992+s} \\
X_s^{\varepsilon=0.000001}(\lambda = 0.000318) &= \frac{3.1453810^{10}}{-4.3659310^9+s} + \frac{1.8871810^{-7}}{6.99996+s}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Wir stellen fest:

1. Es bilden sich keine Bindungszustände aus, d.h wir haben keine Pole im Bereich  $0 < s_M < 4$ , sondern weiterhin nur Pole entlang des Schnittes von  $4 < s_M < \infty$ .
2. Es gibt für jedes  $\varepsilon$  eine kopplungsabhängige Zahl, ab der der Iterationsprozeß abbricht, d.h. Pole auf der reellen (euklidischen) Achse ausbildet.

zu 2) Dieser Zusammenhang läßt sich für kleine  $\varepsilon$  in guter Näherung mit

$$\varepsilon = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\lambda}{2} \tag{3.44}$$

angeben.

Definieren wir eine renormierte Kopplung so gilt in diesem speziellen Fall:

$$\begin{aligned} g_R^2 &= (4\pi)^2 \varepsilon \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^{-2\varepsilon}}{1 + \left(\frac{\mu}{m}\right)^{-2\varepsilon}} \\ &= (4\pi)^2 \varepsilon \left(1 - \varepsilon \ln \frac{\mu}{m} + O[\varepsilon^2]\right) \quad . \end{aligned} \quad (3.45)$$

D.h. der Abbruchpunkt  $g_R^2$  ist für kleine  $\varepsilon$  proportional zu  $\varepsilon$ . Setzen wir  $\mu = m$ , dann gilt:

$$g_{R \mu=m}^2 = \frac{\lambda}{2} = (4\pi)^2 \varepsilon \quad . \quad (3.46)$$

Das Iterationsverfahren bricht ab, wenn  $\beta(g_R^2, \varepsilon)$  ihr Minimum einnimmt.

$$\frac{d\beta(g_R^2, \varepsilon)}{dg_R^2} = -2\varepsilon + 2 \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} \equiv 0 \quad , \quad (3.47)$$

sie also gerade von dem Bereich, in dem sie asymptotisch freies Verhalten andeutet, in den nicht asymptotisch freien Bereich wechselt.

### 3.4 Fazit

Wir haben den Algorithmus, mit dem wir in einer Dimension im Prinzip alle Bindungszustände ihrer Existenz nach bestimmen konnten, für  $D$  raumzeitliche Dimensionen nachgebildet und konnten damit den Satz bestätigen, daß in der  $\phi^4$ -Theorie in zwei und drei Dimensionen keine geraden Zwei-Teilchen-Bindungszustände existieren.

In vier Dimensionen sind wir bereits mit dem ersten Iterationsschritt auf die Trivialität der  $\phi^4$ -Theorie gestoßen und mußten feststellen, daß man sich bei Verringern der Dimension auf  $D = 4 - 2\varepsilon$  dem Kontinuumslimes  $\varepsilon \rightarrow 0$  nicht beliebig nähern kann.

# Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit den traditionellen Zugang zur Bestimmung von Bindungszuständen mittels der Bethe-Salpeter-Gleichung um einen Schritt erweitert, indem wir diese durch die Einführung des total irreduziblen Kerns  $M_4$  auf eine Gleichung umgeschrieben haben, die selbst bei Abbruch der Skelettgraphenentwicklung von  $M_4$  die Crossingsymmetrie von  $T_4$  respektiert und damit zumindest eine wesentliche Konsequenz der Mikrokausalität erfaßt. Selbst die einfachste Näherung für  $M_4$  führt auf eine komplizierte, nichtlineare Struktur dieser Gleichung. Allerdings läßt sich ein iteratives Lösungsverfahren angeben, bei dem in jedem Iterationsschritt eine lineare Integralgleichung zu lösen ist und anschließend mittels Crossingoperation der Kern des folgenden Iterationsschrittes gebildet wird.

