

Andreas Franz-Jörg Streibl

Theorie der Vakuumkondensate
der Quantenchromodynamik

- 1996 -

Theoretische Physik

Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Andreas Franz-Jörg Streibl
aus Saulgau

-1996-

Dekan:

Prof. Dr. F.-K. Holtmeier

Erster Gutachter:

Prof. Dr. M. Stingl

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. G. Münster

Tag der mündlichen Prüfungen:

Tag der Promotion:

*Lebendig ist das Wort.
Immer noch die Handschrift des Schöpfers,
wiedererkannt und unverstanden,
täglich aufs neue entziffert,
gedeutet, nie zu Ende.*

Gewidmet meiner geliebten Frau Andrea

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Nicht-perturbative Konzepte der Kontinuums-QCD	6
1.1 Die erweiterte Störungsreihe	6
1.2 Renormierung zusammengesetzter Operatoren	14
1.3 Die Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik	21
1.4 OPE und QCD-Summenregeln	25
2 Die Zweipunktkondensate des Gluonsektors	40
2.1 Der Gluon-Propagator	40
2.2 Definition des Abelschen Gluon-Kondensats	41
2.3 Berechnung des Abelschen Gluon-Kondensats	43
2.4 Das Gluon-Kondensat der Massendimension 2	47
2.5 Der Geist-Propagator	48
2.6 Definition des Dimension-4-Geisterkondensats	48
2.7 Berechnung des Dimension-4-Geisterkondensats	49
2.8 Das Geist-Kondensat der Massendimension 2	52
2.9 Subtraktionsmethode	53
3 Das Geist-Gluon-Kondensat	57
3.1 Geist-Gluon-Vertex in Landau-Eichung	57
3.2 Definition des Geist-Gluon-Kondensats	59
3.3 Berechnung des Geist-Gluon-Kondensats	61
3.3.1 Subschleife mit $(m_2 m_3)$	62
3.3.2 Subschleife mit $(m_3 m_1)$	67
3.3.3 Subschleife mit $(m_1 m_2)$	74
3.3.4 Zusammenfassung	75
3.4 Renormierung des Geist-Gluon-Kondensats	78
4 Das 3-Gluon-Kondensat	82
4.1 3-Gluon-Vertex in Landau-Eichung	82
4.2 Definition des 3-Gluon-Kondensats	84
4.3 Berechnung des 3-Gluon-Kondensats	86
4.3.1 Subschleife mit $(m_2 m_3)$	87
4.3.2 Subschleife mit $(m_3 m_1)$	89
4.3.3 Subschleife mit $(m_1 m_2)$	92
4.3.4 Zusammenfassung	94
4.4 Renormierung des 3-Gluon-Kondensats	97

4.5	Definition des 4-Gluon-Kondensats	98
5	Das Quark-Kondensat	100
5.1	Der Quark-Propagator	100
5.2	Definition des Quark-Kondensats	101
5.3	Berechnung des Quark-Kondensats	102
5.4	Massive Quarks und $r = 1$	104
5.5	Chiraler Grenzfall	105
5.6	Renormierung des Quark-Kondensats	107
6	Das Quark-Gluon-Kondensat	110
6.1	Quark-Gluon-Vertex in Landau-Eichung	110
6.2	Definition des Quark-Gluon-Kondensats	112
6.3	Berechnung des Quark-Gluon-Kondensats	113
6.3.1	Subschleife mit $(n\ n')$	114
6.3.2	Subschleife mit $(m\ n')$	118
6.3.3	Subschleife mit $(m\ n)$	123
6.4	Zusammenfassung	124
6.4.1	Massive Quarks und $r = 1$	124
6.4.2	Chiraler Grenzfall	125
6.5	Renormierung des Quark-Gluon-Kondensats	128
	Zusammenfassung und Ausblick	132
A	Mathematischer Anhang	133
A.1	Feynman-Integrale	133
A.1.1	Feynman-Parametrisierung	133
A.1.2	Parameterintegrale	133
A.1.3	Euklidische Impulsintegration	137
A.2	Euklidische γ -Algebra	138
A.3	$SU(N_C)$ -Farbalgebra	139
B	Details zum 3-Gluon-Kondensat	141
B.1	Subschleife mit $(m_2\ m_3)$	141
B.2	Subschleife mit $(m_3\ m_1)$	148
C	Details zum Quark-Gluon-Kondensat	159
C.1	Subschleife mit $(n\ n')$	159
C.2	Subschleife mit $(m\ n')$	171

Einleitung

Aus heutiger Sicht hat sich die von Fritzsche und Gell-Mann im Jahre 1972 begründete Quantenchromodynamik (QCD) allgemein als Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung durchgesetzt. Wichtig in diesem Zusammenhang ist ihre Formulierung als lokale, nicht-Abelsche Eichtheorie und damit verbunden die Eigenschaft der Renormierbarkeit [1]. Zum entscheidenden Durchbruch verholfen hat ihr aber die Entdeckung der asymptotischen Freiheit für eine nicht zu große Zahl von Fermionen [2]. Das Verschwinden der effektiven Kopplung bei sehr großen Impulsen ermöglicht die störungstheoretische Behandlung von Hochenergieprozessen und hat somit eine Vielzahl von experimentell bestätigten Vorhersagen im Bereich der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung hervorgebracht. So begründet etwa die asymptotische Freiheit direkt das einfache Skalenverhalten des Partonmodells. Die durch Strahlungskorrekturen bedingten logarithmischen Abweichungen von der kanonischen Skaleninvarianz lassen sich am einfachsten durch Anwendung von Renormierungsgruppenmethoden gewinnen und erfahren eine zufriedenstellende Bestätigung im Experiment.

Im Hochenergiebereich beachtliche Erfolge verbuchend, muß das störungstheoretische Konzept jedoch bei kleinen Impulsüberträgen notwendigerweise versagen. Hierfür existieren verschiedene Gründe. Zum einen läßt sich im Rahmen der rein perturbativen Theorie nicht ausschließen, daß die Störungsreihe bei den typischen hadronischen Skalen keine gute Semikonvergenz aufweist und unendlicher Resummationen bedarf. Andererseits – und dies ist der eigentlich schwerwiegende Grund – besitzen massenbehaftete Observablen in der QCD wesentliche Singularitäten bei verschwindender Kopplungskonstante; sie divergieren also gerade an dem Punkt, um den herum in der Störungstheorie entwickelt wird, und können deshalb von dieser Entwicklung grundsätzlich nicht erfaßt werden.

Das zentrale Problem der QCD stellt die Nicht-Existenz ihrer grundlegenden Bausteine als makroskopisch detektierbare Zustände dar. Quarks und Gluonen liegen nach bisherigem Kenntnisstand nur in gebundenen Zuständen vor oder treten als sehr kurzlebige Elementaranregungen am Ursprung von Jet-Ereignissen auf. Man hat aus diesem Grund die sogenannte Confinement-Hypothese formuliert, die besagt, daß die asymptotisch detektierbaren stark wechselwirkenden Teilchen nur als Farb-Singulets vorliegen dürfen. Dies hat zur Konsequenz, daß die Quarks entweder in Quark-Antiquark- oder aber in Dreiquark-Bindungszuständen eingeschlossen sein müssen. Wie der Name schon andeutet, handelt es sich bei der Confinement-Aussage um ein Postulat. Ein Beweis dieser Behauptung steht im Rahmen der QCD derzeit noch aus, und es ist mit Sicherheit eine große Herausforderung für die physikalische Grundlagenforschung, einen tieferen Einblick in den Mechanismus des Confinements zu gewinnen oder ihn gar zu verstehen.

Im Falle der starken Wechselwirkung befindet man sich daher im Gegensatz etwa zur elektroschwachen Theorie in einem großen Dilemma : Obgleich man überzeugende Argumente dafür ins Feld führen kann, mit der QCD die richtige Theorie zur Beschreibung der

fundamentalen hadronischen Bausteine gefunden zu haben, ist man jedoch noch nicht in der Lage, sie gerade dort auszuwerten, wo die starke Wechselwirkung etwa in Form der Kernkräfte unsere “Alltagserfahrungen“ prägt. So ist es beispielsweise heute – mehr als zwanzig Jahre nach der Geburtsstunde der QCD – immer noch nicht gelungen, die Eigenschaften eines so fundamental wichtigen Teilchens wie des Protons in zufriedenstellender Weise quantenchromodynamisch zu erklären.

Den zur Zeit wohl am intensivsten studierten nicht-störungstheoretischen Zugang zur QCD stellt die Gitterapproximation dar. Für die rein gluonische Theorie konnte mit Hilfe von Hochtemperatur-Entwicklungen und Monte-Carlo-Methoden die String-Konstante sowie die Masse von Gluonbällen berechnet werden. Die Berücksichtigung der fermionischen Freiheitsgrade ist allerdings nicht unproblematisch. Außerdem hat die rein numerische Auswertung der Gittereichtheorie naturgemäß den Nachteil, keine analytische Einsicht in die Lösung und die dahinterstehenden Mechanismen zu vermitteln. Die wichtigsten phänomenologischen Modelle – wie das Bagmodell oder nicht-relativistische Potentialmodelle – erlauben zwar eine recht gute Beschreibung der experimentellen Beobachtungen; sie bieten aber keine befriedigende Erklärung ihrer Modellannahmen. Ein allen diesen Modellen gemeinsames Merkmal ist der Versuch, das Confinement-Problem als Folge asymptotisch anwachsender Potentiale zu betrachten.

Im Gegensatz hierzu wollen wir in der vorliegenden Arbeit auf einen analytischen Lösungsansatz zurückgreifen, der sowohl den Hochenergiebereich als auch das niederenergetische Infrarot-Regime der QCD beschreiben soll und auf einer verallgemeinerten Störungsentwicklung für die oberflächlich divergenten Vertizes beruht. Hierbei geht man von der Annahme aus, daß die effektive Kopplung auch im Infrarotbereich noch hinreichend klein ist, um sinnvoll Störungstheorie betreiben zu können. Das Confinement wird hier demzufolge in einer “weak coupling“-Lösung beschrieben. Auf der Grundlage dieser systematisch erweiterten Störungsreihe sollen dann die Vakuumkondensate der QCD berechnet werden. Diese parametrisieren als Vakuum Erwartungswerte zusammengesetzter Feldoperatoren die nicht-triviale Struktur des physikalischen Grundzustands der Theorie und dienen somit als fundamentale Kenngrößen zur Beschreibung des Spektrums der Hadronen.

Die Arbeit ist im einzelnen wie folgt gegliedert :

Kapitel 1 befaßt sich mit grundlegenden Konzepten einer nicht-störungstheoretischen Formulierung der Kontinuums-QCD. Im ersten Abschnitt stellen wir die Systematik unserer nicht-perturbativ modifizierten Störungsentwicklung vor und diskutieren ihre wesentlichen Eigenschaften. Im Zuge einer kurzen Einführung in die Formulierung des Dyson-Schwinger-Selbstkonsistenzproblems der Ansätze werden wir den sogenannten $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus kennenlernen. Das durch ihn induzierte Auftreten negativer Potenzen der quadratischen Kopplung im Zusammenhang mit UV-divergenten Schleifenintegralen führt letztendlich zur Etablierung einer nicht-perturbativen nullten Ordnung im Sinne verallgemeinerter Feynman-Regeln. Der zweite Abschnitt thematisiert die feldtheoretische Formulierung lokaler zusammengesetzter Operatoren und ihrer Renormierung. Anhand eines einfachen Beispiels aus der $(\Phi^4)_4$ -Theorie wird die Operatormischung demonstriert. Einen besonderen Schwerpunkt setzen wir dabei mit der Renormierung eichinvarianter Operatoren. Die drei Theoreme von Joglekar und Lee, welche hierfür die entscheidende theoretische Grundlage liefern, werden sowohl in ihrer Beweisidee als auch in den mit ihnen verbundenen Konsequenzen für das Renormierungsproblem ausführlich erläutert. Mit der Definition der Vakuumkondensate kommen wir dann zum Hauptgegenstand unserer Untersuchungen. Nach der

Einführung von Bewegungsgleichungskondensaten gelangt man zur Darstellung des eichinvarianten Gluon-Kondensats $\langle G^2 \rangle$ als Linearkombination eichabhängiger Kondensate bis maximal zweiter Schleifenordnung. Anschließend wird die physikalische Relevanz von Gluon- und Quark-Kondensat im Zusammenhang mit der anomalen Brechung der QCD-Skaleninvarianz demonstriert. Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels wenden wir uns der Wilsonschen Operator-Produkt-Entwicklung zu, die den gewünschten Brückenschlag zur Physik der Hadronen ermöglichen wird. In Verbindung mit Potenz-Korrekturen parametrisieren dabei unsere Vakuumkondensate die führenden nicht-perturbativen Modifikationen des UV-Verhaltens der Störungsreihe. Nach einem Einschub über die mit Hilfe von Renormierungsgruppenmethoden verbesserte Wilson-Entwicklung werden wir dann an Hand zweier Beispiele einen Einblick in das weite Feld der QCD-Summenregeln gewinnen. Sowohl für PCAC-Relationen als auch im Fall der Elektron-Positron-Vernichtung in Hadronen läßt sich dabei, ausgehend von der Operator-Produkt-Entwicklung eichinvarianter Korrelationsfunktionen, ein Zusammenhang zwischen Vakuumkondensaten und mesonischen Observablen herstellen.

Die folgenden Kapitel 2 bis 6 haben dann die Berechnung führender Beiträge der QCD-Vakuumkondensate mit kanonischen Massendimensionen zwei bzw. vier in Landau-Eichung auf der Grundlage unserer nicht-perturbativ modifizierten Feynman-Regeln zum Inhalt. Ausgehend von der expliziten Form des Ansatzes für die jeweils relevante Vertexfunktion, erfolgt die Definition des gesuchten Vakuum Erwartungswertes mittels der sogenannten Momentenmethode. Nach Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse beenden grundsätzliche Bemerkungen zum Renormierungsproblem die einzelnen Kapitel.

Die Berechnung von Einschleifenkondensaten des Gluon- und Geistsektors mittels konventioneller Feynman-Methoden ist Gegenstand des Kapitels 2. Als Besonderheit stellen wir hier noch eine alternative Methode vor, welche die Extraktion führender Kondensatbeiträge aus 1-Loop-Integralen ohne Feynman-Parametrisierung gestattet. In Kapitel 3 befassen wir uns mit dem Geist-Gluon-Antigeist-Kondensat der Massendimension vier als strukturell einfachstem Beispiel eines nicht-trivialen Vakuum Erwartungswertes mit führendem Zweischleifenbeitrag. Wir werden in diesem Fall exemplarisch die wichtigsten Details der Zweischleifenintegration über die rationalen Approximanten zum (beliebigen) Nennergrad r demonstrieren und dabei die sogenannte Gegentermtechnik zur Extraktion führender Divergenzen vorstellen und begründen. Unser viertes Kapitel thematisiert das 3-Gluon-Kondensat in Landau-Eichung. Wesentliche Details der recht komplexen Rechnung sind Anhang B zu entnehmen. Eine Ergänzung mit der Definition des eichvarianten 4-Gluon-Kondensats rundet diesen Abschnitt ab. Die systematische Untersuchung von Vakuumkondensaten des fermionischen Sektors der Theorie beginnt in Kapitel 5 mit dem Quark-Kondensat. Breiten Raum nimmt bei der Diskussion unserer Resultate der chirale Grenzfall verschwindender externer Strommassen ein. Den allgemeinen Fall massiver Quarks behandeln wir in erster Stufe $r = 1$ der rationalen Approximantenfolge. Im selben Kontext kommen wir auch auf das Problem zusammengesetzter Massenskalen in den Ansätzen der fermionischen Basisvertizes zu sprechen. Die von uns gewählte subtraktive Renormierung des Quark-Kondensats entspricht einer Beschreibung des Effekts der rein spontanen chiralen Symmetriebrechung. Eine Diskussion der Ergebnisse zum Quark-Gluon-Antiquark-Kondensat der Massendimension vier erfolgt schließlich in Kapitel 6. Hinsichtlich technischer Details der zugehörigen 2-Loop-Rechnung sei auf Anhang C verwiesen. Eine Zusammenstellung der wichtigsten mathematischen Identitäten, die in dieser Arbeit Verwendung gefunden haben, findet man in Anhang A.

Kapitel 1

Nicht-perturbative Konzepte der Kontinuums-QCD

1.1 Die erweiterte Störungsreihe und der Mechanismus der nicht-perturbativen Logarithmen

Gegenstand unserer Betrachtungen ist die Quantenchromodynamik mit Eichgruppe $SU(N_C)$ und N_F minimal angekoppelten Quark-Flavours, formuliert für ein Euklidisches Kontinuum. Der zugehörige effektive Lagrangian mit beliebiger kovarianter Eichfixierung lautet dann [4] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu,a} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 + (\partial_\mu \bar{\eta}_a) \mathcal{D}_{ab}^\mu \eta_b - \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\Psi}_i^{(f)} \left\{ i\gamma_\mu \mathcal{D}_{ij}^\mu - m_{(f)} \delta_{ij} \right\} \Psi_j^{(f)} \\ & + \text{Counterbeiträge} . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Hierbei bezeichnet

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu$$

den nicht-Abelschen Feldstärketensor und für die kovarianten Ableitungen gilt :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ab}^\mu &= \delta_{ab} \partial^\mu - g f_{aeb} A_e^\mu \\ \mathcal{D}_{ij}^\mu &= \delta_{ij} \partial^\mu - ig A_a^\mu (T_a)_{ij} . \end{aligned}$$

Aus dem mit (1.1) gebildeten Euklidischen Wirkungsintegral

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}(x) \tag{1.2}$$

lassen sich in bekannter Weise mittels funktionaler Methoden [15] die Korrelationsfunktionen der zu Grunde gelegten Quantenfeldtheorie (QFT) bestimmen. Unter diesen wiederum

sind die oberflächlich divergenten, 1-Teilchen-irreduziblen (1PI) Greenschen Funktionen, im weiteren auch Basisvertizes genannt, von besonderer Bedeutung, da sie die Divergenzstruktur und somit die perturbative Renormierung der QFT bestimmen. Im Falle der renormierbaren QCD schreiben wir in einer Euklidischen Impulsraumformulierung für den Satz der sieben Basisvertizes :

$$\Gamma_{div} := \{ \Gamma_{VV} = -D^{-1}, \Gamma_{G\bar{G}} = -\tilde{D}^{-1}, \Gamma_{FF} = -S_F^{-1}, \Gamma_{3V}, \Gamma_{GV\bar{G}}, \Gamma_{FV\bar{F}}, \Gamma_{4V} \} . \quad (1.3)$$

Gemäß der oben gewählten Reihenfolge sind dies im einzelnen : Die Selbstenergien des Gluon-, Geist-, bzw. Quarkfeldes ; weiter die Dreipunkt-Vertexfunktionen der Gluon-, der Geist-Gluon-Antigeist- bzw. der Quark-Gluon-Antiquark-Wechselwirkung und schließlich die eigentliche Vertexfunktion der 4-Gluon-Amplitude.

Alle höheren eigentlichen Vertexfunktionen sind oberflächlich konvergent und lassen sich mittels Skelettentwicklungen aus dem endlichen Satz der Basisvertizes aufbauen. Wir schreiben dafür :

$$\Gamma_{conv} := \{ \Gamma_{5V}, \Gamma_{GVV\bar{G}}, \Gamma_{FVV\bar{F}}, \Gamma_{FFFF}, \dots \} . \quad (1.4)$$

Die durch den effektiven Lagrangian vermittelte Dynamik einer QFT findet ihre Formulierung in den Dyson-Schwinger-(DS)-Gleichungen [17], welche ein unendliches, hierarchisches System gekoppelter Integro-Differentialgleichungen für die Korrelationsfunktionen der elementaren Felder bilden. Im Falle der sieben primitiv divergenten Basisvertizes der QCD besitzen sie die Struktur ¹ :

$$\Gamma = \Gamma^{(0)pert} + \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \Phi[\Gamma] . \quad (1.5)$$

Hier bezeichnet Φ das DS-Funktional in Form von Schleifenintegralen über Kombinationen der oberflächlich divergenten Vertexfunktionen im Impulsraum und g_0 ist der unrenormierte Kopplungsparameter. Die nackten Vertizes $\Gamma^{(0)pert}$ bilden die nullte störungstheoretische Ordnung und entsprechen den aus (1.1) abgeleiteten Feynman-Regeln.

Durch Iteration um Letztere bei Vergleich von Potenzen der quadratischen Kopplung auf beiden Seiten erhält man die störungstheoretische Lösung von (1.5) in Form der bekannten Störungsreihe :

$$\Gamma^{pert} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma^{(p)pert} ; \quad \Gamma^{(p)pert} = \Gamma^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p \left[\frac{g(\mu)}{4\pi} \right]^{2p'} \Gamma^{[p']pert} . \quad (1.6)$$

Das hierbei verwendete Renormierungsschema R ersetzt den nackten Kopplungsparameter durch eine renormierte Kopplung $g(\mu)$ in Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ . Im $\overline{MS}$ - Schema ist diese Kopplungsrenormierung für $D = 4 - \epsilon$ gegeben durch :

¹Genau genommen sind die Integrale des DS-Funktionalen je nach Anzahl der Schleifen mit *mindestens* einer Potenz der nackten quadratischen Kopplung verknüpft. In diesem Sinne besitzt die hier und im folgenden von uns verwendete Schreibweise formalen Charakter. Die später entwickelten Argumente hinsichtlich dieser nackten Kopplung lassen sich sinngemäß auf den Fall höherer Potenzen übertragen.

$$g_0^2 \mu^\epsilon = g^2(\mu) \mu^\epsilon Z_\alpha(g^2(\mu), \epsilon), \quad (1.7)$$

wobei für die Renormierungskonstante auf 1-Loop-Niveau gilt [7] :

$$Z_\alpha = 1 - \beta_0 \left[\frac{g(\mu)}{4\pi} \right]^2 \frac{2}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4); \quad \beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F. \quad (1.8)$$

Nun ist aber die Störungsentwicklung von Korrelationsfunktionen um $g^2 = 0$ keineswegs vollständig; vielmehr erlaubt sie als im allgemeinen divergente asymptotische Reihe lediglich eine endliche Fehlerabschätzung zur wahren Lösung in jeder Ordnung von g^2 .

Andererseits wissen wir jedoch, daß im Zusammenhang mit der Renormierung des dimensionslosen Kopplungsparameters durch dimensionelle Transmutation ein dimensionsbehafteter fundamentaler Parameter in die Theorie eingeführt wird. Im Falle der QCD ergibt sich aus einer Analyse der Renormierungsgruppen(RG)-Gleichungen für den Skalenparameter :

$$[\Lambda_{QCD}^2(g^2(\mu), \mu)]_R = \mu^2 \exp \left\{ -2 \int^{g(\mu)} dg' \frac{1}{[\beta(g')]_R} \right\}, \quad (1.9)$$

wobei μ den frei wählbaren Massenparameter einer Renormierungsvorschrift zum Schema R bezeichnet. Damit ist Λ_{QCD} invariant unter RG-Transformationen, hängt jedoch vom verwendeten Renormierungsschema ab. Unter Berücksichtigung der asymptotischen Freiheit finden wir dann die charakteristische *nicht-analytische Abhängigkeit von der quadratischen Kopplung* :

$$\Lambda_{QCD}^2 = \mu^2 \exp \left\{ -\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g(\mu)} \right)^2 \left[1 + \mathcal{O}(g^2) \right] \right\}, \quad (1.10)$$

mit dem vom Schema unabhängigen, führenden Koeffizienten der RG-theoretischen β -Funktion :

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F.$$

Den auf Grund von (1.10) formal existierenden, jedoch unphysikalischen Limes verschwindender Kopplungsstärke $g^2 \rightarrow 0$ bei Festhalten der Renormierungsmassenskala werden wir im weiteren Zusammenhang bisweilen als “Abschalten des QCD-Skalenparameters” bezeichnen.

Die effektive Kopplungsstärke der QCD ² läßt sich nun wie folgt darstellen :

$$\bar{g}^2(t) = \frac{(4\pi)^2}{\beta_0 \ln t} \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\ln t} \right) \right\}; \quad t = \frac{q^2}{\Lambda^2} \gg 1. \quad (1.11)$$

²Das Subskript “QCD“ zur Bezeichnung von Größen der Quantenchromodynamik wird ab sofort wieder weggelassen.

Die Systematik der nicht-perturbativen Erweiterung

Offensichtlich ist also die QCD-Massenskala schon in Einschleifennäherung nicht in g entwickelbar und weist damit über den Rahmen der gewöhnlichen Störungsreihe hinaus. In [6] wurde vorgeschlagen, die nicht-analytische Kopplungsabhängigkeit bereits in den Ansätzen der Basisvertizes zu berücksichtigen. Um damit zu einer systematischen Erweiterung der Störungsreihe (1.6) zu gelangen, betrachten wir die in [3] ausführlich erläuterte Doppelsequenz rationaler Approximanten :

$$\Gamma(g^2(\mu), \mu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma^{(r,p)}(g^2(\mu), \mu) , \quad (1.12)$$

$$\Gamma^{(r,p)} = \Gamma^{(r,0)}(\Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left[\frac{g(\mu)}{4\pi} \right]^{2p'} \Gamma^{[r,p']}(\Lambda, \mu) .$$

Der grundlegende Gedanke hierbei ist es, eine Kategorie nicht-perturbativer Effekte der QCD zu beschreiben, die sich durch rationale Abhängigkeiten ³ der Basisvertizes von der fundamentalen Massenskala Λ der Theorie manifestieren lassen. Der Index r bezeichnet dabei die Stufe der *globalen Approximation* über den gesamten Euklidischen Impulsbereich in einer bestimmten Nennerordnung bezüglich Λ , während p in Fortführung des perturbativen Prinzips der *lokalen Approximation* um $g^2 = 0$ einfach die Potenzen der quadratischen Kopplung zählt. Um die Existenz einer solchen Schwachkopplungslösung gewährleisten zu können, bedarf es des Postulats, daß $g(\mu)$ *über alle Skalen* hinreichend klein bleibt. Diese Forderung steht keineswegs im Widerspruch zu unserem derzeitigen Kenntnisstand über das funktionale Verhalten der laufenden Kopplung, wie es durch (1.11) beschrieben wird.

In unseren Ansätzen behandeln wir Λ^2 und g^2 zunächst formal als voneinander unabhängige Parameter. Die darin vermittelte Abhängigkeit von Λ unterscheidet sich grundsätzlich von jener in effektiven Größen wie etwa (1.11) , welche ausschließlich im rein perturbativen Kontext durch RG-theoretische Aufsummation führender Logarithmen (LL) entstehen. Gleichwohl wird man natürlich zum Abschluß der nicht-perturbativen Berechnung physikalischer Größen durch entsprechende LL-Resummationen die Kopplungsabhängigkeit zu Gunsten des RG-invarianten Skalenparameters zu eliminieren versuchen.

Für die nicht-perturbativen Approximanten aus (1.12) können wir, auf der Gültigkeit der Störungsreihe im perturbativen Regime basierend, sofort zwei natürliche Randbedingungen formulieren :

- Bei formalem Abschalten des Skalenparameters muß sich aus unserem Lösungsansatz die Störungsreihe (1.6) reproduzieren; also

$$\Gamma^{[r,p]}(\Lambda^2 = 0) = \Gamma^{[p]pert} \quad p \in \{0, 1, 2, \dots\} . \quad (1.13)$$

Wir werden diesen Grenzfall im folgenden als *perturbativen Limes* bezeichnen.

³Ein polynomialer Ansatz bezüglich des spontanen Massenparameters würde einer Beschreibung der asymptotischen Region tief Euklidischer Impulse $q^2 \gg \Lambda^2$ entsprechen. Daraus ließe sich aber keine Näherung des wahren Impulsverhaltens im physikalisch interessanten Hadronisierungsbereich $q^2 \approx \Lambda^2$ ableiten.

- Weiter wissen wir aus der störungstheoretischen Behandlung der QCD, daß sich die logarithmischen Korrekturen zur asymptotischen Freiheit durch partielle Aufsummation der Potenzreihe in g^2 ergeben. Daher macht es Sinn, für die Approximante mit $p = 0$ *naive asymptotische Freiheit* zu fordern. Beim gleichzeitigen Hochskalieren aller externen Impulsvariablen soll also gelten :

$$\Gamma^{(r,0)}(\{\lambda k\}) \longrightarrow \Gamma^{(0)pert}(\{\lambda k\}) , \quad \lambda \longrightarrow \infty . \quad (1.14)$$

Anstatt der Eigenschaft (1.14) wollen wir die etwas stärkere Forderung nach *perturbativer Renormierbarkeit* der nicht-störungstheoretischen Erweiterung von $\Gamma^{(pert)}$ stellen. In einer asymptotisch freien Theorie, wie sie die QCD darstellt, wird das Hochenergieverhalten von Vertexfunktionen in Schleifenintegralen, etwa der DS-Gleichungen, bis auf die bereits erwähnten logarithmischen Korrekturen aus der RG-Analyse, durch die perturbative Impulsstruktur bestimmt. Für Vertexfunktionen mit $N \geq 3$ externen Linien gewährleistet perturbative Renormierbarkeit, daß das UV-Verhalten in Subschleifen, für die nur eine echte Teilmenge aller Impulsvariablen hochskaliert wird, dem störungstheoretischen entspricht.

Insgesamt stellen also unsere Ansätze zusammen mit den erläuterten Randbedingungen eine globale Approximation des Impulsverhaltens über alle Skalen dar, welche die Beibehaltung perturbativer Renormierung beinhaltet. Ihr rationaler Charakter ermöglicht die einfache Bestimmung von Divergenzen durch Power-Counting ebenso wie die Anwendbarkeit der aus der Störungstheorie bekannten Feynman-Techniken zur Berechnung von Schleifenintegralen über Vertexfunktionen. Der Preis, der hierfür wie bei jeder globalen Approximation zu zahlen ist, besteht darin, daß die Approximation auf niedrigen Stufen r quantitativ noch sehr grob sein kann, während höhere r -Stufen, wie gerade die hier dokumentierten Rechnungen zeigen werden, eine rapide anwachsende algebraische Komplikation beinhalten.

DS-Selbstkonsistenz

Dies soll zunächst bezüglich der Systematik einer nicht-perturbativen Erweiterung der Störungsreihe genügen. Die konkrete Form der Approximantenfolge für die einzelnen Vertizes werden wir in den folgenden Kapiteln im Zusammenhang mit unseren Kondensatrechnungen vorstellen und weiter diskutieren. Zuvor soll jedoch noch kurz auf den Selbstreproduktionsmechanismus der Approximantensequenz (1.12) in den DS-Gleichungen eingegangen werden. In der niedrigsten perturbativen Ordnung ergibt sich aus (1.5) das Selbstkonsistenzproblem :

$$\left\{ \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \Phi[\Gamma^{(r,0)}] \right\}_{R,\mu} = \Gamma^{(r,0)} - \Gamma^{(0)pert} + \mathcal{O}(g^2(\mu), \Xi(r+1)) . \quad (1.15)$$

$\Xi(r+1)$ bezeichnet dabei den Fehler, der sich aus der Endlichkeit der globalen Approximationsstufe r ergibt; dieser läßt sich im Gegensatz zur perturbativen Reihenentwicklung nicht durch einen “kleinen“ Parameter abschätzen.

Zur Klarheit der Begriffsbildung müssen wir erläutern, was unter der Lösung des DS-Systems durch unsere Doppelsequenz in (r, p) zu verstehen ist :

- Von $\Gamma^{(r,0)}$ ausgehend, soll sich die Sequenz in jedem Iterationsschritt *jeweils bis auf Korrekturen der nächst höheren perturbativen Ordnung p* reproduzieren.
- Selbstkonsistenz von $\Gamma^{(r,0)}$ kann, der rationalen Impulsstruktur der Approximanten entsprechend, nur Übereinstimmung auf beiden Seiten der DS-Gleichung an $n(r)$ Vergleichsdaten ⁴ bedeuten, wenn $n(r)$ die Anzahl der dimensionslosen nicht-perturbativen Koeffizienten für die jeweilige Vertexfunktion bezeichnet. Die außerhalb dieser Stützstellen entstehenden Fehler sind demgegenüber um mindestens eine Ordnung der quadratischen Kopplung unterdrückt.

Einzelheiten zur selbstkonsistenten Reproduktion der Impulsstruktur sowie eine Diskussion der Wahl möglicher Stützstellen können am Beispiel des inversen Gluon-Propagators wiederum [3] entnommen werden.

Wir wollen unser Augenmerk im folgenden auf die Selbstreproduktion der Kopplungsabhängigkeit richten. Die mit ihrem Studium verbundenen Erkenntnisse werden später bei der Berechnung der Vakuumkondensate von herausragender Bedeutung sein.

Ein Blick auf (1.15) zeigt sofort, daß die Approximanten in führender perturbativer Ordnung $\Gamma^{(r,0)}$ nur dann zu einer nicht-trivialen Modifikation der Feynman-Regel $\Gamma^{(0)_{pert}}$ im Rahmen der DS-Selbstkonsistenz führen können, falls die Schleifenintegrale des DS-Funktionalen in der Lage sind, die nackte Kopplung g_0^2 auf der linken Seite zu eliminieren und insgesamt einen Beitrag ohne zusätzlichen g^2 -Faktor ausbilden.

Wir erinnern zunächst daran, daß ein oberflächlich divergentes Schleifenintegral in dimensioneller Regularisierung für unsere bezüglich des Skalenparameters rationalen Ansätze typischerweise einen Faktor der Form ⁵

$$\Pi(\epsilon, g^2) := \left[\frac{g(\mu)}{4\pi} \right]^2 Z_\alpha(g^2(\mu), \epsilon) \left(\frac{\Lambda_\epsilon^2}{\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \frac{2}{\epsilon} \quad (1.16)$$

auf der linken Seite von (1.15) erzeugt. Dabei bezeichnet Λ_ϵ die Fortsetzung der spontanen QCD-Massenskala aus Gleichung (1.9) für $D = 4 - \epsilon$. Weiter haben wir die perturbative Kopplungsrenormierung gemäß (1.7) berücksichtigt.

Zunächst findet man durch elementare Umformungen aus der Verallgemeinerung der Definitionsgleichung (1.9) bei endlichem UV-Regulator $\epsilon \neq 0$ [9] :

$$\left(\frac{\Lambda_\epsilon^2}{\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} = \frac{\kappa_1}{\kappa(\mu)} \exp \left\{ \int_{\kappa_1}^{\kappa(\mu)} \frac{d\kappa'}{\kappa' + \epsilon/2 f(\kappa')} \right\}, \quad (1.17)$$

mit der abkürzenden Bezeichnung $\kappa := [g(\mu)/4\pi]^2$, und

⁴Wir wählen dementsprechend Padé-Approximanten vom Typ II [8].

⁵An dieser Stelle sei nochmals an unsere Bemerkung zu (1.5) erinnert.

$$f(\kappa) := [\beta_0 + \beta_1 \kappa + \beta_2 \kappa^2 + \dots]^{-1} = -\frac{g \kappa}{\beta(g)} .$$

Die untere Integrationsgrenze ist Teil der Festlegung des Renormierungsschemas und hängt i.a. noch vom Wert des Regulators ab :

$$\kappa_1 := \kappa_1(\epsilon) = \kappa_1(0) \{ 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \} ,$$

wobei $\kappa_1(0)$ dann die renormierte Kopplung am Skalenpunkt Λ des verwendeten Schemas bezeichnet.

Andererseits ist bereits in [10] die folgende Integraldarstellung für die Kopplungsrenormierungskonstante angegeben worden :

$$Z_\alpha(\kappa(\mu), \epsilon) = \exp \left\{ - \int_0^{\kappa(\mu)} \frac{d\kappa'}{\kappa' + \epsilon/2 f(\kappa')} \right\} . \quad (1.18)$$

Zusammen mit (1.17) erhalten wir also für (1.16) das Resultat :

$$\Pi(\epsilon, \kappa) = \Pi(\epsilon) = \frac{2 \kappa_1(\epsilon)}{\epsilon} \exp \left\{ - \int_0^{\kappa_1(\epsilon)} \frac{d\kappa'}{\kappa' + \epsilon/2 f(\kappa')} \right\} , \quad (1.19)$$

welches offensichtlich überhaupt keine g^2 -Abhängigkeiten mehr enthält. Damit ist schon ein Mechanismus gefunden, der das für die Existenz einer nicht-trivialen Lösung erforderliche “Aufessen“ der Kopplungspotenzen in (1.15) bewerkstelligen kann; und dies erfolgt – wie das obige Resultat zeigt – sogar in allen Schleifenordnungen.

Eine weitere Analyse der rechten Seite von (1.19) zeigt [3] [9], daß diese bei Abschalten des UV-Regulators endlich bleibt; genauer gilt :

$$\Pi(\epsilon) = \frac{1}{\beta_0} \{ 1 + \mathcal{O}(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon) \} . \quad (1.20)$$

Wie man aus dieser sehr prägnanten Formulierung entnehmen kann, erfolgt die selbst-konsistente Reproduktion der Basisvertizes $\Gamma^{(r,0)}$, ohne daß Polbeiträge der divergenten Schleifenintegration in führender Ordnung bezüglich g^2 überleben. Damit sind insbesondere auch keine nicht-lokalen Counterterme erforderlich.

Ein Blick zurück auf (1.16) macht aufgrund des dort vorhandenen Polterms deutlich, daß der beschriebene Prozeß der dynamischen Selbstreproduktion unserer perturbativ nullten Ordnung aufs Engste mit der Divergenzstruktur der Theorie verknüpft ist. Konkret hat dies zur Folge, daß tatsächlich nur die sieben Basisvertizes (1.3) nicht-störungstheoretische Beiträge führender Ordnung besitzen. Weiter können wir schließen, daß sich die unendliche gekoppelte DS-Hierarchie im Fall des Selbstkonsistenzproblems der $\Gamma^{(r,0)}$ *exakt auf das endliche System von DS-Gleichungen für die oberflächlich divergenten Vertizes beschränkt*.

Dies wird allein durch die Dynamik der Theorie bewirkt, insbesondere sind hierfür keine von außen aufgeprägten Entkopplungsnäherungen erforderlich. Der Satz der $\Gamma^{(r,0)}$ für die sieben Basisvertizes der QCD spielt folglich im Fixpunktproblem der DS-Gleichungen eine herausragende Rolle und wir werden künftig in seinem Kontext auch von den *modifizierten Feynman-Regeln der QCD* sprechen.

Der $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus

Die Berechnung von Vakuumkondensaten umfaßt Schleifenintegrale über Kombinationen der Basisvertizes unter Zugrundelegung renormierter Parameter und Elementarfelder der Theorie. Demzufolge wird in dieser Situation kein nackter Kopplungsparameter und damit auch nicht die Größe (1.16) auftreten. Mit unseren rationalen Approximanten als Ansatz erhalten wir dann in dimensioneller Regularisierung als charakteristischen Vorfaktor eines UV-divergenten Einschleifenintegrals ⁶:

$$P(\epsilon, g^2) := \left(\frac{\Lambda_\epsilon^2}{\mu_0^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) . \quad (1.21)$$

Aus der Darstellung (1.10) des Skalenparameters folgt dann sofort für den *nicht-perturbativen Logarithmus* :

$$- \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g(\mu_0)} \right)^2 [1 + \mathcal{O}(g^2)] . \quad (1.22)$$

Es ist gerade dieser durch (1.21) und (1.22) beschriebene $\frac{1}{g^2}$ -*Mechanismus* [11] als Teilaspekt der oben diskutierten Selbstreproduktion von Kopplungsabhängigkeiten in DS-Gleichungen, welcher dann später bei der mikroskopischen Berechnung führender Beiträge zu den QCD-Vakuumkondensaten eine wesentliche Rolle spielen wird. Wichtig an dieser Stelle ist wiederum der Hinweis auf den fundamentalen Zusammenhang zwischen UV-Divergenzen der Theorie und dem Auftreten negativer Potenzen der quadratischen Kopplung. Man beachte überdies, daß die Größe P im Gegensatz zu (1.20) auch Korrekturen $\mathcal{O}(g^2)$ enthält.

Wir werden im folgenden nicht weiter auf die selbstkonsistente Reproduktion der verallgemeinerten Feynman-Regeln in den DS-Gleichungen eingehen. Ein erster Lösungsversuch wurde unter vereinfachenden Annahmen in [55],[56] und [57] unternommen. Die aktuellen Arbeiten [52] und [53] berücksichtigen teilweise bereits den globalen Approximationscharakter der Ansätze bezüglich r . Unser Ziel wird es stattdessen sein, mit dem beschriebenen Formalismus als Grundlage, ein Stück des beschwerlichen Weges von der feldtheoretischen Formulierung der QCD hin zur Beschreibung des Spektrums der Hadronen in Angriff zu nehmen.

⁶Wir wollen hier die spontane Masse Λ als einzigen dimensionsbehafteten Parameter der QCD behandeln. Auf die im Zusammenhang mit endlichen externen Quark-Strommassen entstehende Problematik werden wir später noch eingehen.

1.2 Renormierung zusammengesetzter Operatoren

Bevor wir mit dem Studium nicht-perturbativer Effekte in der QCD fortfahren können, sind noch einige grundsätzliche Überlegungen hinsichtlich der feldtheoretischen Formulierung lokaler zusammengesetzter Operatoren und ihrer Renormierung (COR = *Composite Operator Renormalization*) erforderlich. In Quantenfeldtheorien begegnen uns immer wieder Produkte von Feldoperatoren und deren Ableitungen, die am selben Raum-Zeit-Punkt auszuwerten sind. Beispiele solcher zusammengesetzter Operatoren finden wir in Strömen und Ladungen, etwa aus dem Noether-Theorem, oder in den Bewegungsgleichungen der Theorie; weiter seien die Ward-Identitäten, die BRS-Transformationen in Yang-Mills-Theorien sowie im Vorausblick die Wilsonsche Operator-Produkt-Entwicklung erwähnt, die wir später noch vorstellen werden. Aufgrund des Distributionscharakters der elementaren Feldoperatoren sind zusammengesetzte Operatoren im mathematisch strengen Sinne überhaupt nicht definiert. Bei direkter Berechnung bilden sie i.a. ⁷ zusätzliche UV-Divergenzen aus, die nicht durch die übliche Renormierung der Felder und Parameter der Theorie kompensiert werden.

Die geschilderte Problematik zeigt sich bereits konkret im Fall freier Felder. Betrachten wir dazu das zeitgeordnete Produkt $T \Phi(x) \Phi(y)$ zweier nicht wechselwirkender Feldoperatoren. Dessen Vakuumerwartungswert $\langle 0 | T \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle$ ist bis auf einen konstanten Faktor gerade der Propagator des freien Feldes und als solcher divergent im Grenzübergang $x \rightarrow y$.

Man kann hier jedoch der Größe $\Phi^2(x)$ eine Bedeutung verleihen, indem einfach der singuläre Vakuumerwartungswert vom gewöhnlichen Produkt der Feldoperatoren subtrahiert wird :

$$:\Phi^2(x): \equiv \lim_{y \rightarrow x} \{ \Phi(x) \Phi(y) - \langle 0 | \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle \} . \quad (1.23)$$

Der zusammengesetzte Operator $:\Phi^2(x):$ ist dann nichts anderes als das normalgeordnete Produkt freier Felder und (1.23) das Wicksche Theorem [14]. Diese Erzeugung regulärer zusammengesetzter Operatoren der freien Theorie durch Subtraktion der Singularität kann als Spezialfall der Renormierung allgemeiner zusammengesetzter Feldoperatoren verstanden werden.

Dazu betrachten wir nun Greensche Funktionen einer wechselwirkenden, renormierbaren Theorie mit Einschub eines zusammengesetzten Operators $O(x)$:

$$G_O^{(n)}(x, x_1, x_2, \dots, x_n) := \langle 0 | T O(x) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) | 0 \rangle . \quad (1.24)$$

Eine derartige Korrelationsfunktion läßt sich formal definieren durch Einführung eines Quellterms zum Operator O im erzeugenden Funktional :

$$\mathcal{Z}[J, J_O] := \int \mathcal{D}[\Phi] \exp \left\{ i \int d^4x \left(\mathcal{L} + J(x) \Phi(x) + J_O(x) O(x) \right) \right\} . \quad (1.25)$$

⁷ Ausnahmen sind Noether-Ströme exakter innerer Symmetrien [15].

Daraus erhält man mittels einer Legendre-Transformation bezüglich J dann in gewohnter Weise die 1PI Greens-Funktionen mit O -Insertion. Die zugehörigen Feynman-Regeln für Operatoreinschübe in die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen auf Baumgraphen-niveau werden auch als Operatorvertizes bezeichnet.

Operatormischung

Bei der störungstheoretischen Berechnung der Greenschen Funktionen (1.24) stellt man dann – wie bereits oben angedeutet wurde – fest, daß diese im allgemeinen divergent sind, auch wenn bereits alle Parameter und elementaren Felder der Lagrangedichte renormiert wurden. Diese zusätzlichen Divergenzen lassen sich durch die Einführung neuer Renormierungskonstanten absorbieren, wobei wir zunächst wie bei gewöhnlichen Feldoperatoren für den Zusammenhang zwischen nacktem und renormiertem zusammengesetzten Operator schreiben :

$$O = Z_O :O: .$$

Diese Form der multiplikativen Renormierung ist jedoch i.a. noch nicht ausreichend. Existieren nämlich mehrere Operatoren O_i ($i = 1, 2, \dots$) mit denselben Quantenzahlen und kanonischen Massendimensionen kleiner oder gleich $d(O)$, so mischen diese mit O bei Renormierung :

$$O_i = Z_{ij} :O_j: . \quad (1.26)$$

Die COR läßt sich demgemäß im allgemeinen durch eine Renormierungskonstanten-Matrix $\mathbf{Z} = (Z_{ij})$ beschreiben. Renormierte zusammengesetzte Operatoren wurden in der oben angegebenen Form zuerst von Zimmermann [18] definiert und in Anlehnung an das Wick-sche Theorem freier Felder als *Normalprodukte* bezeichnet.

Als illustratives Beispiel für die Operatormischung im Zusammenhang mit COR betrachten wir jetzt gemäß Fig. 1.1 führende perturbative Beiträge zur Greenschen Funktion $\langle 0 | T \frac{1}{2} \Phi^2 \tilde{\Phi}(p_1) \tilde{\Phi}(p_2) | 0 \rangle$ in der $(\Phi^4)_4$ -Theorie [16]. Die zugehörigen Gegenterme sind dann Fig. 1.2 zu entnehmen.

Die Operatorinsertion von $\frac{1}{2} \Phi^2$ haben wir dabei jeweils durch einen kleinen Kreis symbolisiert. Während die Einschleifen-Subdivergenz in Fig. 1.1(c) sich durch Renormierung des Kopplungsparameters beseitigen läßt (Fig. 1.2(a)), enthalten die anderen Divergenzen den zusammengesetzten Operator als Einschub und erfordern dementsprechend neue Counterterme mit Operatorvertizes. So tritt beispielsweise in den Gegentermen für die Overall-Divergenzen in Fig. 1.1(b) und 1.1(c) der Vertex für $\frac{1}{2} \Phi^2$ gemäß Fig. 1.2(b) auf, wohingegen die Kompensation der UV-Divergenz des unzusammenhängenden Graphen Fig. 1.1(d) einen Counterterm proportional zum Einheitsoperator erforderlich macht (Fig. 1.2(c)).

Damit erhalten wir den renormierten zusammengesetzten Operator in der Form :

$$:\frac{1}{2} \Phi^2: = (1 + \delta_1) \cdot \frac{1}{2} \Phi^2 + \delta_2 m^2 \cdot \mathbf{1} ,$$

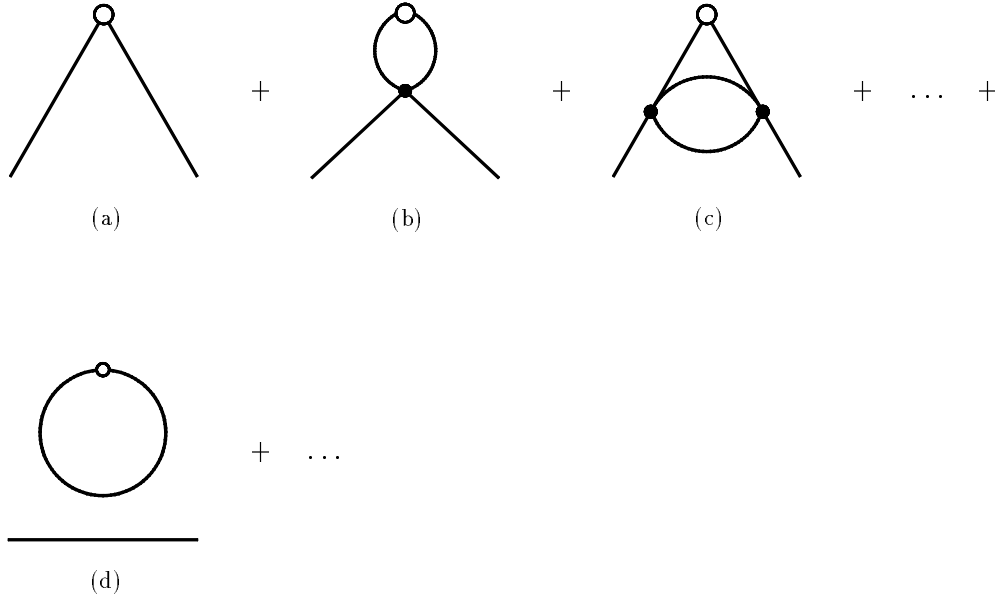
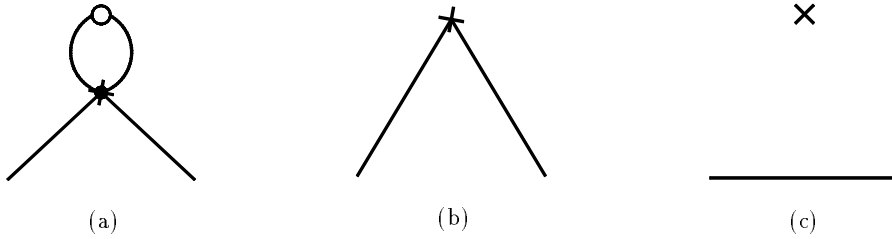

 Abbildung 1.1: Zweipunkt-Greensfunktion mit Insertion von $\frac{1}{2}\Phi^2$


Abbildung 1.2: Counterterm-Graphen zu Fig. 1.1

wobei $\delta_1(\lambda, \epsilon)$ und $\delta_2(\lambda, \epsilon)$ die Counterterm-Koeffizienten bezeichnen. Für die COR ergibt sich in diesem Fall die Matrixgleichung :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Phi^2 \\ m^2 \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \delta_1)^{-1} & -\delta_2 (1 + \delta_1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} :\frac{1}{2}\Phi^2: \\ m^2 \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun wieder im Rahmen einer allgemeinen, renormierbaren Feldtheorie die N_Φ -Punkt-Vertexfunktion mit O_i als Operatorinsertion gemäß

$$\Gamma_{O_i, N}(q, p_1, p_2, \dots, p_N) . \quad (1.27)$$

Hierbei bezeichnen $p_1, \dots, p_N$ die Impulse der $N = N_\Phi$ elementaren Felder und q sei der Impuls des eingeschobenen Operators. Für den Zusammenhang zwischen renormierter und nackter 1PI Korrelationsfunktion schreiben wir :

$$\Gamma_{O_i, N}(q, \{p\}; \{R\}; \mu) = (\mathbf{Z}^{-1})_{ij} Z_\Gamma \Gamma_{O_j, N}^0(q, \{p\}; \{0\}; \epsilon), \quad (1.28)$$

mit $Z_\Gamma := Z_\Phi^{N/2}$ und der Renormierungskonstanten-Matrix $\mathbf{Z}$ der Operatoren O_j . Die unterschiedlichen Vorzeichen der Exponenten von $\mathbf{Z}$ und Z_Γ rühren von der Amputation äußerer Beine her. Weiter bezeichnen $\{0\}$ und $\{R\}$ die nackten bzw. renormierten Parameter und Felder der Theorie, während $\{p\}$ für die Gesamtheit der externen Impulsvariablen steht.

Aus der Beobachtung, daß die nackte Vertexfunktion Γ^0 aufgrund ihrer Unabhängigkeit von der Renormierungsmasse μ invariant unter RG-Transformationen ist, kann man in bekannter Weise durch partielle Differentiationen eine RG-Gleichung für die Korrelationsfunktionen (1.28) herleiten ⁸ :

$$\left[\delta_{ij} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + g \beta(\{R\}) \frac{\partial}{\partial g} - m^2 \gamma_m(\{R\}) \frac{\partial}{\partial m^2} - \gamma_\Gamma \right\} + \gamma_{ij} \right] \Gamma_{O_j, N}(q, \{p\}; \{R\}; \mu) = 0, \quad (1.29)$$

wobei $\gamma_\Gamma := \frac{N_\Phi}{2} \gamma_\Phi$ die anomale Massendimension des N -Punkt-Vertex ohne Operator-einschub ist. Neu definiert wurde in (1.29) die anomale Dimensionen-Matrix :

$$\gamma = (\gamma_{ij}), \quad \gamma_{ij} := \mu (\mathbf{Z}^{-1})_{ik} \frac{d Z_{kj}}{d \mu}. \quad (1.30)$$

Aufgrund der Operatormischung (1.26) bei der COR sind die anomalen Dimensionen der daran beteiligten Operatoren O_j durch eine Matrix und die RG-Gleichung durch ein gekoppeltes System linearer partieller Differentialgleichungen gegeben. Der Nachweis, daß die Komponenten der anomale Dimensionen-Matrix (1.30) endlich sind, kann durch eine naheliegende Verallgemeinerung des entsprechenden Beweises [12] für gewöhnliche Vertexfunktionen erbracht werden.

Die Renormierung eichinvarianter Operatoren

Nachdem wir bisher im Kontext einer allgemeinen renormierbaren Feldtheorie die Grundlagen lokaler zusammengesetzter Operatoren und ihrer Renormierung kennengelernt haben, wollen wir uns im folgenden einer Problemstellung zuwenden, die typischerweise in quantisierten Eichtheorien auftreten wird. Zur Beschreibung physikalisch meßbarer Größen, z.B. im Rahmen der Operator-Produkt-Entwicklung (siehe 1.4), benötigen wir eichinvariante, renormierte Operatoren, die sich in der Regel aus mehreren elementaren Feldoperatoren, etwa zu Strömen, zusammensetzen. Bei oberflächlicher Betrachtungsweise erscheint es zunächst natürlich zu sein, daß zur Operatormischung in diesem Fall nur selbst eichinvariante Operatoren beitragen können. Diese Annahme erweist sich jedoch als falsch, wie von Kluberg-Stern und Zuber [19] gezeigt wurde.

⁸Im Fall einer Eichtheorie erscheint in der RG-Gleichung zusätzlich ein Beitrag mit der RG-Funktion $\delta(\{R\})$ des Eichparameters.

Im Falle einer gewöhnlichen globalen Symmetrie (wie z.B. Lorentz-Invarianz) mischt ein bezüglich dieser Symmetrie invarianter Operator ausschließlich mit invarianten Operatoren. In einer Eichtheorie brechen wir die Invarianz der Wirkung unter lokalen Eichtransformationen im Zuge kovarianter Quantisierung explizit durch die Einführung des Eichfixierungsterms, und es bleibt die Invarianz der quantisierten Theorie unter BRS-Transformationen [20]. Ein eichinvarianter Operator mischt nun aber sogar mit Operatoren, die nicht BRST-invariant sind.

Um dies zu zeigen [12] [13], betrachten wir einen Operator O , der unter einer gewissen, zunächst nicht weiter spezifizierten Transformation invariant sei. Die Summe seiner Gegenterme bezeichnen wir mit C und nehmen weiterhin an, daß auch die Wirkung unter der betrachteten Transformation invariant sei. Dann sind die Greenschen Funktionen ebenfalls invariant und es gilt (X bezeichne ein gewöhnliches Produkt von Feldoperatoren) :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \langle 0 | T X (O + C) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T (\delta X) (O + C) | 0 \rangle + \langle 0 | T X \delta (O + C) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T (\delta X) (O + C) | 0 \rangle + \langle 0 | T X (\delta C) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (1.31)$$

C ist so definiert, daß Greensche Funktionen elementarer Felder mit Insertion von $O + C$ endlich sind. Im Falle einer gewöhnlichen Symmetrie ist die Variation eines elementaren Feldes wieder ein solches, sodaß also der erste Term auf der rechten Seite von (1.31) endlich ist. Dann muß aber auch der andere Term, eine beliebige Korrelationsfunktion mit Einschub von δC , endlich sein. Im Renormierungsschema der minimalen Subtraktion sind die Gegenterme Potenzen von $\frac{1}{\epsilon}$ und δC ist nur dann endlich, falls es verschwindet. Somit ist also gezeigt, daß für die betrachtete Klasse von Symmetrien die Gegenterme zu einem invarianten Operator selbst invariant sein müssen.

Bezeichnet hingegen $\delta = \delta_{BRS}$ eine BRS-Transformation, so ist die Variation eines elementaren Feldes ein zusammengesetzter Operator. In diesem Falle kann daher nicht mehr die Endlichkeit von $\langle 0 | T (\delta_{BRS} X) (O + C) | 0 \rangle$ aus der entsprechenden Eigenschaft Greenscher Funktionen mit Einschub von $O + C$ gefolgert werden. Die Gegenterme zu eichinvarianten Operatoren müssen also nicht zwingend BRST-invariant sein, geschweige denn eichinvariant.

Die obige Argumentation weist uns zugleich den Weg, wie dieses Problem zu behandeln ist. Sei X das Produkt $\Phi_1(x_1) \dots \Phi_N(x_N)$ lokaler Felder. In der Korrelationsfunktion $\langle 0 | T (\delta_{BRS} X) (O(y) + C(y)) | 0 \rangle$ können nur dann Divergenzen auftreten, für die wir keine Gegenterme eingeführt haben, falls die Koordinate y mit der raum-zeitlichen Position x_i eines BRST-variierten Operators $\delta_{BRS} \Phi_i(x_i)$ aus $\delta_{BRS} X$ zusammenfällt. Ist aber nun y mit keinem der x_i identisch, dann ist $\langle 0 | T (\delta_{BRS} X) (O(y) + C(y)) | 0 \rangle$ endlich und wir können aus (1.31) die Endlichkeit von $\langle 0 | T X (\delta_{BRS} C) | 0 \rangle$ folgern, was wiederum im Falle minimaler Subtraktion gleichbedeutend mit dessen Verschwinden ist. Dementsprechend sind beliebige Greens-Funktionen elementarer Felder mit Insertion von $\delta_{BRS} C$ gleich null und für die BRST-Variation der Gegenterme gilt die Operatoridentität $\delta_{BRS} C = 0$; *die Counterterme zu eichinvarianten Operatoren sind BRST-invariant.*

Man kann versuchen, dieses Theorem durch explizite Rechnungen zu verifizieren [19]. Die Ergebnisse stehen zwar offensichtlich im Widerspruch zu ihm, jedoch korrespondieren

die varianten Counterterme mit Operatoren, die aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwinden.

Unser vorrangiges Interesse richtet sich jedoch weniger auf die BRST-invarianten als vielmehr auf die eichinvarianten Operatoren der Theorie; denn es sind ausschließlich die Letzteren, welche, unabhängig von der Methode der Eichfixierung, physikalische Bedeutung erlangen. Es wird also zu zeigen sein, daß die mit O mischenden eichvarianten Operatoren tatsächlich nicht zu physikalischen Größen beitragen.

Zu diesem Zweck führen wir einen Satz – nach Anwendung der Bewegungsgleichungen – linear unabhängiger eichinvarianter Operatoren $\{O_1, \dots, O_n\}$ ein, die mit einem vorgegebenen eichinvarianten Operator O mischen. Die O_i besitzen dieselben Transformationseigenschaften wie O bezüglich globaler Symmetrien und ihre kanonischen Massendimensionen sind kleiner oder gleich der des Operators O . Dann gibt es genau drei weitere Klassen von Operatoren, die ebenfalls zur Operatormischung mit O beitragen können :

- Klasse A : Die Operatoren A_i sind BRST-exakt, d.h. sie lassen sich – gegebenenfalls nach Anwendung der Bewegungsgleichungen – als BRST-Variation anderer Operatoren darstellen ⁹ : $A_i \approx \delta_{BRS} \hat{A}_i$.
- Klasse B : Sie enthält Operatoren B_i , die aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwinden.
- Klasse C : Diese umfaßt alle anderen Operatoren, die unter Berücksichtigung ihrer Quantenzahlen und kanonischen Massendimension mit O mischen können, sich jedoch nicht als Linearkombination der A_i , B_i und O_i darstellen lassen.

Zunächst stellt die Nilpotenz der BRS-Transformationen sicher, daß die Operatoren der Klasse A BRST-invariant sind; genauer $\delta_{BRS} A_i \approx 0$. Die augenfälligsten Klassen BRST-invarianter Operatoren, die nach unseren Überlegungen von oben für die Mischung mit O in Frage kommen, sind somit die eichinvarianten Operatoren O_i und die BRST-exakten Operatoren A_i . Insbesondere erhebt sich nun die Frage, inwieweit noch andere Operatoren beitragen können.

Die Theoreme von Joglekar und Lee

Die Beantwortung unserer zuletzt gestellten Frage sowie weitere grundlegende Aussagen über die Renormierung eichinvarianter Operatoren ergeben sich aus drei Theoremen, die zuerst von Joglekar und Lee [21] bewiesen wurden.

Das erste Theorem besagt, daß eine Basis der mit O mischenden, nicht-eichinvarianten Operatoren existiert, die ausschließlich aus BRST-exakten Operatoren besteht. Mit anderen Worten : Operatoren aus der Klasse C tragen nicht zur Renormierung von O bei. Zum Beweis dieser Aussage muß gezeigt werden, daß sich jeder BRST-invariante Operator als Linearkombination aus eichinvarianten und BRST-exakten Operatoren modulo Anwendung der Bewegungsgleichungen darstellen läßt. In der von Joglekar und Lee angegebenen Form erweist er sich als schwer nachvollziehbar. Ein übersichtlicherer Beweis auf

⁹Das geschlängelte Gleichheitszeichen soll hier die Gültigkeit der Gleichheitsrelation modulo Anwendung von Bewegungsgleichungen symbolisieren.

der Grundlage der Kohomologie-Theorie wurde kürzlich von Henneaux [22] erbracht.

Nach dem zweiten Joglekar-Lee-Theorem besitzt die Renormierungskonstanten-Matrix Block-Dreiecksgestalt :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{OO} & \mathbf{Z}_{OA} & \mathbf{Z}_{OB} \\ 0 & \mathbf{Z}_{AA} & \mathbf{Z}_{AB} \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} : \mathbf{O} : \\ : \mathbf{A} : \\ : \mathbf{B} : \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Der Beweis dieses Theorems ist einfach : Die einzigen Operatoren, die Gegenterme zu einem Operator der Klasse B sein können, müssen selbst aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwinden, gehören also auch zur Klasse B . Eine Greensche Funktion mit Einschub eines BRST-exakten Operators $\delta_{BRST} \hat{A}_i$ aus der Klasse A kann wegen (1.31) in der Form

$$\langle 0 | T (\delta_{BRST} \hat{A}_i(y)) X | 0 \rangle = - \langle 0 | T \hat{A}_i(y) \delta_{BRST} X | 0 \rangle \quad (1.33)$$

geschrieben werden. Bezeichnet nun $C(\hat{A}_i)$ den Gegenterm zu $\hat{A}_i$, dann ist die Korrelationsfunktion $\langle 0 | T (\hat{A}_i + C(\hat{A}_i)) \delta_{BRST} X | 0 \rangle$ endlich, falls keine der Koordinaten x_i mit y zusammenfällt. Der Counterterm des BRST-exakten Operators ist also, bis auf Beiträge, die wegen der Bewegungsgleichungen verschwinden, durch $\delta_{BRST} C(\hat{A}_i)$ gegeben. Die Gegenterme der A_i gehören deshalb ausschließlich den Klassen A und B an, womit (1.32) bewiesen ist.

Das Verschwinden physikalischer Matricelemente¹⁰ für die eichvarianten Operatoren der Klassen A und B ist schließlich der Inhalt des dritten Joglekar-Lee-Theorems. Wieder aufgrund der Bewegungsgleichungen tragen Operatoren der Klasse B nicht zu physikalischen Matricelementen bei. Im Fall der Klasse A ist das S -Matricelement über die LSZ (Lehmann, Symanzik, Zimmermann)-Reduktionsformel mit der Greens-Funktion $\langle 0 | T A_i X | 0 \rangle$ verknüpft. Dafür gilt aber die Slavnov-Taylor-Identität (STI) in Gleichung (1.33). Ein Beitrag zu $\delta_{BRST} X$ mit der BRST-Variation eines elementaren Feldoperators $\delta_{BRST} \Phi(x)$ besitzt in der entsprechenden Linie des Feynman-Graphen keinen physikalischen Teilchenpol, da $\delta_{BRST} \Phi$ ein Geistfeld enthält. Also verschwindet das physikalische Matricelement.

Die Block-Dreiecksgestalt der Matrix (1.32) gewährleistet nun, daß zur Bildung physikalischer Matricelemente nur eichinvariante Operatoren berücksichtigt werden müssen, oder formal :

$$\langle \Sigma | \mathbf{O} | \Psi \rangle = \mathbf{Z}_{OO} \langle \Sigma | : \mathbf{O} : | \Psi \rangle, \quad (1.34)$$

wobei $|\Sigma\rangle$ und $|\Psi\rangle$ beliebige physikalische Zustände bezeichnen sollen.

Mit diesen Grundlagen aus der Theorie der COR sind wir nun in die Lage versetzt, eine besonders interessante Kategorie physikalischer Matricelemente für zusammengesetzte Operatoren zu definieren.

¹⁰Auf dem Niveau der Darstellung durch Feynman-Graphen bedeutet dies rein transversale Polarisation des Gluons und on-shell Zustände von Quarks bzw. Gluonen.

1.3 Die Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik

Zunächst führen wir für voneinander verschiedene Raum-Zeit-Punkte $x \neq y$ das *nicht-lokale Kondensat* – auch *Schwinger-Funktion* genannt – als Fourier-Transformierte der vollen Impulsraum-Korrelationsfunktion elementarer (renormierter) Feldoperatoren gemäß

$$\langle A(x) B(y) \rangle \equiv \langle \Omega | A(x) B(y) | \Omega \rangle := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} G^{(AB)}(k) \quad (1.35)$$

ein. Hierbei bezeichnet $|\Omega\rangle$ den wahren (physikalischen) Grundzustand der QCD, der als Charakterisierung nicht-perturbativer Strukturmerkmale der Theorie vom störungstheoretischen Vakuumzustand $|0\rangle$ zu unterscheiden ist.

Vollziehen wir in (1.35) den Grenzübergang zu identischen raum-zeitlichen Koordinaten $y \rightarrow x$, so kommen wir zur Definition endlicher lokaler Kondensate, im folgenden auch einfach als *Vakuumkondensate* bezeichnet :

$$\langle AB \rangle \equiv \langle \Omega | :A(x)B(y): | \Omega \rangle_{x=y=0} := \left[\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G^{(AB)}(k) \right]_{\text{ren.}}, \quad (1.36)$$

wobei von der Translationsinvarianz der Theorie Gebrauch gemacht wurde. Das Auftreten zusammengesetzter Operatoren macht hier im allgemeinen die Anwendung der COR erforderlich. Darüberhinaus können jedoch mit der Berechnung von Vakuumkondensaten auch noch andere Renormierungsmaßnahmen verbunden sein, was teilweise aus einer gewissen Freiheit in der Definition dieser Größen folgt. Unsere formale Schreibweise in (1.36) soll in diesem Sinne alle Renormierungsvorschriften implementieren, die zu einer endlichen Definition der Kondensate führen. Nähere Details hierzu werden sich dann im Zuge der mikroskopischen Rechnung ergeben.

Bereits an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß (1.36) als Spezialfall der sogenannten *Momentenmethode* [23] bzw. der dazu äquivalenten “plane wave“-Methode [24] zu verstehen ist; Vakuumkondensate sind mit Momenten der entsprechenden Greenschen Funktionen zu identifizieren. Daraus läßt sich zumindest für die reine Yang-Mills-Theorie¹¹ schließen, daß im Rahmen der Störungstheorie nur verschwindende Kondensate zu erwarten sind. Die Anwendung der perturbativen Feynman-Regeln ergibt skalenfreie Integrale, die nach den Axiomen dimensioneller Regularisierung identisch Null sind. Demzufolge ist also unter der genannten Einschränkung die Ausbildung endlicher Vakuumkondensate als ein originär nicht-perturbativer Effekt zu verstehen, der seine Ursache in der nicht-trivialen Struktur des QCD-Vakuumzustandes findet. Zugleich weist uns die eben angestellte Überlegung auch einen möglichen Weg zu nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswerten : Die Ansätze zur erweiterten Störungsreihe aus 1.1 enthalten den fundamentalen Skalenparameter in rationaler Form und Schleifenintegrationen über die Impulsvariablen werden dann aufgrund der Anwesenheit dieser zusätzlichen dimensionsbehafteten Größe im allgemeinen zu von Null verschiedenen Resultaten führen.

¹¹ Auf die Besonderheiten bei Anwesenheit endlicher Strommassen für Quarks werden wir im Kontext der Berechnung des Quark-Kondensats noch eingehen.

Bevor wir uns jedoch näher mit der Realisierung dieses Gedankens befassen, wollen wir noch einige konkrete Beispiele für Vakuumkondensate der QCD angeben, die von besonderer physikalischer Relevanz sind.

Das Gluon-Kondensat und die anomale Brechung der Skaleninvarianz

Aus der Euklidischen Lagrange-Dichte (1.1) ergibt sich sofort für den Vakuumerwartungswert des eichinvarianten Feldstärketensor-Quadrates ausgedrückt durch Kondensate BRST-varianten zusammengesetzter Gluon-Operatoren :

$$\begin{aligned}
 \langle G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu,a} \rangle &=: \langle G^2 \rangle \\
 &= -2 \langle \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \rangle - 8 \langle ig \text{Tr} (\partial^\mu A^\nu) [A_\mu, A_\nu] \rangle + 2 \langle g^2 \text{Tr} [A^\mu, A^\nu] [A_\mu, A_\nu] \rangle \\
 &=: -2 \cdot V2 - 8 \cdot V3 + 2 \cdot V4 .
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Dabei haben wir bereits die Systematik der Bezeichnungen für Abelsches Gluon-Kondensat, sowie 3- bzw. 4-Gluon-Kondensat in der Form eingeführt, wie sie dann in den späteren Kapiteln fortwährend verwendet wird.

Unter Anwendung der Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für (1.1) folgt für die verschwindenden ¹² Bewegungsgleichungskondensate der Quantenchromodynamik ¹³ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + 6ig \text{Tr} (\partial^\mu A^\nu) [A_\mu, A_\nu] - 2g^2 \text{Tr} [A^\mu, A^\nu] [A_\mu, A_\nu] - \\
 &\quad g f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c - g \bar{\Psi} \not{A} \Psi \rangle =: V2 + 6 \cdot V3 - 2 \cdot V4 - \bar{G}VG - \bar{F}VF ,
 \end{aligned} \tag{1.38a}$$

$$0 = \langle \bar{\eta}_a \square \eta_a + g f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c \rangle =: \bar{G}G + \bar{G}VG , \tag{1.38b}$$

$$0 = \langle i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + g \bar{\Psi} \not{A} \Psi \rangle =: \langle i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi \rangle - m \cdot \bar{F}F + \bar{F}VF . \tag{1.38c}$$

Aus (1.38a) können wir schließen :

$$V4 = \frac{1}{2} \left(V2 + 6 \cdot V3 - \bar{G}VG - \bar{F}VF \right) , \tag{1.39}$$

und nach Einsetzen in (1.37) ergibt sich nun als weitere Darstellung des eichinvarianten Vakuumerwartungswertes :

$$\langle G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu,a} \rangle = -V2 - 2 \cdot V3 - \bar{G}VG - \bar{F}VF . \tag{1.40}$$

Auf Grund des Verschwindens der Bewegungsgleichungskondensate ist es uns somit gelungen, die Größe $V4$, die wir in 4.5 mit dem nullten Moment der Vierpunkt-Greenschen Funktion in Zusammenhang bringen werden, aus (1.37) zu eliminieren. Stattdessen treten

¹²Siehe dazu auch den formalen Beweis in [12].

¹³Wir beschränken uns hier zur Vereinfachung der Darstellung auf nur eine Quark-Flavour.

jetzt zusätzlich das Geist-Gluon-Antigeist-Kondensat sowie der Vakuumerwartungswert des Quark-Vertex in (1.40) auf. Diese Umformung birgt wesentliche technische Erleichterungen in sich, wie wir weiter unten im Zusammenhang mit der mikroskopischen Berechnung von Vakuumpkondensaten noch sehen werden.

Da $\langle G^2 \rangle$ Vakuumerwartungswert eines eichinvarianten Operators ist, läßt sich sein Renormierungsproblem mit Hilfe der Joglekar-Lee-Theoreme lösen. Der einzige eichinvariante Operator der QCD, der zur Mischung mit G^2 beitragen kann, ist der zusammengesetzte Quark-Operator $\bar{\Psi}\Psi$, dessen Vakuumerwartungswert gerade das Quark-Kondensat $\bar{F}F := \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ ergibt. Damit lautet (1.34) in diesem Fall :

$$\begin{pmatrix} \langle \Omega | G^2 | \Omega \rangle \\ \langle \Omega | \bar{\Psi}\Psi | \Omega \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle G^2 \rangle \\ \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Der Koeffizient Z_{21} ist dabei Null aufgrund der niedrigeren kanonischen Massendimension des Quark-Kondensats. Für die nicht-verschwindenden Renormierungskonstanten finden wir mit [25] [26] :

$$Z_{11} = 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{2}{\epsilon} \frac{N_C (3 + \xi)}{8} \quad (1.42a)$$

$$Z_{12} = \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{2}{\epsilon} \frac{3(N_C^2 - 1)}{4N_C} m \quad (1.42b)$$

$$Z_{22} = 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{2}{\epsilon} \frac{N_C^2 - 1}{8N_C} (3 + \xi) . \quad (1.42c)$$

Nachdem wir jetzt auf wohldefinierte Vakuumerwartungswerte eichinvarianter Operatoren der QCD zurückgreifen können, soll im folgenden ihr Zusammenhang mit *Anomalien* erörtert werden.

Aus der klassischen Feldtheorie ist bekannt, daß eine Lagrange-Dichte invariant unter Skalentransformationen $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ ist, falls sie keine dimensionsbehafteten Parameter, insbesondere also keine Massenskalen, enthält. Um aber die im Zuge der Quantisierung auftretenden UV-Divergenzen regularisieren zu können, ist die Einführung einer dimensionsbehafteten Renormierungsskala erforderlich. Insofern muß die Skalensymmetrie in der regularisierten Theorie notwendigerweise gebrochen werden. Aber auch nach Beseitigung des Cut-off-Parameters bleibt die somit renormierte, wechselwirkende Theorie skalenvariant. Der Grund hierfür ist in der bereits erwähnten dimensionellen Transmutation zu sehen, die sich im Falle dimensioneller Regularisierung für $D = 4 - \epsilon$ prägnant formulieren läßt :

$$\Lambda_\epsilon = g_0^{\frac{2}{\epsilon}} ; \quad (1.43)$$

g_0 bezeichnet dabei den (dimensionsbehafteten) nackten Kopplungsparameter und für die QCD haben wir die spontane Massenskala Λ_ϵ schon in (1.17) vorgestellt.

Kommen wir nun zur differentiellen Formulierung des Skalenverhaltens der Euklidischen QCD in Form der Noetherschen Divergenzgleichung :

$$\partial_\mu D^\mu = T_\mu^\mu . \quad (1.44)$$

Auf der rechten Seite steht hierbei die Spur des Energie-Impuls-Tensors, welcher aus dem kanonischen durch die von Belinfante [27] vorgeschlagene Modifikation hervorgeht, und für den, *ausgedrückt in nackten Feldern und Parametern*, gilt :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \delta^{\mu\nu} \hat{\mathcal{L}}_{QCD} + \hat{F}_a^{\mu\sigma} \hat{F}_{\sigma,a}^\nu + \delta^{\mu\nu} \xi_0^{-1} \partial_\ell \left(\hat{A}_a^\ell \partial_\sigma \hat{A}_a^\sigma \right) - \xi_0^{-1} \left[\hat{A}_a^\nu \partial^\mu \left(\partial_\sigma \hat{A}_a^\sigma \right) + (\mu \longleftrightarrow \nu) \right] + \\ & \left[\partial^\mu \hat{\eta}_a (\hat{\mathcal{D}}^\nu \hat{\eta})_a + (\mu \longleftrightarrow \nu) \right] - \frac{i}{2} \left[\hat{\Psi}_i \gamma^\mu (\hat{\mathcal{D}}^\nu \hat{\Psi})_i + (\mu \longleftrightarrow \nu) \right] = T^{\nu\mu} . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Der zugehörige Belinfante-Dilatationsstrom lautet dann :

$$D^\mu(x) = x_\nu T^{\mu\nu}(x) - 2 \left\{ (\partial^\mu \bar{\eta}_a(x)) \eta_a(x) + \xi^{-1} (\partial_\nu A_a^\nu(x)) A_a^\mu(x) \right\} . \quad (1.46)$$

Daß wir in (1.45) von unserer bisherigen Konvention abgewichen sind, zusammengesetzte Operatoren grundsätzlich durch renormierte Größen darzustellen, liegt in einer Beobachtung von Freedman, Muzinich und Weinberg [28] [29] begründet : Greensche Funktionen mit einer Insertion des Belinfanteschen Energie-Impuls-Operators in der angegebenen Form, sowie mit renormierten äußeren, elementaren Feldern, sind endlich. Als endlicher¹⁴ Operator, ausgedrückt in nackten Größen der Theorie, ist der Belinfante Energie-Impuls-Tensor dann aber eine Invariante unter RG-Transformationen, d.h. es gilt :

$$\mu \frac{d}{d\mu} T^{\alpha\beta} = 0 . \quad (1.47)$$

Wie aus (1.44) hervorgeht, ist die Spur des Belinfante-Tensors als Maß für die Brechung der Skaleninvarianz in unserer Theorie zu verstehen. Aus [31] erhalten wir unter Berücksichtigung des dritten Theorems von Joglekar und Lee die folgende Darstellung durch renormierte eichinvariante Operatoren :

$$T_\mu^\mu \big|_{\text{on-shell}} = \frac{\beta(g)}{2g} : G^2 : + (1 + \gamma_m(g)) m : \bar{\Psi} \Psi : . \quad (1.48)$$

Die beiden zu den Renormierungsgruppenfunktionen γ_m bzw. β proportionalen Terme stehen dabei für die anomale Brechung der Skaleninvarianz als Quantisierungseffekt, während die Eins der kanonischen Spur und damit expliziter Symmetriebrechung entspricht. Mit (1.48) ergibt sich sofort der Zusammenhang zwischen *Spuranomalie* und eichinvarianten Vakuumkondensaten der QCD :

$$\Theta_\mu^\mu := \langle \Omega | (T_\mu^\mu)_{\text{anomal}} | \Omega \rangle = \frac{\beta(g)}{2g} \langle G^2 \rangle + \gamma_m m \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle . \quad (1.49)$$

¹⁴Siehe dazu auch die Ausführungen in [30].

In erster Ordnung der quadratischen Kopplung finden wir dann das RG-invariante, eich-unabhängige Gluon-Kondensat gemäß :

$$C_{4V} := \frac{g^2}{4\pi^2} \langle G^2 \rangle . \quad (1.50)$$

Offensichtlich gewährleistet ein nicht-verschwindender Wert dieser Größe die Brechung der Skalensymmetrie selbst bei Abwesenheit massiver Quarks. Zugleich stellt das Gluon-Kondensat die Energieskala führender nicht-perturbativer Beiträge etwa zu Strom-Strom-Korrelationsfunktionen der Quantenchromodynamik dar, wie wir im folgenden Abschnitt noch sehen werden.

Aus der RG-Invarianz des Gluon-Kondensats (1.50) können wir schließen :

$$C_{4V} = c \cdot \Lambda^4 , \quad (1.51)$$

mit einem rein zahlenwertigen Faktor c , der die gesamte nicht-triviale Information über das Vakuumkondensat enthält und im Rahmen der vorliegenden Arbeit (zumindest prinzipiell) berechnet werden soll. Berücksichtigen wir jetzt noch das explizite Auftreten einer Potenz von g^2 in der Definition von C_{4V} , so ist klar, daß bei Ausführung der Schleifenintegrationen gemäß der Momentendefinition unserer Kondensate insgesamt eine reziproke quadratische Kopplung entstehen muß. Dies ist ein weiterer, deutlicher Hinweis darauf, wie sich mit den rationalen Ansätzen der erweiterten Störungsreihe unter Anwendung des $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus der nicht-perturbativen Logarithmen eine Berechnung des Gluon-Kondensats auf der Grundlage konventioneller Feynman-Methoden bewerkstelligen lassen müßte.

1.4 Die Operator-Produkt-Entwicklung und QCD-Summenregeln

Zum Schluß unserer Vorbetrachtungen wollen wir nun ein mächtiges Instrument der Quantenchromodynamik vorstellen, welches uns gestattet, von der “perturbativen Seite“ der Theorie her kommend, einen Brückenschlag zur Physik der hadronischen Bindungszustände zu vollziehen. Wir werden sehen, daß unsere Vakuumkondensate dabei wiederum eine hervorragende Rolle spielen, indem sie nicht-störungstheoretische Effekte der QCD parametrisieren. Man kann sagen, daß es letztendlich das Spektrum der Hadronen ist, welches sich in der nicht-trivialen Struktur des QCD-Grundzustands widerspiegelt.

Den formalen Rahmen für unser Vorhaben bildet die von Wilson [32] im Jahre 1969 durch Überlegungen zur Bedeutung der Skaleninvarianzbrechung in Quantenfeldtheorien begründete *Operator-Produkt-Entwicklung* (OPE). Ihr Erfolg begründet sich u.a. in einer ausgezeichneten experimentellen Bestätigung durch Ergebnisse der tiefinelastischen Lepton-Hadron-Streuung ¹⁵.

Betrachten wir zunächst wieder das zeitgeordnete Produkt freier, masseloser Felder. Unter Anwendung des Wickschen Theorems erhalten wir hierfür :

¹⁵Eine Übersicht dazu findet man in [33].

$$T \Phi(x) \Phi(y) = : \Phi(x) \Phi(y) : + \langle 0 | T \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle \cdot 1 . \quad (1.52)$$

Das zeitgeordnete Produkt wird im Limes $y \rightarrow x$ singulär, wobei aber diese Singularität allein durch eine c -Zahl-Funktion (in diesem Fall den freien Propagator) gegeben ist. Das normalgeordnete Produkt freier Feldoperatoren verhält sich im betrachteten Grenzübergang dagegen regulär.

In Verallgemeinerung von (1.52) wählen wir nun in einer wechselwirkenden Theorie als formalen Ansatz für das Produkt zweier beliebiger (elementarer oder zusammengesetzter) lokaler Feldoperatoren :

$$A(x) B(y) = \sum_j C_j(x-y) N_j(x, y) . \quad (1.53)$$

Hierbei sind die C_j in Analogie zu den Wickschen Kontraktionen im freien Fall c -Funktionen, die aufgrund der Translationsinvarianz nur von $x-y$ abhängen. Mit ihnen verbunden tritt ein Satz regulärer bilokaler Operatoren $N_j(x, y)$ auf. Wegen ihres regulären Verhaltens im Grenzübergang $y \rightarrow x$ können wir die Operatoren $N_j(x, y)$ in eine Taylor-Reihe entwickeln und erhalten für $y = 0$:

$$\begin{aligned} N_j(x, 0) &= \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n N_j(x, 0)}{\partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_n}} \Big|_{x=0} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \\ &\equiv \sum_n N_j^{(n)\mu_1 \dots \mu_n}(0, 0) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Einsetzen in (1.53) liefert dann :

$$\begin{aligned} A(x) B(0) &= \sum_j C_j(x) \sum_n N_j^{(n)\mu_1 \dots \mu_n}(0, 0) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \\ &= C_1(x) 1 + C_2(x) \sum_n N_2^{(n)\mu_1 \dots \mu_n}(0, 0) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} + \dots . \end{aligned} \quad (1.55)$$

Betrachten wir den Limes $x \rightarrow 0$, so sind die führenden Beiträge dieser Entwicklung gerade diejenigen, die keine Ableitungen enthalten, da jede Ableitung von zusätzlichen Faktoren x_μ begleitet ist. Damit kommen wir zur Formulierung der *Wilsonschen Operator-Produkt-Entwicklung* gemäß :

$$A(x) B(0) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \sum_O C_O(x) : O(0) : . \quad (1.56)$$

Auf der rechten Seite stehen hier Normalordnungen zusammengesetzter Operatoren, während die als Wilson-Koeffizienten bezeichneten Funktionen $C_O(x)$ im allgemeinen Singularitäten aufweisen für $x \rightarrow 0$. Analoge Entwicklungen existieren für zeitgeordnete Produkte, Kommutatoren, sowie Produkte von drei oder mehr Feldern. Entsprechend wie in der freien

Theorie ist es uns mit dem Ansatz (1.56) gelungen, die für “kleine Abstände“ x singuläre linke Seite aufzuspalten, und die Singularitäten ausschließlich in den Wilson-Koeffizienten zu absorbieren.

Es ist zu beachten, daß die OPE in der angegebenen Form streng genommen nicht auf der Ebene der Operatoren gültig ist, sondern lediglich im schwachen Sinne, also für Matrixelemente der Operatoren. Daher muß man sich die Entwicklung (1.56) noch zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand eingeschlossen denken. Man kann zeigen, daß die OPE für freie skalare und spinorielle Feldtheorien sowie im Falle renormierbarer wechselwirkender Theorien in allen Ordnungen der Störungstheorie existiert [34] [35].

Im nicht-perturbativen Regime, für das die OPE als Ansatz vorgeschlagen wurde, kann man (1.56) als asymptotische Reihe auffassen und für kleine Abstände $x \rightarrow 0$, also im fast störungstheoretischen Bereich, gute Ergebnisse erzielen. In diesem Sektor hat sich dann auch die OPE trotz fehlenden Beweises als ein sehr wichtiges Hilfsmittel erwiesen. Dabei zeigt sich, daß die OPE einer Separation der durch kleine Längenskalen bedingten Effekte von den langreichweitigen Phänomenen der Theorie entspricht. In diesem Sinne geht daher die Operator-Produkt-Entwicklung über den Rahmen der gewöhnlichen Störungstheorie hinaus. So treten beispielsweise im Fall der bereits erwähnten tiefinelastischen Lepton-Hadron-Streuung Matrixelemente der Normalordnungen $:O:$ für hadronische Zustände auf, die ihrem Bindungscharakter entsprechend nicht-perturbative Beiträge liefern, während sich die Wilson-Koeffizienten C_O störungstheoretisch berechnen lassen. Grundsätzlich erweist sich die OPE so lange als gültig, wie eine klare Unterscheidung zwischen kurz- und langreichweitigen Effekten möglich ist. Kurzreichweitige Instanton-Lösungen der Theorie führen insofern ab einer gewissen kritischen Ordnung der Power-Korrekturen (siehe unten) $[q^2]^{-d_{\text{cr}}}$ zum Zusammenbruch der Wilson-Entwicklung. Im Modell eines verdünnten Instantongases findet man $d_{\text{cr}} = 6$ [41].