Dessen Umsetzung mittels einfacher Selbstkonsistenzmodelle kann, da wir das Energiespektrum des zur  $\phi_{D=1}^4$ -Theorie formal äquivalenten anharmonischen Oszillators seiner Existenz nach bestimmen konnten, als grundsätzlich erfolgreich angesehen werden. Daß die berechneten Bindungsmassen der Off-shell- $T_{D=1}$ -Matrix in erster Ordnung ihrer Kopplungsabhängigkeit numerisch falsch liegen, ist kein Hinweis darauf, daß dieser Zugang nicht funktionieren kann. Man wird aber den von uns genäherten Größen, also insbesondere dem Propagator  $\Delta$ , mehr Aufmerksamkeit schenken müssen. Es ist klar, daß ein Lösungsversuch der crossingsymmetrischen Bethe-Salpeter-Gleichung, bei dem für den Propagator eine fest vorgegebene Näherung als Input verwendet wird, das Bindungsspektrum der  $\phi^4$ -Theorie quantitativ nicht richtig erfassen kann, da ein solches Vorgehen die Kopplung des Propagators an  $\Gamma_4$  gemäß der Propagator-Schwinger-Dyson-Gleichung ignoriert.

Die Bestimmung des Bindungsenergiespektrums durch die Lösung eines gekoppelten Integralgleichungssystems, bestehend aus Schwinger-Dyson-Gleichung und crossingsymmetrischer Bethe-Salpeter-Gleichung, ist in der  $\phi^4$ -Theorie besonders attraktiv, da der Propagator wegen des Verschwindens der Ein- und Drei-Punkt-Funktionen ausschließlich an die Vier-Punkt-Funktion koppelt, so daß nur  $M_4$  genähert werden muß, um eine in sich geschlossenes System zur Bestimmung von  $\Delta$  und  $T_4$  bzw.  $X_s$  zu erhalten. Erst der Versuch, auf diese Weise das bekannte Bindungsspektrum der  $\phi_{D=1}^4$ -Theorie zu reproduzieren, bietet eine echte Grundlage für die

Bewertung des quantitativen Einflusses der Näherung von  $M_4$ . Deshalb sollten diese Betrachtungen Vorrang vor einer erweiterten Umsetzung der Mikrokausalität, etwa durch Formulierung einer neuen dynamischen Grundgleichung oder der Verbesserung des Iterationsprozesses in Richtung einer Respektierung der Crossingsymmetrie in jedem Iterationsteilschritt haben. Letzteres dürfte sich als deutlich schwieriger erweisen, als es zunächst erscheint, da dazu die Formulierung einer direkt lösbaren Intergalgleichung, die keinen Kanal auszeichnet, nötig ist.

In jedem Fall aber sollten weitere Betrachtungen zur Mikrokausalität in einer anderen als der  $\phi_{D>1}^4$ -Theorie angestellt werden, die in bezug auf Bindungstheorie ein unglücklicher Kandidat ist, da sie keine Zwei-Teilchen-Bindungszustände ausbildet und in  $D = 4$  darüberhinaus trivial wird. Im Hinblick auf die Formulierung der crossingsymmetrischen Bethe-Salpeter-Gleichung müßte eine geeignete Theorie eine ähnlich einfache Form der Wechselwirkung wie die  $\phi^4$ -Theorie besitzen und darüberhinaus müßten zumindest numerische Ergebnisse über das Bindungsspektrum bekannt sein.

Es ist zu hoffen, daß die hier entwickelten Ideen in späteren Untersuchungen der Mikrokausalität von Nutzen sein werden.

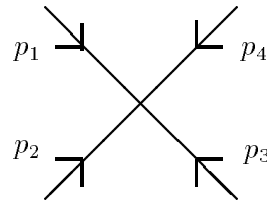


# Anhang A

## Feynmanregeln in der $\phi^4$ -Theorie

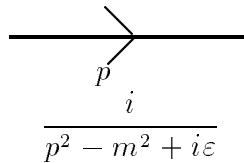
In diesem Anhang werden die minkowskischen Feynmanregeln für die n-Punkt-Funktionen der  $\phi^4$ -Theorie mit der Lagrangedichte (1.1) aufgelistet, wie wir sie in dieser Arbeit verwendet haben.