Setzen wir die Existenz der OPE im oben beschriebenen Sinne voraus, so eröffnet sich nun die Möglichkeit, von der nicht-trivialen Struktur des physikalischen QCD-Grundzustandes $|\Omega\rangle$ herrührende Phänomene, quantitativ zu beschreiben. Diese manifestieren sich dadurch, daß Operatoren mit verschwindenden Erwartungswerten bezüglich des rein perturbativen Vakuums :

$$\langle 0 | :O: | 0 \rangle = 0, \quad O \neq \mathbf{1}, \quad (1.57)$$

nicht-verschwindende Kondensate

$$\langle \Omega | :O: | \Omega \rangle \neq 0 \quad (1.58)$$

bilden. Der Einheitsoperator $\mathbf{1}$, dessen perturbativer Vakuumerwartungswert endlich ist, charakterisiert hierbei gerade den Beitrag der Störungstheorie.

OPE und Skalenverhalten

Um Aussagen über den singulären Charakter der Wilson-Koeffizienten machen zu können, müssen wir das Skalenverhalten dieser Funktionen bestimmen. Im Gegensatz zu masselosen

freien Feldtheorien, die exakt skaleninvariant sind, wird – wie wir bereits gesehen haben – durch Massen- und Wechselwirkungsterme die Skaleninvarianz gebrochen. In asymptotisch freien Theorien wie der QCD wird das singuläre Verhalten der Koeffizientenfunktionen jedoch von den “Resten” der Skaleninvarianz dominiert.

Betrachten wir zunächst eine freie skaleninvariante Theorie. Anwendung einer Skalentransformation auf die Wilson-Entwicklung (1.56) ergibt dann :

$$\lambda^{d(A)+d(B)} A(\lambda x) B(0) \sim \sum_O C_O(x) \lambda^{d(O)} :O(0):, \quad (1.59)$$

wobei $d(A)$, $d(B)$ sowie $d(O)$ die kanonischen Dimensionen der entsprechenden Operatoren bezeichnen. Andererseits können wir aber schreiben :

$$\lambda^{d(A)+d(B)} A(\lambda x) B(0) \sim \lambda^{d(A)+d(B)} \sum_O C_O(\lambda x) :O(0):. \quad (1.60)$$

Vergleicht man nun die beiden letzten Gleichungen, so folgt unmittelbar :

$$\lambda^{d(A)+d(B)} \sum_O C_O(\lambda x) :O(0): = \sum_O C_O(x) \lambda^{d(O)} :O(0):. \quad (1.61)$$

Sind die in (1.61) auftretenden Normalordnungen voneinander linear unabhängig, was immer erreicht werden kann, erhalten wir für das Skalenverhalten der Wilson-Koeffizienten :

$$C_O(\lambda x) = \lambda^{d(O)-d(A)-d(B)} C_O(x). \quad (1.62)$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Wilson-Koeffizienten $C_O(x)$ in einer skaleninvarianten Theorie homogen vom Grad $d(O) - d(A) - d(B)$ sind, und insbesondere nur für $d(O) - d(A) - d(B) < 0$ singulär sein können. Ihr Divergenzgrad nimmt folglich mit wachsender kanonischer Dimension der Operatoren O ab, sodaß die führenden Terme der OPE durch die Operatoren mit niedrigster Dimension bestimmt sind.

Im Falle asymptotisch freier, wechselwirkender Theorien ist das Skalenverhalten der Wilson-Koeffizienten $C_O(x)$ für $x \rightarrow 0$ im wesentlichen ebenfalls durch

$$C_O(x) \sim (x^2)^{-\frac{d(A)+d(B)-d(O)}{2}} \quad (1.63)$$

gegeben, jedoch sagt die Renormierungsgruppe zusätzliche logarithmische Korrekturen voraus, die wir im folgenden bestimmen werden.

Die RG-verbesserte OPE

Wir betrachten dazu im Fall der Quantenchromodynamik die Vertexfunktion mit N_V Gluon-, N_F Quark- und N_G Geistfeldern, sowie einer Insertion des zusammengesetzten Operators O_i gemäß

$$\Gamma_{O_i; N_V, N_F, N_G}(q, p_1, p_2, \dots, p_N) , \quad (1.64)$$

wobei $N = N_V + N_F + N_G$ ist. Analog wie in (1.29) finden wir das zugehörige System von RG-Gleichungen :

$$\left[\delta_{ij} \mathcal{D} - \delta_{ij} \gamma_\Gamma + \gamma_{ij}(O) \right] \Gamma_{O_j; N_V, N_F, N_G}(q, \{p\}; \{R\}; \mu) = 0 , \quad (1.65)$$

mit der anomalen Massendimension der Vertexfunktion ohne Operatoreinschub :

$$\gamma_\Gamma = \frac{N_V}{2} \gamma_A + \frac{N_F}{2} \gamma_F + \frac{N_G}{2} \gamma_G , \quad (1.66a)$$

und den Elementen der anomale Dimensionen-Matrix :

$$\gamma_{ij}(O) = \mu \left(\mathbf{Z}^{-1}(O) \right)_{ik} \frac{d Z_{kj}(O)}{d \mu} . \quad (1.66b)$$

Weiter haben wir in (1.65) die abkürzende Schreibweise

$$\mathcal{D} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + g \beta(\{R\}) \frac{\partial}{\partial g} + \xi \delta(\{R\}) \frac{\partial}{\partial \xi} - m^2 \gamma_m(\{R\}) \frac{\partial}{\partial m^2}$$

eingeführt. Um nun eine RG-Gleichung für die Wilson-Koeffizienten herleiten zu können, betrachten wir in Anlehnung an (1.55) die OPE in der Form :

$$T A(x) B(0) = \sum_{l,n} C_{l,\mu_1 \dots \mu_n}(x) : O_l^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) : . \quad (1.67)$$

Dann gilt nach Übergang in den Impulsraum für die Vertexfunktionen zum physikalischen Grundzustand $|\Omega\rangle$ mit Insertion der Operatoren aus (1.67) :

$$\Gamma_{A,B; N_V, N_F, N_G}(q, -q, \{p\}; \{R\}; \mu) = \sum_{l,n} \tilde{C}_{l,\mu_1 \dots \mu_n}(q) \Gamma_{O_l^{\mu_1 \dots \mu_n}; N_V, N_F, N_G}(0, \{p\}; \{R\}; \mu) ; \quad (1.68)$$

und sie genügen nach (1.65) den RG-Gleichungen ¹⁶ :

$$\left[\delta_{ij} \mathcal{D} - \delta_{ij} \gamma_\Gamma + \gamma_{ij}(O^{\mu_1 \dots \mu_n}) \right] \Gamma_{O_j^{\mu_1 \dots \mu_n}; N_V, N_F, N_G}(0, \{p\}; \{R\}; \mu) = 0 , \quad (1.69a)$$

sowie

$$\left[\mathcal{D} - \gamma_\Gamma + \gamma_A + \gamma_B \right] \Gamma_{A,B; N_V, N_F, N_G}(q, -q, \{p\}; \{R\}; \mu) = 0 , \quad (1.69b)$$

¹⁶Wir nehmen aus Gründen der Übersichtlichkeit an, daß die eingesetzten Operatoren A und B bei der Renormierung nicht mit anderen Operatoren mischen.

mit den anomalen Dimensionen γ_A, γ_B der Operatoren A und B . Anwendung des Differentialoperators $\mathcal{D}$ auf beiden Seiten von (1.68) ergibt unter Berücksichtigung der RG-Gleichungen (1.69) :

$$\left[\delta_{ij} \mathcal{D} + \delta_{ij} (\gamma_A + \gamma_B) - \gamma_{ij}(O^{\mu_1 \dots \mu_n}) \right] \tilde{C}_j^{\mu_1 \dots \mu_n}(q) = 0. \quad (1.70)$$

Dies ist die gesuchte RG-Gleichung für die Wilson-Koeffizienten $\tilde{C}_j^{\mu_1 \dots \mu_n}(q)$, die es uns nun erlaubt, das Verhalten der Koeffizienten im tief-Euklidischen Impulsbereich zu untersuchen. Man sieht bereits am Auftreten der anomalen Dimensionen in (1.70), daß sich die Abweichungen vom kanonischen Skalenverhalten auch in der OPE zeigen werden.

Betrachten wir jetzt die Fourier-Transformierte des Vakuumerwartungswertes der OPE aus Gleichung (1.67) :

$$\begin{aligned} \Pi(q) &:= \int d^4x \, e^{iqx} \langle \Omega | T A(x) B(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{l,n} \langle \Omega | :O_l^{\mu_1 \dots \mu_n}(0): | \Omega \rangle \int d^4x \, e^{iqx} C_l(x^2) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Dafür können wir auch schreiben :

$$\Pi(q) = \sum_{l,n} \langle \Omega | :O_l^{\mu_1 \dots \mu_n}(0): | \Omega \rangle \left(-i \frac{\partial}{\partial q^{\mu_1}} \right) \dots \left(-i \frac{\partial}{\partial q^{\mu_n}} \right) \int d^4x \, e^{iqx} C_l(x^2). \quad (1.72)$$

Mit der Beziehung $-i \partial / \partial q^\nu = -2i q^\nu \partial / \partial q^2$ sowie der Definition

$$\tilde{C}_{l,n}(q^2) := (-2i q^2)^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4x \, e^{iqx} C_l(x^2), \quad (1.73)$$

folgt schließlich für die OPE im Impulsraum :

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \sum_l \left\{ \langle \Omega | :O_l(0): | \Omega \rangle \tilde{C}_{l,0}(q^2) + \langle \Omega | :O_l^\mu(0): | \Omega \rangle \frac{q_\mu}{q^2} \tilde{C}_{l,1}(q^2) + \right. \\ &\quad \left. \langle \Omega | :O_l^{\mu\nu}(0): | \Omega \rangle \left(-i \frac{\delta^{\mu\nu}}{q^2} \tilde{C}_{l,1}(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^4} \tilde{C}_{l,2}(q^2) \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Diese Darstellung der OPE von $\Pi(q)$ ist für die Analyse des asymptotischen Verhaltens besonders gut geeignet, da die $\tilde{C}_{l,n}$ für festes l unabhängig von n dieselbe kanonische Dimension besitzen. In (1.74) haben wir die nicht-perturbativen Eigenschaften des wahren physikalischen Grundzustands der QCD durch unsere Vakuumkondensate parametrisiert. Weiter erkennt man das charakteristische Auftreten der nicht-störungstheoretischen Beiträge als Potenz-Korrekturen in $\frac{1}{q^2}$ ("Power Corrections").

Die logarithmischen Abweichungen von diesem Potenzgesetz wollen wir jetzt am Beispiel des Wilson-Koeffizienten $C_{i,0}(q^2)$ erläutern. Zunächst folgt aus (1.70) unter Berücksichtigung von (1.71) und (1.74) die RG-Gleichung :

$$\left[\delta_{ij} \mathcal{D} + \delta_{ij} (\gamma_A + \gamma_B) - \gamma_{ij}(O) \right] \tilde{C}_{j,0}(q^2) = 0 . \quad (1.75)$$

Weiter nehmen wir vereinfachend an, daß keine Operatormischung vorliege ¹⁷; dann gilt $\gamma_{ij}(O) = \gamma_O \delta_{ij}$, und wir können für (1.75) schreiben :

$$\left[\mathcal{D} - \gamma_{\tilde{C}_{i,0}} \right] \tilde{C}_{i,0}(q^2) = 0 , \quad (1.76)$$

wobei wir die anomalen Dimensionen in der Definition $\gamma_{\tilde{C}_{i,0}} := \gamma_O - \gamma_A - \gamma_B$ zusammengefaßt haben. Als Lösung der zugehörigen Callan-Symanzik-Gleichung [38] finden wir in bekannter Weise mit Hilfe der Methode der Charakteristiken :

$$\tilde{C}_{i,0}(\lambda^2 q^2; \{R\}; \mu) = \lambda^{d_{\tilde{C}_{i,0}}} \tilde{C}_{i,0}(q^2; \{\bar{R}(t)\}; \mu) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t dt' \gamma_{\tilde{C}_{i,0}}(\{\bar{R}(t')\}) \right\} ; \quad (1.77)$$

hierbei bezeichnet $d_{\tilde{C}_{i,0}}$ die kanonische Dimension und $\{\bar{R}(t)\} \equiv \{\bar{g}(t), \bar{\xi}(t), \bar{m}(t)\}$ steht für den Satz der laufenden Parameter der QCD.

Um nun das asymptotische Verhalten zu untersuchen, betrachten wir (1.77) für sehr große Werte von $\lambda = e^t$. Das Verschwinden der effektiven Kopplung im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ gemäß der asymptotischen Freiheit können wir unmittelbar (1.11) entnehmen. Entsprechend findet man auch für die laufende Quark-Masse [39] :

$$\bar{m}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 .$$

Als weitere Vereinfachung wählen wir im Folgenden die Landau-Eichung $\xi = 0$, da in diesem Fall der gleitende Eichparameter $\bar{\xi}(t)$ unabhängig von t identisch verschwindet [39]. Schließlich schreiben wir noch die anomale Dimension $\gamma_{\tilde{C}_{i,0}}$ auf Einschleifen-Niveau in der Form :

$$\gamma_{\tilde{C}_{i,0}}(g, \xi = 0) = - \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \gamma_{\tilde{C}_{i,0}}^{(0)} + \mathcal{O}(g^4) .$$

Insgesamt erhalten wir dann in guter Näherung für das Verhalten des Wilson-Koeffizienten (1.77) bei großen Skalen :

$$\tilde{C}_{i,0}(\lambda^2 q^2; g, \xi = 0, m; \mu) \approx \lambda^{d_{\tilde{C}_{i,0}}} \tilde{C}_{i,0}(q^2; \bar{g} = 0, \bar{\xi} = 0, \bar{m} = 0; \mu) \cdot \exp \left\{ \gamma_{\tilde{C}_{i,0}}^{(0)} \int_0^t dt' \left(\frac{\bar{g}(t')}{4\pi} \right)^2 \right\} . \quad (1.78)$$

¹⁷Für den allgemeinen Fall vorhandener Operatormischung sei auf [36] und [37] verwiesen.

Berücksichtigen wir das kanonische Skalenverhalten gemäß

$$\tilde{C}_{i,0}(\lambda^2 q^2; \bar{g} = 0, \bar{\xi} = 0, \bar{m} = 0; \mu) = \lambda^{d_{\tilde{C}_{i,0}}} \tilde{C}_{i,0}(q^2; \bar{g} = 0, \bar{\xi} = 0, \bar{m} = 0; \mu), \quad (1.79)$$

so kann man folgern :

$$\tilde{C}_{i,0}(q^2; \bar{g} = 0, \bar{\xi} = 0, \bar{m} = 0; \mu) \sim (q^2)^{d_{\tilde{C}_{i,0}}/2}, \quad (1.80)$$

wobei sich aus einem Vergleich mit (1.71) bzw. (1.74) für die kanonische Dimension von $\tilde{C}_{i,0}$

$$d_{\tilde{C}_{i,0}} = d_A + d_B - d_{O_i} - 4$$

ergibt. Letztlich erhält man so für den Wilson-Koeffizienten bei großen Impulsen $p^2 = \lambda^2 q^2$ ($\lambda \rightarrow \infty$) [40] :

$$\tilde{C}_{i,0}(p^2; g, \xi = 0, m; \mu) \approx (p^2)^{d_{\tilde{C}_{i,0}}/2} \left[\left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \beta_0 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} \right]^{\gamma_{\tilde{C}_{i,0}}^{(0)}/2\beta_0}. \quad (1.81)$$

Der erste Faktor in (1.81) beschreibt dabei gerade das kanonische Skalenverhalten, welches im Falle verschwindender anomaler Dimensionen vorläge, während der zweite Faktor die logarithmischen Korrekturen angibt. Diese rein logarithmischen Abweichungen vom Potenzgesetz der Wilson-Koeffizienten sind als Folge der asymptotischen Freiheit der QCD zu sehen.

QCD-Summenregeln

Wir befassen uns jetzt mit der Anwendung der Operator-Produkt-Entwicklung auf Korrelationsfunktionen eichinvarianter Stromoperatoren, die es uns ermöglichen wird, den Bezug zu physikalisch meßbaren Eigenschaften hadronischer Materie herzustellen. Man spricht in diesem Zusammenhang von *QCD-Summenregeln*, die nach den Begründern der Methode (Shifman, Vainshtein und Zakharov) auch häufig als *SVZ-Summenregeln* [41] bezeichnet werden.

Wir betrachten zunächst auf rein formaler Ebene für eine asymptotisch freie Eichtheorie Greens-Funktionen der Gestalt :

$$M(y; x_1, \dots, x_N) := \langle 0 | T j(y) j(0) X | 0 \rangle, \quad (1.82)$$

wobei j ein renormierter eichinvarianter Operator und X das Produkt lokaler Feldoperatoren an Raum-Zeit-Punkten $x_1, \dots, x_N$ sein soll. Weiter setzen wir die Existenz der OPE

$$M(y; x_1, \dots, x_N) \sim \sum_l C_l(y) \langle 0 | T : O_l(0) : X | 0 \rangle \quad (1.83)$$

voraus. Die Summation erstreckt sich dabei über alle renormierten (zusammengesetzten) Operatoren mit geeigneten Quantenzahlen und passender kanonischer Dimension.

In Anwendungen, wie etwa der tief-inelastischen Streuung, erhält man hieraus mit Hilfe der LSZ-Reduktionsformel das S -Matrixelement :

$$W := \langle P | T j(y) j(0) | P \rangle \sim \sum_l C_l(y) \langle P | :O_l(0): | P \rangle , \quad (1.84)$$

wobei $|P\rangle$ wieder einen physikalischen Zustand bezeichnet.

Wir wollen zeigen, daß nur eichinvariante Operatoren in (1.84) zu berücksichtigen sind. Im (störungstheoretischen) Beweis der OPE [12] werden die aus Wilson-Koeffizient und Normalordnung bestehenden Terme gerade als Counterbeiträge des zu renormierenden Operator-Produktes eingeführt. Daher können wir unsere Methode der Renormierung eichunabhängiger Operatoren aus 1.2 auch auf die Wilson-Entwicklung anwenden. So sind die Operatoren O_l entweder eichinvariant, BRST-exakt oder verschwinden auf Grund der Bewegungsgleichungen. Falls wir $y \neq 0$ in (1.84) wählen, benötigen wir dann nach dem dritten Joglekar-Lee-Theorem tatsächlich nur eichinvariante Operatoren. Mit derselben Begründung läßt sich der renormierte Operator j durch eichunabhängige, BRST-exakte bzw. wegen der Bewegungsgleichungen verschwindende Operatoren darstellen gemäß

$$j = j_{GI} + \delta_{BRS} \hat{A} + B . \quad (1.85)$$

Für das physikalische Matrixelement gilt dann wiederum nach Joglekar und Lee :

$$\langle P | T j(y) j(0) | P \rangle = \langle P | T j_{GI}(y) j_{GI}(0) | P \rangle . \quad (1.86)$$

Kehren wir nun zurück zu unserer Greens-Funktion (1.82) und beginnen in Analogie zu 1.2 mit der STI :

$$0 = \delta_{BRS} \langle 0 | T j(y) j(0) X | 0 \rangle = \langle 0 | T j(y) j(0) \delta_{BRS} X | 0 \rangle . \quad (1.87)$$

Hierbei nahmen wir zunächst an, daß alle Raum-Zeit-Koordinaten y, x_i und 0 voneinander verschieden sind und konnten so $\delta_{BRS} j = \delta_{BRS} B = 0$ verwenden. Vollziehen wir jetzt den Grenzübergang $y \rightarrow 0$, dann fällt weiterhin nach Voraussetzung keine der Koordinaten x_i mit dem Ursprung zusammen, also

$$\begin{aligned} \langle 0 | T j(y) j(0) \delta_{BRS} X | 0 \rangle &\sim \sum_l C_l(y) \langle 0 | T :O_l(0): \delta_{BRS} X | 0 \rangle \\ &= - \sum_l C_l(y) \langle 0 | T :(\delta_{BRS} O_l(0)): X | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (1.88)$$

Wie uns (1.87) zeigt, verschwindet die linke Seite, während rechter Hand gerade ihre bezüglich des betrachteten Limes führenden Beiträge stehen, und somit ebenfalls Null

ergeben. Da wir den Beweis für eine beliebige Greensche Funktion geführt haben, muß also insbesondere gelten :

$$\sum_l C_l : \delta_{BR} O_l(0) : = 0 . \quad (1.89)$$

Folglich müssen die Operatoren in der Wilson-Entwicklung (1.83) BRST-invariant sein, da wir stets lineare Unabhängigkeit der Normalordnungen erreichen können. In *physikalischen Matricelementen* dürfen wir uns deshalb sogar auf eichinvariante Operatoren beschränken.

Nach dieser allgemein gültigen Aussage über die OPE eichinvarianter Korrelationsfunktionen wollen wir jetzt noch zwei konkrete Beispiele für QCD-Summenregeln vorstellen.

OPE für PCAC-Relationen

Wir gehen aus von der Korrelationsfunktion zweier axialer Ströme im Impulsraum :

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \int d^4x \, e^{iqx} \langle \Omega | T A_\mu(x) A_\nu^\dagger(0) | \Omega \rangle ; \quad (1.90)$$

hierbei sei der (renormierte) axiale Strom aus den Feldoperatoren eines Up- bzw. Down-Quarks zusammengesetzt :

$$A_\mu(x) = : \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(x) : . \quad (1.91)$$

Für die OPE der Longitudinalprojektion $\left(l_{\mu\nu}(q) \equiv \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$ von (1.90) ergibt sich [42] :

$$l_{\mu\nu}(q) \Pi^{\mu\nu}(q) = Z - i \frac{m_u + m_d}{q^2} \left(\langle \bar{u} u \rangle + \langle \bar{d} d \rangle \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{q^4} \right) . \quad (1.92)$$

Z bezeichnet dabei den divergenten störungstheoretischen Beitrag. Weiter beachte man, daß Kondensate mit kanonischer Dimension $d > 4$ erst in der Ordnung $\mathcal{O}(1/q^4)$ auftreten. Lediglich das eichinvariante Gluon-Kondensat C_{4V} käme als führender Beitrag noch in Frage. Man kann jedoch zeigen, daß die Longitudinalprojektion des betreffenden Terms verschwindet.

Um nun eine Beziehung zum Pion herzustellen, fügen wir in die Korrelationsfunktion (1.90) den Einheitsoperator ausgedrückt durch eine Basis hadronischer Zwischenzustände ein :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = \sum_X \int d^4x \, e^{iqx} \Big\{ & \langle \Omega | A_\mu(x) | X \rangle \langle X | A_\nu^\dagger(0) | \Omega \rangle \theta(t) + \\ & \langle \Omega | A_\nu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | A_\mu(x) | \Omega \rangle \theta(-t) \Big\} , \end{aligned} \quad (1.93)$$

und nehmen gemäß der PCAC-Hypothese [43] an, daß der longitudinale Anteil allein vom Pion-Zwischenzustand getragen wird :

$$\begin{aligned}
l_{\mu\nu}(q) \Pi^{\mu\nu}(q) &= -l_{\mu\nu}(q) \int d^4x \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E(\mathbf{k})} e^{iqx} \cdot \\
&\left\{ \theta(t) \langle \Omega | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(x) | \pi^+(\mathbf{k}) \rangle \langle \pi^+(\mathbf{k}) | \bar{d}(0) \gamma_\nu \gamma_5 u(0) | \Omega \rangle - \right. \\
&\left. \theta(-t) \langle \Omega | \bar{d}(0) \gamma_\nu \gamma_5 u(0) | \pi^-(\mathbf{k}) \rangle \langle \pi^-(\mathbf{k}) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(x) | \Omega \rangle \right\} ,
\end{aligned} \tag{1.94}$$

wobei $E(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_\pi^2}$. Verwendet man die Definition der Pion-Zerfallskonstanten :

$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \pi^\pm(\mathbf{k}) \rangle = i f_\pi k_\mu e^{ikx} , \tag{1.95}$$

sowie die Identität

$$e^{-iEt} \theta(t) = - \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 - E^2 + i\epsilon} ,$$

so folgt :

$$l_{\mu\nu}(q) \Pi^{\mu\nu}(q) = i \frac{q^2 f_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} = i f_\pi^2 + i \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^4}\right) . \tag{1.96}$$

Durch einen Vergleich mit (1.92) finden wir für den Zusammenhang zwischen Pion-Masse und Quark-Kondensat :

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -(m_u + m_d) \left(\langle \bar{u} u \rangle + \langle \bar{d} d \rangle \right) . \tag{1.97}$$

Diese Beziehung wurde erstmals von R. Dasher unter Verwendung der Stromalgebra hergeleitet [44]. Experimentell ergibt sich aus $\pi^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ die Pion-Zerfallskonstante zu $f_\pi \approx 93 \text{ MeV}$.

Elektron-Positron-Vernichtung in Hadronen

Experimentell wird die Produktionsrate für Hadronen relativ zur Produktion von $\mu^+ \mu^-$ -Paaren gemessen :

$$R := \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-)} . \tag{1.98}$$

Wir betrachten die Zweipunkt-Spektralfunktion des elektromagnetischen Stromoperators und berücksichtigen dabei seine Erhaltung :

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}(q) &:= i \int d^4x \, e^{iqx} \langle \Omega | T J_\mu(x) J_\nu(0) | \Omega \rangle \\
&= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) M(q^2) .
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Für den absorptiven Beitrag der Korrelationsfunktion (1.99) gilt :

$$\tilde{M}_{\mu\nu}(q) := \frac{1}{2\pi} \Im \{ M_{\mu\nu}(q) \} , \tag{1.100}$$

und damit folgt für den R -Faktor [45] :

$$R(q^2) = 12\pi \cdot \Im \{ M(q^2) \} . \tag{1.101}$$

Aus den Analytizitätseigenschaften von $M(q^2)$ sowie der Kausalitätsforderung kann man folgende verallgemeinerte Kramers-Kronig-Relation herleiten ($Q^2 := -q^2$) :

$$-\frac{d M(Q^2)}{d Q^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \{ M(s) \}}{(s + Q^2)^2} . \tag{1.102}$$

Wir wollen uns im Folgenden auf den Kanal mit Isospin $T = 1$ beschränken und erhalten dafür unter Verwendung von (1.101) :

$$-\frac{d M_{(\rho)}(Q^2)}{d Q^2} = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{R^{(T=1)}(s)}{(s + Q^2)^2} . \tag{1.103}$$

Da wir uns also nur für den Beitrag des ρ -Mesons zu $M(q^2)$ interessieren, benötigen wir den Isektor-Anteil des elektromagnetischen Stromes gemäß :

$$J_{(\rho)}^\mu(x) = \frac{1}{2} \{ : \bar{u}(x) \gamma^\mu u(x) : - : \bar{d}(x) \gamma^\mu d(x) : \} . \tag{1.104}$$

Für die OPE der Spektralfunktion ergibt sich somit [45] :

$$\begin{aligned}
M_{(\rho)}(Q^2) &= -\frac{1}{8\pi^2} \left(1 + \frac{g^2}{4\pi^2} \right) \ln Q^2 + \frac{1}{2} \left\{ m_u \langle \bar{u} u \rangle + m_d \langle \bar{d} d \rangle \right\} \frac{1}{Q^4} + \frac{1}{24} C_{4V} \frac{1}{Q^4} - \\
&\quad \frac{28}{81} g^2 \langle \bar{u} u \rangle^2 \frac{1}{Q^6} + \dots .
\end{aligned} \tag{1.105}$$

Hierbei wurden höhere Beiträge in der OPE, Strahlungskorrekturen zu den Kondensaten, sowie Terme der Ordnung m^2/Q^2 vernachlässigt.

Nach Einsetzen dieser OPE in die Dispersionsrelation (1.103) erhalten wir die Summenregel :

$$\int_0^\infty ds \frac{R^{(T=1)}(s)}{(s+Q^2)^2} = \frac{3}{2Q^2} \left\{ 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} + 8\pi^2 \left[m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle \right] \frac{1}{Q^4} + \frac{2\pi^2}{3} C_{4V} \frac{1}{Q^4} - \frac{224\pi^2}{27} g^2 \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{Q^6} + \dots \right\}. \quad (1.106)$$

Man kann mittels der RG eine Verbesserung erzielen, indem man die laufende Kopplung $\bar{g}$ einführt. Weiter ist zu beachten, daß in der linken Seite von (1.106) die Annahme der ρ -Meson-Dominanz steckt, die nur dann gut erfüllt ist, falls die Impulsüberträge im Bereich der ρ -Masse liegen. Die rechte Seite ist dagegen nur brauchbar für sehr großen Impulsübertrag Q^2 . Eine mögliche Problemlösung besteht in der Anwendung des Operators der Borel-Transformation :

$$B = \lim_{Q^2 \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N-1)!} (-Q^2)^N \left(\frac{d}{dQ^2} \right)^N, \quad \text{mit } \frac{Q^2}{N} =: M^2 = \text{const},$$

auf beiden Seiten der Summenregel. Wir erhalten so :

$$\int_0^\infty ds R^{(T=1)}(s) e^{-s/M^2} = \frac{3}{2} M^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}^2}{4\pi^2} + 4\pi^2 \left[m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle \right] \frac{1}{M^4} + \frac{\pi^2}{3} C_{4V} \frac{1}{M^4} - \frac{112\pi^2}{81} \bar{g}^2 \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{M^6} + \dots \right\}. \quad (1.107)$$

Die laufende Kopplung muß hierbei an der Stelle M^2 ausgewertet werden. In der “narrow width“-Approximation setzen wir für die Resonanz eine Delta-Distribution an :

$$R^{(T=1)}(s) = \frac{12\pi^2 m_\rho^2}{f_\rho^2} \delta(s - m_\rho^2). \quad (1.108)$$

Damit ergibt sich aus (1.107) für den Zusammenhang zwischen der Masse des ρ -Mesons und eichinvarianten Vakuumkondensaten der QCD :

$$\frac{12\pi^2 m_\rho^2}{f_\rho^2} e^{-m_\rho^2/M^2} = \frac{3}{2} M^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}^2}{4\pi^2} + 4\pi^2 \left[m_u \langle \bar{u}u \rangle + m_d \langle \bar{d}d \rangle \right] \frac{1}{M^4} + \frac{\pi^2}{3} C_{4V} \frac{1}{M^4} - \frac{112\pi^2}{81} \bar{g}^2 \langle \bar{u}u \rangle^2 \frac{1}{M^6} + \dots \right\}. \quad (1.109)$$

Eine Fülle weiterer Beispiele für QCD-Summenregeln und deren Anwendung in der Hadronphysik findet man in dem Übersichtsartikel von Reinders, Rubinstein und Yazaki [46].

Selbstkonsistente Berechnung von Vakuumkondensaten

Wir haben zuletzt gesehen, welche tragende Rolle die Vakuumkondensate im Rahmen der Wilsonschen Operator-Produkt-Entwicklung spielen, wenn es darum geht, die nicht-perturbativen Eigenschaften des physikalischen Grundzustands der Theorie zu parametrisieren. Dabei machten wir bis dato noch keine konkreten Aussagen darüber, woher wir die notwendigen Informationen über diese Parameter beziehen können. Tatsächlich kann uns die OPE für sich genommen hierbei nicht weiterhelfen, denn sie verwendet die Kondensate lediglich als externen Input; oder um es plakativ auszudrücken: Die Wilson-Entwicklung setzt das Confinement einfach voraus, ohne es erklären zu wollen.

Normalerweise stammen die numerischen Werte für die in der OPE auftretenden (eichinvarianten) Kondensate entweder aus Gitterrechnungen oder sie ergeben sich indirekt aus experimentellen Daten. Will man jedoch auf diese beiden Möglichkeiten nicht zurückgreifen, so müssen zusätzlich zur OPE noch die dynamischen Eigenschaften der Theorie – etwa in Form der DS-Gleichungen – berücksichtigt werden.

In der reinen Yang-Mills-Theorie¹⁸ betrachtet man dazu die RG-verbesserte OPE für die oberflächlich divergenten Vertizes in der Gestalt [40]:

$$\Gamma_{n_V, n_G}(\{p\}; g, \Lambda) = g^{\frac{n_V \gamma_V^{(0)} + n_G \gamma_G^{(0)}}{\beta_0}} \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda^s C_{n_V, n_G}^{(n, s)}(\{p\}; \Lambda). \quad (1.110)$$

Die Koeffizientenfunktionen enthalten dabei auch die charakteristischen RG-Logarithmen über die Impulsskalen (siehe (1.81)). Weiter ist zu beachten, daß die OPE der Basisvertizes – im Gegensatz zum Fall eichinvarianter Korrelationsfunktionen – eichabhängig ist und im Prinzip alle Kondensate zu berücksichtigen sind, die den Forderungen nach Lorentz-Kovarianz und *globaler* Eichinvarianz genügen [47]. Geht man jedoch wiederum von der Annahme aus, daß die QCD-Kopplung über alle Skalenbereiche klein bleibt, so kann man sich im Ansatz (1.110) in führender Ordnung bezüglich g^2 auf die Kondensate mit kanonischer Massendimension $s \leq 4$ beschränken, während alle höherdimensionalen Kondensate in Koeffizienten $C^{(n, s)}$ mit $n \geq 1$ auftauchen. Der Grund hierfür ist im $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus (1.21) zu sehen: Da der oberflächliche UV-Divergenzgrad in der QCD maximal zwei betragen kann, sind die Koeffizientenfunktionen mit $s > 4$ stets mit oberflächlich konvergenten Schleifenintegralen des (entkoppelten) DS-Systems verknüpft und ergeben somit Beiträge, die mindestens um eine Potenz der quadratischen Kopplung gegenüber den führenden unterdrückt sind. Man kann zeigen [63], daß sich das QCD-Selbstkonsistenzproblem auf die Berechnung von 13 apriori unbekannten Dimension-4-Kondensaten begrenzen läßt, von denen wiederum nach Anwendung der STI und Bewegungsgleichungen ganze acht übrig bleiben.

Es ergibt sich nun beispielsweise für den nicht-perturbativen Beitrag zur Gluon-Polarisation in beliebiger kovarianter Eichung gemäß (1.110), jedoch noch ohne RG-Verbesserung [49]:

¹⁸Der fermionische Sektor der QCD wird in entsprechender Weise in [48] behandelt.

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{b^4(\xi)}{p^4} (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \frac{N_C g^2}{4(N_C^2 - 1)p^4} \left[(p^2 g_{\mu\nu} + 3 p_\mu p_\nu) \langle EMGhost \rangle + ((2 - \xi) p^2 g_{\mu\nu} + \xi p_\mu p_\nu) \langle EMGluon \rangle \right]. \quad (1.111)$$

Auf Grund des Verschwindens der Bewegungsgleichungskondensate $\langle EM \rangle$ ist der Polarisationsbeitrag (1.111) rein transversal und genügt folglich der STI. Der Transversalanteil ist durch eine Linearkombination $b^4(\xi)$ von Vakuumkondensaten der kanonischen Massendimension vier gegeben, die *nicht* dem eichinvarianten Gluon-Kondensat C_{4V} entspricht, sondern explizit von der Wahl des Eichparameters abhängt. Entsprechend erhält man auch die Wilson-Entwicklung für die restlichen Basisvertizes.

Beginnt man nun die Formulierung des Selbstkonsistenzproblems der oberflächlich divergenten Vertexfunktionen mit der strukturell einfachsten DS-Gleichung, nämlich jener für den inversen Geist-Propagator, so kommt man zu dem interessanten Resultat [50] [40], daß sich selbstkonsistente Reproduktion genau dann erzielen läßt, wenn – wie im Ansatz (1.110) geschehen – die RG-theoretischen Modifikationen berücksichtigt werden.

Wir werden jetzt jedoch einen anderen Weg einschlagen, wenn es in den folgenden Kapiteln darum geht, die führenden Beiträge zu QCD-Vakuumkondensaten der Massendimensionen zwei bzw. vier zu bestimmen. Als Grundlage wird uns dabei die nicht-perturbativ erweiterte Störungsreihe (1.12) dienen, wobei wir uns im Sinne der niedrigsten Ordnung einer Entwicklung nach der quadratischen Kopplung auf die modifizierten Feynman-Regeln $\Gamma^{(r,0)}$ zurückziehen können. Gemäß der Momentendefinition lassen sich – wie wir sehen werden – Vakuumkondensate als Impulsraummomente über die mit unseren Ansätzen für die Basisvertizes gebildeten Greens-Funktionen der Euklidischen Theorie identifizieren. Durch eine Analyse der Divergenzstruktur der so entstandenen Schleifenintegrale wird es vermöge des $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus dann möglich sein, die bezüglich des Kopplungsparameters führenden Beiträge der Vakuum Erwartungswerte zu extrahieren. Unser Hauptziel ist es, die eichinvarianten Kondensate mit Massendimension vier, d.h. das Gluon-Kondensat gemäß (1.40) sowie das Quark-Kondensat zu bestimmen. Wir werden im Verlaufe der Rechnungen das in seinen Grundsätzen bereits bekannte Renormierungsprogramm kurz erläutern und verzichten in diesem Zusammenhang weitgehend auf rechnerische Details. Insbesondere hinsichtlich der expliziten Ausführung der COR für die niedrig dimensionalen, eichabhängigen Vakuumkondensate der reinen Yang-Mills-Theorie sei auf [51] verwiesen. Weiter wollen wir an dieser Stelle betonen, daß wir nach dem derzeitigen Stand unserer Möglichkeiten lediglich in der Lage sind, die Kondensate in den bis dato noch unbekannten Parametern aus den Ansätzen für die modifizierten Feynman-Regeln auszudrücken. Numerische Ergebnisse können daher heute von uns noch nicht vorgestellt werden. Wir warten in diesem Zusammenhang gespannt auf die Lösung des bereits erwähnten DS-Selbstkonsistenzproblems für die sieben Basisvertizes der Theorie.

Kapitel 2

Die Zweipunkt kondensate des Gluonsektors

2.1 Der Gluon-Propagator

Wir beginnen mit der kovarianten Zerlegung des Gluon-Propagators nach Farbtensoren und seiner Aufteilung nach transversalen bzw. longitudinalen Beiträgen :

$$D_{ab}^{\mu\nu}(k) = \delta_{ab} \{ t^{\mu\nu}(k) D_T(k^2) + l^{\mu\nu}(k) D_L(k^2) \} , \quad (2.1)$$

wobei $t^{\mu\nu}(k) = \delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} = \delta^{\mu\nu} - l^{\mu\nu}(k)$ den Transversalprojektor bezeichnet.

Als Konsequenz aus der BRS-Invarianz der effektiven Theorie fordert die Slavnov-Taylor-Identität (STI) für den Gluon-Propagator :

$$D_L(k^2) = \frac{\xi}{k^2} ,$$

d.h. sein Longitudinalanteil ist bereits durch die führende störungstheoretische Ordnung [4] bestimmt und erfährt also insbesondere auch keine nicht-perturbative Modifikation.

Gemäß der Lehmann-Källen-Spektraldarstellung ist die Existenz asymptotisch detektierbarer Teilchen direkt mit der Polstruktur des entsprechenden Propagators gekoppelt [5]. Ein auf der reellen Achse analytischer Propagator erlaubt für die elementaren Felder keine stabilen teilchenartigen Zustände. Als Ansatz für den Transversalanteil unseres Gluon-Propagators in nullter störungstheoretischer Ordnung ist deshalb im Sinne der Quasiteilchensequenz die rationale Approximante mit $r + 1$ Polstellen zu wählen, wobei r ungerade sein soll. Die Polpositionen des Propagators treten dabei jeweils paarweise konjugiert komplex auf; weiter ist zumindest eine der Nullstellen des Euklidischen Propagators reell :

$$D_T^{(r,0)}(k^2) = \frac{(k^2 + u_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + u_{r,2r}\Lambda^2)}{(k^2 + \sigma_{r,1}\Lambda^2)(k^2 + \sigma_{r,3}\Lambda^2) \dots (k^2 + \sigma_{r,2r+1}\Lambda^2)} . \quad (2.2)$$

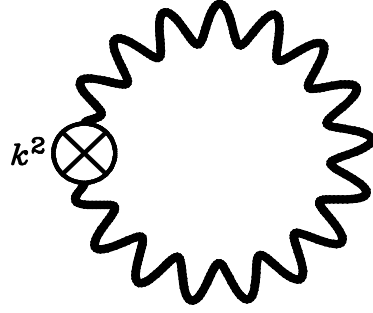
Da wir uns im folgenden stets in führender Ordnung hinsichtlich der perturbativen Entwicklung bewegen werden, kann ab sofort die entsprechende Kennzeichnung für nicht-perturbative Größen wieder weggelassen werden.

Die Approximantenfolge (2.2) berücksichtigt bereits explizit die Forderungen nach perturbativer Renormierbarkeit und dem korrekten störungstheoretischen Limes bei formalem Abschalten der spontanen Massenskala Λ . Letzterer ist uns dabei durch die Euklidische Feynman-Regel [4]

$$D_T^{(0)pert}(k^2) = \frac{1}{k^2} \quad (2.3)$$

gegeben.

2.2 Definition des Abelschen Gluon-Kondensats



Mit der Schwinger-Funktion :

$$\langle A_a^\mu(x) A_b^\nu(y) \rangle = \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} D_{ab}^{\mu\nu}(k) \Big|_{\epsilon \rightarrow 0}, \quad (2.4)$$

als nicht-lokalem Erwartungswert zweier Eichbosonfelder bezüglich des wahren, physikalischen Vakuumzustandes der QCD, folgt durch Differentiation für das lokale 2-Gluon-Kondensat der Massendimension vier :¹

$$\langle (\partial^\sigma A_a^\mu) (\partial^\omega A_b^\nu) \rangle = \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^\sigma k^\omega D_{ab}^{\mu\nu}(k). \quad (2.5)$$

Eine kovariante Zerlegung dieses Kondensats nach Farb- und Lorentz-Tensoren ergibt :

$$\langle (\partial^\sigma A_a^\mu) (\partial^\omega A_b^\nu) \rangle = \delta_{ab} \{ c_1 \delta^{\mu\nu} \delta^{\sigma\omega} + c_2 \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\omega} + c_3 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\sigma} \}. \quad (2.6)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten c_i berücksichtigen wir zunächst Bose-Symmetrie gemäß $D_{ab}^{\mu\nu} = D_{ba}^{\nu\mu}$ und folgern direkt $c_2 = c_3$.

Aufgrund der rein perturbativen Form des Longitudinalteils des Gluon-Propagators als Konsequenz der oben erwähnten STI, ergibt das hiermit verbundene skalenfreie Integral im Sinne dimensioneller Regularisierung [12] keinen Beitrag zum Kondensat. Wir können daher formal fordern: $k_\sigma D_{ab}^{\sigma\nu} = 0$ und ersetzen dementsprechend in (2.5) :

¹Wir setzen hier und im folgenden bei der Schreibweise für Impulsraumintegrale in $D = 4 - \epsilon$ Dimensionen den anschließenden Grenzübergang zu verschwindendem UV-Regulator stillschweigend voraus.

$$D_{ab}^{\mu\nu}(k) \longrightarrow \delta_{ab} t^{\mu\nu}(k) D_T(k^2) .$$

Bereits an dieser Stelle kann deshalb gefolgert werden, daß das auf (2.5) basierende, an sich eichvariante Abelsche Gluon-Kondensat eine eichfixierungsunabhängige nullte Ordnung besitzt. Die Abhängigkeit von der Wahl des Eichparameters tritt erst mit den perturbativen Korrekturen in höheren Schleifenordnungen auf.

Damit erhalten wir für die Zerlegung (2.6) :

$$\langle (\partial^\sigma A_a^\mu) (\partial^\omega A_b^\nu) \rangle = c \delta_{ab} \left\{ (D+1) \delta^{\mu\nu} \delta^{\sigma\omega} - \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\sigma} \right\} , \quad (2.7)$$

wobei

$$c = \frac{\langle (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)^2 \rangle}{2(N_C^2 - 1)D(D+2)(D-1)} = \frac{\langle \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \rangle}{(N_C^2 - 1)D(D+2)(D-1)} . \quad (2.8)$$

Im letzten Schritt haben wir Gebrauch von den Eigenschaften der $SU(N_C)$ -Farb-algebra aus A.3 gemacht.