### 1. Vertex



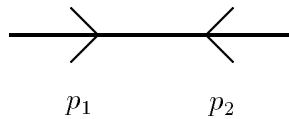
$$(2\pi)^D \delta(p_1 + \dots + p_4) \tag{A.1}$$

### 2. Propagator



$$\tag{A.2}$$

### 3. Äußere Linien, die keinen Vertex berühren



$$(2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{A.3}$$

Für jede Schleife mit internem Viererimpuls  $k$  ist eine Impulsintegration  $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$  auszuführen. Um der Bosesymmetrie der Greensfunktionen Rechnung zu tragen, muß für äquivalenten inneren Linien der Symmetriefaktor  $\frac{1}{2}$  hinzugefügt werden.

# Anhang B

## Eigenschaften der Crossingoperationen

Wir betrachten die Crossingoperationen als Koordinatenabbildungen

$$\mathcal{C}_t : \begin{pmatrix} P \\ p \\ p' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q \\ q \\ q' \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{C}_u : \begin{pmatrix} P \\ p \\ p' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R \\ r \\ r' \end{pmatrix} . \quad (\text{B.2})$$

Es gelten für diese unter Berücksichtigung der Bosesymmetrie folgende Eigenschaften:

1.

$$\mathcal{C}_t^2 = \mathcal{C}_u^2 = 1 \quad , \quad (\text{B.3})$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_t \mathcal{C}_u &= \mathcal{C}_u \\ \mathcal{C}_u \mathcal{C}_t &= \mathcal{C}_t \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Mittels dieser Eigenschaften läßt sich für die Crossingabbildung ( $M_4 = 1$ )

$$\mathcal{C} : X_s \rightarrow K_s = 1 - \frac{\lambda}{2}(X_t + X_u) = 1 - \frac{\lambda}{2}(\mathcal{C}_t + \mathcal{C}_u)X_s \quad (\text{B.5})$$

eine Umkehrabbildung angeben

$$\mathcal{C}^{-1} : K_s \rightarrow \frac{\lambda}{2}X_s = (\mathcal{C}_t + \mathcal{C}_u - 1)(1 - K_s) \quad . \quad (\text{B.6})$$

Tatsächlich sind  $T$  und  $K$  jeweils nur eine Funktion der sechs invarianten Skalarprodukte  $P, p, p'$

$$\frac{T}{K}(P, p, p') = \frac{T}{K}(P^2, p^2, p'^2, |p \cdot P|, |p' \cdot P|, |p \cdot p'|) \quad . \quad (\text{B.7})$$

Die Crossingabbildungen haben in der Basis

$$\mathcal{B}_s = \{P^2, p^2, p'^2, P \cdot p', P \cdot p, p \cdot p'\} \quad (\text{B.8})$$

folgende Matrixdarstellungen:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Die Bosesymmetrie wird erst explizit sichtbar, wenn man die Crossingoperationen ausgeführt hat. Bei den von uns verwendeten reduzierten Crossingoperationen ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s + M^2} &\rightarrow \frac{1}{(p - p')^2 + M^2} + \frac{1}{(p + p')^2 + M^2} \\ &= \frac{2(p^2 + p'^2 + M^2)}{(p^2 + p'^2 + M^2)^2 - 4(p \cdot p')^2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Bemerkung:

In  $D = 1$  sind diese sechs Skalarprodukte nicht linear unabhängig, sondern nur jeweils drei von diesen. Eine lineare Koordinatenabbildung für nur drei unabhängige Skalare läßt sich nur in speziellem Fällen angeben (z.B.  $\mathcal{A}_{D=1} = \{s, t, u\}$ ). Der Kern  $K_{D=1}$  ist wegen  $(p \cdot p')^2 = p^2 p'^2$  beim reduzierten Crossing aber tatsächlich nur eine Funktion von  $p^2$  und  $p'^2$ .

Die Abbildungen  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^t$  und  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^u$  sind nicht gemeinsam diagonalisierbar, da der Kommutator  $[C_t, C_u]$  nicht verschwindet. Eine möglichst einfache Matrixdarstellung erhält man beispielsweise in der Basis

$$\mathcal{A} = \{s, t, u, st, su, tu\} \quad (\text{B.12})$$

zu

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^t = \left( \begin{array}{c|cc} & 1 & \\ \hline 1 & & 0 \\ & 1 & \\ \hline & 0 & 1 \\ & & 1 \end{array} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^u = \left( \begin{array}{c|cc} & 1 & \\ \hline & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \\ \hline & 0 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right) . \quad (\text{B.14})$$

# Anhang C

## Padéapproximation

(Wir orientieren uns an einer Darstellung, wie sie in [Sh 91] gegeben ist.)

Padéapproximation meint die Näherung einer Funktion  $f(x)$  durch eine rationale Funktion  $R_{mn}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  mit  $P_m(x)$  und  $Q_n(x)$  Polynome vom Grad  $m$  bzw.  $n$ . Padéapproximation 1. Art beruht darauf,  $f(x)$  und  $R_{mn}(x)$  an bestimmten Stellen zusammen mit den ersten  $N$  Ableitungen mit  $N = m + n$  gleich zu machen. Wir haben in unseren Rechnungen den Abgleichpunkt  $x = 0$  gewählt.

Bemerkung:

1. Das Taylorpolynom von  $f(x)$  für  $x = 0$  ist gerade  $R_{N0}$ .
2. Größte Genauigkeit erreicht man für gegebenes  $N$  bei Zähler- und Nennerpolynom von mehr oder weniger gleichem Grad.

Sei nun

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \quad (\text{C.1})$$

$$Q_n(x) = 1 + b_1x + \dots + b_nx^n \quad (\text{C.2})$$

$$R_{mn}(0) = f^{(k)}(0) \quad k = 0, 1, \dots, N \quad . \quad (\text{C.3})$$

$f(x)$  besitze die Reihendarstellung

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \quad . \quad (\text{C.4})$$

Als Bedingung erhält man schließlich

$$a_j = \sum_{i=0}^j b_i c_{j-i} \quad j = 0, 1, \dots, N \quad . \quad (\text{C.5})$$

Daraus folgt ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten  $a_j, b_i$ .

Unter Padé 2. Art versteht man die Näherung einer Funktion auf der Basis von

Stützstellen. Wir wählen hier die Darstellung mittels Kettenbrüchen

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x_1)} = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x_1) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x_1 x_2) - f(x_1)}} \\
 &= f(x_1) + \frac{x - x_1}{\rho_1(x_1) + \frac{x - x_2}{\rho_2(x_1 x_2) - f(x_1) + \frac{x - x_3}{\rho_3(x_1 x_2 x_3) - \rho_1(x_1 x_2)}}} \quad (\text{C.6})
 \end{aligned}$$

mit den reziproken Differenzen

$$\begin{aligned}
 \rho_1(x_1) &= \frac{x - x_1}{f(x) - f(x_1)} \\
 \rho_2(x_1 x_2) &= \frac{x - x_2}{\rho_1(x_1) - \rho_1(x_2 x_1)} + f(x_1) \\
 \rho_3(x_1 x_2 x_3) &= \frac{x - x_3}{\rho_2(x_1 x_2) - \rho_2(x_3 x_1 x_2)} + \rho_1(x_1 x_2) \quad . \quad (\text{C.7})
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Die Kettenbrüche sind eine spezielle Form der rationalen Funktionen der Ordnung  $\frac{O[x^{n+1}]}{O[x^n]}$  bzw.  $\frac{O[x^n]}{O[x^n]}$  .
2. Die reziproken Differenzen sind symmetrisch bzgl. ihrer Argumente. Dies ist wichtig, da es deren explizite Berechnung wesentlich vereinfacht.