Wir definieren nun das skalare Abelsche Gluon-Kondensat der kanonischen Massendimension vier wie folgt :

$$V2 := \langle \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \rangle . \quad (2.9)$$

Es erlangt Bedeutung insbesondere aus der Tatsache, daß seine nullte Ordnung gerade den Einschleifen-Bestandteil des allgemein schlechthin als Gluon-Kondensat bezeichneten Vakuum Erwartungswertes (1.37) bildet.

An Hand der oben angestellten Betrachtungen folgt sofort die Darstellung des Abelschen Gluon-Kondensats als zweites Moment der Transversalprojektion des Gluon-Propagators im Impulsraum :

$$V2 = (N_C^2 - 1)(D-1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 D_T(k^2) . \quad (2.10)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß oben auf der linken Seite gemäß unserer in (1.36) eingeführten Bezeichnungsweise für Vakuumkondensate eigentlich eine renormierte Größe steht, während die rechte Seite von Gleichung (2.10) durchaus noch UV-Divergenzen ausbildet. Wir wollen deshalb vereinbaren, daß hier und in allen weiteren vergleichbaren Situationen, die Anwendung geeigneter Renormierungsmaßnahmen (wie etwa COR) implizit unterstellt wird.

2.3 Berechnung des Abelschen Gluon-Kondensats zum Nennergrad r

In diesem Abschnitt soll jetzt der Einschleifen-Beitrag zum Abelschen Gluon-Kondensat (2.10) in der r -ten Stufe der rationalen Approximation berechnet werden. Wir betrachten also :

$$V 2^{(r)} := (N_C^2 - 1)(D - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 D_T^{(r)}(k^2) \quad (2.11a)$$

$$= (N_C^2 - 1)(D - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 \frac{(k^2 + u_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + u_{r,2r}\Lambda^2)}{(k^2 + \sigma_{r,1}\Lambda^2)(k^2 + \sigma_{r,3}\Lambda^2) \dots (k^2 + \sigma_{r,2r+1}\Lambda^2)} . \quad (2.11b)$$

Nach Einführung von Feynman-Parametern gemäß (A.2) ergibt sich dann :

$$V 2^{(r)} = (N_C^2 - 1)(D - 1) \mu_0^\epsilon r! \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 (k^2 + u_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + u_{r,2r}\Lambda^2)}{\{k^2 + \tilde{w}_r(\mathbf{z}) \Lambda^2\}^{r+1}} ,$$

mit folgender Linearkombination aus Polkoeffizienten des Gluon-Propagators :

$$\tilde{w}_r(\mathbf{z}) := z_1 \sigma_{r,1} + z_2 \sigma_{r,3} + \dots + z_{r+1} \sigma_{r,2r+1} .$$

Überdies haben wir oben die im folgenden immer wieder verwendete abkürzende symbolische Schreibweise :

$$\int \mathcal{D}^n \mathbf{z} \equiv \int_0^1 dz_1 \dots \int_0^1 dz_n \delta(1 - z_1 - \dots - z_n) ,$$

für das Maß des n -dimensionalen Parameterintegrals eingeführt.

Durch Power-Counting finden wir für den oberflächlichen UV-Divergenzgrad unseres Einschleifenintegrals $\delta_k = D$. Demzufolge sind maximal quartisch divergente Beiträge aus (2.11) zu erwarten.

Wir schreiben daher den Zähler unseres Impulsraumintegranden wie folgt :

$$k^2 (k^2 + u_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + u_{r,2r}\Lambda^2) =: (k^2)^{r+1} + \alpha_r^{(r)} \Lambda^2 (k^2)^r + \alpha_{r-1}^{(r)} \Lambda^4 (k^2)^{r-1} + \sum_{j=1}^{r-2} \alpha_j^{(r)} (\Lambda^2)^{r+1-j} (k^2)^j , \quad (2.12)$$

wobei speziell für die führenden Koeffizienten explizit gilt :

$$\alpha_r^{(r)} = \sum_{t=1}^r u_{r,2t} \quad \alpha_{r-1}^{(r)} = \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r,2t} u_{r,2t'} . \quad (2.13)$$

Unter Verwendung der Standardintegralformel dimensioneller Regularisierung (A.11) ergibt sich für die mit UV-Divergenzen verknüpften Beiträge :

$$\begin{aligned} V2^{(r)} = & \frac{(N_C^2 - 1)(D - 1) \Lambda^4}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r - 1 + D/2) \Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(D/2)} \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \\ & \left\{ -\frac{(r - 1 + D/2)(r + D/2)}{D/2(1 - D/2)} [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^2 + \alpha_r \frac{r - 1 + D/2}{1 - D/2} \tilde{w}_r(\mathbf{z}) + \alpha_{r-1} \right\} \left[\tilde{w}_r(\mathbf{z}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} \\ & + (konv) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Berücksichtigt man nun in (2.14) die Laurent-Entwicklung für $D = 4 - \epsilon$ gemäß

$$\Gamma(2 - D/2) \left[\tilde{w}_r(\mathbf{z}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} = \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0) , \quad (2.15)$$

so erhalten wir im Limes $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} V2^{(r)} = & \frac{3(N_C^2 - 1) \Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\} . \\ & r! \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \left\{ \frac{(r+1)(r+2)}{2} [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^2 - (r+1) \alpha_r \tilde{w}_r(\mathbf{z}) + \alpha_{r-1} \right\} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es bleibt jetzt noch die Ausführung der Integrationen über die Feynman-Parameter in (2.16). Hierzu setzen wir für $m \in \{0, 1, 2\}$:

$$Z_{m[r+1]}^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^m ,$$

und folgern mit den Resultaten aus (A.5) :

$$\begin{aligned} Z_0^{(r)} &= \frac{1}{r!} \\ Z_{1[r+1]}^{(r)} &= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \\ Z_{2[r+1]}^{(r)} &= \frac{2}{(r+2)!} \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r,2s+1} \sigma_{r,2s'+1} . \end{aligned}$$

Der divergente Beitrag zum Abelschen Gluon-Kondensat in niedrigster Schleifenordnung lautet schließlich :

$$V2^{(r)} = \frac{3(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\} \cdot \left\{ \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r,2s+1} \sigma_{r,2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r u_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) + \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r,2t} u_{r,2t'} \right\}. \quad (2.17)$$

Verbunden mit der UV-Divergenz in (2.17) ist wie erwartet das Auftreten eines nicht-perturbativen Logarithmus, welcher vermöge des $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus eine reziproke Potenz des Quadrates der renormierten Kopplung erzeugt. So gesehen enthält also (2.17) bereits alle führenden Beiträge einer Entwicklung nach dem Kopplungsparameter. Sie sind charakterisiert durch Summanden, die jeweils aus dem Produkt zweier Polkoeffizienten bzw. Nullstellenparameter sowie gemischten Termen bestehen. Weiter entnimmt man diesem Resultat die keineswegs überraschende Tatsache, daß der QCD-Skalenparameter Λ als einzige dimensionsbehaftete Größe des Gluonsektors gerade die Massenskala des Vakuumkondensats definiert.

Mit nur geringfügig höherem Rechenaufwand ist es im vorliegenden Einschleifen-Fall sogar möglich, die r -te Approximationsstufe mit allen endlichen Beiträgen zumindest formal darzustellen. Eine entsprechende Rechnung liefert dann für das gluonische Zweipunkt-kondensat der Massendimension vier :

$$\begin{aligned} V2^{(r)} = & \frac{3(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + \frac{1}{3} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \cdot \right. \\ & \left\{ \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r,2s+1} \sigma_{r,2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r u_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) + \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r,2t} u_{r,2t'} \right\} + \\ & [S_1(r+1) - 1] \left(\sum_{t=1}^r u_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) - \left[S_1(r+2) - \frac{3}{2} \right] \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r,2s+1} \sigma_{r,2s'+1} - \\ & S_1(r) \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r,2t} u_{r,2t'} + (r+1)! \left(\sum_{t=1}^r u_{r,2t} \right) J_1^{(r)} - \frac{(r+2)!}{2} J_2^{(r)} - \\ & \left. r! \left(\sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r,2t} u_{r,2t'} \right) J_0^{(r)} + \sum_{j=1}^{r-2} \alpha_j^{(r)} (j+1)! (r-j-2)! H_j^{(r)} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dazu haben wir für ganzzahliges, positives δ die Größe

$$S_1(\delta) := \sum_{i=1}^{\delta} \frac{1}{i} \quad (2.19)$$

eingeführt [15], wobei nach [60] der folgende Zusammenhang mit der logarithmischen Ableitung der Eulerschen Gamma-Funktion besteht :

$$S_1(\delta) = \psi(\delta + 1) + \gamma_E \quad \text{mit} \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) .$$

Desweiteren wurde für $m \in \{0, 1, 2\}$, $1 \leq j \leq r - 2$ definiert :

$$J_m^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \ln(\tilde{w}_r(\mathbf{z})) [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^m = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_r x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1} \ln(\hat{w}_r(\mathbf{x})) [\hat{w}_r(\mathbf{x})]^m$$

$$H_j^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^{j+1-r} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_r x_1^{r-1} x_2^{r-2} \dots x_{r-1} [\hat{w}_r(\mathbf{x})]^{j+1-r} ,$$

mit

$$\hat{w}_r(\mathbf{x}) := (1 - x_1) \sigma_{r,1} + x_1 (1 - x_2) \sigma_{r,3} + \dots + x_1 \dots x_{r-1} (1 - x_r) \sigma_{r,2r-1} + x_1 \dots x_r \sigma_{r,2r+1} .$$

Speziell im Fall $r = 1$ erhalten wir explizit für die Parameterintegrale ² :

$$\begin{aligned} J_0^{(1)} &= -1 + \frac{1}{2} \ln(\sigma_{1,1} \sigma_{1,3}) + \frac{\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}}{2(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1})} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} \\ J_1^{(1)} &= \frac{1}{4} \left\{ (\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) (-1 + \ln(\sigma_{1,1} \sigma_{1,3})) + \frac{\sigma_{1,3}^2 + \sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} \right\} \\ J_2^{(1)} &= \frac{\sigma_{1,3}^3 - \sigma_{1,1}^3}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{6} \ln(\sigma_{1,1} \sigma_{1,3}) \right) + \frac{\sigma_{1,3}^3 + \sigma_{1,1}^3}{6(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1})} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} ; \end{aligned}$$

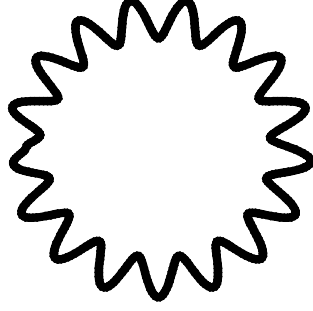
und so ergibt sich die erste Approximante des Abelschen Gluon-Kondensats mit allen endlichen Beiträgen gemäß

$$\begin{aligned} V_2^{(1)} &= \frac{3(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + \frac{1}{3} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \left(\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{1,1} \sigma_{1,3} - u_{1,2}(\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \right) - \right. \\ &\quad \frac{\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{1,1} \sigma_{1,3}}{3} + \frac{\sigma_{1,3}^3 - \sigma_{1,1}^3}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln(\sigma_{1,1} \sigma_{1,3}) \right) + \frac{\sigma_{1,1}^3 + \sigma_{1,3}^3}{2(\sigma_{1,1} - \sigma_{1,3})} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} + \\ &\quad \left. \frac{u_{1,2}}{2} \left((\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \ln(\sigma_{1,1} \sigma_{1,3}) + \frac{\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,3}^2}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} \right) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (2.20)$$

²Dann ist die letzte Summe in (2.18) leer.

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß die Terme der Ordnung $(g^2)^0$ dieses Ausdrucks nicht den g^0 -Beitrag des Kondensats schlechthin darstellen, sondern nur seinen Einschleifen-Anteil. Die Berücksichtigung höherer Schleifenkorrekturen würde u.a. zu Beiträgen vom Typ $(g^2)^0 \beta_0^{-L+1}$ führen.

2.4 Das Gluon-Kondensat der Massendimension 2



Völlig analoge Überlegungen wie in Abschnitt 2.2 führen uns zur Darstellung des Gluon-Kondensats der kanonischen Massendimension zwei als nulltes Moment des Transversalanteils des Gluon-Propagators :

$$\langle Tr A_\mu A^\mu \rangle = \frac{(N_C^2 - 1)(D - 1)}{2} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D_T(k^2) . \quad (2.21)$$

Dieser Integralausdruck ist übrigens bis auf einen Faktor identisch mit dem Tadpole-Beitrag zur Gluon-Selbstenergie.

Dementsprechend erhält man für das Dimension-2-Kondensat zum Nennergrad r unter Verwendung der rationalen Approximanten aus Gleichung (2.2) :

$$\langle Tr A_\mu A^\mu \rangle^{(r)} = \frac{(N_C^2 - 1)(D - 1)}{2} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 + u_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + u_{r,2r}\Lambda^2)}{(k^2 + \sigma_{r,1}\Lambda^2)(k^2 + \sigma_{r,3}\Lambda^2) \dots (k^2 + \sigma_{r,2r+1}\Lambda^2)} . \quad (2.22)$$

Eine formal identische Rechnung wie im letzten Abschnitt ergibt dann das Eichboson-Kondensat der naiven Massendimension zwei in niedrigster Schleifenordnung unter Berücksichtigung sämtlicher endlichen Beiträge :

$$\begin{aligned} \langle Tr A_\mu A^\mu \rangle^{(r)} = & \frac{3(N_C^2 - 1)\Lambda^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + \frac{1}{3} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \left\{ \sum_{t=1}^r u_{r,2t} - \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right\} + \right. \\ & \left[S_1(r+1) - 1 \right] \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} - S_1(r) \sum_{t=1}^r u_{r,2t} + \\ & \left. (r+1)! J_1^{(r)} - r! \left(\sum_{t=1}^r u_{r,2t} \right) J_0^{(r)} + \sum_{j=0}^{r-2} \alpha_{j+1}^{(r)} (j+1)! (r-j-2)! H_j^{(r)} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Der nicht-perturbative Logarithmus erscheint hier in Verbindung mit der Differenz der Summen über alle Nullstellenkoeffizienten bzw. sämtliche Polparameter der Padé-Approximanten (2.2).

Insbesondere für die erste Approximationstufe $r = 1$ folgt aus (2.23) :

$$\begin{aligned} \langle Tr A_\mu A^\mu \rangle^{(1)} &= \frac{3(N_C^2 - 1)\Lambda^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + \frac{1}{3} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \left(u_{1,2} - (\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \right) - \right. \\ &\quad \frac{u_{1,2}}{2} \left(\ln(\sigma_{1,1}\sigma_{1,3}) + \frac{\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} \right) + \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left((\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \ln(\sigma_{1,1}\sigma_{1,3}) + \frac{\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,3}^2}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \ln \frac{\sigma_{1,3}}{\sigma_{1,1}} \right) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Eine interessante Anwendung des Vakuum Erwartungswertes (2.21) besteht in der Möglichkeit, Faktorisierungsnäherungen zu formulieren für die eichvarianten Viererkondensate der Theorie, welche wir in Abschnitt 4.5 noch vorstellen werden.

2.5 Der Geist-Propagator

Ausgehend von der kovarianten Darstellung des Geist-Propagators :

$$\tilde{D}_{ab}(k) = \delta_{ab} \tilde{D}(k^2) , \quad (2.25)$$

ist als Ansatz für die invariante Funktion in führender perturbativer Ordnung die Approximantenfolge zu ungeradem Nennergrad r zu wählen :

$$\tilde{D}^{(r,0)}(k^2) = \frac{(k^2 + v_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r}\Lambda^2)}{k^2(k^2 + v_{r,1}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,3}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r-1}\Lambda^2)} . \quad (2.26)$$

Diese besitzt einen Pol bei Null [3] sowie eine weitere reelle Polstelle. Alle übrigen Pole erscheinen als konjugiert komplexe Paare. Wiederum sind perturbative Renormierbarkeit und der störungstheoretische Grenzfall in Form der Euklidischen Feynman-Regel [4]

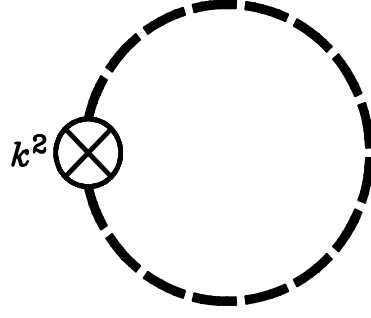
$$\tilde{D}^{0(per)}(k^2) = \frac{1}{k^2} \quad (2.27)$$

bereits berücksichtigt worden.

2.6 Definition des Dimension-4-Geisterkondensats

Aus dem nicht-lokalen Kondensat (Schwinger-Funktion) eines Geist-Antigeist-Paares :

$$\langle \eta_b(y) \bar{\eta}_a(x) \rangle = \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik(x-y)} \tilde{D}(k^2) , \quad (2.28)$$



erhalten wir direkt das lokale (tensorielle) Geistkondensat der Massendimension vier :

$$\langle \bar{\eta}_a \partial_\mu \partial_\nu \eta_b \rangle = \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\nu \tilde{D}(k^2) . \quad (2.29)$$

Wir bilden hierzu die kovariante Zerlegung nach Farb- und Lorentz-Tensoren gemäß

$$\langle \bar{\eta}_a \partial_\mu \partial_\nu \eta_b \rangle = c \delta_{ab} \delta_{\mu\nu} , \quad (2.30)$$

wobei für den Skalar gilt :

$$c = \frac{\langle \bar{\eta}_a \square \eta_a \rangle}{(N_C^2 - 1) D} . \quad (2.31)$$

Dies führt uns schließlich zur Definition des skalaren Geistkondensats :

$$\bar{G}G := \langle \bar{\eta}_a \square \eta_a \rangle . \quad (2.32)$$

Insgesamt erhalten wir – analog zum gluonischen Fall – das Geistkondensat der kanonischen Massendimension vier als zweites Moment des Geist-Propagators im Impulsraum :

$$\bar{G}G = (N_C^2 - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 \tilde{D}(k^2) . \quad (2.33)$$

Dieser Vakuumerwartungswert der unphysikalischen Fadeyev-Popov-Geister tritt beispielsweise in der OPE des inversen Gluon-Propagators (1.111) auf und spielt dort eine wichtige Rolle, wenn es darum geht, das für die Gültigkeit der STI erforderliche Verschwinden des longitudinalen Beitrags sicherzustellen.

2.7 Berechnung des Dimension-4-Geistkondensats zum Nennergrad r

Es soll nun das Kondensat (2.33) unter Verwendung des Ansatzes für die nicht-perturbative Feynman-Regel (2.26) in Stufe r der rationalen Approximantenfolge berechnet werden :

$$\bar{G}G^{(r)} := (N_C^2 - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 \tilde{D}^{(r)}(k^2) \quad (2.34)$$

$$= (N_C^2 - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 + v_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r}\Lambda^2)}{(k^2 + v_{r,1}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,3}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r-1}\Lambda^2)} . \quad (2.35)$$

Mit einer Feynman-Parametrisierung folgt dann :

$$\bar{G}G^{(r)} = (N_C^2 - 1) \mu_0^\epsilon (r-1)! \int \mathcal{D}^r \mathbf{z} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 + v_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r}\Lambda^2)}{\{k^2 + \tilde{w}_r(\mathbf{z})\Lambda^2\}^r} , \quad (2.36)$$

wobei $\tilde{w}_r(\mathbf{z}) := z_1 v_{r,1} + z_2 v_{r,3} + \dots + z_r v_{r,2r-1}$ gesetzt wurde.

Power-Counting ergibt hier für den oberflächlichen UV-Divergenzgrad $\delta_k = D$, sodaß wir eine maximal quartische Divergenz bei Ausführung der Impulsintegration erwarten können. Dementsprechend schreiben wir für den Zähler des Integranden in (2.36) :

$$(k^2 + v_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r}\Lambda^2) =: (k^2)^r + \beta_{r-1}^{(r)} \Lambda^2 (k^2)^{r-1} + \beta_{r-2}^{(r)} \Lambda^4 (k^2)^{r-2} + \sum_{j=1}^{r-3} \beta_j^{(r)} (\Lambda^2)^{r-j} (k^2)^j , \quad (2.37)$$

mit

$$\beta_{r-1}^{(r)} = \sum_{s=1}^r v_{r,2s} \quad \beta_{r-2}^{(r)} = \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r v_{r,2t} v_{r,2t'} . \quad (2.38)$$

Eine im weiteren völlig analog zum Fall des Abelschen Gluon-Kondensats verlaufende Rechnung ergibt als divergenten Beitrag :

$$\bar{G}G^{(r)} = \frac{(N_C^2 - 1) \Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\} \cdot \left\{ \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^{r-1} v_{r,2s+1} v_{r,2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r v_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) + \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r v_{r,2t} v_{r,2t'} \right\} . \quad (2.39)$$

Dieses Resultat ist bis auf einen durch die unterschiedliche Lorentz-Struktur der Propagatoren bedingten Faktor 3 formal identisch mit (2.17). Es sind lediglich die nicht-perturbativen Parameter aus dem rationalen Ansatz des Gluon-Propagators durch die entsprechenden Größen der Geist-Antigeist-Korrelationsfunktion zu ersetzen.

Das Geist-Kondensat der Massendimension vier unter Berücksichtigung aller endlichen Beiträge auf Einschleifen-Niveau lautet dann schließlich :

$$\begin{aligned}
\bar{G}G^{(r)} = & \frac{(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \cdot \right. \\
& \left\{ \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^{r-1} v_{r,2s+1} v_{r,2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r v_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) + \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r v_{r,2t} v_{r,2t'} \right\} + \\
& \left[S_1(r) - 1 \right] \left(\sum_{t=1}^r v_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) - \left[S_1(r+1) - \frac{3}{2} \right] \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^{r-1} v_{r,2s+1} v_{r,2s'+1} - \\
& S_1(r-1) \left(\sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r v_{r,2t} v_{r,2t'} \right) + r! \left(\sum_{t=1}^r v_{r,2t} \right) K_1^{(r)} - \frac{(r+1)!}{2} K_2^{(r)} - \\
& (r-1)! \left(\sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r v_{r,2t} v_{r,2t'} \right) K_0^{(r)} + \sum_{j=0}^{r-3} \beta_j^{(r)} (j+1)! (r-j-3)! I_j^{(r)} \left. \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) ,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

wobei wir für $m \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq j \leq r-3$ definiert haben :

$$\begin{aligned}
K_m^{(r)} &:= \int \mathcal{D}^r \mathbf{z} \ln(\tilde{w}_r(\mathbf{z})) [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^m = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{r-1} x_1^{r-2} x_2^{r-3} \dots x_{r-2} \ln(\hat{w}_r(\mathbf{x})) [\hat{w}_r(\mathbf{x})]^m \\
I_j^{(r)} &:= \int \mathcal{D}^r \mathbf{z} [\tilde{w}_r(\mathbf{z})]^{j+2-r} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{r-1} x_1^{r-2} x_2^{r-3} \dots x_{r-2} [\hat{w}_r(\mathbf{x})]^{j+2-r} ,
\end{aligned}$$

mit

$$\hat{w}_r(\mathbf{x}) := (1 - x_1) v_{r,1} + x_1 (1 - x_2) v_{r,3} + \dots + x_1 \dots x_{r-2} (1 - x_{r-1}) v_{r,2r-3} + x_1 \dots x_{r-1} x_{r,2r-1} .$$

Speziell für $r = 1$ gilt :

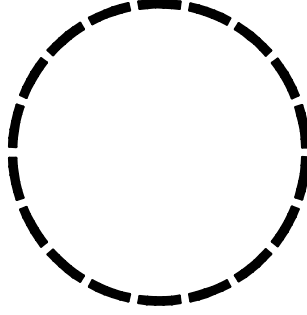
$$K_m^{(1)} = \int_0^1 dz_1 \delta(1 - z_1) \ln(z_1 v_{1,1}) (z_1 v_{1,1})^m = v_{1,1}^m \ln v_{1,1} ,$$

und damit ergibt sich explizit für die niedrigste Approximation des Euklidischen Geist-Kondensats :

$$\bar{G}G^{(1)} = \frac{(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^2} v_{1,1} (v_{1,1} - v_{1,2}) \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} - \ln(v_{1,1}) + \mathcal{O}(\epsilon) \right\} . \tag{2.41}$$

Beim gegenwärtigen Stand der Selbstkonsistenzrechnungen für den Geistsektor [52] scheint sich anzudeuten, daß die nicht-perturbativen Parameter v des Geistpropagators nur für Eichfixierungen $\xi \neq 0$, d.h. außerhalb der Landau-Eichung, von Null verschieden sind. Dann wäre $\bar{G}G$ bereits in nullter perturbativer Ordnung abhängig von der Wahl des Eichparameters, was für ein unphysikalisches Feld ein durchaus plausibles Resultat darstellen würde.

2.8 Das Geist-Kondensat der Massendimension 2



Mit den entsprechenden Überlegungen aus Abschnitt 2.6 ergibt sich das Geisterkondensat der Massendimension zwei als nulltes Moment des Geist-Propagators im Impulsraum :

$$\langle \eta_a \bar{\eta}_a \rangle = (N_C^2 - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{D}(k^2). \quad (2.42)$$

Für dessen r -te Approximation gilt :

$$\langle \eta_a \bar{\eta}_a \rangle^{(r)} = (N_C^2 - 1) \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 + v_{r,2}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,4}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r}\Lambda^2)}{k^2 (k^2 + v_{r,1}\Lambda^2)(k^2 + v_{r,3}\Lambda^2) \dots (k^2 + v_{r,2r-1}\Lambda^2)}, \quad (2.43)$$

und führt schließlich unter Berücksichtigung aller endlichen Beiträge in Einschleifen-Ordnung analog wie in 2.7 zu folgendem Endresultat :

$$\begin{aligned} \langle \eta_a \bar{\eta}_a \rangle^{(r)} = & \frac{(N_C^2 - 1)\Lambda^2}{(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \left\{ \sum_{t=1}^r v_{r,2t} - \sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right\} + \right. \\ & \left[S_1(r+1) - 1 \right] \sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} - S_1(r) \sum_{t=1}^r v_{r,2t} + (r+1)! J_1^{(r)} - r! \sum_{t=1}^r v_{r,2t} J_0^{(r)} + \\ & \left. \sum_{j=0}^{r-2} \beta_j^{(r)} (j+1)! (r-j-2)! H_j^{(r)} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Hinsichtlich der Struktur dieses Ergebnisses sind sinngemäß dieselben Feststellungen zu treffen wie im Fall des Gluon-Kondensats gleicher kanonischer Dimension. Insbesondere in niedrigster Stufe der rationalen Approximation erhalten wir explizit :

$$\langle \eta_a \bar{\eta}_a \rangle^{(1)} = \frac{(N_C^2 - 1) \Lambda^2}{(4\pi)^2} (v_{1,2} - v_{1,1}) \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} - \ln v_{1,1} + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}. \quad (2.45)$$

Renormierung der Zweipunktkondensate

Wir betrachten zunächst die Renormierung der Kondensate zur kanonischen Massendimension zwei. Das zugehörige Mischungsproblem lautet dann formal in niedrigster Schleifenordnung :

$$\begin{pmatrix} \langle \eta_a \bar{\eta}_a \rangle \\ \langle Tr A_\mu A^\mu \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + c_{11} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} & c_{12} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \\ 0 & 1 + c_{22} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \Omega | \eta_a \bar{\eta}_a | \Omega \rangle \\ \langle \Omega | Tr A_\mu A^\mu | \Omega \rangle \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Das Verschwinden des Geistbeitrags zur Renormierung des Eichbosonkondensats ergibt sich aus der oberflächlichen Konvergenz des Feynman-Graphen mit Insertion des entsprechenden Operatorvertex. Weiter folgt aus unserem Resultat (2.23) explizit für die Landau-Eichung :

$$c_{22} = -\beta_0 + \frac{13}{6} N_C - \frac{2}{3} N_F = -\frac{3}{2} N_C.$$

Im Fall der Vakuum Erwartungswerte $V2$ und $\bar{G}G$ gestaltet sich die COR wesentlich komplizierter. Sie erhalten Beimischungen von Dimension-4-Kondensaten, die in führender Ordnung durch Zwei- bzw. sogar Dreischleifenintegrale gegeben sind.

2.9 Subtraktive Bestimmung nicht-perturbativer Logarithmen

Wir wollen in diesem Abschnitt eine alternative Methode vorstellen, die es uns ermöglichen wird, ohne Verwendung von Feynman-Techniken die mit nicht-perturbativen Logarithmen verbundenen Beiträge aus 1-Loop-Integralen zu extrahieren. Als anschauliches Beispiel soll uns dabei im folgenden das Abelsche Gluon-Kondensat in der r -ten Stufe der rationalen Approximation gemäß Gleichung (2.11) dienen.

Zunächst schreiben wir die rationale Approximante des Transversalteils des Gluon-Propagators aus (2.2) unter Berücksichtigung von (2.12) in polynomialer Form für Zähler und Nenner :

$$k^2 D_T^{(r)}(k^2) = \frac{(k^2)^{r+1} + \alpha_r^{(r)} \Lambda^2 (k^2)^r + \dots + \alpha_1^{(r)} (\Lambda^2)^r k^2}{(k^2)^{r+1} + \delta_r^{(r)} \Lambda^2 (k^2)^r + \dots + \delta_0^{(r)} (\Lambda^2)^{r+1}}, \quad (2.47)$$

wobei neben (2.13) noch gilt :

$$\delta_r^{(r)} = \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \quad \delta_{r-1}^{(r)} = \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s < s'}}^r \sigma_{r,2s+1} \sigma_{r,2s'+1} . \quad (2.48)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Variablen

$$\tilde{k} := \frac{k}{\Lambda} , \quad (2.49)$$

erhalten wir für das Kondensat unter Berücksichtigung von $\left| \frac{\partial \tilde{k}}{\partial k} \right| = \Lambda^{-D}$:

$$V 2^{(r)} = (N_C^2 - 1)(D - 1) \Lambda^4 \left[\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{-\epsilon/2} \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{(\tilde{k}^2)^{r+1} + \alpha_r^{(r)} (\tilde{k}^2)^r + \dots + \alpha_1^{(r)} \tilde{k}^2}{(\tilde{k}^2)^{r+1} + \delta_r^{(r)} (\tilde{k}^2)^r + \dots + \delta_0^{(r)}} . \quad (2.50)$$

Grundlegend für unser Verfahren ist nun die Beobachtung, daß jedem UV-divergenten Einschleifenintegral eine effektiv logarithmisch divergente Impulsraumintegration entspricht. Dies wird gezeigt durch sukzessive Subtraktion der jeweils führenden UV-Asymptotik des Integranden.

Wir suchen jetzt also speziell für unseren Integranden aus (2.50) den für das Vorhandensein einer logarithmischen UV-Divergenz wesentlichen $\tilde{k}^{-4}$ -Anteil. Sei demnach

$$\mathcal{I}_0^{(r)}(\tilde{k}^2) := \frac{(\tilde{k}^2)^{r+1} + \sum_{i=1}^r \alpha_i^{(r)} (\tilde{k}^2)^i}{(\tilde{k}^2)^{r+1} + \sum_{j=0}^r \delta_j^{(r)} (\tilde{k}^2)^j} ; \quad (2.51)$$

dann gilt offensichtlich $\mathcal{I}_0^{(r)}(\tilde{k}^2) \xrightarrow{UV} 1$ und wir bilden im ersten Subtraktionsschritt ³ :

$$\mathcal{I}_1^{(r)}(\tilde{k}^2) := \mathcal{I}_0^{(r)}(\tilde{k}^2) - 1 = \frac{[\alpha_r^{(r)} - \delta_r^{(r)}] (\tilde{k}^2)^r + \sum_{i=0}^{r-1} [\alpha_i^{(r)} - \delta_i^{(r)}] (\tilde{k}^2)^i}{(\tilde{k}^2)^{r+1} + \sum_{j=0}^r \delta_j^{(r)} (\tilde{k}^2)^j} . \quad (2.52)$$

Wegen $\mathcal{I}_1^{(r)}(\tilde{k}^2) \xrightarrow{UV} [\alpha_r^{(r)} - \delta_r^{(r)}] (\tilde{k}^2)^{-1}$ erfolgt der zweite Subtraktionsschritt gemäß ⁴ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{(r)}(\tilde{k}^2) &:= \mathcal{I}_1^{(r)}(\tilde{k}^2) - \frac{\alpha_r^{(r)} - \delta_r^{(r)}}{\tilde{k}^2} = \\ &= \frac{[\delta_r^{(r)} (\delta_r^{(r)} - \alpha_r^{(r)}) + \alpha_{r-1}^{(r)} - \delta_{r-1}^{(r)}] (\tilde{k}^2)^r + \sum_{i=0}^{r-1} [\delta_j^{(r)} (\delta_r^{(r)} - \alpha_r^{(r)}) + \alpha_{j-1}^{(r)} - \delta_{j-1}^{(r)}] (\tilde{k}^2)^j}{(\tilde{k}^2)^{r+2} + \sum_{j=0}^r \delta_j^{(r)} (\tilde{k}^2)^{j+1}} . \end{aligned} \quad (2.53)$$

³Hierbei haben wir $\alpha_0^{(r)} := 0$ eingeführt.

⁴Es wurde $\alpha_{-1}^{(r)} = \delta_{-1}^{(r)} := 0$ definiert.

Für die UV-Asymptotik ergibt sich nun :

$$\mathcal{I}_2^{(r)}(\tilde{k}^2) \xrightarrow{UV} \frac{Q^{(r)}}{(\tilde{k}^2)^2}, \quad (2.54)$$

wobei

$$Q^{(r)} := \delta_r^{(r)} [\delta_r^{(r)} - \alpha_r^{(r)}] + \alpha_{r-1}^{(r)} - \delta_{r-1}^{(r)} \quad (2.55)$$

gesetzt wurde. Wir haben damit den logarithmisch divergenten Beitrag des Integranden (2.51) gefunden. Das Kondensatintegral (2.50) läßt sich nun wie folgt in seinen konvergenten und divergenten Anteil zerlegen ⁵:

$$V2^{(r)} = (N_C^2 - 1)(D - 1) \Lambda^4 \left[\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{-\epsilon/2} \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \left\{ \mathcal{I}_2^{(r)}(\tilde{k}^2) - \frac{Q^{(r)}}{\{\tilde{k}^2 + \zeta\}^2} + 1 + \frac{\alpha_r^{(r)} - \delta_r^{(r)}}{\tilde{k}^2} + \frac{Q^{(r)}}{\{\tilde{k}^2 + \zeta\}^2} \right\}. \quad (2.56)$$

Wir finden zunächst :

$$\mathcal{I}_2^{(r)}(\tilde{k}^2) - \frac{Q^{(r)}}{\{\tilde{k}^2 + \zeta\}^2} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{UV} \frac{C^{(r)}}{(\tilde{k}^2)^3} \\ \xrightarrow{IR} \frac{D^{(r)}}{\tilde{k}^2} \end{array} \right.$$

d.h. die entsprechenden Beiträge zum Integral sind UV- und IR-konvergent.

Die beiden folgenden Terme in (2.56) bilden den Integranden eines skalenfreien Integrals, welches nach den Axiomen dimensioneller Regularisierung [12] identisch verschwindet.

Schließlich bleibt als UV-divergenter Anteil des Abelschen Gluon-Kondensats :

$$V2^{(r)} = (N_C^2 - 1)(D - 1) \Lambda^4 \left[\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{-\epsilon/2} \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{Q^{(r)}}{\{\tilde{k}^2 + \zeta\}^2} + (konv). \quad (2.57)$$

Anwendung der Standardintegralformel dimensioneller Regularisierung (A.11) ergibt dann nach Laurent-Entwicklung um $\epsilon = 0$:

$$\int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{Q^{(r)}}{\{\tilde{k}^2 + \zeta\}^2} = \frac{Q^{(r)}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{\zeta} + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}. \quad (2.58)$$

Wir erhalten also einen Polbeitrag, der unabhängig von der speziellen Wahl des Parameters ζ ist. Insofern ermöglicht die Subtraktionsmethode in wohldefinierter, konsistenter Weise die Bestimmung von UV-Divergenzen für Einschleifenintegrale im Kontext der dimensionellen Regularisierung.

⁵ ζ sei eine beliebige, von Null verschiedene reelle Zahl.

Unsere eigentliche Zielsetzung ist aber die Extraktion nicht-perturbativer Logarithmen und damit, durch den $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus vermittelt, die Analyse führender Beiträge der erweiterten Störungsreihe. Mit (2.58) folgt für (2.57) :

$$V2^{(r)} = \frac{3(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\} Q^{(r)}. \quad (2.59)$$

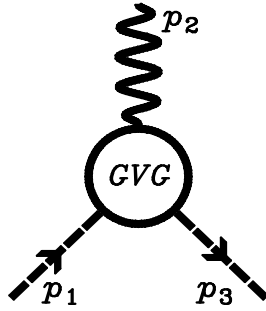
Berücksichtigen wir jetzt noch (2.13) und (2.48) in (2.55), so ist es uns offensichtlich gelungen, das Resultat (2.17) für UV-Divergenz und nicht-perturbativen Logarithmus des Abelschen Gluon-Kondensats zu reproduzieren. Das Auftreten des Letzteren ist dabei als unmittelbare Konsequenz der Impulsskalierung (2.49) mit der spontanen Massenskala zu sehen. Diese Vorgehensweise ist allerdings nur dann wohlbestimmt und eindeutig, falls Λ der *einzigste dimensionsbehaftete Parameter* in der betrachteten Theorie ist.

Mit anderen Worten : Die vorgestellte Subtraktionsmethode erlaubt die Bestimmung nicht-perturbativer Beiträge zu 1-Loop-Integralen im gluonischen Sektor der Quantenchromodynamik bzw. im Rahmen der Theorie mit masselosen Quarks. Auf die Komplikationen, welche im Zusammenhang mit endlichen Quark-Strommassen auftreten, werden wir später bei der Berechnung fermionischer Kondensate noch näher eingehen.

Kapitel 3

Das Geist-Gluon-Kondensat

3.1 Geist-Gluon-Vertex in Landau-Eichung



Im Folgenden setzen wir Impulserhaltung gemäß $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ voraus und geben Impulsvariablen grundsätzlich als einlaufende Größen bezüglich des nicht-perturbativ modifizierten Dreipunkt-Vertex an.

Für die Greens-Funktion der Geist-Gluon-Antigeist-Wechselwirkung gilt in Landau-Eichung :

$$(G_{GT\bar{G}})_{abc}^{\mu}(p_1, p_2, p_3) = (\Gamma_{GT\bar{G}})_{abc,\nu}(p_1, p_2, p_3) \tilde{D}(p_1^2) t^{\mu\nu}(p_2) D_T(p_2^2) \tilde{D}(p_3^2) , \quad (3.1)$$

wobei sich der zugehörige 1PI-Vertex in einer Lorentz- und farbkovarianten Zerlegung allgemein wie folgt darstellen läßt :

$$(\Gamma_{GV\bar{G}})_{abc}^{\mu}(p_1, p_2, p_3) = i g \left\{ f_{abc} p_1^{\mu} F_{(f),0} + f_{abc} p_2^{\mu} F_{(f),1} + d_{abc} p_1^{\mu} F_{(d),0} + d_{abc} p_2^{\mu} F_{(d),1} \right\} . \quad (3.2)$$

Im Fall der Landau-Eichung haben wir dementsprechend keine Beiträge zur Greens-Funktion durch $F_{(f),1}$ bzw. $F_{(d),1}$ zu erwarten.

Mit $c \in \{f, d\}$ sowie $i \in \{0, 1\}$ sind im Rahmen der erweiterten Störungstheorie als Ansatz für die in (3.2) eingeführten invarianten Funktionen rationale Approximanten der Quasiteilhensequenz mit faktorisierender Nennerstruktur in den Impulsvariablen ¹ zu wählen.

¹Wir schreiben dafür abkürzend FDRA=*factorizing-denominator rational approximants*.

Unter Berücksichtigung der für die DS-Selbstkonsistenz erforderlichen Übereinstimmung der Propagator-Nullstellen mit den Polstellen der Vertexfunktion [3] schreiben wir in nullter störungstheoretischer Ordnung :

$$F_{(c)i}^{(r)}(p_1, p_2, p_3) = \frac{N_{GV\bar{G}(c)i}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\left[\prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s}\Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (p_3^2 + v_{r,2s}\Lambda^2) \right]} ; \quad (3.3a)$$

die Zählerpolynome sind hierbei von der Form :

$$N_{GV\bar{G}(c)i}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \delta_{cf} \delta_{i0} (p_1^2 p_2^2 p_3^2)^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(\star)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)i(r)} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r - (m_1 + m_2 + m_3)} . \quad (3.3b)$$

Die obige Nennerstruktur wird plausibel, wenn man sie als diskretisierte und auf einen Hauptnenner gebrachte Form einer Dreifach-Spektraldarstellung bezüglich der Impulse p_j^2 auffaßt.