# Anhang D

## Berechnung der Integrale in $D = 1$

Im zweiten Kapitel werden die vier Integrale  $I_0 \dots I_3$  verwendet. Da die Integranden mit jeweils mindestens  $\frac{1}{k^2}$  nach außen abfallen, lassen sich die Integrale leicht mittels Residuensatz lösen, indem der Integrationsweg in der oberen Hälfte der komplexen  $k$ -Ebene geschlossen wird.

$$I_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} &=: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f_0(k) \\ &= i \cdot [\text{Res}_{k=+\frac{1}{2}\sqrt{s}+i}\{f_0(k)\} + \text{Res}_{k=-\frac{1}{2}\sqrt{s}+i}\{f_0(k)\}] \\ &= i \left( \frac{\frac{-i}{2}}{(\sqrt{s} + i)^2 + 1} + \frac{\frac{-i}{2}}{(-\sqrt{s} + i)^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$= \frac{1}{s + 4} \quad (\text{D.3})$$

$$I_1(s, M^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{4k^2 + M^2} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} &=: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f_1(k) \\ &= i \cdot [\text{Res}_{k=+\frac{1}{2}\sqrt{s}+i}\{f_1(k)\} + \text{Res}_{k=-\frac{1}{2}\sqrt{s}+i}\{f_1(k)\} + \text{Res}_{k=\frac{1}{2}iM}\{f_1(k)\}] \\ &= i \left( \frac{\frac{-i}{2}}{(-2i\sqrt{s} + s)(-4 + M^2 - 4i\sqrt{s} + s)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{i}{2}}{(2i\sqrt{s} + s)(-4 + M^2 + 4i\sqrt{s} + s)} - \frac{4i}{M(16 - 8M^2 + M^4 + 8s + 2M^2s + s^2)} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4 + M}{M(4 + s)((2 + M)^2 + s)} \quad (\text{D.5})$$

$$I_2(s, M^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{M^2 + (\pm 2k + \sqrt{s})^2} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} &=: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f_2(k) \\ &= i \cdot [\text{Res}_{k=+\frac{1}{2}\sqrt{s}+i} \{f_2(k)\} + \text{Res}_{k=-\frac{1}{2}\sqrt{s}+i} \{f_2(k)\} + \text{Res}_{k=\pm\frac{\sqrt{s}}{2}+\frac{1}{2}iM} \{f_2(k)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i \left( \frac{\frac{-i}{2}}{(-4 + M^2) (2i\sqrt{s} + s)} - \frac{\frac{i}{2}}{(-2i\sqrt{s} + s) (-4 + M^2 - 8i\sqrt{s} + 4s)} + \frac{4i}{M (-4 + M^2) (4 - M^2 + 4iM\sqrt{s} + 4s)} \right) \\ &= \frac{8 + 6M + M^2 + 2s}{M (2 + M) (4 + s) (4 + 4M + M^2 + 4s)} \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

$$I_3(s, M^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{M^2 + (-2k + \sqrt{s})^2} \frac{1}{M^2 + (+2k + \sqrt{s})^2} \frac{1}{[(k + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1][(k - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + 1]} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} &=: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f_3(k) \\ &= i \cdot [\text{Res}_{k=+\frac{1}{2}\sqrt{s}+i} \{f_3(k)\} + \text{Res}_{k=-\frac{1}{2}\sqrt{s}+i} \{f_3(k)\} \\ &\quad + \text{Res}_{k=-\frac{\sqrt{s}}{2}+\frac{1}{2}iM} \{f_3(k)\} + \text{Res}_{k=+\frac{\sqrt{s}}{2}+\frac{1}{2}iM} \{f_3(k)\}] \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i \left( \frac{\frac{-i}{2}}{(-4 + M^2) (-2i\sqrt{s} + s) (-4 + M^2 - 8i\sqrt{s} + 4s)} - \frac{\frac{i}{2}}{(-4 + M^2) (2i\sqrt{s} + s) (-4 + M^2 + 8i\sqrt{s} + 4s)} - \frac{\frac{i}{4}}{M \left(1 - \frac{M^2}{4}\right) \left(1 - \frac{M^2}{4} - iM\sqrt{s} + s\right) (-4iM\sqrt{s} + 4s)} - \frac{\frac{i}{4}}{M \left(1 - \frac{M^2}{4}\right) \left(1 - \frac{M^2}{4} + iM\sqrt{s} + s\right) (4iM\sqrt{s} + 4s)} \right) \\ &= \frac{4 + 6M + M^2 + s}{M (2 + M) (4 + s) (M^2 + s) (4 + 4M + M^2 + 4s)} \quad (\text{D.10}) \end{aligned}$$



# Anhang E

## Partialwellenprojektion

Eine Möglichkeit den Winkelanteil  $\hat{p} \cdot \hat{p}'$  zumindest näherungsweise zu berücksichtigen besteht darin, eine Partialwellenprojektion der Vier-Punkt-Funktionen  $T$  und  $K$  nach Gegenbauerpolynomen  $C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$  durchzuführen. Wir verwenden folgende Definition des  $D$ -dimensionalen Integrals [PT 82]:

$$\int d^D k := \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int_0^{\infty} |\vec{k}|^{D-2} d|\vec{k}| \int_{\Omega} d\Omega_k \quad (\text{E.1})$$

wobei

$$\int_{\Omega} d\Omega_k = S_{D-1} \int d\hat{k} \quad (\text{E.2})$$

mit

$$S_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \quad . \quad (\text{E.3})$$

Setzt man

$$(p| \frac{T}{K}(P)|p') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{p} \cdot \hat{p}')(p^0, |\vec{p}'| | \frac{T_l}{K_l}(s) | p^0 |\vec{p}'|) \quad , \quad (\text{E.4})$$

so erhält man für die Bethe-Salpeter Gleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{p} \cdot \hat{p}')(p^0, |\vec{p}'| | (T_l - K_l)(s) | p^0, |\vec{p}'|) \\ &= \frac{g^2}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{p} \cdot \hat{k})(p^0, |\vec{p}'| | K_l(s) | k^0, |\vec{k}|) \right] G(k^0, |\vec{k}|, s) \\ & \quad \left[ \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{2l'+1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} C_{l'}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{k} \cdot \hat{p}')(k^0, |\vec{k}| | T_{l'}(s) | p'^0, |\vec{p}'|) \right] \\ &= \frac{g^2}{2} \int \frac{dk^0}{(2\pi)^D} \int d|\vec{k}| |\vec{k}|^{D-2} G(k^0, |\vec{k}|, s) \sum_{l', l=0}^{\infty} \frac{2l+1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} \frac{2l'+1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} \\ & (p^0, |\vec{p}'| | K_l(s) | k^0, |\vec{k}|) (k^0, |\vec{k}| | T_{l'}(s) | p'^0, |\vec{p}'|) S_{D-1} \int d\hat{k} C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{p} \cdot \hat{k}) C_{l'}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{k} \cdot \hat{p}') \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Mit

$$\int d\hat{k} C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{p} \cdot \hat{k}) C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{k} \cdot \hat{p}') = \frac{1-2\varepsilon}{2l+1-2\varepsilon} \delta_{ll'} C_l^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\hat{p} \cdot \hat{p}') \quad (\text{E.6})$$

erhält man ein System ungekoppelter Gleichungen für die Partialwellen:

$$\begin{aligned} (p^0 | \vec{p} | (T_l - K_l)(s) | p^0, |\vec{p}'|) &= \frac{g^2}{2} \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \int dk^0 \int d|\vec{k}| |\vec{k}|^{D-2} \\ (p^0, |\vec{p}'| | K_l(s) | k^0, |\vec{k}|) G(k^0, |\vec{k}|, s) &(k^0, |\vec{k}| | T_l(s) | p^0, |\vec{p}'|) \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Bemerkung:

Insbesondere ist der erste Iterationsschritt exakt ausführbar. Dabei gilt wegen  $C_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \equiv 1$ :

$$K^{(1)} = K_0^{(1)} = 1 \text{ und } K_l^{(1)} = 0 \text{ für } l > 0 \quad (\text{E.8})$$

und damit

$$T^{(1)} = T_0^{(1)} \text{ und } T_l^{(1)} = 0 \text{ für } l > 0 \quad . \quad (\text{E.9})$$

Dazu muß das Integral

$$\text{tr}G(s) := \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \int dk^0 \int d|\vec{k}| |\vec{k}|^{D-2} G(k^0, |\vec{k}|, s) \quad (\text{E.10})$$

ausführbar sein. Wird nun der erhaltene Gesamtviererimpuls  $P = (\sqrt{s}, \vec{0})$  als Polachse gewählt, mit  $\vec{0}$  als  $D-1$  dimensionaler Vektor, so gilt:

$$\begin{aligned} G(k^0, |\vec{k}|, s) &= \frac{1}{((k^0, \vec{k}) + \frac{P}{2})^2 + m^2} \cdot \frac{1}{((k^0, \vec{k}) - \frac{P}{2})^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{[(k^0 + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + |\vec{k}|^2 + m^2][(k^0 - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + |\vec{k}|^2 + m^2]} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Wir berechnen das Integral (E.10) in Anhang F.

# Anhang F

## Der Zweiteilchenpropagator in $D > 1$

$$trG(s) = \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int_0^{\infty} d|\vec{k}| |\vec{k}|^{D-2} \frac{1}{[(k^0 + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + |\vec{k}|^2 + m^2][(k^0 - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + |\vec{k}|^2 + m^2]} \quad (\text{F.1})$$

Nach Residuensatz ergibt sich

$$\begin{aligned} I(|\vec{k}|^2, m^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{1}{[(k^0 + \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + |\vec{k}|^2 + m^2][(k^0 - \frac{1}{2}\sqrt{s})^2 + |\vec{k}|^2 + m^2]} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(s + 4(|\vec{k}|^2 + m^2))} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} trG(s) &= \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} 2\pi m^{D-4} \int_0^{\infty} d\left(\frac{|\vec{k}|}{m}\right) \left(\frac{|\vec{k}|}{m}\right)^{D-2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{|\vec{k}|}{m}\right)^2 + 1} \left(\frac{s}{m^2} + 4\left(\left(\frac{|\vec{k}|}{m}\right)^2 + 1\right)\right)} \\ &= \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \frac{\pi}{2} m^{D-4} \int_0^{\infty} dt' \frac{t'^{D-2}}{(1+t'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 - \frac{s}{s + 4(t'^2 + 1)}\right] \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

wobei  $\frac{s}{m^2} \rightarrow s$  ersetzt wurde.

Substituiert man nun  $t' \rightarrow t := \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}} \in [0, 1]$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} trG(s) &= \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^D} \frac{\pi}{2} m^{D-4} \\ &\cdot \left[ \int_0^1 dt t^{D-2} (1-t^2)^{1-\frac{D}{2}} - \int_0^1 dt t^{D-2} (1-t^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{\frac{s}{s+4}}{1 - \frac{s}{s+4} t^2} \right] \\ &= \frac{m^{D-4}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left( \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) - \frac{2}{3} \frac{s}{s+4} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) {}_2F_1\left[1, \frac{-1+D}{2}, \frac{5}{2}, \frac{s}{s+4}\right] \right) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

In  $D = 2, 3$  wird dies zu einer elementaren Funktion

$$\text{tr}G_{D=2}(s) = \frac{1}{m^2} \frac{1}{4\pi} \left( \sqrt{\frac{s+4}{s}} - \sqrt{\frac{s}{s+4}} \right) \text{arctanh} \sqrt{\frac{s}{s+4}} \quad , \quad (\text{F.5})$$

$$\text{tr}G_{D=3}(s) = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{8\sqrt{s}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{s}} \text{arctan} \frac{2}{\sqrt{s}} \right) \quad . \quad (\text{F.6})$$