Mit den Ansätzen (3.3) für den Geist-Gluon-Antigeist-Vertex haben wir bereits dem perturbativen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ in Form der Euklidischen Feynman-Regel [4]

$$(\Gamma_{GV\bar{G}}^{(0)pert})_{abc}^\mu = i g f_{abc} p_1^\mu \quad (3.4)$$

explizit Rechnung getragen. Aus der weiteren Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit erhalten wir als Einschränkungen $(\star)$ für den Summationsbereich der Indizes unserer nicht-perturbativen Vertexkoeffizienten :

$$m_1 + m_2 + m_3 \leq 3r - 1$$

$$m_1 + m_2 \leq 2r$$

$$m_2 + m_3 \leq 2r$$

$$m_1 + m_3 \leq 2r .$$

Zusammen mit den rationalen Ansätzen für die Propagatoren folgt dann für die Colour-antisymmetrische Greens-Funktion zum Nennergrad r in Landau-Eichung :

$$(G_{GT\bar{G}(f)}^{(r)})_{abc}^{\mu}(p_1, p_2, p_3) = i g f_{abc} p_{1\mu'} t^{\mu\mu'}(p_2) \cdot$$

$$\frac{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s}\Lambda^2)}{p_1^2 \prod_{s=0}^{r-1} (p_1^2 + v_{r,2s+1}\Lambda^2)} \frac{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=0}^r (p_2^2 + \sigma_{r,2s+1}\Lambda^2)} \frac{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + v_{r,2s}\Lambda^2)}{p_3^2 \prod_{s=0}^{r-1} (p_3^2 + v_{r,2s+1}\Lambda^2)} \cdot$$

$$\frac{N_{GT\bar{G}(f)0}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\left[\prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s}\Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (p_3^2 + v_{r,2s}\Lambda^2) \right]} ;$$

also

$$(G_{GT\bar{G}(f)}^{(r)})_{abc}^{\mu}(p_1, p_2, p_3) = i g f_{abc} \left\{ p_1^{\mu} - \frac{(p_1 \cdot p_2)}{p_2^2} p_2^{\mu} \right\} \cdot$$

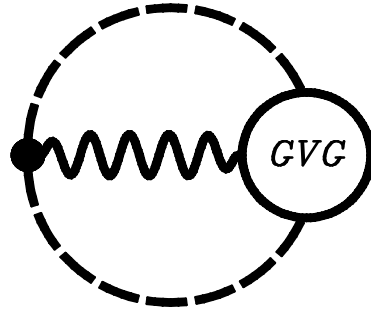
$$\frac{N_{GT\bar{G}(f)0}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p_1^2 + v_{r,2s+1}\Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (p_2^2 + \sigma_{r,2s+1}\Lambda^2) \right] p_3^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p_3^2 + v_{r,2s+1}\Lambda^2) \right]} . \quad (3.5a)$$

Völlig analog erhalten wir die Colour-symmetrische Greensche Funktion der Geist-Gluon-Antigeist-Wechselwirkung gemäß :

$$(G_{GT\bar{G}(d)}^{(r)})_{abc}^{\mu}(p_1, p_2, p_3) = i g d_{abc} \left\{ p_1^{\mu} - \frac{(p_1 \cdot p_2)}{p_2^2} p_2^{\mu} \right\} \cdot$$

$$\frac{N_{GT\bar{G}(d)0}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p_1^2 + v_{r,2s+1}\Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (p_2^2 + \sigma_{r,2s+1}\Lambda^2) \right] p_3^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p_3^2 + v_{r,2s+1}\Lambda^2) \right]} . \quad (3.5b)$$

3.2 Definition des Geist-Gluon-Kondensats



Wir beginnen mit der Definition des nicht-lokalen Kondensats (Schwinger-Funktion) für das Produkt aus Geist-, Eichboson- und Antigeistfeld :

$$\langle \eta_a(z) A_b^\mu(y) \bar{\eta}_c(x) \rangle = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} e^{ip_1(x-z)} e^{ip_2(y-z)} (G_{GV\bar{G}})_{abc}^\mu(p_1, p_2, -p_1 - p_2). \quad (3.6)$$

Daraus folgt durch Differentiation unmittelbar das lokale tensorielle Geist-Gluon-Kondensat der Massendimension vier :

$$\langle (\partial^\nu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle = -i \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} p_1^\nu (G_{GV\bar{G}})_{abc}^\mu(p_1, p_2, -p_1 - p_2). \quad (3.7)$$

In einer kovarianten Zerlegung dieser Größe nach Farb- und Lorentz-Tensoren gemäß

$$\langle (\partial^\nu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle = \delta^{\mu\nu} \{c_f f_{abc} + c_d d_{abc}\}, \quad (3.8)$$

gilt für die skalaren Koeffizienten :

$$c_f = \frac{1}{N_C(N_C^2 - 1)D} \langle f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle = -\frac{1}{N_C(N_C^2 - 1)D} \langle f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c \rangle$$

$$c_d = \frac{N_C}{(N_C^2 - 4)(N_C^2 - 1)D} \langle d_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle = \frac{N_C}{(N_C^2 - 4)(N_C^2 - 1)D} \langle d_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c \rangle.$$

Auf dieser Grundlage definieren wir nun die beiden skalaren Geist-Gluon-Kondensate :

$$\bar{GVG} := g \langle f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c \rangle \quad (3.9a)$$

$$\bar{GVGS} := g \langle d_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_a) A_b^\mu \eta_c \rangle. \quad (3.9b)$$

Damit ergibt sich dann das farb(anti)symmetrische Geist-Gluon-Kondensat jeweils als erstes Moment der Geist-Gluon-Antigeist-Greensfunktion im Impulsraum :

$$\bar{GVG} = ig \mu_0^{2\epsilon} f_{abc} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} p_1^\nu (G_{GV\bar{G}})_{abc}^\mu(p_1, p_2, -p_1 - p_2) = -g f_{abc} \langle (\partial_\mu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle \quad (3.10a)$$

$$\bar{GVGS} = -ig \mu_0^{2\epsilon} d_{abc} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} p_1^\nu (G_{GV\bar{G}})_{abc}^\mu(p_1, p_2, -p_1 - p_2) = g d_{abc} \langle (\partial_\mu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle \quad (3.10b)$$

Die beiden Kondensate (3.9) zählen zu den dreizehn Vakuumerwartungswerten, die im Rahmen des DS-Selbstkonsistenzproblems der reinen Yang-Mills-Theorie aus der OPE eichabhängiger Korrelationsfunktionen zu bestimmen sind. Gemäß (1.40) tritt das farb-antisymmetrische Geist-Gluon-Kondensat in einer Darstellung des eichinvarianten 4-Gluon-Kondensats auf. Allerdings kann dieser Beitrag unter Verwendung des Bewegungsgleichungskondensats (1.38b) zu Gunsten des Vakuumerwartungswertes (2.32) eliminiert werden.

3.3 Berechnung des Geist-Gluon-Kondensats zum Nennergrad r

In diesem Abschnitt soll die Methodik zur mikroskopischen Berechnung von Mehrschleifenkondensaten der QCD am strukturell einfachsten Beispiel des Geist-Gluon-Kondensats vorgestellt werden. Es sind zwar letztendlich konventionelle Feynman-Techniken im Kontext dimensioneller Regularisierung, die den nachfolgenden Berechnungen zu Grunde liegen. Sie werden jedoch dazu eingesetzt, die Overall-Divergenz von Zweischleifenintegralen mit einer variablen Anzahl (Größenordnung $3r$) von Nennerfaktoren des Impulsraumintegranden zu extrahieren. Es ist diese durchaus nicht alltägliche Problemstellung, die es uns angemessen erscheinen läßt, hier die Grundzüge unserer Rechnung detailliert zu beschreiben.

In der r -ten Stufe der rationalen Approximation gilt nach Gleichung (3.7) :

$$g \langle (\partial^\nu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle^{(r)} = -i g \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} p^\nu (G_{GV\bar{G}}^{(r)})_{abc}^\mu(p, k, -p-k). \quad (3.11)$$

Für die Landau-Eichung erhalten wir eine kovariante Zerlegung des tensoriellen Vakuumerwartungswerts in der Form :

$$g \langle (\partial^\nu \bar{\eta}_c) A_b^\mu \eta_a \rangle^{(r)} = g^2 \frac{\delta^{\mu\nu}}{D} \left\{ f_{abc} I_{(f)}^{(r)} + d_{abc} I_{(d)}^{(r)} \right\}, \quad (3.12a)$$

mit dem skalaren Zweischleifenintegral :

$$I_{(c)}^{(r)} = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ p^2 - \frac{(p \cdot k)^2}{k^2} \right\}.$$

$$\frac{\delta_{cf} \left[p^2 k^2 (p+k)^2 \right]^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} (p^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)}}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}. \quad (3.12b)$$

Das wesentlich neue Merkmal von Mehrschleifendiagrammen ist deren Subgraphenstruktur. Aus der Renormierungstheorie störungstheoretischer Graphen ist bekannt, daß ein Mehrschleifengraph genau dann keine Divergenzen mehr aufweist, falls alle seine Subgraphen negativen Divergenzgrad besitzen und sein oberflächlicher Divergenzgrad ebenfalls negativ ist [12]. Durch Hinzunahme eines Gegenterms zu jedem divergenten Subgraphen gelingt es folglich, Mehrschleifendiagramme zu renormieren. Für die QCD als renormierbare Theorie genügen dazu die Counterterme der sieben oberflächlich divergenten Vertizes. In [6] wurde auf diesen Grundlagen basierend die *Gegentermtechnik* vorgestellt. Sie beruht auf der Aussage, daß sich die führende Divergenz eines Mehrschleifenintegrals aus der Summe der führenden Divergenzen aller seiner Subdiagramme ergibt. Zum Beweis wurde dort nach Addition des Diagramms und sämtlicher Counterbeiträge die Endlichkeit der

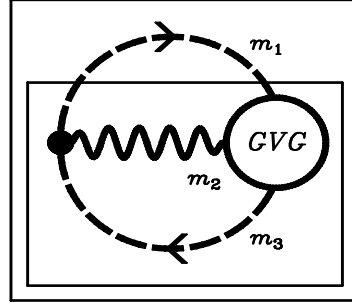
Graphensumme im Anschluß an mehrmalige Differentiation nach den äußeren Impulsvariablen gezeigt. Da unsere nicht-perturbativ modifizierten Feynman-Regeln nach ihrem Konstruktionsprinzip den Grundsätzen perturbativer Renormierung gehorchen, bleibt insbesondere auch die Gegentermtechnik erlaubt. Nun stehen uns zwar naturgemäß bei der Berechnung von Vakuum Erwartungswerten allgemein und des Kondensats (3.11) im Besonderen gar keine äußeren Impulsvariablen zur Verfügung; wir werden jedoch im Abschnitt 3.4 über die Renormierung des Geist-Gluon-Kondensats nach Einführung der Gegentermbeiträge leicht sehen können, daß das Differentiationsargument auch bezüglich des QCD-Skalenparameters Λ seine Gültigkeit beibehält.

Unter Anwendung der Gegentermtechnik zur Berechnung der führenden UV-Divergenz des Zweischleifenintegrals (3.12b) müssen wir nun die verschiedenen Subdivergenzen spezifizieren. Konkret geschieht dies durch Auswahl von je zwei Indizes der nicht-perturbativen Vertexfunktion, die über ihre angehängten Propagatoren jeweils eine Integrationsschleife definieren. Wir setzen in diesem Sinne :

$$[I_{(c)}^{(r)}]_{div} =: \sum_{n=1}^3 \Omega_{n(c)}^{(r)} ;$$

dabei soll $\Omega_{n(c)}^{(r)}$ der Extraktion UV-divergenter Beiträge aus der $(m_k m_l)$ -Schleife mit $(n k l)$ zyklisch im ersten Integrationsschritt zur Berechnung von (3.12b) entsprechen.

3.3.1 Subschleife mit $(m_2 m_3)$



Von Gleichung (3.12b) ausgehend suchen wir jetzt zunächst die UV-Divergenz der durch das Eichboson und das aus dem nicht-perturbativen Vertex *auslaufende* Geistfeld definierten Impulsschleife :

$$\Omega_{1(c)}^{(r)} = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ p^2 - \frac{(p \cdot k)^2}{k^2} \right\} \cdot$$

$$\frac{\delta_{cf} [p^2 k^2 (p+k)^2]^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} (p^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} .$$

(3.13)

Die in (3.13) verwendete Schreibweise soll hier und sinngemäß auch im Folgenden andeuten, daß zunächst die UV-divergenten Anteile der k -Integration zu bestimmen sind, und mit diesen dann die verbleibende p -Integration ausgeführt wird.

Power-Counting ergibt für den oberflächlichen UV-Divergenzgrad des Subintegrals $\delta_k = D - 4$. Demzufolge kann also eine maximal logarithmische Subdivergenz auftreten. Die Auswahlregeln $(\star)$ führen damit zur notwendigen UV-Divergenzbedingung unserer Vertexkoeffizienten gemäß :

$$m_2 + m_3 = 2r \quad \Rightarrow \quad m_1 \leq r - 1 .$$

Also gilt für den ersten Subschleifenbeitrag :

$$\Omega_{1(c)}^{(r)} = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{cf} (p^2)^r + \sum_{m_1=0}^{r-1} \left(\sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} \right) (\Lambda^2)^{r-m_1} (p^2)^{m_1}}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} \cdot \left\{ \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(p^2 k^2 - (p \cdot k)^2) (k^2)^{2r-1}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} + (konv) \right\} . \quad (3.14)$$

Im nächsten Schritt definieren wir als Hilfsgröße das Einschleifenintegral :

$$J_1^{(r)}(p) := \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(p^2 k^2 - (p \cdot k)^2) (k^2)^{2r-1}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} .$$

Nach Einführung von Feynman-Parametern und Shiften der Integrationsvariablen erhalten wir dafür :

$$J_1^{(r)}(p) = \mu_0^\epsilon (2r+1)! \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(p^2 q^2 - (p \cdot q)^2) (q^2)^{2r-1}}{\left\{ q^2 + R^2(p^2) \right\}^{2r+2}} + (konv) ,$$

wobei

$$q := k + w_r \cdot p$$

$$R^2(p^2) := w_r (1 - w_r) \cdot p^2 + \tilde{w}_r \cdot \Lambda^2$$

$$w_r := w_r(\mathbf{z}) := z_1 + z_{r+3} + z_{r+4} + \dots + z_{2r+2}$$

$$\tilde{w}_r := \tilde{w}_r(\mathbf{z}) := z_2 \sigma_{r,1} + z_3 \sigma_{r,3} + \dots + z_{r+2} \sigma_{r,2r+1} + z_{r+3} v_{r,1} + \dots + z_{2r+2} v_{r,2r-1} .$$

Mit Hilfe der Euklidischen Standardformel (A.11) wird anschließend die Impulsintegration ausgeführt. Dabei ergibt sich für den UV-divergenten Anteil der Hilfsgröße :

$$J_1^{(r)}(p) = \frac{(D-1) \Gamma(2r + D/2)}{D \Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) \frac{\mu_0^\epsilon}{(4\pi)^{D/2}} \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} p^2 (R^2(p^2))^{D/2-2} + (konv) .$$

Damit finden wir nun für (3.13) bis auf konvergente Beiträge der ersten Schleifenintegration :

$$\Omega_{1(c)}^{(r)} = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(D-1) \Gamma(2r + D/2)}{D \Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) .$$

$$\int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{cf} (p^2)^r + \sum_{m_1=0}^{r-1} H_{(c)m_1}^{(r)} (\Lambda^2)^{r-m_1} (p^2)^{m_1}}{\left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (R^2(p^2))^{2-D/2}} ; \quad (3.15)$$

hierbei haben wir abkürzend $H_{(c)m_1}^{(r)} := \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)}$ für die mit der Divergenz verknüpfte Linearkombination von Vertexparametern gesetzt.

Es bleibt jetzt also noch das Einschleifenintegral

$$K_1^{(r)} := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{cf} (p^2)^r + \sum_{m_1=0}^{r-1} H_{(c)m_1}^{(r)} (\Lambda^2)^{r-m_1} (p^2)^{m_1}}{\left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (R^2(p^2))^{2-D/2}}$$

auszuwerten. Mit einer Feynman-Parametrisierung gemäß (A.1) schreiben wir zunächst :

$$K_1^{(r)} = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r+2-D/2)}{\Gamma(2-D/2)} \int_0^1 dx_1 x_1^{r-1} \int_0^1 dx_2 x_2^{r-2} \dots \int_0^1 dx_{r-1} x_{r-1} \int_0^1 dx_r (1-x_1)^{1-D/2} .$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{cf} (p^2)^r + \sum_{m_1=0}^{r-1} H_{(c)m_1}^{(r)} (\Lambda^2)^{r-m_1} (p^2)^{m_1}}{\left\{ y_1 R^2(p^2) + y_2 (p^2 + v_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+1} (p^2 + v_{r,2r-1} \Lambda^2) \right\}^{r+2-D/2}} ,$$

wobei

$$y_1 = 1 - x_1 \quad y_2 = x_1 (1 - x_2) \quad y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3) \quad \dots \quad y_r = x_1 \dots x_{r-1} (1 - x_r)$$

$$y_{r+1} = x_1 \dots x_r .$$

Der Nenner des Integranden läßt sich damit wie folgt darstellen :

$$y_1 R^2(p^2) + y_2 (p^2 + v_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+1} (p^2 + v_{r,2r-1} \Lambda^2) = (1 - x_1) \cdot R^2(p^2) + x_1 \cdot p^2 + \tau_r(\mathbf{x}) \cdot \Lambda^2 ;$$

hierbei wurde noch $\tau_r(\mathbf{x}) := y_2 v_{r,1} + y_3 v_{r,3} + \dots + y_{r+1} v_{r,2r-1}$ als Abkürzung für die mit Feynman-Parametern gewichtete Linearkombination der Polkoeffizienten des Geist-Propagators eingeführt.

Die Auswertung des divergenten Parameterintegrals ² ergibt nach (A.7) :

$$\int_0^1 dx_1 x_1^{r-1} (1 - x_1)^{1-D/2} f_D(x_1) = (r-1)! \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+2-D/2)} \cdot f_D(1) + \mathcal{O}(\epsilon^0) ;$$

und somit gilt :

$$K_1^{(r)} = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} (r-1)! \int_0^1 dx_2 x_2^{r-2} \int_0^1 dx_3 x_3^{r-3} \dots \int_0^1 dx_{r-1} x_{r-1} \int_0^1 dx_r$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{cf} (p^2)^r + \sum_{m_1=0}^{r-1} H_{(c)m_1}^{(r)} (\Lambda^2)^{r-m_1} (p^2)^{m_1}}{\{p^2 + \tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+2-D/2}} + (konv) ,$$

wobei noch $\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) := \tau_r(\mathbf{x})|_{x_1=1}$ definiert wurde.

Im Weiteren verwenden wir als Bezeichnung für das Maß der r -fachen Feynman-Parameterintegration :

$$\int \hat{\mathcal{D}}^r \mathbf{x} \equiv \int_0^1 dx_2 x_2^{r-2} \int_0^1 dx_3 x_3^{r-3} \dots \int_0^1 dx_{r-1} x_{r-1} \int_0^1 dx_r .$$

Der UV-divergente Beitrag unseres Einschleifenintegrals ergibt sich nach Integration über den Schleifenimpuls wie folgt :

$$K_1^{(r)} = \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(r-2+D/2) \Gamma(4-D)}{\Gamma(D/2) \Gamma(r+2-D/2)} (r-1)! \int \hat{\mathcal{D}}^r \mathbf{x} \left[\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} .$$

$$\left\{ \frac{(r-2+D/2)(r-1+D/2)}{(3-D)(2-D)} \delta_{cf} [\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \frac{r-2+D/2}{3-D} H_{(c)r-1}^{(r)} \tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) + H_{(c)r-2}^{(r)} \right\}$$

$$+ (konv) ,$$

und wir erhalten weiter für den Subschleifenbeitrag (3.13) :

² $f_D(x)$ sei analytisch in $x=1$.

$$\begin{aligned}
\Omega_{1(c)}^{(r)} &= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^D} \frac{(D-1)\Gamma(2r+D/2)\Gamma(r-2+D/2)}{D\Gamma(D/2)^2\Gamma(r+2-D/2)} \Gamma(2-D/2)\Gamma(4-D) \int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} \\
&\quad (r-1)! \int \hat{\mathcal{D}}^r \mathbf{x} \left\{ \frac{(r-2+D/2)(r-1+D/2)}{(3-D)(2-D)} \delta_{cf} [\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \frac{r-2+D/2}{3-D} H_{(c)r-1}^{(r)} \tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) + H_{(c)r-2}^{(r)} \right\} \cdot \\
&\quad \left[\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Zur Auswertung der Feynman-Parameterintegrale bezüglich $\mathbf{z}$ benutzen wir als Ergebnis aus A.1.2 :

$$Z_0^{(2r+1)} = \frac{1}{(2r+1)!} .$$

Zusammen mit der Laurent-Entwicklung für $D = 4 - \epsilon$:

$$\Gamma(2-D/2)\Gamma(4-D) \left[\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} = \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) , \tag{3.17}$$

folgt dann im Grenzübergang des verschwindenden UV-Regulators :

$$\begin{aligned}
\Omega_{1(c)}^{(r)} &= \frac{3\Lambda^4}{4(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\quad (r-1)! \int \hat{\mathcal{D}}^r \mathbf{x} \left\{ \frac{r(r+1)}{2} \delta_{cf} [\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}})]^2 - r H_{(c)r-1}^{(r)} \tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) + H_{(c)r-2}^{(r)} \right\} .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Hinsichtlich der verbleibenden Feynman-Parameterintegrale in (3.18) erhalten wir mit den Resultaten aus (A.9) :

$$\begin{aligned}
X_0^{(r-1)} &= \frac{1}{(r-1)!} \\
X_{1[r]}^{(r-1)} &= \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \\
X_{2[r]}^{(r-1)} &= \frac{2}{(r+1)!} \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^{r-1} v_{r,2t+1} v_{r,2t'+1} .
\end{aligned}$$

Desweiteren kann für die mit dem Doppelpol in ϵ verknüpften nicht-perturbativen Koeffizienten des Geist-Gluon-Vertex geschrieben werden :

$$H_{(c)r-1}^{(r)} = \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{r-1,m_2,m_3}^{(c)0(r)} = \sum_{m_2=r-1}^{r+1} C_{r-1,m_2,2r-m_2}^{(c)0(r)}$$

$$H_{(c)r-2}^{(r)} = \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{r-2,m_2,m_3}^{(c)0(r)} = \sum_{m_2=r-2}^{r+2} C_{r-2,m_2,2r-m_2}^{(c)0(r)} .$$

Insgesamt ergibt sich so als Endresultat für den führenden Divergenzbeitrag aus (3.13) :

$$\Omega_{1(c)}^{(r)} = \frac{3 \Lambda^4}{4 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} .$$

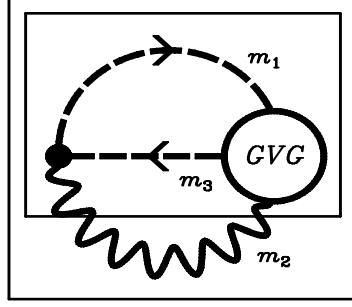
$$\left\{ \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^{r-1} v_{r,2t+1} v_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_2=r-1}^{r+1} C_{r-1,m_2,2r-m_2}^{(c)0(r)} \right) + \sum_{m_2=r-2}^{r+2} C_{r-2,m_2,2r-m_2}^{(c)0(r)} \right\} . \quad (3.19)$$

Zunächst ist bezüglich der Struktur des Kondensatbeitrags (3.19) festzuhalten, daß es wiederum der QCD-Massenparameter Λ ist, welcher die Skala des Vakuumerwartungswertes definiert. Anders ausgedrückt : Im rein perturbativen Fall verschwindet (3.13) als skalenfreies Integral. In Verbindung mit dem Doppelpol als führendem UV-divergenten Anteil in (3.19) finden wir das Quadrat eines nicht-perturbativen Logarithmus. Vermöge des $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus entspricht dies einer vierten Potenz der reziproken renormierten Kopplung und manifestiert so einen führenden Beitrag zum Kondensat im Sinne einer störungstheoretischen Entwicklung. Charakterisiert wird dieser relevante Anteil durch drei Klassen nicht-perturbativer Parameterkombinationen. Als erstes wäre die Summe über alle Produkte von jeweils zwei Polstellen der rationalen Approximante zum Geist-Propagator (2.26) zu nennen, welche allerdings nur im farbantisymmetrischen Fall zum Tragen kommt. Unabhängig von der Farbsymmetrie finden wir weitere Beiträge, die entweder ausschließlich aus den nicht-perturbativen Koeffizienten unseres Ansatzes für den Geist-Gluon-Vertex bestehen oder aber sich als Kombinationen aus Propagator- und Vertexparametern präsentieren. Das Vorhandensein der beiden letztgenannten Kategorien kann als Hinweis dafür verstanden werden, daß es nicht allein ausreichend ist, die Propagationseigenschaften der elementaren Felder der Theorie nicht-störungstheoretisch zu modifizieren; es sind vielmehr auch die Wechselwirkungsvertizes in derartige Überlegungen mit einzubeziehen.

Nicht mehr explizit angegeben haben wir in (3.19) Terme in Form von einfachen Polen mit logarithmischen Residuen. Auf die Problematik dieser nicht-führenden Kondensatbeiträge werden wir in Abschnitt 3.4 im Zusammenhang mit der Renormierung des Geist-Gluon-Kondensats noch zu sprechen kommen.

3.3.2 Subschleife mit $(m_3 m_1)$

Jetzt untersuchen wir in einem ersten Schritt zunächst die Divergenz, welche bei der Integration über die von den beiden Geist-Propagatoren gebildete Impulsschleife hervorgerufen wird :



$$\Omega_{2(c)}^{(r)} = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left\{ p^2 - \frac{(p \cdot k)^2}{k^2} \right\} .$$

$$\frac{\delta_{cf} [p^2 k^2 (p+k)^2]^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} (p^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)}}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} . \quad (3.20)$$

Der UV-Divergenzgrad des Subintegrals beträgt hier $\delta_p = D - 2$. Also haben wir eine maximal quadratische Subdivergenz für die erste Impulsintegration zu erwarten. Aus $(\star)$ folgt damit sofort als notwendige Divergenzbedingung ausgedrückt in den Indizes der Koeffizienten aus dem Geist-Gluon-Vertex :

$$2r - 1 \leq m_1 + m_3 \leq 2r$$

$$m_1 + m_3 = 2r \quad \Rightarrow \quad m_2 \leq r - 1$$

$$m_1 + m_3 = 2r - 1 \quad \Rightarrow \quad m_2 \leq r .$$

Wir haben nun zunächst die divergenzerzeugenden Anteile aus dem Zähler des Subintegrals zu extrahieren und erhalten dafür :

$$\delta_{cf} [p^2 k^2 (p+k)^2]^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} (p^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)} =:$$

$$\left\{ \alpha_1^{(r)}(k^2) p^4 + \alpha_2^{(r)}(k^2) p^2 (p \cdot k) + \alpha_3^{(r)}(k^2) \Lambda^2 p^2 + \alpha_4^{(r)}(k^2) (p \cdot k)^2 \right\} (p^2)^{2r-2} + \mathcal{O}(p^{4r-3}) .$$

Die oben definierten Koeffizientenfunktionen $\alpha_j^{(r)}(k^2)$ lauten explizit :

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(r)}(k^2) &= \delta_{cf} (k^2)^r + \sum_{m_2=0}^{r-1} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} , \\
\alpha_2^{(r)}(k^2) &= 2r \delta_{cf} (k^2)^r + 2 \sum_{m_2=0}^{r-1} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} m_3 C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} , \\
\alpha_3^{(r)}(k^2) &= r \delta_{cf} (k^2)^{r+1} \Lambda^{-2} + \sum_{m_2=0}^{r-1} (k^2)^{m_2+1} (\Lambda^2)^{r-1-m_2} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} m_3 C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} + \\
&\quad \sum_{m_2=0}^r (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} , \\
\alpha_4^{(r)}(k^2) &= 2r(r-1) \delta_{cf} (k^2)^r + 2 \sum_{m_2=0}^{r-1} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} m_3(m_3-1) C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} .
\end{aligned}$$

Damit können wir für unsere Zweischleifengröße (3.20) mit festgelegter Integrationsreihenfolge schreiben :

$$\begin{aligned}
\Omega_{2(c)}^{(r)} &= \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 \left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} . \\
&\quad \left\{ \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left(p^2 k^2 - (p \cdot k)^2 \right) (p^2)^{2r-2}}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} \right. \\
&\quad \left. \left\{ \alpha_1^{(r)}(k^2) p^4 + \alpha_2^{(r)}(k^2) p^2 (p \cdot k) + \alpha_3^{(r)}(k^2) \Lambda^2 p^2 + \alpha_4^{(r)}(k^2) (p \cdot k)^2 \right\} + (konv) \right\} .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Von (3.21) ausgehend bietet sich die Einführung des Einschleifenintegrals

$$\begin{aligned}
J_2^{(r)}(k) &:= \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left(p^2 k^2 - (p \cdot k)^2 \right) (p^2)^{2r-2}}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p+k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} . \\
&\quad \left\{ \alpha_1^{(r)}(k^2) p^4 + \alpha_2^{(r)}(k^2) p^2 (p \cdot k) + \alpha_3^{(r)}(k^2) \Lambda^2 p^2 + \alpha_4^{(r)}(k^2) (p \cdot k)^2 \right\}
\end{aligned}$$

als Hilfsgröße an. Mit einer Feynman-Parametrisierung, Shiften des Integrationsimpulses, Entwicklung des Zählers und Anwendung der Eigenschaften symmetrischer Integration erhalten wir dafür :

$$J_2^{(r)}(k) = \mu_0^\epsilon (2r+1)! \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\{\beta_1^{(r)}(k^2) q^2 + \beta_2^{(r)}(k^2) \Lambda^2\} (q^2)^{2r}}{\{q^2 + R^2(k^2)\}^{2r+2}} + (konv),$$

wobei

$$q := p + w_r \cdot k$$

$$R^2(k^2) := w_r (1 - w_r) \cdot k^2 + \tilde{w}_r \cdot \Lambda^2$$

$$w_r := w_r(\mathbf{z}) := z_{r+2} + z_{r+3} + \dots + z_{2r+2}$$

$$\tilde{w}_r := \tilde{w}_r(\mathbf{z}) := (z_2 + z_{r+3}) v_{r,1} + (z_3 + z_{r+4}) v_{r,3} + \dots + (z_{r+1} + z_{2r+2}) v_{r,2r-1}.$$

Hinsichtlich der oben eingeführten Koeffizientenfunktionen $\beta_j^{(r)}(k^2)$ findet man explizit :

$$\beta_1(k^2) = \frac{D-1}{D} \alpha_1^{(r)}(k^2) k^2$$

$$\beta_2(k^2) = \frac{(D+2)(4r+D-3) - 6(2r-1)}{D(D+2)} \left\{ 2r w_r^2(\mathbf{z}) \alpha_1^{(r)}(k^2) - w_r(\mathbf{z}) \alpha_2^{(r)}(k^2) \right\} \frac{k^4}{\Lambda^2} +$$

$$\frac{(D-1)}{D(D+2)} \left\{ \alpha_4^{(r)}(k^2) \frac{k^4}{\Lambda^2} + (D+2) \alpha_3^{(r)}(k^2) k^2 \right\}.$$

Als Resultat der Impulsintegration mit Hilfe der Standardformel (A.11) erhalten wir für den UV-divergenten Beitrag des Subintegrals :

$$J_2^{(r)}(k) = \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \frac{\mu_0^\epsilon}{(4\pi)^{D/2}} \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z}$$

$$\left\{ \frac{2r+D/2}{1-D/2} \beta_1^{(r)}(k^2) (R^2(k^2))^{D/2-1} + \beta_2^{(r)}(k^2) \Lambda^2 (R^2(k^2))^{D/2-2} \right\} + (konv).$$

Somit lautet unser zweiter Subschleifenbeitrag bis auf konvergente Terme des ersten Integrationsschrittes :

$$\Omega_{2(c)}^{(r)} = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 \left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}$$

$$\left\{ \frac{2r+D/2}{1-D/2} \beta_1^{(r)}(k^2) (R^2(k^2))^{D/2-1} + \beta_2^{(r)}(k^2) \Lambda^2 (R^2(k^2))^{D/2-2} \right\}.$$

(3.22)

Für die nachfolgende Berechnung von (3.22) führen wir zweckmäßigerweise als abkürzende Bezeichnungen ein :

$$\begin{aligned}
G_{m_2}^{(c)0(r)} &:= \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} \\
\tilde{G}_{m_2}^{(c)0(r)} &:= \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} \\
H_{m_2}^{(c)0(r)} &:= \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} m_3 C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} \\
L_{m_2}^{(c)0(r)} &:= \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} m_3 (m_3 - 1) C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)0(r)} .
\end{aligned}$$

Damit läßt sich für den Zweischleifenbeitrag schreiben :

$$\begin{aligned}
\Omega_{2(c)}^{(r)} &= \frac{\Gamma(2r + D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \sum_{m_2=0}^r (\Lambda^2)^{r-m_2} \left\{ \frac{(D-1)(2r + D/2)}{D(1 - D/2)} G_{m_2}^{(c)0(r)} \cdot Q_{m_2,1}^{(r)} + \right. \\
&\quad \frac{1}{D(D+2)} \left(2(D+2)(4r + D - 3) - 12(2r - 1) \right) (r w_r^2(\mathbf{z}) G_{m_2}^{(c)0(r)} - w_r(\mathbf{z}) H_{m_2}^{(c)0(r)} Q_{m_2+1,2}^{(r)}) + \\
&\quad \left. (D-1) \left[(2 L_{m_2}^{(c)0(r)} + (D+2) H_{m_2}^{(c)0(r)}) \cdot Q_{m_2+1,2}^{(r)} + (D+2) \tilde{G}_{m_2}^{(c)0(r)} \Lambda^2 \cdot Q_{m_2,2}^{(r)} \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

wobei wir für die verbleibenden Impulsraumintegrale aus (3.22) definiert haben :

$$\begin{aligned}
Q_{m_2,1}^{(r)} &:= \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^{m_2}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (R^2(k^2))^{1-D/2}} \\
Q_{m_2,2}^{(r)} &:= \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^{m_2}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (R^2(k^2))^{2-D/2}} .
\end{aligned}$$

Nach Einführung einer Feynman-Parametrisierung gemäß (A.1) und der Auswertung des damit verbundenen divergenten Feynman-Parameterintegrals aus (A.7) :

$$\int_0^1 dx_1 x_1^r (1-x_1)^{-D/2} f_D(x_1) = r! \frac{\Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(r+2 - D/2)} \left\{ \frac{f_D(1)}{(1 - D/2)} - \frac{f_D'(1)}{r+2 - D/2} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^0) ,$$

erhalten wir unter Verwendung der Standardformel für die Euklidische Impulsintegration in D Dimensionen zunächst :

$$Q_{m_2,1}^{(r)} = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(m_2 + D/2) \Gamma(r + 2 - m_2 - D)}{\Gamma(D/2) \Gamma(r + 3 - D/2)} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \left\{ \left[r + 2 - D/2 + (1 - D/2)(m_2 + D/2) (1 + w_r(\mathbf{z}) (w_r(\mathbf{z}) - 1)) \right] [\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2]^{D+m_2-r-2} + \right. \\ \left. (r + 2 - m_2 - D) (1 - D/2) (\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{w}_r(\mathbf{z})) \Lambda^2 [\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2]^{D+m_2-r-3} \right\} + (konv) ,$$

wobei wir $\tau_r(\mathbf{x}) := y_2 \sigma_{r,1} + y_3 \sigma_{r,3} + \dots + y_{r+2} \sigma_{r,2r+1}$ sowie $\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) := \tau_r(\mathbf{x})|_{x_1=1}$ gesetzt haben.

Entsprechend ergibt sich :

$$Q_{m_2,2}^{(r)} = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(m_2 + D/2) \Gamma(r + 3 - m_2 - D)}{\Gamma(D/2) \Gamma(r + 3 - D/2)} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} [\tilde{\tau}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2]^{D+m_2-r-3} + (konv) .$$

Für die in (3.22) noch auszuwertenden Feynman-Parameterintegrale bezüglich $\mathbf{z}$ definieren wir ($m \in \{0, 1, 2\}$) :

$$Z_{m[r+1]}^{(2r+1)} := \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} [w_r(\mathbf{z})]^m \\ \tilde{Z}_{[r]}^{(2r+1)} := \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \tilde{w}_r(\mathbf{z}) .$$

Dann folgt an Hand der Überlegungen und Resultate aus A.1.2 :

$$Z_0^{(2r+1)} = \frac{1}{(2r+1)!} \\ Z_{1[r+1]}^{(2r+1)} = \frac{r+1}{(2r+2)!} \\ Z_{2[r+1]}^{(2r+1)} = \frac{(r+1)(r+2)}{(2r+3)!} \\ \tilde{Z}_{[r]}^{(2r+1)} = \frac{2}{(2r+2)!} \sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} .$$

Analog wie in Abschnitt 3.3.1 findet man die Resultate der $\mathbf{x}$ -Integration :

$$X_0^{(r)} = \frac{1}{r!}$$

$$X_{1[r+1]}^{(r)} = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1}$$

$$X_{2[r+1]}^{(r)} = \frac{2}{(r+2)!} \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} .$$

Berücksichtigen wir schließlich noch für die nicht-perturbativen Vertexkoeffizienten unsere Auswahlregel (★) in der Form :

$$G_{r-1}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-1}^{r+1} C_{2r-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)} \quad G_{r-2}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-2}^{r+2} C_{2r-m_3,r-2,m_3}^{(c)0(r)}$$

$$\tilde{G}_r^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-1}^r C_{2r-1-m_3,r,m_3}^{(c)0(r)} \quad \tilde{G}_{r-1}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-2}^{r+1} C_{2r-1-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)}$$

$$H_{r-1}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-1}^{r+1} m_3 C_{2r-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)} \quad H_{r-2}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-2}^{r+2} m_3 C_{2r-m_3,r-2,m_3}^{(c)0(r)}$$

$$L_{r-1}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-1}^{r+1} m_3 (m_3 - 1) C_{2r-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)} \quad L_{r-2}^{(c)0(r)} = \sum_{m_3=r-2}^{r+2} m_3 (m_3 - 1) C_{2r-m_3,r-2,m_3}^{(c)0(r)} ,$$

so gelangen wir zu den führenden UV-divergenten Beiträgen zum Geist-Gluon-Kondensat unserer Subschleifengröße (3.20) :

$$\Omega_{2(c)}^{(r)} = \frac{\Lambda^4}{4(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} .$$

$$\left\{ \left[6 \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) - \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right] \delta_{cf} - \right.$$

$$\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left[\sum_{m_3=r-1}^{r+1} \left((r+1)(r-1) + m_3(m_3-2r) \right) C_{2r-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)} - 3 \sum_{m_3=r-1}^r C_{2r-1-m_3,r,m_3}^{(c)0(r)} \right] -$$

$$6 \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_3=r-1}^{r+1} C_{2r-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)} \right) + \sum_{m_3=r-2}^{r+2} \left((r+1)(r-1) + m_3(m_3-2r) \right) C_{2r-m_3,r-2,m_3}^{(c)0(r)} +$$

$$3 \sum_{m_3=r-2}^{r+1} C_{2r-1-m_3,r-1,m_3}^{(c)0(r)} \left. \right\} ,$$

beziehungsweise nach expliziter Ausführung der Summationen über die nicht-perturbativen Indizes :

$$\begin{aligned}
\Omega_{2(c)}^{(r)} = & \frac{3 \Lambda^4}{4 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \left[2 \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) - \frac{1}{3} \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right] \delta_{cf} - \right. \\
& \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left[\frac{1}{3} C_{r,r-1,r}^{(c)0(r)} - (C_{r,r,r-1}^{(c)0(r)} + C_{r-1,r,r}^{(c)0(r)}) \right] - \\
& 2 \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) \left[C_{r+1,r-1,r-1}^{(c)0(r)} + C_{r,r-1,r}^{(c)0(r)} + C_{r-1,r-1,r+1}^{(c)0(r)} \right] + \\
& \left. C_{r,r-1,r-1}^{(c)0(r)} + C_{r-1,r-1,r}^{(c)0(r)} + C_{r+1,r-1,r-2}^{(c)0(r)} + C_{r-2,r-1,r+1}^{(c)0(r)} + C_{r+2,r-2,r-2}^{(c)0(r)} + C_{r-2,r-2,r+2}^{(c)0(r)} - \frac{1}{3} C_{r,r-2,r}^{(c)0(r)} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

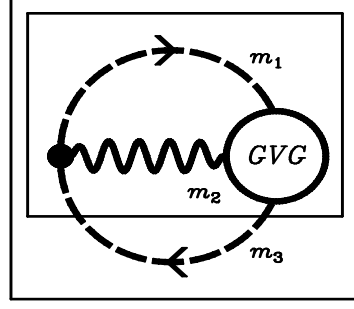
Dem zuletzt vollzogenen Umformungsschritt gebührt unsere besondere Beachtung; denn er macht deutlich, daß sich die Abhängigkeiten vom Approximationsgrad r in den zahlenwertigen Faktoren vor den Vertexkoeffizienten auf durchaus nicht-triviale Weise kanzellieren. Anders ausgedrückt : Es sind *ausschließlich* die Parameter der modifizierten Feynman-Regeln für Geist-Gluon-Vertex sowie die beiden Propagatoren, welche beim Kondensatbeitrag (3.23) die Stufe der verwendeten Approximanten ins Spiel bringen. In diesem Sinne stellen also die sich aus den Schleifenintegrationen ergebenden reellen Zahlen universelle Größen dar.

Hinsichtlich der strukturellen Merkmale des obigen Resultats gelten zunächst prinzipiell dieselben Feststellungen, die wir bereits im Rahmen der Diskussion des ersten Subschleifenanteils (3.19) getroffen haben. Neu ist, daß jetzt auch die Polpositionen des Gluon-Propagators in Verbindung mit führenden Kopplungspotenzen auftreten. Schließlich sei noch die formale ³ Symmetrie des Ausdrucks (3.23) unter Vertauschung der Indizes m_1 und m_3 für Geist- bzw. Antigeistfeld erwähnt.

3.3.3 Subschleife mit $(m_1 m_2)$

In diesem Abschnitt extrahieren wir zunächst die UV-Divergenz aus der vom Eichboson und dem in den nicht-perturbativen Vertex *einlaufenden* Geistfeld gebildeten Impulsschleife und formulieren den entsprechenden Subschleifenbeitrag wie folgt :

³Die Parameter $C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)i(r)}$ aus unserem Vertexansatz (3.3) weisen im allgemeinen selbst keine Symmetrieeigenschaften hinsichtlich der Vertauschung der beiden Geist-Freiheitsgrade auf, wie man bereits an der Form der perturbativen Feynman-Regel für den Geist-Gluon-Vertex erkennen kann.



$$\Omega_{3(c)}^{(r)} = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} (p^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} \cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ p^2 - \frac{(p \cdot k)^2}{k^2} \right\} \cdot$$

$$\frac{\delta_{cf} \left[(p-k)^2 k^2 p^2 \right]^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1 m_2 m_3}^{(c)0(r)} ((p-k)^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} (p^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p-k)^2 \left[\prod_{s=0}^{r-1} ((p-k)^2 + v_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} . \quad (3.24)$$

Eine vollkommen identische Rechnung wie zu (3.13), allerdings jetzt mit vertauschten Rollen der Indizes m_1 und m_3 ergibt hier :

$$\Omega_{3(c)}^{(r)} = \frac{3 \Lambda^4}{4 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left(\sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^{r-1} v_{r,2t+1} v_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_2=r-1}^{r+1} C_{2r-m_2, m_2, r-1}^{(c)0(r)} \right) + \sum_{m_2=r-2}^{r+2} C_{2r-m_2, m_2, r-2}^{(c)0(r)} \right\} . \quad (3.25)$$

Aus der obigen Bemerkung wird klar, daß die beiden Beiträge (3.19) und (3.25) zusammen genommen, dieselbe formale Vertauschungssymmetrie aufweisen, wie wir sie bereits beim zweiten Subschleifenterm (3.23) gefunden haben.

3.3.4 Zusammenfassung

Insgesamt folgt nun an Hand der Gegentermresultate (3.19), (3.23) sowie (3.25) für die im Sinne der erweiterten Störungsreihe führenden Beiträge zu den skalaren Geist-Gluon-Kondensaten der Gleichungen (3.10) in der r -ten Stufe der rationalen Approximantenfolge und Landau-Eichung :

$$\begin{aligned}
\bar{V}G^{(r)} = & -\frac{3g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{4(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ 2 \sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^{r-1} v_{r, 2t+1} v_{r, 2t'+1} + 2 \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r, 2s+1} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) - \frac{1}{3} \sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r, 2t+1} \sigma_{r, 2t'+1} + \right. \\
& \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) \left[\frac{1}{3} C_{r, r-1, r}^{(f)0(r)} - \left(C_{r, r, r-1}^{(f)0(r)} + C_{r-1, r, r}^{(f)0(r)} \right) \right] - \\
& \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r, 2s+1} \right) \left[3 \left(C_{r+1, r-1, r-1}^{(f)0(r)} + C_{r-1, r-1, r+1}^{(f)0(r)} \right) + 2 \left(C_{r, r-1, r}^{(f)0(r)} + C_{r-1, r+1, r-1}^{(f)0(r)} \right) + C_{r, r, r-1}^{(f)0(r)} + C_{r-1, r, r}^{(f)0(r)} \right] + \\
& 2 \left(C_{r+2, r-2, r-2}^{(f)0(r)} + C_{r-2, r-2, r+2}^{(f)0(r)} + C_{r+1, r-1, r-2}^{(f)0(r)} + C_{r-2, r-1, r+1}^{(f)0(r)} + C_{r-2, r+2, r-2}^{(f)0(r)} \right) + \\
& \left. C_{r, r-1, r-1}^{(f)0(r)} + C_{r-1, r-1, r}^{(f)0(r)} + C_{r-1, r+1, r-2}^{(f)0(r)} + C_{r-2, r+1, r-1}^{(f)0(r)} + C_{r, r, r-2}^{(f)0(r)} + C_{r-2, r, r}^{(f)0(r)} - \frac{1}{3} C_{r, r-2, r}^{(f)0(r)} \right\}, \tag{3.26a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}GS^{(r)} = & \frac{3g^2 (N_C^2 - 4) (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{4 N_C (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) \left[\frac{1}{3} C_{r, r-1, r}^{(d)0(r)} - \left(C_{r, r, r-1}^{(d)0(r)} + C_{r-1, r, r}^{(d)0(r)} \right) \right] - \right. \\
& \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r, 2s+1} \right) \left[3 \left(C_{r+1, r-1, r-1}^{(d)0(r)} + C_{r-1, r-1, r+1}^{(d)0(r)} \right) + 2 \left(C_{r, r-1, r}^{(d)0(r)} + C_{r-1, r+1, r-1}^{(d)0(r)} \right) + C_{r, r, r-1}^{(d)0(r)} + C_{r-1, r, r}^{(d)0(r)} \right] + \\
& 2 \left(C_{r+2, r-2, r-2}^{(d)0(r)} + C_{r-2, r-2, r+2}^{(d)0(r)} + C_{r+1, r-1, r-2}^{(d)0(r)} + C_{r-2, r-1, r+1}^{(d)0(r)} + C_{r-2, r+2, r-2}^{(d)0(r)} \right) + \\
& \left. C_{r, r-1, r-1}^{(d)0(r)} + C_{r-1, r-1, r}^{(d)0(r)} + C_{r-1, r+1, r-2}^{(d)0(r)} + C_{r-2, r+1, r-1}^{(d)0(r)} + C_{r, r, r-2}^{(d)0(r)} + C_{r-2, r, r}^{(d)0(r)} - \frac{1}{3} C_{r, r-2, r}^{(d)0(r)} \right\}. \tag{3.26b}
\end{aligned}$$

Bei beiden Vakuum Erwartungswerten finden wir in der niedrigsten Schleifenordnung Beiträge zur führenden UV-Divergenz, die entweder als Kombination aus Vertex- und Propagator Koeffizienten auftreten oder aber ausschließlich einen Parameter des Geist-Gluon-Vertex enthalten. Im farbantisymmetrischen Geist-Gluon-Kondensat zeigen sich darüber hinaus auch divergente Terme, die nur aus Kombinationen der Propagatorparameter bestehen. Das Auftreten Letzterer rührt vom perturbativen Anteil der Vertexfunktion her.