$\text{tr}G_{D=4}$  ist logarithmisch divergent. Um es zu definieren wählen wir als Regularisierungsschema die dimensionelle Regularisierung. Bis nullter Ordnung in der Laurent-Entwicklung in  $\varepsilon$  ergibt sich

$$\text{tr}G_{D=4-2\varepsilon}(s) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ m^{-2\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln \left( \frac{e^\gamma}{4\pi} \right) \right) + 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{s+4}{s}} \text{arctanh} \sqrt{\frac{s}{s+4}} \right) \right] \quad . \quad (\text{F.7})$$

Man führt  $\mu$  ein als willkürliche Massenskala und erhält (in nullter Ordnung  $\varepsilon$ ):

$$\text{tr}G_{D=4-2\varepsilon}(s) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \mu^{-2\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \ln \left( \frac{m^2 e^\gamma}{4\pi \mu^2} \right) \right) + 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{s+4}{s}} \text{arctanh} \sqrt{\frac{s}{s+4}} \right) \right] \quad . \quad (\text{F.8})$$

# Literaturverzeichnis

- [BL 77] M. Baker, C. Lee, *Overlapping-divergence-free skeleton expansion in non-Abelian gauge theories*; Phys. Rev. D 15, 2201 (1977)
- [Br 92] L.S. Brown, *Quantum Field Theory*; Cambridge University Press, Cambridge (1992)
- [BS 89] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*; 24. Auflage, Verlag Harri Deutsch 1989
- [BW 69] C.M. Bender, T.T. Wu, *Anharmonic Oscillator*; Phys. Rev. 184, 1231 (1969)
- [CH 69] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik I*; Springer-Verlag, New York, (1968)
- [Co 85] J. Collins, *Renormalization*; Cambridge University Press, Cambridge (1985)
- [GA 66] S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics*; John Wiley, New York (1966)
- [GJ 81] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*; Springer-Verlag, New York (1981)
- [IZ 80] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*; McGraw-Hill, New York (1980)
- [Kl 93] H. Kleinert, *Pfadintegrale in Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik*; BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1993)
- [Kr 93] K. Kreulich, *Crossingsymmetrische Vier-Punkt-Gleichung in der  $\phi^4$  - Theorie*; Diplomarbeit an der WWU Münster (1993)
- [Lu 68] D. Lurié, *Particles and Fields*; McGraw-Hill, New York (1968)
- [Na 50] Y. Nambu, *Force Potentials in Quantum Field Theory*; Progr. of Theor. Phys., No. 5 (1950)
- [Ne 66] R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*; McGraw-Hill, New York (1966)

- [Ni 69] N. Nakanishi, *A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation*; Suppl. Prog. Theor. Phys. No. 43 (1969)
- [Pi 79] H.M. Pilkuhn, *Relativistic Particle Physics*; Springer-Verlag, New York (1979)
- [PT 82] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*; Springer-Verlag, New York (1984)
- [Rd 65] C.E. Reid, *Lower Bounds for the Energy Levels of Anharmonic Oscillators*; J. Chem. Phys. 43s, 186 (1965)
- [Re 86] H.-G. Reusch, *Strahlungsübergänge und Zerfallsprozesse in einem phänomenologischen Mesonmodell*; Diplomarbeit and der WWU Münster (1986)
- [Sh 91] F. Scheid, *Numerische Analysis*; McGraw-Hill, New York (1991)
- [St 90] M. Stingl, *Equations for Four-Point Amplitude in Quantum Field Theory*; unveröffentlichte Notizen, Münster (1990)
- [ZJ 90] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*; Clarendon Press, Oxford (1990)

# Danksagung

Diese Arbeit wurde am Institut für Theoretische Physik I der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster angefertigt.

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. M. Stingl für die Anregung zu dem interessanten Thema als auch für seine ständige Bereitschaft zu klärenden Diskussionen sowie für seine zahlreichen wertvollen Hinweise.

Weiterhin danke ich allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe, insbesondere Herrn Dr. M. Becker, für den regen Gedankenaustausch und die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Hiermit erkläre ich diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel erstellt zu haben.

Münster, den 31.8.95