Insbesondere erhalten wir aus (3.26a) für das farbantisymmetrische Geist-Gluon-Kondensat in der ersten Approximationsstufe der Quasiteilchen-Sequenz :

$$\begin{aligned}
\bar{G}VG^{(1)} = & -\frac{3g^2 N_C(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{4(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ 2v_{1,1}^2 + 2v_{1,1}(\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) - \frac{1}{3}(\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,3}^2 + \sigma_{1,1}\sigma_{1,3}) + \right. \\
& (\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \left[\frac{1}{3}C_{1,0,1}^{(f)0(1)} - (C_{1,1,0}^{(f)0(1)} + C_{0,1,1}^{(f)0(1)}) \right] + C_{1,0,0}^{(f)0(1)} + C_{0,0,1}^{(f)0(1)} - \\
& \left. v_{1,1} \left[3(C_{2,0,0}^{(f)0(1)} + C_{0,0,2}^{(f)0(1)}) + 2(C_{1,0,1}^{(f)0(1)} + C_{0,2,0}^{(f)0(1)}) + C_{1,1,0}^{(f)0(1)} + C_{0,1,1}^{(f)0(1)} \right] \right\}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

In der nächst folgenden Approximationsstufe $r = 3$ erhöht sich augenscheinlich die Anzahl der in Verbindung mit dem Doppelpol auftretenden Terme :

$$\begin{aligned}
\bar{G}VG^{(3)} = & -\frac{3g^2 N_C(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{4(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ 2(v_{3,1}^2 + v_{3,3}^2 + v_{3,5}^2 + v_{3,1}(v_{3,3} + v_{3,5}) + v_{3,3}v_{3,5}) + \right. \\
& 2(v_{3,1} + v_{3,3} + v_{3,5})(\sigma_{3,1} + \sigma_{3,3} + \sigma_{3,5} + \sigma_{3,7}) - \\
& \frac{1}{3}(\sigma_{3,1}^2 + \sigma_{3,3}^2 + \sigma_{3,5}^2 + \sigma_{3,7}^2 + \sigma_{3,1}\sigma_{3,3} + (\sigma_{3,1} + \sigma_{3,3})(\sigma_{3,5} + \sigma_{3,7}) + \sigma_{3,5}\sigma_{3,7}) + \\
& (\sigma_{3,1} + \sigma_{3,3} + \sigma_{3,5} + \sigma_{3,7}) \left[\frac{1}{3}C_{3,2,3}^{(f)0(3)} - (C_{3,3,2}^{(f)0(3)} + C_{2,3,3}^{(f)0(3)}) \right] - \\
& (v_{3,1} + v_{3,3} + v_{3,7}) \left[3(C_{4,2,2}^{(f)0(3)} + C_{2,2,4}^{(f)0(3)}) + 2(C_{3,2,3}^{(f)0(3)} + C_{2,4,2}^{(f)0(3)}) + C_{3,3,2}^{(f)0(3)} + C_{2,3,3}^{(f)0(3)} \right] + \\
& 2(C_{5,1,1}^{(f)0(3)} + C_{1,1,5}^{(f)0(3)} + C_{4,2,1}^{(f)0(3)} + C_{1,2,4}^{(f)0(3)} + C_{1,5,1}^{(f)0(3)}) + \\
& \left. C_{3,2,2}^{(f)0(3)} + C_{2,2,3}^{(f)0(3)} + C_{2,4,1}^{(f)0(3)} + C_{1,4,2}^{(f)0(3)} + C_{3,3,1}^{(f)0(3)} + C_{1,3,3}^{(f)0(3)} - \frac{1}{3}C_{3,1,3}^{(f)0(3)} \right\}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Ein Blick auf (3.26a) macht nun deutlich, daß sich für alle folgenden Stufen der rationalen Approximation die Anzahl der beitragenden Vertexparameter nicht mehr erhöht. Anders ausgedrückt: Wir haben ab $r = 3$ tatsächlich schon alle Strukturmerkmale des Geist-Gluon-Kondensats im Sinne unserer erweiterten Störungstheorie erfaßt. Dies ist natürlich ein höchst willkommenes Resultat; der algebraische Komplikationsgrad bei der Kondensatberechnung in führender Schleifenordnung steigt hier ab $r = 3$ nicht mehr an. Die Ursache

dafür liegt natürlich in der charakteristischen Kopplung nicht-perturbativer Logarithmen an die höchste Schleifendivergenz, zu der aufgrund perturbativer Renormierbarkeit stets nur eine begrenzte Zahl von Termen beitragen kann.

3.4 Renormierung des Geist-Gluon-Kondensats

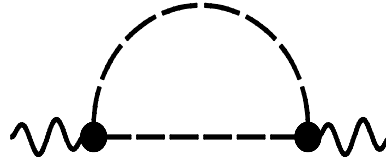
Das Problem des Auftretens von Poltermen mit logarithmischen Residuen bei der Berechnung von Mehrschleifenintegralen mit überlappenden Divergenzen ist bereits aus der Störungstheorie bekannt. Diese Beiträge für sich genommen, hätten nicht-lokale Counterterme zur Folge und stünden somit dem fundamentalen Prinzip der lokalen Formulierung einer Feldtheorie entgegen. 't Hooft und Veltman [58] haben eine Vorschrift zur Beseitigung dieser unerwünschten Polterme angegeben : Für jede auftretende Subdivergenz ist der Integralbeitrag mit dem zugehörigen Gegenterm als Insertion zu addieren. Übrig bleibt dann die Overall-Divergenz des Mehrschleifenintegrals.

Diese Methode ist selbstverständlich auch auf Integrale im Rahmen der nicht-perturbativ modifizierten Störungsreihe anzuwenden. Dabei ist zu beachten, daß gemäß dem Prinzip der perturbativen Renormierbarkeit, die Counterterm-Insertionen der gewöhnlichen Störungsrechnung zu entnehmen sind.

Wir wollen das Verfahren jetzt zuerst am Beispiel des in der Kopplung führenden Beitrags zum Geist-Gluon-Kondensat demonstrieren.⁴ Der gesamte Integral-Gegenterm für die verschiedenen Subdivergenzen des (lorentzkontrahierten) Zweischleifenintegrals (3.11) setzt sich wie folgt zusammen :

$$CT^{(r)} = CT_1^{(r)} + 2 \cdot CT_2^{(r)} . \quad (3.29)$$

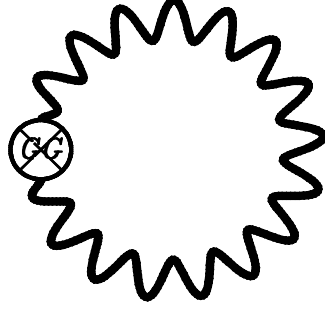
Zunächst gilt für den perturbativen Einschleifen-Counterterm zum Geistanteil der Gluonpolarisation :



$$\begin{aligned} I_{ab}^{\mu\nu}(p) &= g^2 N_C \delta_{ab} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(p+k)^\mu k^\nu}{k^2 (p+k)^2} \\ &= \frac{g^2 N_C}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{2-D} \delta_{ab} \{ \delta^{\mu\nu} p^2 - (2-D) p^\mu p^\nu \} \int_0^1 dx x(1-x) \left[x(1-x) \frac{p^2}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} \\ &= -\frac{g^2 N_C}{12(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \delta_{ab} \{ \delta^{\mu\nu} p^2 + 2 p^\mu p^\nu \} + \mathcal{O}(\epsilon^0) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

⁴Dabei werden wir hier wiederum nur den Doppelpolbeitrag explizit angeben, da wir bereits im Verlauf der Kondensatberechnung einfache Pole mit logarithmischen Residuen als nicht-führende Divergenzen vernachlässigt haben.

Mit (3.30) als Insertion in der nicht-perturbativen Eichbosonschleife erhalten wir als ersten Gegentermbeitrag :



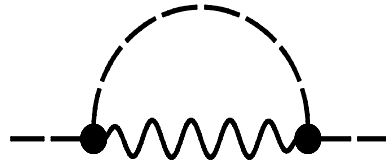
$$CT_1^{(r)} = -\frac{g^2 N_C (N_C^2 - 1) (D - 1)}{12 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^2 D_T^{(r)}(p^2). \quad (3.31)$$

Das hierbei auftretende Impulsraumintegral ist bis auf konstante Faktoren identisch mit dem Abelschen Gluon-Kondensat (2.11) zum Nennergrad r .

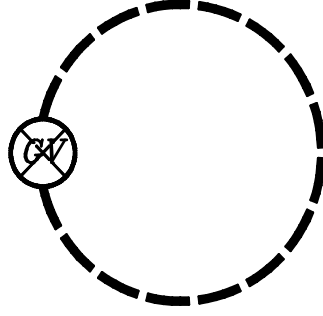
Daher folgt unter Verwendung von (2.18) das Resultat :

$$CT_1^{(r)} = -\frac{g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{2 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}\right) \right\} \cdot \left\{ \sum_{\substack{s, s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r, 2s+1} \sigma_{r, 2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r u_{r, 2t} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) + \sum_{\substack{t, t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r, 2t} u_{r, 2t'} \right\}. \quad (3.32)$$

Weiter ergibt sich für den störungstheoretischen Einschleifen-Counterterm zur Geist-Selbstenergie in Landau-Eichung :



$$\begin{aligned} I_{ab}(p) &= -g^2 N_C \delta_{ab} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p^2 k^2 - (p \cdot k)^2}{k^4 (p+k)^2} \\ &= -\frac{g^2 N_C (D-1)}{2 (4\pi)^{D/2}} \Gamma(2-D/2) \delta_{ab} p^2 \int_0^1 dx (1-x) \left[x(1-x) \frac{p^2}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} \\ &= -\frac{3 g^2 N_C}{4 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \delta_{ab} p^2 + \mathcal{O}(\epsilon^0). \end{aligned} \quad (3.33)$$



Der Einschub von (3.33) in die nicht-perturbative Geisterschleife führt uns dann zum zweiten Integral-Gegenterm des Geist-Gluon-Kondensats gemäß :

$$CT_2^{(r)} = -\frac{3g^2 N_C (N_C^2 - 1)}{4(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^2 \tilde{D}^{(r)}(p^2). \quad (3.34)$$

Mit dem Resultat (2.40) für das Geisterkondensat der kanonischen Massendimension vier erhalten wir explizit :

$$CT_2^{(r)} = -\frac{3g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{2(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}\right) \right\} \cdot \left\{ \sum_{\substack{s,s'=0 \\ s \leq s'}}^{r-1} v_{r,2s+1} v_{r,2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r v_{r,2t} \right) \left(\sum_{s=0}^{r-1} v_{r,2s+1} \right) + \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r v_{r,2t} v_{r,2t'} \right\}. \quad (3.35)$$

Begründung der Gegentermtechnik

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda^2} \right)^3 \left\{ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 2 \times \text{Diagram 3} \right\} = \text{endlich}$$

Abbildung 3.1: Gegentermtechnik am Beispiel des Geist-Gluon-Kondensats

Nach unseren Ausführungen über die Beseitigung von Poltermen mit logarithmischen Residuen sind wir nun in die Lage versetzt, wie oben angekündigt, die Gültigkeit der Gegentermtechnik auch bei Abwesenheit äußerer Impulse am Beispiel des Geist-Gluon-Kondensats zu demonstrieren. Wir betrachten dazu Fig. 3.1. Zunächst ist festzustellen, daß die in geschweiften Klammern stehende Summe von Graphen nach Konstruktion insgesamt keine Subdivergenzen besitzt. Ein einfaches Power-Counting-Argument liefert als Overall-Divergenzgrad dieser Graphenkombination $\delta = 4$. Weiter sind die Counterterme selbst auf Grund der vorausgesetzten perturbativen Renormierbarkeit unabhängig vom spontanen QCD-Skalenparameter Λ . Damit kann man sich aber nun unter Berücksichtigung der rationalen Struktur der Integranden bezüglich Λ relativ leicht davon überzeugen,

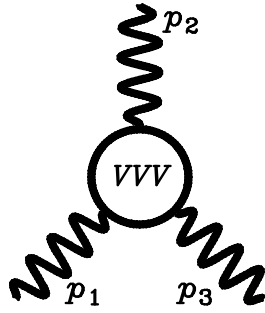
daß – wie in der Abbildung angedeutet – die dreimalige Ableitung nach dem Quadrat des Skalenparameters die Overall-Divergenz beseitigt und somit zu einem endlichen Resultat führt.

Die systematische Behandlung des nach Addition der Integral-Gegenterme für die einzelnen Subdivergenzen verbleibenden Doppelpols in ϵ als Ausdruck der Overall-Divergenz des Zweischleifenintegrals (3.11) hat nun im Rahmen der COR zu erfolgen und führt uns auf das bereits erwähnte Mischungsproblem zusammengesetzter Operatoren mit kanonischer Massendimension vier [51].

Kapitel 4

Das 3-Gluon-Kondensat

4.1 3-Gluon-Vertex in Landau-Eichung



Wir nehmen jetzt wieder Impulserhaltung gemäß $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ an und zählen die einzelnen Impulsvariablen als einlaufend bezüglich der nicht-perturbativ modifizierten Dreipunkt-Vertexfunktion.

Beginnend mit der farbkovarianten Zerlegung des Basisvertex für die Wechselwirkung dreier Eichbosonfelder in der Form :

$$(\Gamma_{3V})_{abc}^{\mu\lambda\nu} = f_{abc} \Gamma_{3V(f)}^{\mu\lambda\nu} + d_{abc} \Gamma_{3V(d)}^{\mu\lambda\nu} , \quad (4.1)$$

wählen wir im Folgenden die Landau-Eichung und setzen :

$$\Gamma_{3T(c)}^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) = t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\lambda\lambda'}(p_2) t^{\nu\nu'}(p_3) (\Gamma_{3V(c)})_{\mu'\lambda'\nu'}(p_1, p_2, p_3) , \quad (4.2)$$

wobei $c \in \{f, d\}$ die zugehörige Farbsymmetrie kennzeichnet.

Die Eigenschaft der Lorentz-Kovarianz führt uns schließlich auf folgende Darstellung der dreifach transversal projizierten Vertexfunktion :

$$\begin{aligned} (\Gamma_{3T(c)})^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) = & i g t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\lambda\lambda'}(p_2) t^{\nu\nu'}(p_3) \left\{ \delta_{\lambda'\nu'}(p_2 - p_3)_{\mu'} F_{(c)0}(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + \right. \\ & \delta_{\mu'\nu'}(p_3 - p_1)_{\lambda'} F_{(c)0}(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + \delta_{\mu'\lambda'}(p_1 - p_2)_{\nu'} F_{(c)0}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + \\ & \left. (p_2 - p_3)_{\mu'}(p_3 - p_1)_{\lambda'}(p_1 - p_2)_{\nu'} F_{(c)1}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right\} . \end{aligned} \quad (4.3)$$

In den FDRA-Ansätzen [3] für die invarianten Funktionen ($k \in \{0, 1\}$) gemäß

$$F_{(c)k}^{(r,0)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) := F_{(c)k}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ = \frac{N_{3V(c)k}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\left[\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \right]} \quad (4.4)$$

wurde bereits wieder die für die DS-Selbstkonsistenz erforderliche Übereinstimmung von Propagatorzählern und dem Nenner der Vertexfunktion implementiert.

Die Schreibweise in (4.3) soll andeuten, daß als Folge der Bose-Symmetrie die dimensionslosen Funktionen $F_{(c)0}$ symmetrisch (falls $c = f$) bzw. antisymmetrisch (falls $c = d$) in den ersten beiden Argumenten sind, während die Funktionen $F_{(c)1}$ mit Massendimension -2 totalsymmetrisch ($c = f$) bzw. total antisymmetrisch ($c = d$) sein müssen.

Für die Zählerpolynome aus (4.4) setzen wir an :

$$N_{3V(c)k}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)k(r)} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-k-(m_1+m_2+m_3)}, \quad (4.5)$$

und berücksichtigen hierbei den störungstheoretischen Limes in Gestalt der Euklidischen Feynman-Regel [4] :

$$(\Gamma_{3V}^{(0)pert})_{abc}^{\mu\lambda\nu} = i g f_{abc} \left\{ \delta^{\lambda\nu} (p_2 - p_3)^\mu + \delta^{\mu\nu} (p_3 - p_1)^\lambda + \delta^{\mu\lambda} (p_1 - p_2)^\nu \right\}, \quad (4.6)$$

durch die Definition $C_{r,r,r}^{(c)k(r)} := \delta_{cf} \delta_{k0}$.

Aus der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit unseres Ansatzes (4.4) erhalten wir als Einschränkungen $(\star)$ für den Summationsbereich der Indizes der nicht-perturbativen Vertexkoeffizienten :

$$m_1 + m_2 + m_3 \leq 3r - k \\ m_1 + m_2 \leq 2r - k \\ m_2 + m_3 \leq 2r - k \\ m_1 + m_3 \leq 2r - k .$$

Die zur Farbsymmetrie c gehörige 3-Punkt-Greens-Funktion in Landau-Eichung setzt sich dann in der bekannten Weise aus dem entsprechenden Beitrag des 3-Gluon-Vertex und den Propagatoren des Eichfeldes zusammen :

$$(G_{3T(c)})_{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) = t_{\mu\mu'}(p_1) D_T(p_1^2) t_{\lambda\lambda'}(p_2) D_T(p_2^2) t_{\nu\nu'}(p_3) D_T(p_3^2) \Gamma_{3T(c)}^{\mu'\lambda'\nu'}(p_1, p_2, p_3) .$$

Für die r -te Stufe der rationalen Approximation im Rahmen unserer erweiterten Störungsreihe erhalten wir dementsprechend :

$$\begin{aligned} (G_{3T(c)}^{(r)})^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) = \\ i g \frac{t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\lambda\lambda'}(p_2) t^{\nu\nu'}(p_3)}{\left[\prod_{s=0}^r (p_1^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (p_2^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (p_3^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} . \\ \left\{ \delta_{\lambda'\nu'}(p_2 - p_3)_{\mu'} N_{3T(c)0}^{(r)}(p_2^2, p_3^2; p_1^2) + \delta_{\mu'\nu'}(p_3 - p_1)_{\lambda'} N_{3T(c)0}^{(r)}(p_3^2, p_1^2; p_2^2) + \right. \\ \left. \delta_{\mu'\lambda'}(p_1 - p_2)_{\nu'} N_{3T(c)0}^{(r)}(p_1^2, p_2^2; p_3^2) + (p_2 - p_3)_{\mu'} (p_3 - p_1)_{\lambda'} (p_1 - p_2)_{\nu'} N_{3T(c)1}^{(r)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right\} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wir werden für spätere Berechnungen im Rahmen der Landau-Eichung folgende alternative Schreibweise im Sinne von (4.2) und (4.3) verwenden :

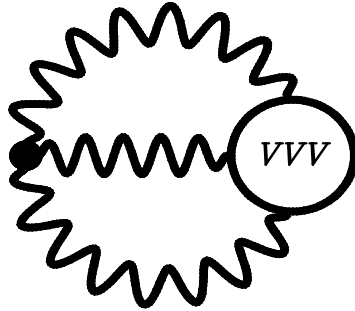
$$\Gamma_{3T(c)}^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) =: i g \sum_{j=1}^4 h_j^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) F_{(c)j}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) , \quad (4.8a)$$

mit

$$h_j^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, p_3) = t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\lambda\lambda'}(p_2) t^{\nu\nu'}(p_3) (f_j)_{\mu'\lambda'\nu'}(p_1, p_2, p_3) . \quad (4.8b)$$

Dem Summanden mit $j = 4$ soll hierbei der Fall $k = 1$ in der ursprünglichen Notation entsprechen. Der perturbative Grenzfall wird dann gewährleistet durch die Definition $C_{r,r,r}^{(c)j(r)} := \delta_{cf} (1 - \delta_{j4})$. Die Funktionen $(f_j)^{\mu\lambda\nu}$ sind unmittelbar (4.3) zu entnehmen.

4.2 Definition des 3-Gluon-Kondensats



Der Ausgangspunkt unserer nachfolgenden Betrachtungen sei die Schwinger-Funktion für drei Eichbosonfelder :

$$\langle A_a^\mu(x) A_b^\lambda(y) A_c^\nu(z) \rangle = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} e^{ip_1(x-z)} e^{ip_2(y-z)} (G_{3V})_{abc}^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) . \quad (4.9)$$

Hieraus folgt durch einmalige Ableitung für das lokale Dreipunktkondensat der Massendimension vier :

$$\langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle = i \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} (p_1)^\omega (G_{3V})_{abc}^{\mu\lambda\nu}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) . \quad (4.10)$$

Eine kovariante Zerlegung dieses Vakuumerwartungswertes nach Farb- und Lorentz-Tensoren ergibt :

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle &= c_f^t f_{abc} \left\{ \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} \right\} + \\ &\quad d_{abc} \left\{ c_d^t [D(\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega}) - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu}] + c_d^l \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu} \right\} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dabei wurde Gebrauch gemacht von der Symmetrie des Tensors (4.10) unter simultaner Vertauschung $\lambda \longleftrightarrow \nu$, $b \longleftrightarrow c$. Aus den beiden $(\lambda\nu)$ -symmetrischen Lorentz-Tensoren $\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega}$ und $\delta^{\lambda\nu} \delta^{\mu\omega}$ bildeten wir zwei zueinander orthogonale Linearkombinationen.

Für die skalaren Koeffizienten in (4.11) findet man unter Verwendung von Spureigenschaften der $SU(N_C)$ -Farbalgebra aus A.3 :

$$\begin{aligned} c_f^t &= \frac{2i}{N_C(N_C^2 - 1)D(D - 1)} \langle Tr(\partial^\mu A^\nu) [A_\mu, A_\nu] \rangle \\ c_d^t &= \frac{N_C}{(N_C^2 - 4)(N_C^2 - 1)D^2(D - 1)(D + 2)} \langle D Tr((\partial^\nu A^\mu) \{A_\mu, A_\nu\}) - d_{abc} (\partial_\mu A_a^\mu) A_{\nu,b} A_c^\nu \rangle \\ c_d^l &= \frac{N_C}{(N_C^2 - 4)(N_C^2 - 1)D^2} \langle d_{abc} (\partial_\mu A_a^\mu) A_{\nu,b} A_c^\nu \rangle . \end{aligned}$$

Auf dieser Grundlage definieren wir nun die skalaren 3-Gluon-Kondensate gemäß :

$$V3 := i g \langle Tr(\partial^\mu A^\nu) [A_\mu, A_\nu] \rangle \quad (4.12a)$$

$$V3ST := g \langle D Tr((\partial^\nu A^\mu) \{A_\mu, A_\nu\}) - d_{abc} (\partial_\mu A_a^\mu) A_{\nu,b} A_c^\nu \rangle \quad (4.12b)$$

$$V3SL := g \langle d_{abc} (\partial_\mu A_a^\mu) A_{\nu,b} A_c^\nu \rangle . \quad (4.12c)$$

Dann gilt ¹ :

$$V3 = \frac{1}{4} g f_{abc} \{ \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\omega} \} \langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle \quad (4.13a)$$

$$V3ST = \frac{1}{2} g d_{abc} \{ D(\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\omega} + \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\omega}) - 2\delta_{\mu\omega} \delta_{\nu\lambda} \} \langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle \quad (4.13b)$$

$$V3SL = g d_{abc} \delta_{\mu\omega} \delta_{\nu\lambda} \langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle . \quad (4.13c)$$

Zur Bestimmung der skalaren Vakuumerwartungswerte aus (4.12) genügt also die Kenntnis des Tensors (4.10), dessen Produkt mit der (renormierten) Kopplungskonstanten wir anschließend im Rahmen der mikroskopischen Berechnung dann bis auf weiteres schlechthin als das 3-Gluon-Kondensat bezeichnen wollen.

Auch die drei Größen (4.12) zählen zu den insgesamt dreizehn a priori unbekannten Parametern, deren Bestimmung äquivalent mit der Lösung des Selbstkonsistenzproblem der DS-Gleichungen für die Yang-Mills-Theorie im Kontext der OPE eichvarianter QCD-Korrelationsfunktionen ist. Weiter ist bekannt, daß eine der Slavnov-Taylor-Identitäten das Verschwinden des rein longitudinalen Beitrags zum vollen 3-Gluon-Vertex fordert. Wie die Rechnungen in [63] zeigen, ist diese Forderung für seinen farbantisymmetrischen OPE-Beitrag in beliebiger kovarianter Eichung auf Grund des Verschwindens des gluonischen Bewegungsgleichungskondensats erfüllt; um die Gültigkeit der STI auch im farbsymmetrischen Sektor der OPE für den 3-Punkt-Vertex zu gewährleisten, muß als Relation zwischen den beiden exotischen Vakuumkondensaten gelten :

$$V3ST + 3 \cdot V3SL = 0 .$$

Wie (1.40) zu entnehmen ist, tritt das kanonische Dreipunktkondensat $V3$ aus Gleichung (4.12a) auch als BRST-varianter Beitrag in einer Darstellung des eichunabhängigen Gluon-Kondensats $\langle G^2 \rangle$ auf.

4.3 Berechnung des 3-Gluon-Kondensats zum Nennergrad r

Für das 3-Gluon-Kondensat in der r -ten Stufe der rationalen Approximation gilt nach dem oben Gesagten :

$$g \langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle^{(r)} = i g \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} p^\omega (G_{3V}^{(r)})^{\mu\lambda\nu}_{abc}(p, k, -p-k) . \quad (4.14)$$

Wir setzen nun in Landau-Eichung :

¹Das farbsymmetrische, longitudinale Kondensat $V3SL$ haben wir hier nur der Vollständigkeit halber angegeben. An Stelle unserer dreifach transversal projizierten Vertexfunktion (4.3) müßten wir zu seiner Berechnung die allgemeine Struktur des gluonischen 3-Punkt-Vertex mit seinen 14 linear unabhängigen Lorentz-Tensoren dritter Stufe und 6 verschiedenen invarianten Funktionen für jede der beiden möglichen Farbstrukturen [59] verwenden.

$$g \langle (\partial^\omega A_a^\mu) A_b^\lambda A_c^\nu \rangle^{(r)} =: -g^2 \sum_{j=1}^4 \left\{ f_{abc} [I_{(f)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} + d_{abc} [I_{(d)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} \right\}, \quad (4.15a)$$

wobei mit den rationalen Ansätzen in niedrigster störungstheoretischer Ordnung gilt :

$$\begin{aligned} [I_{(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} p^\omega h_j^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p-k) \cdot \\ &\quad \frac{\sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (p^2)^{m_1} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)-\delta_{j4}}}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}. \end{aligned} \quad (4.15b)$$

Zur Berechnung des führenden divergenten Beitrags aus dem Zweischleifenintegral (4.15b) verwenden wir erneut die Gegentermtechnik und müssen daher zunächst die verschiedenen Subdivergenzen spezifizieren. Konkret geschieht dies durch Auswahl von je zwei Indizes der nicht-perturbativen Dreipunktfunktion, die über ihre angehängten Propagatoren jeweils eine Integrationsschleife definieren. In diesem Sinne setzen wir also :

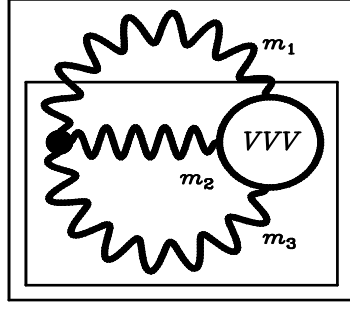
$$[I_{(c)j}^{(r)}]_{div}^{\mu\lambda\nu\omega} =: \sum_{n=1}^3 [\Omega_{n(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega},$$

wobei in unserer Notation $[\Omega_{n(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega}$ der zuerst auszuführenden $(m_k m_l)$ -Subschleife mit $(n k l)$ zyklisch entsprechen soll.

Die analytische Auswertung dieser Integrale erfolgt nun prinzipiell mit denselben Methoden, die wir bereits beim Geist-Gluon-Kondensat ausführlich kennengelernt haben. Sie gestaltet sich jedoch nicht zuletzt auf Grund der hier vorliegenden Divergenzstruktur technisch schwieriger und erfordert einen weit höheren algebraischen Aufwand. Wir wollen deshalb an dieser Stelle im wesentlichen nur noch die Ergebnisse referieren. Details der jeweiligen Rechnung können dem entsprechenden Kapitel des Anhangs B entnommen werden.

4.3.1 Subschleife mit $(m_2 m_3)$

Von Gleichung (4.15b) ausgehend, suchen wir hier zunächst die Subdivergenz der durch die Indizes m_2 und m_3 definierten Impulsschleife und schreiben bei somit festgelegter Integrationsreihenfolge :



$$\begin{aligned}
 [\Omega_{1(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\omega (p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1}}{\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} h_j^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p-k) \cdot \\
 &\quad \frac{C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{2r-(m_2+m_3)-\delta_{j4}}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wie in Anhang B.1 dokumentiert, ergibt sich dafür :

$$\begin{aligned}
 [\Omega_{1(c)1}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{\Lambda^4}{144 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
 &\quad \left\{ 9 \left[\left(\sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r,r}^{(c)1(r)} - C_{r-2,r,r}^{(c)1(r)} \right] (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega}) + \right. \\
 &\quad \left[C_{r-2,r+1,r-1}^{(c)1(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r+1,r-1}^{(c)1(r)} \right] (13 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 5 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
 &\quad \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r-1,r+1}^{(c)1(r)} - C_{r-2,r-1,r+1}^{(c)1(r)} \right] (13 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 5 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
 &\quad \left. C_{r-2,r+2,r-2}^{(c)1(r)} (17 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 4 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - C_{r-2,r-2,r+2}^{(c)1(r)} (17 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 4 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.17a}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{1(c)2}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{\Lambda^4}{144(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\quad \left\{ \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_3=r-1}^{r+1} C_{r-1,2r-m_3,m_3}^{(c)2(r)} \right) + \sum_{m_3=r-2}^{r+2} C_{r-2,2r-m_3,m_3}^{(c)2(r)} \right\} \cdot \\
&\quad (4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 32 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) ,
\end{aligned} \tag{4.17b}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{1(c)3}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{\Lambda^4}{144(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\quad \left\{ \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_3=r-1}^{r+1} C_{r-1,2r-m_3,m_3}^{(c)3(r)} \right) + \sum_{m_3=r-2}^{r+2} C_{r-2,2r-m_3,m_3}^{(c)3(r)} \right\} \cdot \\
&\quad (32 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) ,
\end{aligned} \tag{4.17c}$$

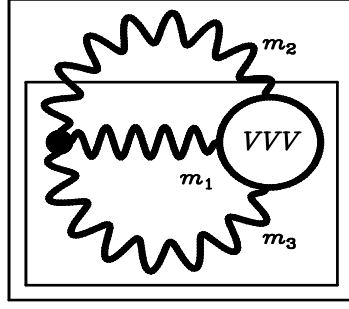
$$[\Omega_{1(c)4}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} = 0 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) . \tag{4.17d}$$

Erneut legt der dimensionsbehaftete spontane Parameter Λ die Massenskala der Beiträge zum Vakuum Erwartungswert fest. Mit dem führenden Doppelpol in ϵ tritt jeweils das Quadrat eines nicht-perturbativen Logarithmus auf, wodurch sich – wie schon mehrfach beschrieben – führende Anteile im Sinne der erweiterten Störungsreihe manifestieren. Entsprechend zum Fall des Geist-Gluon-Kondensats finden wir auch hier sowohl Kombinationen aus Vertex- und Propagator Koeffizienten vor, als auch Beiträge, die ausschließlich durch die Vertexparameter bestimmt sind. Im farbantisymmetrischen Sektor sind darüber hinaus mit dem rein perturbativen Anteil der gluonischen Dreipunktfunktion wieder divergente Strukturen verknüpft, welche nur aus Kombinationen der Propagatorparameter bestehen. Einfache Pole mit logarithmischen Residuen haben wir als nicht-führende Beiträge vernachlässigt.

Aus den vorliegenden Resultaten (4.17) deutet sich eine *formale* (Anti-)Symmetrieeigenschaft unter simultanen Vertauschungen $\lambda \longleftrightarrow \nu$ und $m_2 \longleftrightarrow m_3$ an, wobei die hier verwendete Sprechweise darauf hinweisen soll, daß intrinsische Symmetriemerkmale der Vertexkoeffizienten zunächst außer acht gelassen werden. So ist der Beitrag (4.17a) für sich bereits antisymmetrisch unter der genannten Vertauschungsoperation, während man bei (4.17b) und (4.17c) zusammengenommen diese Eigenschaft vorfindet. Man kann an dieser Stelle bereits die Vermutung äußern, daß im Hintergrund unserer Beobachtung die Bose-Symmetrie des Tensors (4.10) bezüglich der beiden undifferenzierten Gluonfelder steht.

4.3.2 Subschleife mit $(m_3 m_1)$

Jetzt berechnen wir für das Zweischleifenintegral (4.15b) zuerst die UV-Divergenz der durch die Indizes m_1 und m_3 definierten Subschleife :



$$\begin{aligned}
 [\Omega_{2(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} h_j^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p-k) p^\omega \cdot \\
 &\quad \frac{C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (p^2)^{m_1} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{2r-(m_1+m_3)-\delta_{j4}}}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Mit den in Anhang B.2 beschriebenen technischen Einzelheiten folgt als Resultat für den Doppelpolbeitrag des 2-Loop-Integrals bei festgelegter Schleifenfolge :

$$\begin{aligned}
 [\Omega_{2(c)1}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{\Lambda^4}{144 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
 &\quad \left\{ \left[- \left(\sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} + \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r,r-1,r}^{(c)1(r)} - C_{r,r-2,r}^{(c)1(r)} \right] (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 7 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \right. \\
 &\quad \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r+1,r-1,r-1}^{(c)1(r)} - C_{r+1,r-2,r-1}^{(c)1(r)} \right] (2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
 &\quad 3 \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r-1,r+1}^{(c)1(r)} - C_{r-1,r-2,r+1}^{(c)1(r)} \right] (4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
 &\quad \left. C_{r-2,r-2,r+2}^{(c)1(r)} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 17 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 4 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - 3 C_{r+2,r-2,r-2}^{(c)1(r)} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega}) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.19a}$$

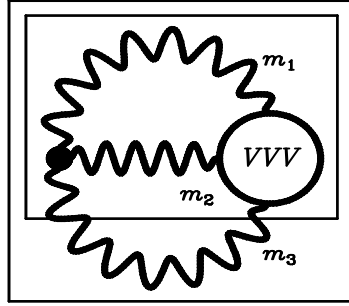
$$\begin{aligned}
[\Omega_{2(c)2}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{\Lambda^4}{144 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\left\{ \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} (2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 26 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + 9 (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 5 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \cdot \right. \\
&\left[2 \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right)^2 \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_3=r-1}^r C_{2r-1-m_3,r,m_3}^{(c)2(r)} \right) + \sum_{m_3=r-2}^{r+1} C_{2r-1-m_3,r-1,m_3}^{(c)2(r)} \right] + \\
&\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left[C_{r+1,r-1,r-1}^{(c)2(r)} (-28 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 100 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 13 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \right. \\
&C_{r,r-1,r}^{(c)2(r)} (-20 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 86 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 11 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - 3 C_{r-1,r-1,r+1}^{(c)2(r)} (6 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 34 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 5 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \Big] + \\
&3 C_{r+2,r-2,r-2}^{(c)2(r)} (8 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 18 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + 5 C_{r+1,r-2,r-1}^{(c)2(r)} (2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
&C_{r,r-2,r}^{(c)2(r)} (2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - 3 C_{r-1,r-2,r+1}^{(c)2(r)} (4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
&\left. C_{r-2,r-2,r+2}^{(c)2(r)} (4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 58 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \right\}, \tag{4.19b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{2(c)3}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{\Lambda^4}{144 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\left\{ \left[\left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r,r-1,r}^{(c)3(r)} + C_{r,r-2,r}^{(c)3(r)} \right] (34 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 14 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 5 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - \right. \\
&\left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r+1,r-1,r-1}^{(c)3(r)} - C_{r+1,r-2,r-1}^{(c)3(r)} \right] (35 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 19 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 4 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - \\
&3 \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r-1,r+1}^{(c)3(r)} - C_{r-1,r-2,r+1}^{(c)3(r)} \right] (11 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 3 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
&\left. 3 C_{r+2,r-2,r-2}^{(c)3(r)} (12 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 8 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + C_{r-2,r-2,r+2}^{(c)3(r)} (32 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \right\}, \tag{4.19c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{2(c)4}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \frac{23 \Lambda^4}{288 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\left\{ \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_3=r-1}^r C_{2r-1-m_3,r-1,m_3}^{(c)4(r)} \right) - \sum_{m_3=r-2}^{r+1} C_{2r-1-m_3,r-2,m_3}^{(c)4(r)} \right\} (\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 5 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) .
\end{aligned} \tag{4.19d}$$

Mit Ausnahme des Symmetriearguments können hier dieselben Feststellungen hinsichtlich der Strukturmerkmale unserer Gegentermbeiträge getroffen werden, wie wir sie bereits im Anschluß an (4.17) diskutiert haben.

4.3.3 Subschleife mit $(m_1 m_2)$



Es soll hier zunächst die UV-Divergenz aus der Impulsschleife mit den Indizes m_1 und m_2 extrahiert werden :

$$\begin{aligned}
[\Omega_{3(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{r-m_3}}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} h_j^{\mu\lambda\nu}(p, -p-k, k) p^\omega \cdot \\
&\frac{C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (p^2)^{m_1} ((p+k)^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{2r-(m_1+m_2)-\delta_{j4}}}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} .
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ein Blick zurück zu Gleichung (4.18) sowie der Hinweis auf die Eigenschaften ² :

$$\begin{aligned}
h_1^{\mu\lambda\nu}(p, -p-k, k) &= -h_1^{\mu\nu\lambda}(p, k, -p-k) \\
h_2^{\mu\lambda\nu}(p, -p-k, k) &= -h_3^{\mu\nu\lambda}(p, k, -p-k) \\
h_3^{\mu\lambda\nu}(p, -p-k, k) &= -h_2^{\mu\nu\lambda}(p, k, -p-k) \\
h_4^{\mu\lambda\nu}(p, -p-k, k) &= -h_4^{\mu\nu\lambda}(p, k, -p-k) ,
\end{aligned}$$

²Vergleiche dazu die Definition in (4.8).

machen sofort klar, daß wir zur Berechnung des Gegentermbeitrags (4.20) unmittelbar auf die Ergebnisse des letzten Abschnittes zurückgreifen können. Wir erhalten schließlich mit Bezug auf (4.19) das Resultat :

$$\begin{aligned}
[\Omega_{3(c)1}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} = & -\frac{\Lambda^4}{144(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \left[- \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} + \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r,r,r-1}^{(c)1(r)} - C_{r,r,r-2}^{(c)1(r)} \right] (\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 7 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \right. \\
& \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r+1,r-1,r-1}^{(c)1(r)} - C_{r+1,r-1,r-2}^{(c)1(r)} \right] (2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
& 3 \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r+1,r-1}^{(c)1(r)} - C_{r-1,r+1,r-2}^{(c)1(r)} \right] (4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
& \left. C_{r-2,r+2,r-2}^{(c)1(r)} (\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 17 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 4 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - 3 C_{r+2,r-2,r-2}^{(c)1(r)} (\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega}) \right\}, \\
\end{aligned} \tag{4.21a}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{3(c)2}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} = & -\frac{\Lambda^4}{144(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \left[\left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r,r,r-1}^{(c)2(r)} + C_{r,r,r-2}^{(c)2(r)} \right] (34 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 14 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 5 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - \right. \\
& \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r+1,r-1,r-1}^{(c)2(r)} - C_{r+1,r-1,r-2}^{(c)2(r)} \right] (35 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 19 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 4 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - \\
& 3 \left[\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) C_{r-1,r+1,r-1}^{(c)2(r)} - C_{r-1,r+1,r-2}^{(c)2(r)} \right] (11 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 3 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
& \left. 3 C_{r+2,r-2,r-2}^{(c)2(r)} (12 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 8 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + C_{r-2,r+2,r-2}^{(c)2(r)} (32 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \right\}, \\
\end{aligned} \tag{4.21b}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{3(c)3}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= -\frac{\Lambda^4}{144(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\left\{ \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) \delta_{cf} (2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 26 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + 9 (\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 5 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \cdot \right. \\
&\left[2 \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right)^2 \delta_{cf} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_2=r-1}^r C_{2r-1-m_2, m_2, r}^{(c)3(r)} \right) + \sum_{m_2=r-2}^{r+1} C_{2r-1-m_2, m_2, r-1}^{(c)3(r)} \right] + \\
&\left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left[C_{r+1, r-1, r-1}^{(c)3(r)} (-28 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 100 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 13 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \right. \\
&C_{r, r, r-1}^{(c)3(r)} (-20 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 86 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 11 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - 3 C_{r-1, r+1, r-1}^{(c)3(r)} (6 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 34 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 5 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \left. \right] + \\
&3 C_{r+2, r-2, r-2}^{(c)3(r)} (8 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 18 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + 5 C_{r+1, r-1, r-2}^{(c)3(r)} (2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
&C_{r, r, r-2}^{(c)3(r)} (2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) - 3 C_{r-1, r+1, r-2}^{(c)3(r)} (4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) + \\
&\left. C_{r-2, r+2, r-2}^{(c)3(r)} (4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 58 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \right\}, \tag{4.21c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{3(c)4}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= -\frac{23 \Lambda^4}{288(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\left\{ \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left(\sum_{m_2=r-1}^r C_{2r-1-m_2, m_2, r-1}^{(c)4(r)} \right) - \sum_{m_2=r-2}^{r+1} C_{2r-1-m_2, m_2, r-2}^{(c)4(r)} \right\} (\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 5 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda}) \cdot \tag{4.21d}
\end{aligned}$$

Zusammen mit (4.19) betrachtet, weist das obige Ergebnis nun ebenfalls die bereits zur Sprache gekommene formale Antisymmetrie unter gleichzeitigen Vertauschungen $\lambda \longleftrightarrow \nu$ und $m_2 \longleftrightarrow m_3$ auf.

4.3.4 Zusammenfassung

Nachdem wir unter Anwendung der Gegentermtechnik alle zur höchsten UV-Divergenz des Zweischleifenintegrals (4.15b) zählenden Beiträge bestimmt haben, sind wir jetzt also in der Lage, den in der quadratischen Kopplung führenden Anteil der beiden transversalen Dreipunktkondensate (4.12a) und (4.12b) in Landau-Eichung anzugeben.

Zuvor ist jedoch eine Bemerkung hinsichtlich unserer in Anlehnung an (4.8) definierten Vertexparameter angebracht : Wir haben im bisherigen Verlauf der Kondensatrechnung noch keine Aussage zu den Konsequenzen aus der Bose-Symmetrie der 3-Gluon-Korrelationsfunktion gemacht und die damit verbundenen Eigenschaften dementsprechend

auch nirgendwo verwendet.³ Dies soll jetzt nachgeholt werden. Unter Berücksichtigung der Permutationssymmetrie finden wir für die Koeffizienten aus der rationalen Approximante des vollen 3-Gluon-Vertex :

$$\begin{aligned}
C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)} &= C_{m_2, m_3, m_1}^{(c)1(r)} \\
C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)3(r)} &= C_{m_3, m_1, m_2}^{(c)1(r)} \\
C_{m_1, m_2, m_3}^{(f)1(r)} &= C_{m_1, m_3, m_2}^{(f)1(r)} \quad , \quad C_{m_1, m_2, m_3}^{(f)4(r)} \text{ totalsymmetrisch} \\
-C_{m_1, m_2, m_3}^{(d)1(r)} &= C_{m_1, m_3, m_2}^{(d)1(r)} \quad , \quad C_{m_1, m_2, m_3}^{(d)4(r)} \text{ total antisymmetrisch} .
\end{aligned}$$

Gemeinsam mit der formalen Antisymmetrie unserer Gegentermbeiträge sowie der jeweiligen Farbsymmetrie ergibt sich aus den obigen Permutationsregeln tatsächlich die bereits in der Diskussion zu (4.17) erwähnte partielle Bose-Symmetrie des tensoriellen Vakuum-erwartungswertes (4.10).

Auf der Grundlage der Resultate (4.17) , (4.19) und (4.21) folgt dann für den Zweischleifenbeitrag zum kanonischen 3-Gluon-Kondensat (4.12a) in beliebiger Stufe r der rationalen Approximation :

$$\begin{aligned}
V3^{(r)} &= \frac{g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{24 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
&\quad \left\{ -75 \sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r, 2t+1} \sigma_{r, 2t'+1} - 108 \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) \left[78 C_{r+1, r-1, r-1}^{(f)1(r)} + 198 C_{r, r, r-1}^{(f)1(r)} + 368 C_{r-1, r+1, r-1}^{(f)1(r)} + 115 C_{r-1, r, r}^{(f)1(r)} - 138 C_{r, r-1, r-1}^{(f)4(r)} \right] - \\
&\quad 66 C_{r+2, r-2, r-2}^{(f)1(r)} - 78 C_{r+1, r-2, r-1}^{(f)1(r)} - 90 C_{r, r, r-2}^{(f)1(r)} - 210 C_{r-1, r+1, r-2}^{(f)1(r)} - 108 C_{r-1, r, r-1}^{(f)1(r)} - \\
&\quad \left. 272 C_{r-2, r+2, r-2}^{(f)1(r)} - 50 C_{r-2, r+1, r-1}^{(f)1(r)} + 3 C_{r-2, r, r}^{(f)1(r)} + 138 (C_{r+1, r-2, r-2}^{(f)4(r)} + C_{r, r-1, r-2}^{(f)4(r)}) \right\} .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Die reellen, zahlenwertigen Vorfaktoren der nicht-perturbativen Parameter in (4.22) erweisen sich wieder als unabhängig vom Nennergrad r . Weiter findet man drei verschiedene Typen von Beiträgen vor : rein aus dem Propagatoransatz stammende Anteile, Kombinationen aus Propagator- und Vertexkoeffizienten sowie Terme, die ausschließlich Vertexparameter enthalten. Es sei nochmals erwähnt, daß die beiden letztgenannten Kategorien im Rahmen von Entkopplungsnäherungen, welche nur die Propagatoren der Theorie modifizieren, grundsätzlich nicht erfaßt werden können.

³Im Gegenzug bekommen wir stattdessen ein Kriterium für die Plausibilität der Gegentermresultate aus den vorangegangenen Abschnitten.

Speziell die beiden niedrigsten Approximationsstufen für (4.22) lauten explizit :

$$V3^{(1)} = \frac{g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{24 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$\left\{ -183 (\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,3}^2) - 291 \sigma_{1,1} \sigma_{1,3} - 108 C_{0,1,0}^{(f)1(1)} + \right.$$

$$\left. (\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \left[78 C_{2,0,0}^{(f)1(1)} + 198 C_{1,1,0}^{(f)1(1)} + 368 C_{0,2,0}^{(f)1(1)} + 115 C_{0,1,1}^{(f)1(1)} - 138 C_{1,0,0}^{(f)4(1)} \right] \right\}, \quad (4.23a)$$

$$V3^{(3)} = \frac{g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{24 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$\left\{ -183 (\sigma_{3,1}^2 + \sigma_{3,3}^2 + \sigma_{3,5}^2 + \sigma_{3,7}^2) - 291 (\sigma_{3,1} \sigma_{3,3} + (\sigma_{3,1} + \sigma_{3,3}) (\sigma_{3,5} + \sigma_{3,7}) + \sigma_{3,5} \sigma_{3,7}) + \right.$$

$$\left. (\sigma_{3,1} + \sigma_{3,3} + \sigma_{3,5} + \sigma_{3,7}) \left[78 C_{4,2,2}^{(f)1(3)} + 198 C_{3,3,2}^{(f)1(3)} + 368 C_{2,4,2}^{(f)1(3)} + 115 C_{2,3,3}^{(f)1(3)} - 138 C_{3,2,2}^{(f)4(3)} \right] - \right.$$

$$66 C_{5,1,1}^{(f)1(3)} - 78 C_{4,1,2}^{(f)1(3)} - 90 C_{3,3,1}^{(f)1(3)} - 210 C_{2,4,1}^{(f)1(3)} - 108 C_{2,3,2}^{(f)1(3)} -$$

$$\left. 272 C_{1,5,1}^{(f)1(3)} - 50 C_{1,4,2}^{(f)1(3)} + 3 C_{1,3,3}^{(f)1(3)} + 138 (C_{4,1,1}^{(f)4(3)} + C_{3,2,1}^{(f)4(3)}) \right\}. \quad (4.23b)$$

Man erkennt ein Wachstum in der Anzahl der zur niedrigsten Schleifenordnung des Kondensats beitragenden Vertexparameter bis $r = 3$. Gleichzeitig verrät ein Blick auf unser allgemeines Resultat (4.22), daß mit noch höheren Stufen der rationalen Approximation keine zusätzlichen neuen Terme verbunden sind.

Entsprechend erhalten wir für das farbsymmetrische Kondensat (4.12b) :

$$V3ST^{(r)} = \frac{2 g^2 (N_C^2 - 4) (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{N_C (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left[5 C_{r-1,r+1,r-1}^{(d)1(r)} + 2 C_{r,r,r-1}^{(d)1(r)} \right] + C_{r-2,r+1,r-1}^{(d)1(r)} + 2 C_{r-2,r+2,r-2}^{(d)1(r)} \right\}, \quad (4.24)$$

und in seinen beiden führenden Approximationsstufen gilt :

$$V3ST^{(1)} = \frac{2 g^2 (N_C^2 - 4) (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{N_C (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$(\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \left[5 C_{0,2,0}^{(d)1(1)} + 2 C_{1,1,0}^{(d)1(1)} \right], \quad (4.25a)$$

$$V_{3ST}^{(3)} = \frac{2g^2 (N_C^2 - 4) (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{N_C (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$\left\{ (\sigma_{3,1} + \sigma_{3,3} + \sigma_{3,5} + \sigma_{3,7}) \left[5 C_{2,4,2}^{(d)1(3)} + 2 C_{3,3,2}^{(d)1(3)} \right] + C_{1,4,2}^{(d)1(3)} + 2 C_{1,5,1}^{(d)1(3)} \right\} . \quad (4.25b)$$

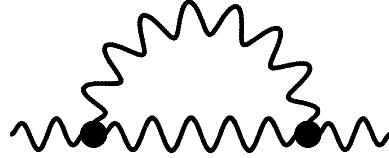
Wir erkennen hier prinzipiell dieselben Strukturmerkmale wie beim kanonischen 3-Gluon-Kondensat – bis auf die Ausnahme, daß jetzt im farbsymmetrischen Fall keine ausschließlich von den Gluon-Propagatoren stammenden Beiträge zu finden sind. Die Ursache hierfür liegt letztendlich in der asymptotischen Freiheit der Theorie in Verbindung mit der antisymmetrischen Farbstruktur der störungstheoretischen Dreipunktfunktion begründet.

4.4 Renormierung des 3-Gluon-Kondensats

Um Polterme mit logarithmischen Residuen aus dem Zweischleifenbeitrag der gluonischen Dreipunktkondensate zu eliminieren, untersuchen wir den aus drei identischen Anteilen bestehenden Integral-Gegenterm sämtlicher Subdivergenzen :

$$CT^{(r)} = 3 \cdot CT_1^{(r)} . \quad (4.26)$$

Zunächst ist hierfür der perturbative Einschleifen-Counterterm des gluonischen Beitrags zur Polarisation des Eichfeldes zu berechnen. Wir erhalten :



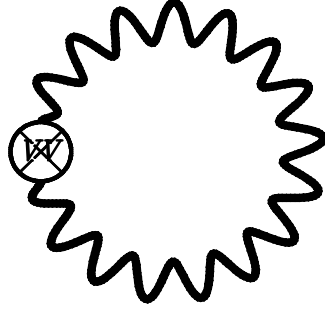
$$I_{ab}^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} g^2 N_C \delta_{ab} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \delta^{\mu\beta} (2p+k)^\alpha - \delta^{\beta\alpha} (p+2k)^\mu + \delta^{\alpha\mu} (k-p)^\beta \right\} \frac{\delta_{\alpha\alpha'} k^2 - k_\alpha k_{\alpha'}}{k^4} \cdot$$

$$\left\{ -\delta^{\nu\beta'} (2p+k)^{\alpha'} + \delta^{\beta'\alpha'} (p+2k)^\nu + \delta^{\alpha'\nu} (p-k)^{\beta'} \right\} \frac{\delta_{\beta\beta'} (p+k)^2 - (p+k)_\beta (p+k)_{\beta'}}{(p+k)^4}$$

$$= -\frac{g^2 N_C}{6 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \delta_{ab} \left\{ \frac{25}{2} \delta^{\mu\nu} p^2 - 14 p^\mu p^\nu \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^0) . \quad (4.27)$$

Durch Insertion von (4.27) in die nicht-perturbative Gluonschleife ergibt sich dann der Integral-Gegenterm :

$$CT_1^{(r)} = -\frac{25 g^2 N_C (N_C^2 - 1) (D-1)}{12 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^2 D_T^{(r)}(p^2) . \quad (4.28)$$



Unter Berücksichtigung des Resultats (2.18) für den divergenten Anteil des Abelschen Gluon-Kondensats erhalten wir schließlich :

$$CT_1^{(r)} = - \frac{25 g^2 N_C (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{2 (4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot$$

$$\left\{ \sum_{\substack{s, s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r, 2s+1} \sigma_{r, 2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r u_{r, 2t} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) + \sum_{\substack{t, t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r, 2t} u_{r, 2t'} \right\}. \quad (4.29)$$

Die nach Addition des gesamten Integral-Gegenterms (4.26) übrig bleibende Overall-Divergenz des 3-Gluon-Kondensats ist mit den Techniken der COR zu behandeln und führt wiederum auf das Mischungsproblem der Dimension-4-Operatoren im Rahmen der QCD [51].

4.5 Ergänzung: Definition des 4-Gluon-Kondensats

Wir beginnen mit der Darstellung des Vakuumerwartungswertes für das nicht-lokale Produkt von vier Eichbosonfeldern als Fourier-Transformierte der gluonischen Vierpunktfunktion :

$$\langle A_a^\mu(x) A_b^\lambda(y) A_c^\nu(z) A_d^\omega(w) \rangle =$$

$$\mu_0^{3\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} e^{ip_1(x-w)} e^{ip_2(y-w)} e^{ip_3(z-w)} (G_{4V})_{abcd}^{\mu\lambda\nu\omega}(p_1, p_2, p_3, -p_1-p_2-p_3). \quad (4.30)$$

Daraus ergibt sich dann das lokale (tensorielle) Kondensat der kanonischen Massendimension vier als nulltes Moment der 4-Gluon-Greensfunktion im Impulsraum :

$$\langle A_a^\mu A_b^\lambda A_c^\nu A_d^\omega \rangle = \mu_0^{3\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_3}{(2\pi)^D} (G_{4V})_{abcd}^{\mu\lambda\nu\omega}(p_1, p_2, p_3, -p_1 - p_2 - p_3). \quad (4.31)$$

Nach längerer Analyse ⁴ findet man hierfür unter Berücksichtigung der Bose-Symmetrie die folgende Lorentz- und farbkovariante ⁵ Zerlegung :

$$\begin{aligned}
\langle A_a^\mu A_b^\lambda A_c^\nu A_d^\omega \rangle = c_p \Big\{ & [(abcd) + (adcb)] [\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu} - 2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega}] + \\
& [(acdb) + (abdc)] [\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu}] + \\
& [(adbc) + (acbd)] [\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu} - 2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega}] \Big\} + \\
c_p^{(\delta)} \Big\{ & (ab)(cd) [\delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu} - 2 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega}] + (ac)(bd) [\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu} - 2 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega}] + \\
& (ad)(bc) [\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 2 \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu}] \Big\} + \\
c_s^{(d)} [(abcd) + (acdb) + (adcb) + (adbc) + (acbd) + (abdc)] & [\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu}] + \\
c_s^{(\delta)} [(ab)(cd) + (ac)(bd) + (ad)(bc)] & [\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\lambda\nu}] .
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Die skalaren Koeffizienten sind dabei durch drei Bestimmungsgleichungen gegeben ⁶ :

$$\begin{aligned}
c_p - \frac{1}{N_C} c_p^{(\delta)} &= -\frac{8}{3N_C^2 (N_C^2 - 1) D (D - 1)} \cdot A4 \\
(N_C^2 + 6) c_s^{(d)} + 5N_C c_s^{(\delta)} &= \frac{4}{3(N_C^2 - 1) D (D + 2)} \cdot A4S \\
\frac{N_C^2 - 2}{2} c_p^{(\delta)} - N_C c_p &= \frac{8}{3(N_C^2 - 1) D (D - 1)} \cdot A4AS .
\end{aligned}$$

So kommen wir zur Definition der 4-Gluon-Kondensate :

$$V4 := g^2 A4 := g^2 \langle \text{Tr} [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] \rangle \tag{4.33a}$$

$$\begin{aligned}
V4S := g^2 A4S := g^2 \langle \text{Tr} \{ 2 \{ A_\mu, A_\nu \} \{ A^\mu, A^\nu \} + \{ A_\mu, A^\mu \} \{ A_\nu, A^\nu \} + \\
\frac{24}{N_C} A_\mu A_\nu \text{Tr} \{ A^\mu A^\nu \} + \frac{12}{N_C} A_\mu A^\mu \text{Tr} \{ A_\nu A^\nu \} \} \rangle
\end{aligned} \tag{4.33b}$$

$$V4AS := g^2 A4AS := g^2 \langle \text{Tr} \{ A_\mu A_\nu \} \text{Tr} \{ A^\mu A^\nu \} - \text{Tr} \{ A_\mu A^\mu \} \text{Tr} \{ A_\nu A^\nu \} \rangle . \tag{4.33c}$$

Ansichts seiner Darstellung als Dreischleifenintegral sowie aufgrund der komplizierten Tensorstruktur des vollen Vierpunkt-Vertex erscheint die Eliminierung des kanonischen Kondensats $V4$ aus dem Ausdruck für das eichinvariante Gluon-Kondensat gemäß (1.39) als wichtiger Schritt zur Beschränkung des technischen Aufwands.

⁴Details hierzu siehe [63].

⁵Aufgrund globaler Farbsymmetrie läßt sich die gesuchte Farbstruktur als Spur über die Generatoren der $SU(N_C)$ darstellen. Wir verwenden dabei die Schreibweise $(abcd) := \text{Tr} \{ T_a T_b T_c T_d \}$ usw.

⁶Zur vollständigen Beschreibung wären eigentlich vier Gleichungen nötig; in den Operator-Produkt-Entwicklungen [63] treten jedoch tatsächlich nur drei Linearkombinationen auf.

Kapitel 5

Das Quark-Kondensat

5.1 Der Quark-Propagator

Ausgangspunkt ist zunächst die kovariante Zerlegung des Quark-Propagators nach Dirac- und Farbtensoren gemäß :

$$S_F^{ij}(k) = \delta^{ij} S_F(k) = \delta^{ij} \left\{ S_A^{(F)}(k^2) \cdot \not{k} + S_B^{(F)} \cdot \mathbf{1} \right\} . \quad (5.1)$$

Hierbei haben wir die Spinorindizes weggelassen. Der Index F bezeichnet die Quark-Flavour und wird im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit ebenfalls nicht mehr angegeben. Die Farbindizes beziehen sich auf die fundamentale Darstellung der $SU(N_C)$; also gilt $1 \leq i, j \leq N_C$.

Als Ansatz für die rationale Approximantensequenz des Quark-Propagators in nullter perturbativer Ordnung wählen wir [3] :

$$S^{(0,r)}(k) = \frac{\prod_{s=1}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s})}{\prod_{s=0}^r (\not{k} + \kappa_{r,2s+1})} . \quad (5.2)$$

Die nicht-perturbativen Massenskalen $\kappa_{r,j}$ sind dabei im allgemeinen Funktionen sowohl des QCD-Skalenparameters Λ als auch der Quark-Strommasse $\hat{m}$, wobei letztere als Renormierungsgruppeninvariante wie folgt mit der renormierten Quark-Masse zusammenhängt :

$$(\hat{m})_R = [m(\mu)]_R \exp \left\{ - \int^{g(\mu)} dg' \left[\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')} \right]_R \right\} ; \quad (5.3)$$

das Subskript R steht hier für die Abhängigkeit von der Wahl des Renormierungsschemas.

Im Hinblick auf den chiralen Grenzfall $\hat{m} \longrightarrow 0$ setzen wir zunächst für den funktionalen Zusammenhang der oben eingeführten nicht-perturbativen Massenparameter an :

$$\kappa_{r,j}(\Lambda, \hat{m}) =: \chi_{r,j} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda} \right) \hat{m} + \lambda_{r,j} \Lambda . \quad (5.4)$$

Außerdem fordern wir im Sinne der Quasiteilchen-Sequenz für ungerades r das Auftreten der Massenparameter $\kappa_{r,2s+1}$ im Nenner von (5.2) als Paare konjugiert komplexer Polstellen. Dann beschreibt unser Ansatz Quarks als kurzlebige, physikalisch nicht-detektierbare Elementaranregungen.

Weiter erfüllt (5.2) bereits automatisch die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit der Theorie. Zu untersuchen bleibt der formale störungstheoretische Limes vermittelt durch die Euklidische Feynman-Regel [4]

$$S^{(0)pert}(k) = \frac{1}{\not{k} + \hat{m}} . \quad (5.5)$$

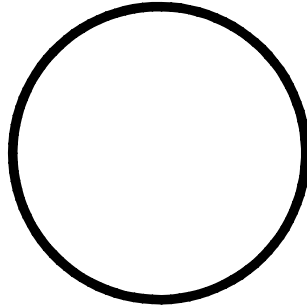
An dieser Stelle soll hierzu vorläufig der Hinweis genügen, daß die geforderte Eigenschaft durch Aufprägung geeigneter Bedingungen an die $\kappa_{r,j}$ erfüllt werden kann. Explizit durchführen werden wir diesen Schritt später für den Fall $r = 1$ im Zusammenhang mit der Renormierung des Quark-Kondensats.

Wir definieren nun für die mit der Diracschen Einheitsmatrix verbundene invariante Funktion aus (5.1) :

$$S_B^{(r)}(k^2) =: \frac{\sum_{n=0}^r B_n^{(r)} (k^2)^n \Lambda^{2(r-n)+1}}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} ; \quad (5.6)$$

hierbei sind die $B_n^{(r)}$ mit $0 \leq n \leq r$ dimensionslose Funktionen der Verhältnisse $\frac{\kappa_{r,j}(\Lambda, \hat{m})}{\Lambda}$.

5.2 Definition des Quark-Kondensats



Das skalare Quark-Kondensat der Massendimension drei erhalten wir im Rahmen der Momentendefinition durch Spurbildung über den Quark-Propagator sowohl im Farb- als auch im Spinorraum :

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -\mu_0^e \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \delta^{ij} S(k) . \quad (5.7)$$

Mit der kovarianten Zerlegung des Quark-Propagators gemäß (5.1) folgt auf Grund der Spurfreiheit der γ -Matrizen die Darstellung des Quark-Kondensats :

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -4 N_C \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} S_B(k^2) . \quad (5.8)$$

Wir setzen im Folgenden :

$$\bar{F}F := \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle . \quad (5.9)$$

5.3 Berechnung des Quark-Kondensats zum Nennergrad r

Aus (5.8) ergibt sich zusammen mit (5.6) für das Quark-Kondensat in der r -ten Stufe der rationalen Approximation :

$$\bar{F}F^{(r)} := -4 N_C \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} S_B^{(r)}(k^2) = -4 N_C \Lambda \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{n=0}^r B_n^{(r)} (k^2)^n (\Lambda^2)^{r-n}}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} . \quad (5.10)$$

Mit Einführung von Feynman-Parametern gemäß (A.2) erhalten wir :

$$\bar{F}F^{(r)} = -4 N_C \Lambda \mu_0^\epsilon r! \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \sum_{n=0}^r B_n^{(r)} (\Lambda^2)^{r-n} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^n}{\{k^2 + M_r^2(\mathbf{z})\}^{r+1}} , \quad (5.11)$$

wobei

$$M_r^2(\mathbf{z}) := z_1 \kappa_{r,1}^2 + z_2 \kappa_{r,3}^2 + \dots + z_{r+1} \kappa_{r,2r+1}^2 .$$

Durch Power-Counting findet man für den oberflächlichen UV-Divergenzgrad $\delta_k = D - 2$, d.h. eine maximal quadratische Divergenz.

Nach Ausführung der Impulsintegration unter Verwendung von (A.11) folgt für die Approximation des Quark-Kondensats :

$$\begin{aligned} \bar{F}F^{(r)} = & -\frac{4 N_C \Lambda}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \\ & \left\{ \Gamma(r-1+D/2) \Gamma(2-D/2) \left[\frac{r-1+D/2}{1-D/2} B_r^{(r)} M_r^2(\mathbf{z}) + B_{r-1}^{(r)} \Lambda^2 \right] + \right. \\ & \left. \sum_{n=0}^{r-2} \Gamma(n+D/2) \Gamma(r+1-n-D/2) B_n^{(r)} (\Lambda^2)^{r-n} [M_r^2(\mathbf{z})]^{n+1-r} \right\} \left[\frac{M_r^2(\mathbf{z})}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} , \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei die beiden führenden Entwicklungskoeffizienten aus dem Ansatz (5.6) explizit lauten :

$$B_r^{(r)} = \frac{1}{\Lambda} \left[\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} - \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right] \quad (5.13a)$$

$$B_{r-1}^{(r)} = \frac{1}{\Lambda^3} \left[\sum_{\substack{u,u',u''=1 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \kappa_{r,2u} \kappa_{r,2u'} \kappa_{r,2u''} - \left(\sum_{\substack{t,t'=1 \\ t \leq t'}}^r \kappa_{r,2t} \kappa_{r,2t'} \right) \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) + \right. \\ \left. \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right) - \sum_{\substack{u,u',u''=0 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \kappa_{r,2u+1} \kappa_{r,2u'+1} \kappa_{r,2u''+1} \right]. \quad (5.13b)$$

Damit folgt nun im Limes $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\bar{F}F^{(r)} = \frac{4 N_C \Lambda}{(4\pi)^2} r! \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{M_r^2(\mathbf{z})}{\mu_0^2} \right\} \left\{ (r+1) B_r^{(r)} M_r^2(\mathbf{z}) - B_{r-1}^{(r)} \Lambda^2 \right\} - \right. \\ \left. (r+1) \left[S_1(r+1) - 1 \right] B_r^{(r)} M_r^2(\mathbf{z}) + S_1(r) B_{r-1}^{(r)} \Lambda^2 - \right. \\ \left. \sum_{n=0}^{r-2} \frac{(n+1)!}{r!} (r-n-2)! B_n^{(r)} (\Lambda^2)^{r-n} [M_r^2(\mathbf{z})]^{n+1-r} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.14)$$

Bezüglich der in (5.14) auftretenden Funktion $S_1(\delta)$ sei auf die Definition (2.19) verwiesen. Es bleiben nun die folgenden Feynman-Parameterintegrale für $m \in \{0, 1\}$ und $0 \leq n \leq r-2$ auszuwerten :

$$Z_m^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} [M_r^2(\mathbf{z})]^m \\ J_m^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \ln \frac{M_r^2(\mathbf{z})}{\mu_0^2} [M_r^2(\mathbf{z})]^m \\ H_n^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} [M_r^2(\mathbf{z})]^{n+1-r}.$$

Zunächst erhalten wir mit den Ergebnissen aus A.1.2 bei beliebigem Nennergrad r :

$$Z_0^{(r)} = \frac{1}{r!} \\ Z_{1[r+1]}^{(r)} = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1}^2 ;$$

Für die beiden anderen Integraltypen wird die δ -Distribution mit Hilfe der ebenfalls in A.1.2 vorgestellten Variablentransformation eliminiert, sodaß folgt :

$$J_m^{(r)} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_r x_1^{r-1} \dots x_{r-1} \ln \frac{\mathcal{M}_r^2(\mathbf{x})}{\mu_0^2} [\mathcal{M}_r^2(\mathbf{x})]^m$$

$$H_n^{(r)} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_r x_1^{r-1} \dots x_{r-1} [\mathcal{M}_r^2(\mathbf{x})]^{n+1-r},$$

wobei wir noch

$$\mathcal{M}_r^2(\mathbf{x}) := (1-x_1) \kappa_{r,1}^2 + x_1 (1-x_2) \kappa_{r,3}^2 + \dots + x_1 \dots x_{r-1} (1-x_r) \kappa_{r,2r-1}^2 + x_1 \dots x_r \kappa_{r,2r+1}^2$$

gesetzt haben.

Eine analytische Auswertung dieser beiden Integrale für beliebige Stufen r der rationalen Approximanten erscheint uns nicht möglich zu sein. Wir beschränken uns deshalb im Folgenden für die Theorie mit massiven Quarks stets auf die niedrigste Approximation $r = 1$.

5.4 Massive Quarks und $r = 1$

Jetzt gilt ¹ :

$$B_0^{(1)} = \frac{\kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3}}{\Lambda^3} \quad B_1^{(1)} = \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2}}{\Lambda}$$

$$J_0^{(1)} = \frac{1}{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2} \left\{ \kappa_{1,3}^2 \ln \frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} - \kappa_{1,1}^2 \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} + \kappa_{1,1}^2 - \kappa_{1,3}^2 \right\}$$

$$J_1^{(1)} = \frac{1}{2 (\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2)} \left\{ \kappa_{1,3}^4 \ln \frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} - \kappa_{1,1}^4 \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} + \frac{\kappa_{1,1}^4}{2} - \frac{\kappa_{1,3}^4}{2} \right\},$$

und wir erhalten somit aus (5.14) für das Quark-Kondensat inklusive aller endlichen Beiträge im Falle nicht-verschwindender Strommassen :

$$\bar{F}F^{(1)} = \frac{4 N_C}{(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 \right\} \left\{ (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2})(\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2) - \kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} \right\} + \right.$$

$$\frac{\kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3}}{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2} \left\{ \kappa_{1,3}^2 \ln \frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} - \kappa_{1,1}^2 \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} \right\} -$$

$$\left. \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2}}{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2} \left\{ \kappa_{1,3}^4 \ln \frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} - \kappa_{1,1}^4 \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} \right\} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

(5.15)

¹Die letzte Summe in (5.14) ist für $r = 1$ leer.

Wegen der Identität :

$$\kappa_{1,1}^n \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} - \kappa_{1,3}^n \ln \frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} = \frac{\kappa_{1,1}^n - \kappa_{1,3}^n}{2} \ln \frac{\kappa_{1,1}^2 \kappa_{1,3}^2}{\mu_0^4} + \frac{\kappa_{1,1}^n + \kappa_{1,3}^n}{2} \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\kappa_{1,3}^2} ,$$

sowie mit

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\kappa_{1,1}^2 \kappa_{1,3}^2}{\mu_0^4} = \ln \frac{\kappa^2}{\mu_0^2} \quad \text{bzw.} \quad \ln \frac{\kappa_{1,1}^2}{\kappa_{1,3}^2} = 4i \varphi ,$$

wobei zuletzt definiert wurde : $\kappa_{1,3}^* = \kappa_{1,1} := \kappa e^{i\varphi}$ mit $\kappa := |\kappa_{1,1}|$ und $\varphi := \arg(\kappa_{1,1})$,

ergibt sich schließlich als vorläufiges Endresultat :

$$\begin{aligned} \bar{F}F^{(1)} = \frac{4 N_C}{(4\pi)^2} \left\{ \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\kappa^2}{\mu_0^2} \right\} \left\{ (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2})(\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2) - \kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} \right\} - \right. \\ \left. 2i \varphi \left\{ \kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} \frac{\kappa_{1,3}^2 + \kappa_{1,1}^2}{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2} - \left(\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2} \right) \frac{\kappa_{1,3}^4 + \kappa_{1,1}^4}{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2} \right\} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Der nicht-perturbative Logarithmus wird hier also mit dem Massenparameter κ gebildet, welcher sich – wie in 5.1 beschrieben – sowohl aus spontanen als auch nicht-spontanen Massenskalen zusammensetzt.

Dieses Resultat (5.16) steht auch in Übereinstimmung mit [6].

5.5 Chiraler Grenzfall

Nun untersuchen wir das Fermion-Kondensat der Massendimension drei im Rahmen einer Theorie mit verschwindenden externen Quark-Massen. Dabei haben wir es dann analog zum gluonischen Sektor wieder ausschließlich mit der spontanen Massenskala Λ zu tun und setzen daher gemäß (5.4) :

$$\kappa_{r,j}^{(chiral)} = \lambda_{r,j} \Lambda .$$

So folgt aus (5.14) für das (unrenormierte) chirale Kondensat :

$$\begin{aligned}
\bar{F} F_{chiral}^{(r)} = & \frac{4 N_C \Lambda^3}{(4\pi)^2} \left[\left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \left\{ \left(\sum_{\substack{t,t'=1 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t} \lambda_{r,2t'} \right) \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) - \right. \right. \\
& \sum_{\substack{u,u',u''=1 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \lambda_{r,2u} \lambda_{r,2u'} \lambda_{r,2u''} - \left(\sum_{s=1}^r \lambda_{r,2s} \right) \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right) + \\
& \left. \sum_{\substack{u,u',u''=0 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \lambda_{r,2u+1} \lambda_{r,2u'+1} \lambda_{r,2u''+1} + \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} - \sum_{s=1}^r \lambda_{r,2s} \right) \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1}^2 \right) \right\} - \\
& \left\{ \left[S_1(r+1) - 1 \right] \sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1}^2 + (r+1)! \mathcal{J}_1^{(r)} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} - \sum_{s=1}^r \lambda_{r,2s} \right\} + \\
& \left\{ S_1(r) + r! \mathcal{J}_0^{(r)} \right\} \left\{ \sum_{\substack{u,u',u''=1 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \lambda_{r,2u} \lambda_{r,2u'} \lambda_{r,2u''} - \left(\sum_{\substack{t,t'=1 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t} \lambda_{r,2t'} \right) \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) + \right. \\
& \left. \left(\sum_{s=1}^r \lambda_{r,2s} \right) \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right) - \sum_{\substack{u,u',u''=0 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \lambda_{r,2u+1} \lambda_{r,2u'+1} \lambda_{r,2u''+1} \right\} - \\
& \left. \sum_{n=0}^{r-2} (n+1)! (r-n-2)! \mathcal{H}_n^{(r)} \mathcal{B}_n^{(r)} \right] + \mathcal{O}(\epsilon) .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Hierbei wurde definiert :

$$\mathcal{J}_m^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} \ln(\tilde{\mu}_r(\mathbf{z})) [\tilde{\mu}_r(\mathbf{z})]^m$$

$$\mathcal{H}_n^{(r)} := \int \mathcal{D}^{r+1} \mathbf{z} [\tilde{\mu}_r(\mathbf{z})]^{n+1-r}$$

$$\mathcal{B}_n^{(r)} := B_n^{(r)}(\hat{m} = 0) ,$$

mit der Linearkombination $\tilde{\mu}_r(\mathbf{z}) = z_1 \lambda_{r,1}^2 + z_2 \lambda_{r,3}^2 + \dots + z_{r+1} \lambda_{r,2r+1}^2$.

Vermöge (5.17) ist es uns also im chiralen Grenzfall wieder gelungen, die UV-Divergenz und damit, über den $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus verbunden, die in einer Entwicklung nach der quadratischen Kopplung führenden, rein spontanen Beiträge zum Quark-Kondensat für eine beliebige Stufe r der rationalen Approximantenfolge zu bestimmen.

Speziell für $r = 1$ erhält man das Resultat :

$$\begin{aligned}
\bar{F}F_{chiral}^{(1)} &= \frac{4 N_C \Lambda^3}{(4\pi)^2} \cdot \\
&\left[\left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right\} \left\{ (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,3} - \lambda_{1,2}) (\lambda_{1,1}^2 + \lambda_{1,3}^2) - \lambda_{1,1} \lambda_{1,2} \lambda_{1,3} \right\} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda_{1,1} \lambda_{1,2} \lambda_{1,3}}{\lambda_{1,3}^2 - \lambda_{1,1}^2} \left\{ \lambda_{1,3}^2 \ln \lambda_{1,3}^2 - \lambda_{1,1}^2 \ln \lambda_{1,1}^2 \right\} - \frac{\lambda_{1,1} + \lambda_{1,3} - \lambda_{1,2}}{\lambda_{1,3}^2 - \lambda_{1,1}^2} \left\{ \lambda_{1,3}^4 \ln \lambda_{1,3}^2 - \lambda_{1,1}^4 \ln \lambda_{1,1}^2 \right\} \right] \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon) .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

5.6 Renormierung des Quark-Kondensats

Wir wollen hier zunächst wie bereits oben angekündigt, die Zusammensetzung der Massenparameter $\kappa_{r,j}$ aus der spontanen Massenskala Λ und externen Quarkstrommassen $\hat{m}$ insbesondere unter dem Aspekt der Gültigkeit des formalen perturbativen Grenzfalles $\Lambda \rightarrow 0$ untersuchen. Dabei beschränken wir uns wiederum aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Fall der niedrigsten Approximationsstufe $r = 1$ und vernachlässigen die Unterscheidung der einzelnen Quark-Flavours.

Aus (5.2) folgt für den inversen Quark-Propagator :

$$\left[S^{(0,1)}(k) \right]^{-1} = -\Gamma^{(0,1)}(k) = \not{k} + \kappa_0 + \frac{\kappa_R^2}{\not{k} + \kappa_{1,2}} . \tag{5.19}$$

Unter Berücksichtigung der störungstheoretischen Feynman-Regel (5.5) des Euklidischen Quark-Propagators ergibt sich dann :

$$\kappa_0 = \kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2} =: \hat{m} + \omega_0 \Lambda \tag{5.20a}$$

$$\kappa_R^2 = \kappa_{1,1} \kappa_{1,3} - \kappa_0 \kappa_{1,2} =: \omega'_R \hat{m} \Lambda + \omega_R \Lambda^2 ; \tag{5.20b}$$

weiter setzen wir ² :

$$\kappa_{1,2} := \omega'_{1,2} \hat{m} + \omega_{1,2} \Lambda . \tag{5.20c}$$

Damit folgt für den Zusammenhang unserer beiden Parametersätze :

$$\kappa_{1,1} = \frac{\kappa_0 + \kappa_{1,2}}{2} \pm i \sqrt{\kappa_R^2 - \frac{1}{4}(\kappa_0 - \kappa_{1,2})^2} . \tag{5.21}$$

²Im Rahmen rationaler Ansätze für die Vertexfunktionen erscheint es uns vernünftig zu sein, für die zusammengesetzten Massenparameter Polynome in den spontanen und nicht-spontanen Skalen der Theorie zu wählen.

Nach diesen Vorüberlegungen untersuchen wir jetzt den gemäß

$$\bar{F}F_{pert}^{(0)} := \langle 0 | \bar{\Psi}_f \Psi_f | 0 \rangle^{(0)} := -N_C \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} S^{(0)_{pert}}(k) \quad (5.22)$$

definierten führenden perturbativen Beitrag zum Quark-Kondensat. Man findet :

$$\bar{F}F_{pert}^{(0)} = \frac{N_C}{(2\pi)^2} \hat{m}^3 \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 - \ln \frac{\hat{m}^2}{\mu_0^2} \right\} . \quad (5.23)$$

Für nicht-verschwindende Quarkmassen existiert demzufolge ein Kondensatbeitrag freier Feldoperatoren bezüglich des störungstheoretischen Vakuumzustandes $|0\rangle$. Als unmittelbare Konsequenz erwächst hieraus die Notwendigkeit einer *subtraktiven Renormierung* des Quark-Kondensats $\bar{F}F$ als kanonische Verallgemeinerung der aus der Störungstheorie bekannten Normalordnungsvorschrift. Denn die mit (5.23) verknüpfte Divergenz läßt sich nicht multiplikativ beseitigen, was sich eben bereits schon im perturbativen Kontext zeigt.

Wir subtrahieren hier ³ den Beitrag freier Felder im nicht-perturbativen QCD-Vakuum $|\Omega\rangle$ und erhalten somit das renormierte Quark-Kondensat zur Approximationsstufe r :

$$\bar{F}F_{ren}^{(r)} = \langle \Omega | : \bar{\Psi} \Psi : | \Omega \rangle^{(r)} - \langle \Omega | \bar{\Psi}_f \Psi_f | \Omega \rangle^{(r)} . \quad (5.24)$$

Unser Subtraktionsterm in (5.24) ist formal identisch mit dem störungstheoretischen Resultat (5.23), jedoch müssen wir $\hat{m}$ durch eine effektive Masse $\hat{\mu}_{(r)}$ ersetzen. Die entsprechende Bestimmungsgleichung im Fall $r = 1$ kann dann aus (5.16) abgelesen werden :

$$\hat{\mu}_{(1)}^3 = (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2}) (\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2) - \kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} . \quad (5.25)$$

Explizit ergibt sich demnach für das renormierte Euklidische Quark-Kondensat in führender rationaler Approximation :

$$\bar{F}F_{ren}^{(1)} = -\frac{N_C}{(2\pi)^2} \left\{ \hat{\mu}_{(1)}^3 \ln \frac{\hat{\mu}_{(1)}^2}{\kappa^2} + 2i\varphi \left[\kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} \frac{\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2}{\kappa_{1,1}^2 - \kappa_{1,3}^2} - (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2}) \frac{\kappa_{1,1}^4 + \kappa_{1,3}^4}{\kappa_{1,1}^2 - \kappa_{1,3}^2} \right] \right\} . \quad (5.26)$$

Wir haben somit einen endlichen, reellen Ausdruck für das fermionische Zweipunkt-kondensat erhalten, welcher auf Grund seiner Unabhängigkeit von der Renormierungsskala eine Invariante unter RG-Transformationen darstellt.

Es bleibt jetzt noch sicherzustellen, daß (5.26) tatsächlich wie gewünscht die rein spontane chirale Symmetriebrechung beschreibt. Demgemäß fordern wir also :

$$\bar{F}F_{ren}^{(1)} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow 0} 0 . \quad (5.27)$$

³Im Gegensatz dazu wurde in [6] nur der rein perturbative Kondensatbeitrag (5.23) abgezogen.

Zunächst findet man :

$$\frac{\hat{\mu}_{(1)}^2}{\kappa^2} = \frac{1}{\omega'_{1,2}} + \mathcal{O}(\Lambda) ,$$

und es läßt sich folgern :

$$\ln \frac{\hat{\mu}_{(1)}^2}{\kappa^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow 0} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega'_{1,2} = 1 . \quad (5.28)$$

Damit ergibt sich nun für den Rest aus (5.26) :

$$\Phi := \ln \frac{\kappa_{1,1}}{\kappa_{1,3}} \left[\kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} \frac{\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2}{\kappa_{1,1}^2 - \kappa_{1,3}^2} - (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2}) \frac{\kappa_{1,1}^4 + \kappa_{1,3}^4}{\kappa_{1,1}^2 - \kappa_{1,3}^2} \right] = 0 + \mathcal{O}(\Lambda) .$$

Insgesamt haben wir also nach Subtraktion des Beitrages der expliziten chiralen Symmetriebrechung das Quark-Kondensat gemäß (5.26) als endliche, rein spontane RG-Invariante berechnet.

Unter Berücksichtigung von (5.28) folgt aus der Bestimmungsgleichung (5.25) für die effektive Masse :

$$\hat{\mu}_{(1)}^3 = \hat{m}^3 + \mathcal{O}(\Lambda) ,$$

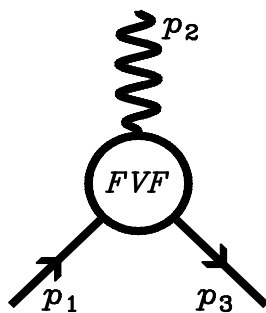
mit der erfreulichen Konsequenz, daß wir das perturbative Resultat (5.23) im formalen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ aus dem unrenormierten Quark-Kondensat (5.16) reproduzieren können.

Gleichung (5.28) ist ein Beispiel dafür, daß sich im Zuge der Untersuchung von Vakuumkondensaten auch wichtige Einschränkungen für die selbstkonsistente Bestimmung der dimensionslosen nicht-perturbativen Parameter ergeben können.

Kapitel 6

Das Quark-Gluon-Kondensat

6.1 Quark-Gluon-Vertex in Landau-Eichung



Wir vereinbaren wieder einlaufende Impulsvariablen bezüglich der vollen Dreipunktfunktion und formulieren Impulserhaltung gemäß $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

In Landau-Eichung gilt für die Greensche Funktion der Quark-Gluon-Antiquark-Wechselwirkung :

$$(G_{FT\bar{F}})^\mu_a(p_1, p_2, p_3) = S(p_1) (\Gamma_{FT\bar{F}})_{\nu,a}(p_1, p_2, p_3) t^{\mu\nu}(p_2) D_T(p_2^2) S(-p_3) ; \quad (6.1)$$

Spinor- und Farbindizes der fundamentalen Darstellung haben wir hier aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

Die farbkovariante Formulierung der Theorie erfordert :

$$(\Gamma_{FT\bar{F}})^\mu_a(p_1, p_2, p_3) = g T_a \Gamma^\mu(p_1, p_2, p_3) , \quad (6.2)$$

wobei $T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$ die Generatoren der Farbgruppe $SU(N_C)$ in ihrer fundamentalen Darstellung ¹ bezeichnen.

Für den nicht-perturbativen Quark-Gluon-Antiquark-Vertex in führender Ordnung des Kopplungsparameters konstruieren wir wiederum einen FDRA-Ansatz [61] und berücksichtigen dabei sofort die Übereinstimmung der Propagator-Nullstellen mit den Polstellen der Vertexfunktion als notwendige Bedingung für DS-Selbstkonsistenz :

¹Siehe dazu Anhang A.3

$$\Gamma_\mu^{(r,0)}(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} N_{FT\bar{F},\mu}^{(r)}(p_1, p_2^2, p_3) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (-\not{p}_3 + \kappa_{r,2s})}, \quad (6.3a)$$

mit dem Zählerpolynom ² :

$$N_{FT\bar{F}}^{(r)\mu}(p_1, p_2^2, p_3) = \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} (\not{p}_1)^n \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma^\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{r^\mu}{\Lambda} \right\} (-\not{p}_3)^{n'} (p_2^2)^m \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)}, \quad (6.3b)$$

wobei $r := \frac{p_1 - p_3}{2}$ gesetzt wurde.

Die Einschränkungen $(\star)$ für den Summationsbereich der Indizes unserer Vertexparameter in (6.3b) ergeben sich aus folgenden Überlegungen :

Die Reproduktion der Euklidischen Feynman-Regel [4]

$$\left(\Gamma_{FV\bar{F}}^{(0)pert} \right)_a^\mu = g \gamma^\mu T_a \quad (6.4)$$

im formalen störungstheoretischen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ erfordert :

$$C_{0,m,n,n'}^{(r)} = \delta_{mr} c_{r-n}^{(r)} c_{r-n'}^{(r)} \quad D_{0,m,n,n'}^{(r)} = D_{1,m,n,n'}^{(r)} = 0, \quad (6.5)$$

wobei

$$c_0^{(r)} = 1 \quad c_1^{(r)} = \sum_{s=1}^r \chi_{r,2s} \quad c_2^{(r)} = \sum_{\substack{t,t'=1 \\ t < t'}}^r \chi_{r,2t} \chi_{r,2t'} \quad \dots$$

$$c_r^{(r)} = \prod_{s=1}^r \chi_{r,2s}.$$

Weiter führt perturbative Renormierbarkeit unseres Ansatzes (6.3) zu den Bedingungen :

$$C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \neq 0 \quad \text{nur falls} \quad n + n' \leq 2r \quad , \quad 2m + n \leq 3r \quad , \quad 2m + n' \leq 3r \quad (6.6a)$$

²Der kovariante Term $E_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{p_2}{\Lambda}$ trägt in Landau-Eichung nicht bei.

$$D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \neq 0 \quad \text{nur falls} \quad \lambda \geq 2 \quad \text{und} \quad (6.6b)$$

$$n + n' \leq 2r - 1 \quad , \quad 2m + n \leq 3r - 1 \quad , \quad 2m + n' \leq 3r - 1 \quad .$$

Hieraus folgt dann für den maximalen Wertebereich der Indizes bei ungeradem r :

$$0 \leq n \leq 2r \quad , \quad 0 \leq n' \leq 2r \quad , \quad 0 \leq m \leq \frac{3r-1}{2} \quad . \quad (6.7)$$

Um zu gewährleisten, daß der chirale Grenzübergang $\hat{m} \rightarrow 0$ stets wohldefiniert bleibt, fordern wir zusätzlich das Auftreten ausschließlich positiver Potenzen der Quark-Strommassen in (6.3b); also :

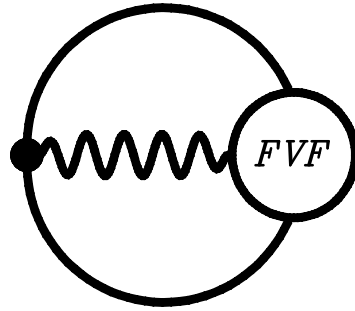
$$4r - (2m + n + n' + \lambda) \geq 0 \quad . \quad (6.8)$$

Die *Ladungskonjugationsinvarianz* des Quark-Gluon-Antiquark-Vertex drückt sich wie folgt in den Koeffizienten aus :

$$C_{\lambda,m,n',n}^{(r)} = C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \quad D_{\lambda,m,n',n}^{(r)} = D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \quad . \quad (6.9)$$

Im Rahmen der nachfolgenden mikroskopischen Berechnung des Quark-Gluon-Kondensats werden wir jedoch zunächst von dieser Eigenschaft keinen expliziten Gebrauch machen; stattdessen wird sie uns im Verlauf der Rechnung als leicht überprüfbares Kriterium für deren Richtigkeit dienen.

6.2 Definition des Quark-Gluon-Kondensats



Ausgehend vom Erwartungswert des nicht-lokalen Quark-Gluon-Antiquark-Feldproduktes bezüglich des physikalischen Grundzustands der QCD :

$$\langle \Psi_i(z) A_a^\mu(y) \bar{\Psi}_j(x) \rangle = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} e^{ip_1(x-z)} e^{ip_2(y-z)} (G_{FV\bar{F}})_{a,ij}^\mu(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \quad , \quad (6.10)$$

folgt für das lokale Kondensat der kanonischen Massendimension vier durch Spurbildung im Spinor- und Farbraum der fundamentalen Darstellung :

$$\langle \bar{\Psi} A \Psi \rangle = -\mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \text{tr} (G_{FV\bar{F}})_a^\mu \gamma_\mu T_a , \quad (6.11)$$

wobei $A^\mu := A_a^\mu T_a$ gesetzt wurde.

Wir führen nun als Bezeichnung ein :

$$\bar{F}VF := g \langle \bar{\Psi} A \Psi \rangle , \quad (6.12)$$

und erhalten somit das skalare Quark-Gluon-Kondensat als Moment der fermionischen Dreipunkt-Greens-Funktion im Impulsraum :

$$\bar{F}VF = -g \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} \text{tr} (G_{FV\bar{F}})_a^\mu \gamma_\mu T_a . \quad (6.13)$$

Der Vakuumerwartungswert (6.12) tritt neben dem Quark-Kondensat als weiterer unbekannter fermionischer Parameter in der OPE-Formulierung des DS-Selbstkonsistenzproblems auf [48]. Desweiteren finden wir ihn nach Elimination von $V4$ auch in unserer Darstellung (1.40) des eichinvarianten 4-Gluon-Kondensats wieder.

6.3 Berechnung des Quark-Gluon-Kondensats zum Nennergrad r

Nach den obigen Erläuterungen ist das Quark-Gluon-Kondensat in führender Ordnung einer Entwicklung nach der quadratischen Kopplung für Landau-Eichung und die r -te Stufe der rationalen Approximantenfolge nun durch folgendes Zweischleifenintegral definiert :

$$\bar{F}VF^{(r)} := -g \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \left(G_{FTF}^{(r)} \right)_a^\mu \gamma_\mu T_a . \quad (6.14)$$

Wir setzen :

$$\bar{F}VF^{(r)} =: -\frac{N_C^2 - 1}{2} g^2 I^{(r)} , \quad (6.15a)$$

wobei jetzt das skalare 2-Loop-Integral wie folgt gegeben ist :

$$I^{(r)} = \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} \gamma_\nu S^{(r)}(p) \Gamma_\mu^{(r)}(p, k, -p-k) t^{\mu\nu}(k) D_T^{(r)}(k^2) S^{(r)}(p+k) . \quad (6.15b)$$

Dazu wurde ferner die Farbspur gemäß (A.21c) ausgeführt und es bleibt in (6.15b) noch die Spurbildung im Spinorraum.

Mit den rationalen Ansätzen für den vollen Quark-Gluon-Antiquark-Vertex sowie die beiden Propagatoren für Quark und Eichboson ergibt sich für die gesuchte Zweischleifengröße explizit :

$$\begin{aligned}
I^{(r)} = & \mu_0^{2\epsilon} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T^r \gamma_\nu \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} - \kappa_{r,2s+1})}{(p^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} \cdot \\
& (\not{p})^n \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{(2p+k)_\mu}{2\Lambda} \right\} (\not{p} + \not{k})^{n'} \cdot \\
& \frac{t^{\mu\nu}(k) (k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1})}{((p+k)^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} \cdot
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Um führende Kopplungsbeiträge aus (6.16) extrahieren zu können, bedienen wir uns im Folgenden wieder des Verfahrens der Gegentermtechnik. Im Zusammenhang mit der Berechnung der führenden UV-Divergenz unseres Zweischleifenintegrals müssen wir also zunächst die verschiedenen Subdivergenzen spezifizieren. Konkret geschieht dies, indem jeweils zwei Indizes der nicht-perturbativen Dreipunktfunktion (6.3) über ihre angehängten Quark- bzw. Gluon-Propagatoren eine divergente Impulsschleife definieren.

Demgemäß setzen wir an :

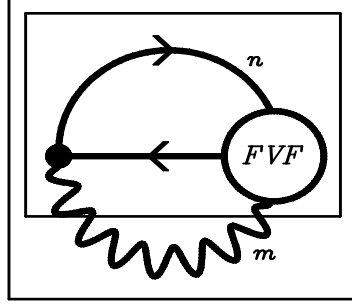
$$I_{div}^{(r)} =: \sum_{i=1}^3 \Omega_i^{(r)} ,$$

wobei hier $\Omega_1^{(r)}$ der (n, n') -Schleife, $\Omega_2^{(r)}$ der (m, n') -Schleife und schließlich $\Omega_3^{(r)}$ der (m, n) -Schleife entsprechen soll.

Hinsichtlich der konkreten Auswertung dieser Integrale gelten sinngemäß dieselben Anmerkungen, die bereits im Fall des 3-Gluon-Kondensats gemacht wurden. Wir wollen uns also erneut im Wesentlichen auf das Referieren sowie die Diskussion der Endresultate beschränken, soweit wie jedenfalls bereits bekannte Methoden verwendet wurden. Wichtige Detailinformationen, die das Nachvollziehen der überaus komplexen Analyse ermöglichen sollen, sind dann den entsprechenden Abschnitten im Anhang C vorbehalten.

6.3.1 Subschleife mit (n, n')

Unser Ausgangspunkt ist Gleichung (6.16), wobei hier nun im ersten Integrationsschritt zunächst die UV-Divergenz der durch die beiden Quark-Propagatoren definierten Schleife gesucht wird. Der entsprechende Subschleifenbeitrag ergibt sich wie folgt :



$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(r)} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{t^{\mu\nu}(k) (k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} . \\
 &Tr \gamma_\nu \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} - \kappa_{r,2s+1})}{(p^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} (\not{p})^n \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{(2p+k)_\mu}{2\Lambda} \right\} . \\
 &(\not{p} + \not{k})^{n'} \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1})}{((p+k)^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} .
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Gleichung (6.17) ist gemäß unseren Konventionen bei festgehaltener Reihenfolge der Integrationen auszuwerten, was in diesem Fall konkret bedeutet : Wir bestimmen zuerst die mit der Integrationsvariablen $\mathbf{p}$ verknüpfte UV-Divergenz, um mit dieser dann die noch verbleibende $\mathbf{k}$ -Integration durchzuführen.

Das Zwischenresultat nach Ausführung des ersten Integrationsschrittes in (6.17) kann als Basis für einen Vergleich mit Rechnungen zur DS-Selbstkonsistenz der modifizierten Feynman-Regeln dienen, und findet in diesen auch tatsächlich seine Bestätigung. Hier insbesondere enthält es den fermionischen Beitrag zur Gluon-Polarisation [53].

Wir finden :

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(r)} = & \frac{\Gamma(2r + D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{2(r-m)-\lambda} \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \\
& \left\{ \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) [R^2(k^2)]^{2-D/2}} \cdot \right. \\
& \left[\sum_{\substack{n+n'=2r \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \left(\beta_C^{(n,n')} k^2 + \gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 \right) C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \sum_{\substack{n+n'=2r \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \left(\beta_C^{(n,n')} k^2 + \gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 \right) C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \right. \\
& \hat{m} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \left[\gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \left(\beta_D^{(n,n')} k^2 + \gamma_D^{(n,n')} \Lambda^2 \right) D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right] + \\
& \hat{m} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \left[\gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \left(\beta_D^{(n,n')} k^2 + \gamma_D^{(n,n')} \Lambda^2 \right) D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right] + \\
& \hat{m}^2 \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \left(\gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right) + \\
& \hat{m}^2 \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \left(\gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right) + \hat{m}^3 \Lambda^2 \sum_{n+n'=2r-3}^{(*)} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \Big] + \\
& \frac{2r + D/2}{1 - D/2} \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) [R^2(k^2)]^{1-D/2}} \cdot \\
& \left[\Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \right. \\
& \left. \hat{m} \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \hat{m} \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right] \Big\} .
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Die in (6.18) auftretenden Koeffizienten $\alpha_\tau^{(n,n')}$, $\beta_\tau^{(n,n')}$ und $\gamma_\tau^{(n,n')}$ haben wir in Gleichung (C.4) des Anhangs definiert. Dort findet man in einer Auflistung auch ihre explizite Gestalt.

Die Fortführung der Zweischleifenrechnung liefert dann wie im Anhang beschrieben das Endresultat :

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(r)} = & \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \\
& \left\{ 4\Lambda^2 \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) C_{0,r,r,r}^{(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left\{ 12 C_{0,r,r,r}^{(r)} \cdot \right. \right. \\
& \left[\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 \right] + 4\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} C_{\lambda,r-1,r,r}^{(r)} + \\
& \hat{m}^2 \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} (D_{\lambda,r-1,r-1,r}^{(r)} + D_{\lambda,r-1,r,r-1}^{(r)}) + 6\hat{m} \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \sum_{\lambda=0}^1 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} (C_{\lambda,r,r-1,r}^{(r)} + C_{\lambda,r,r,r-1}^{(r)}) + \\
& 6\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} (C_{\lambda,r,r,r-2}^{(r)} + C_{\lambda,r,r-2,r}^{(r)} - 2 C_{\lambda,r,r-1,r-1}^{(r)}) - 6\Lambda \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) D_{2,r,r-1,r-1} + \\
& 3\hat{m}^2 \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} (D_{\lambda,r,r-1,r-2}^{(r)} + D_{\lambda,r,r-2,r-1}^{(r)}) \left. \right\} + 12 \sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \cdot \\
& \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 - 2 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right] (C_{\lambda,r-1,r+1,r-1}^{(r)} + C_{\lambda,r-1,r-1,r+1}^{(r)}) + \right. \\
& \left[\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 \right] \sum_{\substack{n=r-2 \\ n \text{ ungerade}}}^{r+2} C_{\lambda,r-1,n,2r-n} \left. \right\} + \\
& 3 \left[\left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right] \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-3}}{\hat{m}^{\lambda-3}} \left(\sum_{n=r-2}^{r+1} D_{\lambda,r-1,n,2r-n-1}^{(r)} \right) + \\
& 6\hat{m} \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \left(\sum_{n=r-3}^{r+2} C_{\lambda,r-1,n,2r-n-1}^{(r)} \right) + \\
& 6\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \left(\sum_{\substack{n=r-4 \\ n \text{ ungerade}}}^{r+2} C_{\lambda,r-1,n,2r-n-2}^{(r)} - 2 \sum_{\substack{n=r-3 \\ n \text{ gerade}}}^{r+1} C_{\lambda,r-1,n,2r-n-2}^{(r)} \right) \left. \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \\
& \left\{ -6\hat{m} \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \sum_{\lambda=2}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-3}}{\hat{m}^{\lambda-3}} \left(\sum_{n=r-3}^{r+1} D_{\lambda,r-1,n,2r-n-2}^{(r)} \right) + \right. \\
& 3\hat{m}^2 \sum_{\lambda=2}^5 \frac{\Lambda^{\lambda-3}}{\hat{m}^{\lambda-3}} \left(\sum_{n=r-4}^{r+1} D_{\lambda,r-1,n,2r-n-3}^{(r)} \right) + \\
& 12\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \left(C_{\lambda,r-2,r+3,r-3}^{(r)} + C_{\lambda,r-2,r-3,r+3}^{(r)} \right) + \\
& 4\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \left(C_{\lambda,r-2,r,r}^{(r)} - 3C_{\lambda,r-2,r+4,r-4}^{(r)} - 3C_{\lambda,r-2,r-4,r+4}^{(r)} \right) + \\
& \left. \hat{m}^2 \sum_{\lambda=2}^5 \frac{\Lambda^{\lambda-3}}{\hat{m}^{\lambda-3}} \left(D_{\lambda,r-2,r-1,r}^{(r)} + D_{\lambda,r-2,r,r-1}^{(r)} - 3D_{\lambda,r-2,r+3,r-4}^{(r)} - 3D_{\lambda,r-2,r-4,r+3}^{(r)} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

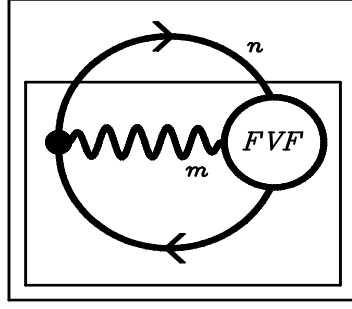
Dieses Ergebnis weist ausschließlich “spontane“ Logarithmen der Form $\ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}$ auf, obwohl wir nicht-verschwindende Quark-Massen zugelassen haben. Der Grund hierfür ist in der abschließenden Integration über die gluonische Impulsschleife zu sehen. Bei der Extraktion des entsprechenden UV-divergenten Beitrags sind die Formeln (A.7) für divergente Feynman-Parameterintegrale anzuwenden, also insbesondere der Integrand bzw. seine Ableitungen an der Stelle $x_1 = 1$ auszuwerten. Wegen (C.9) kann dann aber nur noch die spontane Massenskala in logarithmierter Form auftreten.

Die Abhängigkeit unseres Resultats vom Grad r der rationalen Approximation wird ausschließlich von den Koeffizienten aus den nicht-perturbativen Ansätzen getragen. Ihre rein zahlenwertigen Vorfaktoren stellen also die neue nicht-perturbative Information dar, die für sich genommen *unabhängig vom Approximationsgrad* ist. Ein Blick auf die in Anhang C.1 angegebene Zerlegung des Integranden macht deutlich, daß diese interessante Eigenschaft von den Ursprüngen unserer Rechnung her durchaus nicht abzusehen ist. Tatsächlich verhält es sich sogar so, daß die r -Abhängigkeiten in jenen Vorfaktoren sich erst nach Ausführung sämtlicher Feynman-Parameterintegrale in nicht-trivialer Weise wegheben.

Weiter erweist sich (6.19) als invariant unter Ladungskonjugation, falls wir die entsprechende Eigenschaft (6.9) des Quark-Gluon-Vertex berücksichtigen.

6.3.2 Subschleife mit $(m n')$

Ausgehend von (6.16) suchen wir hier zuerst die UV-Divergenz der durch das Gluon und das aus dem nicht-perturbativen Vertex *auslaufende* Quark definierten Impulsschleife. Wir bilden dazu :



$$\begin{aligned}
\Omega_2^{(r)} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{t^{\mu\nu}(k) (k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} . \\
&Tr \gamma_\nu \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} - \kappa_{r,2s+1})}{(p^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} (\not{p})^n \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{(2p+k)_\mu}{2\Lambda} \right\} . \\
&(\not{p} + \not{k})^{n'} \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1})}{((p+k)^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} .
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Zunächst folgt nach Ausführung der $\mathbf{k}$ -Integration für das in Gleichung (C.15) des Anhangs definierte Subintegral :

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(r)}(p) &= \frac{\mu_0^\epsilon \Gamma(2r+1+D/2) \Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2} D \Gamma(D/2)} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{n \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{r-n-\lambda} \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \\
&\left\{ \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \left[(r+n'+D-1-w_r(4r+2+D)) \gamma_\nu \not{p} + \right. \right. \\
&\quad \left. (r+n'-w_r(4r+2+D)) p_\nu + (1-D) \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \gamma_\nu \right] + \\
&\quad \left. (D-1) \hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m \left[C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\nu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{p_\nu}{\Lambda} \right] \right\} \left[R^2(p^2) \right]^{D/2-2} + (konv) .
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Dieses Zwischenresultat auf Einschleifen-Niveau bietet sich an zum Vergleich mit Beiträgen zur Quark-Selbstenergie im Rahmen von DS-Selbstkonsistenzrechnungen [53] und wird durch diesen Vergleich auch bestätigt.

Die Fortsetzung der Analyse des Zweischleifenintegrals (6.20) ergibt, wie im Anhang erläutert, unser vorläufiges Endresultat :

$$\begin{aligned}
\Omega_2^{(r)} &= \frac{3}{(4\pi)^4} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma(\epsilon) r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \left[\frac{\tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}})}{\mu_0^2} \right]^{-\epsilon} \\
&\quad \left\{ -4 \left[(r+1) \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{\substack{u,u',u''=0 \\ u < u' < u''}}^r \kappa_{r,2u+1} \kappa_{r,2u'+1} \kappa_{r,2u''+1} \right] \cdot \right. \\
&\quad \left[C_{0,r,r,r-1}^{(r)} \hat{m} + \left(C_{1,r,r,r-1}^{(r)} - \frac{1}{4} D_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} \right) \Lambda - C_{0,r,r,r}^{(r)} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right] - \\
&\quad 4 \left[(r+1) \tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right] \cdot \\
&\quad \left[\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \left(C_{\lambda,r-1,r-1,r+1}^{(r)} - C_{\lambda,r,r-1,r-1}^{(r)} - \frac{1}{2} C_{\lambda,r-1,r-2,r+2}^{(r)} + \frac{1}{2} C_{\lambda,r+1,r-2,r-2}^{(r)} \right) + \right. \\
&\quad \hat{m} \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \sum_{\lambda=0}^1 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} C_{\lambda,r,r-1,r}^{(r)} - \frac{1}{4} \hat{m}^2 \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} \left(D_{\lambda,r-1,r-2,r+1}^{(r)} - D_{\lambda,r,r-2,r-1}^{(r)} \right) \Big] + \\
&\quad 4 \hat{m}^2 \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \left[\hat{m} \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \left(C_{\lambda,r+1,r-2,r-3}^{(r)} - C_{\lambda,r,r-2,r-1}^{(r)} + C_{\lambda,r-1,r-2,r+1}^{(r)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} C_{\lambda,r+1,r-3,r-2}^{(r)} - \frac{1}{2} C_{\lambda,r-1,r-3,r+2}^{(r)} \right) - \right. \\
&\quad \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \left(C_{\lambda,r+1,r-2,r-2}^{(r)} - C_{\lambda,r,r-2,r}^{(r)} + C_{\lambda,r-1,r-2,r+2}^{(r)} \right) - \\
&\quad \left. \frac{1}{4} \hat{m} \sum_{\lambda=2}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} \left(D_{\lambda,r+1,r-3,r-3}^{(r)} - D_{\lambda,r,r-3,r-1}^{(r)} + D_{\lambda,r-1,r-3,r+1}^{(r)} \right) \right] - \\
&\quad 4 \hat{m}^4 \sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \left(C_{\lambda,r+1,r-3,r-3}^{(r)} - C_{\lambda,r,r-3,r-1}^{(r)} + C_{\lambda,r-1,r-3,r+1}^{(r)} - C_{\lambda,r-2,r-3,r+3}^{(r)} + C_{\lambda,r-2,r-4,r+4}^{(r)} - \right. \\
&\quad \left. C_{\lambda,r+2,r-4,r-4}^{(r)} + \frac{1}{2} C_{\lambda,r+1,r-4,r-2}^{(r)} - \frac{1}{2} C_{\lambda,r-1,r-4,r+2}^{(r)} \right) + \\
&\quad 4 \hat{m}^3 \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \left(C_{\lambda,r+1,r-3,r-2}^{(r)} - C_{\lambda,r,r-3,r}^{(r)} + C_{\lambda,r-1,r-3,r+2}^{(r)} \right) + \\
&\quad \left. \hat{m}^4 \sum_{\lambda=2}^5 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} \left(D_{\lambda,r+1,r-4,r-3}^{(r)} - D_{\lambda,r,r-4,r-1}^{(r)} + D_{\lambda,r-1,r-4,r+1}^{(r)} - D_{\lambda,r-2,r-4,r+3}^{(r)} \right) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right).
\end{aligned}
\tag{6.22}$$

Bezüglich der Definition der Größe $\tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}})$ als Linearkombination gemischter Massenskalen sei auf (C.22) verwiesen.

Mit den Ergebnissen für die reguläre $\mathbf{x}$ -Integration aus (A.9) :

$$X_0^{(r)} = \frac{1}{r!}$$

$$X_{1[r+1]}^{(r)} = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1}^2 ,$$

läßt sich (6.22) im chiralen Grenzfall bereits für beliebigen Nennergrad r auswerten.

Für nicht-verschwindende Quark-Strommassen tritt dagegen an dieser Stelle die bereits aus der Diskussion des Quark-Kondensats bekannte Komplikation auf : $\tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}})$ enthält dann nämlich vermöge der $\kappa_{r,2s+1}^2$ Kombinationen aus spontanen und nicht-spontanen Massenskalen, weshalb die einfache Anwendung der Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion nicht mehr möglich ist. Die verbleibenden Feynman-Parameterintegrale sind also explizit auch über die Logarithmen aus der Laurent-Entwicklung des Integranden auszuführen. Wir werden dies nun am einfachsten Beispiel $r = 1$ demonstrieren.

Zunächst erhalten wir aus (6.22) :

$$\Omega_2^{(1)} = \frac{12}{(4\pi)^4} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx_2 \left[\frac{\tilde{\mathcal{M}}_1^2(x_2)}{\mu_0^2} \right]^{-\epsilon} .$$

$$\left\{ \left[\kappa_{1,1} \kappa_{1,3} + 2 \left(x_2 (\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2) + \kappa_{1,1}^2 \right) \right] \left[\hat{m}^2 \sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} (C_{\lambda,1,0,0}^{(1)} - C_{\lambda,0,0,2}^{(1)}) - \right. \right.$$

$$\left. \hat{m} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}) \sum_{\lambda=0}^1 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} C_{\lambda,1,0,1}^{(1)} \right] + \frac{1}{2} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}) \Lambda \left(x_2 (\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2) + \kappa_{1,1}^2 \right) D_{2,1,0,0}^{(1)} -$$

$$\left. 2 (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}) \left(x_2 (\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2) + \kappa_{1,1}^2 \right) \left[C_{0,1,1,0}^{(1)} \hat{m} + C_{1,1,1,0}^{(1)} \Lambda - (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}) C_{0,1,1,1}^{(1)} \right] \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) .$$

Für die Laurent-Entwicklung des Integranden gilt :

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma(\epsilon) \left[\frac{\tilde{\mathcal{M}}_1^2(x_2)}{\mu_0^2} \right]^{-\epsilon} = \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\tilde{\mathcal{M}}_1^2(x_2)}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon} \ln \left[\frac{\tilde{\mathcal{M}}_1^2(x_2)}{\mu_0^2} \right]\right) ,$$

wobei $\tilde{\mathcal{M}}_1^2(x) = (\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2) x + \kappa_{1,1}^2$.

Wir haben nun also für $n \in \{0, 1\}$ zu berechnen :

$$\mathcal{W}_n^{(1)} := \int_0^1 dx \left(\eta_1 x + \eta_0 \right)^n \ln^2(\eta_1 x + \eta_0) , \quad (6.23)$$

mit $\eta_1 := \frac{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2}$ und $\eta_0 := \frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2}$.

Unter Verwendung der Formeln (A.10) ergibt sich :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0^{(1)} &= \frac{1}{\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2} \left\{ \kappa_{1,3}^2 \ln^2 \left(\frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} \right) - \kappa_{1,1}^2 \ln^2 \left(\frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(\ln(\quad)) \\ \mathcal{W}_1^{(1)} &= \frac{1}{2\mu_0^2 (\kappa_{1,3}^2 - \kappa_{1,1}^2)} \left\{ \kappa_{1,3}^4 \ln^2 \left(\frac{\kappa_{1,3}^2}{\mu_0^2} \right) - \kappa_{1,1}^4 \ln^2 \left(\frac{\kappa_{1,1}^2}{\mu_0^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(\ln(\quad)) . \end{aligned}$$

Somit folgt schließlich für unseren zweiten Subschleifenbeitrag in niedrigster Stufe der rationalen Approximation und bei endlichen Strommassen :

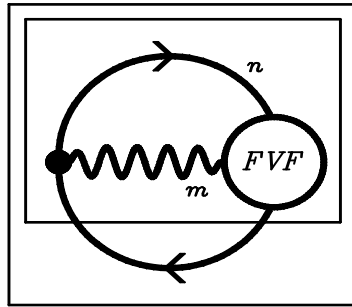
$$\begin{aligned} \Omega_2^{(1)} &= \frac{12 \Lambda^2}{(4\pi)^4} \left\{ \left[\frac{2}{\epsilon^2} (\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2 + \kappa_{1,1} \kappa_{1,3}) + \ln^2 \left(\frac{\kappa_{1,1} \kappa_{1,3}}{\mu_0^2} \right) \frac{\kappa_{1,3}^3 - \kappa_{1,1}^3}{\kappa_{1,3} - \kappa_{1,1}} \right] \right. \\ &\quad \left[(C_{0,1,0,0}^{(1)} - C_{0,0,0,2}^{(1)}) \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + (C_{1,1,0,0}^{(1)} - C_{1,0,0,2}^{(1)}) \frac{\hat{m}}{\Lambda} + \right. \\ &\quad \left. C_{0,1,0,0}^{(1)} - C_{0,0,0,2}^{(1)} - \left(C_{0,1,0,1}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{1,1,0,1}^{(1)} \right) \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}}{\Lambda} \right] + \\ &\quad \left[\frac{2}{\epsilon^2} \frac{(\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3})(\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2)}{\Lambda} + \ln^2 \left(\frac{\kappa_{1,1} \kappa_{1,3}}{\mu_0^2} \right) \frac{\kappa_{1,3}^4 - \kappa_{1,1}^4}{(\kappa_{1,3} - \kappa_{1,1}) \Lambda} \right] \\ &\quad \left. \left[D_{2,1,0,0}^{(1)} - C_{1,1,1,0}^{(1)} - C_{0,1,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{0,1,1,1}^{(1)} \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}}{\Lambda} \right] \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln(\quad) \right) . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Eine analytische Darstellung der Feynman-Parameterintegrale für beliebigen (ungeraden) Nennergrad r im Fall einer Theorie mit massiven Quarks erscheint uns nicht ohne Weiteres möglich zu sein. Gleichung (6.22) ist jedoch der geeignete Ausgangspunkt zur Berechnung mit einem konkret vorgegebenen Wert für r .

Wie bereits oben angedeutet, können wir im chiralen Grenzfall der QCD mit masselosen Quarks unsere im Gluonsektor erprobten Techniken wieder uneingeschränkt anwenden. Wir setzen dazu $\kappa_{r,j}^{(chiral)} = \lambda_{r,j} \Lambda$ und erhalten aus (6.22) das Resultat :

$$\begin{aligned}
\Omega_{2,chiral}^{(r)} = & \frac{12 \Lambda^4}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \left(\sum_{\substack{u, u', u''=0 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \lambda_{r,2u+1} \lambda_{r,2u'+1} \lambda_{r,2u''+1} \right) \left[\frac{1}{4} D_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} - C_{1,r,r,r-1}^{(r)} + C_{0,r,r,r}^{(r)} \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) \right] + \right. \\
& \left(\sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right) \left[\frac{1}{4} (D_{3,r-1,r-2,r+1}^{(r)} - D_{3,r,r-2,r-1}^{(r)}) + \frac{1}{2} (C_{2,r-1,r-2,r+2} - C_{2,r+1,r-2,r-2}^{(r)}) + \right. \\
& C_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} - C_{2,r-1,r-1,r+1}^{(r)} - C_{1,r,r-1,r}^{(r)} \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) \left. \right] + \\
& \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) \left[C_{3,r+1,r-2,r-3}^{(r)} - C_{3,r,r-2,r-1}^{(r)} + C_{3,r-1,r-2,r+1}^{(r)} + C_{3,r+1,r-3,r-2}^{(r)} - C_{3,r,r-3,r}^{(r)} + \right. \\
& C_{3,r-1,r-3,r+2}^{(r)} - \frac{1}{4} (D_{4,r+1,r-3,r-3}^{(r)} - D_{4,r,r-3,r-1}^{(r)} + D_{4,r-1,r-3,r+1}^{(r)}) + \\
& \frac{1}{2} (C_{3,r+1,r-3,r-2}^{(r)} - C_{3,r-1,r-3,r+2}^{(r)}) - \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) (C_{2,r+1,r-2,r-2}^{(r)} - C_{2,r,r-2,r}^{(r)} + C_{2,r-1,r-2,r+2}) \left. \right] + \\
& C_{4,r,r-3,r-1}^{(r)} - C_{4,r+1,r-3,r-3}^{(r)} + C_{4,r-2,r-3,r+3}^{(r)} - C_{4,r-1,r-3,r+1}^{(r)} + C_{4,r+2,r-4,r-4}^{(r)} - C_{4,r-2,r-4,r+4}^{(r)} + \\
& \frac{1}{2} (C_{4,r-1,r-4,r+2}^{(r)} - C_{4,r+1,r-4,r-2}^{(r)}) + \\
& \left. \frac{1}{4} (D_{5,r+1,r-4,r-3}^{(r)} - D_{5,r,r-4,r-1}^{(r)} + D_{5,r-1,r-4,r+1}^{(r)} - D_{5,r-2,r-4,r+3}^{(r)}) \right\} \cdot
\end{aligned} \tag{6.25}$$

6.3.3 Subschleife mit $(m n)$



Jetzt soll zunächst die UV-Divergenz der durch das Eichboson und das in den nicht-perturbativen Dreipunktvertex *einlaufende* Quark definierten Impulsschleife extrahiert

werden. Wir haben also zu berechnen :

$$\begin{aligned}
\Omega_3^{(r)} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{t^{\mu\nu}(-k)(k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \cdot \\
&\quad Tr \gamma_\nu \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1})}{((p+k)^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} (\not{p} + \not{k})^n \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{(2p+k)_\mu}{2\Lambda} \right\} \cdot \\
&\quad (\not{p})^{n'} \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} - \kappa_{r,2s+1})}{(p^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} \cdot
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Durch zyklische Vertauschungen innerhalb der Spur erhält man :

$$\begin{aligned}
\Omega_3^{(r)} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{t^{\mu\nu}(k)(k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \cdot \\
&\quad Tr \gamma_\nu \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} - \kappa_{r,2s+1})}{(p^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} (\not{p})^{n'} \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{(2p+k)_\mu}{2\Lambda} \right\} \cdot \\
&\quad (\not{p} + \not{k})^n \prod_{s=0}^r \frac{(\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1})}{((p+k)^2 + \kappa_{r,2s+1}^2)} \cdot
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Diese Darstellung ist formal identisch mit (6.20). Es sind lediglich die Rollen von Quark und Antiquark, ausgedrückt in den Indizes n und n' , vertauscht. Wir erhalten daher ein Resultat vollständig analog zu (6.22) mit der eben erwähnten Modifikation. Beide Ausdrücke *zusammen genommen*, zeigen wieder Invarianz unter der Ladungskonjugationsoperation. Die Diskussion des Falles massiver Quarks und $r = 1$ bzw. des chiralen Grenzübergangs gestaltet sich natürlich entsprechend wie im vorhergehenden Abschnitt.

6.4 Zusammenfassung

6.4.1 Massive Quarks und $r = 1$

Es folgt aus (6.19), (6.24) sowie mit den Überlegungen aus 6.3.3 für die erste Approximationsstufe des Quark-Gluon-Kondensats in Landau-Eichung bei Anwesenheit endlicher externer Quark-Strommassen :

$$\begin{aligned}
\bar{V}VF^{(1)} = & -\frac{6g^2(N_C^2-1)\Lambda^4}{(4\pi)^4} \left[\left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2\left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}\right) \right\} \left\{ \frac{\sigma_{1,3}^3 - \sigma_{1,1}^3}{3(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1})} C_{0,1,1,1}^{(1)} + \right. \right. \\
& \frac{\sigma_{1,3}^2 - \sigma_{1,1}^2}{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,1}} \left[\left(C_{0,1,0,0}^{(1)} - \frac{1}{3} C_{0,0,1,1}^{(1)} \right) \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + \left(C_{1,1,0,0}^{(1)} - \frac{1}{3} C_{1,0,1,1}^{(1)} \right) \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{2,1,0,0}^{(1)} - \frac{1}{3} C_{2,0,1,1}^{(1)} - \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{6} \left(D_{2,0,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + D_{3,0,1,0}^{(1)} \right) + \frac{\kappa_{1,1}\kappa_{1,3}}{\Lambda^2} C_{0,1,1,1}^{(1)} - \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}}{\Lambda} \left(C_{0,1,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{1,1,1,0}^{(1)} - \frac{1}{2} D_{2,1,0,0}^{(1)} \right) \right] - \right. \\
& \frac{\kappa_{1,1}\kappa_{1,3}}{\Lambda^2} \left(C_{0,0,1,1}^{(1)} \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + C_{1,0,1,1}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{2,0,1,1}^{(1)} \right) + \frac{3(\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2) + 4\kappa_{1,1}\kappa_{1,3}}{2\Lambda^2} \left(D_{2,0,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + D_{3,0,1,0}^{(1)} \right) \\
& - \left(3(\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2) + 2\kappa_{1,1}\kappa_{1,3} \right) \left(C_{0,0,2,0}^{(1)} \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + C_{1,0,2,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{2,0,2,0}^{(1)} \right) + \\
& \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}}{\Lambda} \left[C_{0,0,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}^3}{\Lambda^3} + \left(C_{1,0,1,0}^{(1)} - \frac{1}{2} D_{2,0,0,0}^{(1)} \right) \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + \left(C_{2,0,1,0}^{(1)} - \frac{1}{2} D_{3,0,0,0}^{(1)} \right) \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{3,0,1,0}^{(1)} - \frac{1}{2} D_{4,0,0,0}^{(1)} \right] \\
& - \left[C_{0,0,0,0}^{(1)} \frac{\hat{m}^4}{\Lambda^4} + C_{1,0,0,0}^{(1)} \frac{\hat{m}^3}{\Lambda^3} + C_{2,0,0,0}^{(1)} \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + C_{3,0,0,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{4,0,0,0}^{(1)} \right] \Big\} + \\
2 \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2\left(\frac{\kappa_{1,1}\kappa_{1,3}}{\mu_0^2}\right) \right\} & \frac{\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2 + \kappa_{1,1}\kappa_{1,3}}{\Lambda^2} \left\{ \left(C_{0,1,0,0}^{(1)} - C_{0,0,2,0}^{(1)} \right) \frac{\hat{m}^2}{\Lambda^2} + \right. \\
& \left. \left(C_{1,1,0,0}^{(1)} - C_{1,0,2,0}^{(1)} \right) \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{2,1,0,0}^{(1)} - C_{2,0,2,0}^{(1)} - \left(C_{0,1,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{1,1,1,0}^{(1)} \right) \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}}{\Lambda} \right\} + \\
2 \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2\left(\frac{\kappa_{1,1}\kappa_{1,3}}{\mu_0^2}\right) \right\} & \frac{(\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3})(\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2)}{\Lambda^3} \cdot \\
& \left. \left\{ \frac{1}{4} D_{2,1,0,0}^{(1)} - C_{1,1,1,0}^{(1)} - C_{0,1,1,0}^{(1)} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{0,1,1,1}^{(1)} \frac{\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3}}{\Lambda} \right\} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}\right). \tag{6.28}
\end{aligned}$$

Die Massenskala des obigen Vakuum Erwartungswertes wird sowohl vom spontanen QCD-Parameter Λ als auch vom Quark-Massenparameter $\hat{m}$ bestimmt. Dementsprechend treten in Verbindung mit der führenden UV-Divergenz neben den rein “spontanen” Logarithmen auch “nicht-spontane” Beiträge auf, die hier im wesentlichen durch das Produkt der beiden zueinander konjugiert komplexen Polparameter $\kappa_{1,1}$ und $\kappa_{1,3}$ aus dem Ansatz des Quark-Propagators für $r = 1$ charakterisiert sind.

6.4.2 Chiraler Grenzfall

Jetzt gilt $\kappa_{r,j}^{(chiral)} = \lambda_{r,j} \Lambda$.

Aus unseren Resultaten (6.19) und (6.25) zusammen mit der Diskussion in Abschnitt 6.3.3 erhalten wir dann das Quark-Gluon-Kondensat im Fall verschwindender Strommassen und für beliebigen (ungeraden) Nennergrad r :

$$\begin{aligned}
\bar{V}F_{chiral}^{(r)} &= -\frac{6g^2(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\}. \\
&\left\{ \frac{1}{3} \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} \right) C_{0,r,r,r}^{(r)} + \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \right) \left[\left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right) C_{0,r,r,r}^{(r)} + \right. \right. \\
&\quad \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) \left(\frac{1}{2} D_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} - C_{1,r,r,r-1}^{(r)} \right) - \frac{1}{3} \left(C_{2,r-1,r,r}^{(r)} + \frac{1}{2} D_{3,r-1,r,r-1}^{(r)} \right) + \\
&\quad \left. C_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} - C_{2,r,r,r-2}^{(r)} - \frac{1}{2} D_{3,r,r-1,r-2}^{(r)} \right] + \\
&\quad \left(\sum_{\substack{u,u',u''=0 \\ u \leq u' \leq u''}}^r \lambda_{r,2u+1} \lambda_{r,2u'+1} \lambda_{r,2u''+1} \right) \left[\frac{1}{2} D_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} - 2 C_{1,r,r,r-1}^{(r)} + 2 \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) C_{0,r,r,r}^{(r)} \right] + \\
&\quad \left[\left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right)^2 - 4 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right] C_{2,r-1,r+1,r-1}^{(r)} - \\
&\quad \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right) \left[2 C_{2,r-1,r+2,r-2}^{(r)} + C_{2,r-1,r,r}^{(r)} \right] + \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right] \left[D_{3,r-1,r+1,r-2}^{(r)} + D_{3,r-1,r,r-1}^{(r)} \right] + \\
&\quad \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \lambda_{r,2t+1} \lambda_{r,2t'+1} \right) \left[\frac{1}{2} \left(D_{3,r-1,r+1,r-2}^{(r)} - D_{3,r,r-1,r-2}^{(r)} \right) + C_{2,r-1,r+2,r-2}^{(r)} - C_{2,r+1,r-2,r-2}^{(r)} + \right. \\
&\quad \left. 2 \left(C_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} - C_{2,r-1,r+1,r-1}^{(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) C_{1,r,r,r-1}^{(r)} \right) \right] \Big\} + \dots
\end{aligned}$$

(6.29)

$$\begin{aligned}
& - \frac{6 g^2 (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) \left[C_{3,r-1,r,r-1}^{(r)} + 3 C_{3,r-1,r+1,r-2}^{(r)} + 5 C_{3,r+1,r-2,r-3}^{(r)} - \right. \right. \\
& \quad 2 \left(C_{3,r,r-1,r-2}^{(r)} + C_{3,r,r,r-3}^{(r)} - C_{3,r-1,r+2,r-3}^{(r)} \right) + \\
& \quad 2 \left(\sum_{s=0}^r \lambda_{r,2s+1} \right) \left(C_{2,r,r,r-2}^{(r)} - C_{2,r+1,r-2,r-2}^{(r)} - C_{2,r-1,r+1,r-2}^{(r)} \right) - \\
& \quad \frac{1}{2} \left(D_{4,r+1,r-3,r-3}^{(r)} + 3 D_{4,r-1,r+1,r-3}^{(r)} + 2 D_{4,r-1,r,r-2}^{(r)} + D_{4,r-1,r-1,r-1}^{(r)} - D_{4,r,r-1,r-3}^{(r)} \right) \Big] + \\
& \quad C_{4,r-1,r,r-2}^{(r)} - C_{4,r+1,r-2,r-4}^{(r)} - C_{4,r-1,r-1,r-1}^{(r)} + \frac{1}{3} C_{4,r-2,r,r}^{(r)} + \\
& \quad 2 \left(C_{4,r-1,r+2,r-4}^{(r)} + C_{4,r+2,r-4,r-4}^{(r)} + C_{4,r,r-1,r-3}^{(r)} - C_{4,r+1,r-3,r-3}^{(r)} \right) + \\
& \quad 4 \left(C_{4,r-2,r+3,r-3}^{(r)} - C_{4,r-1,r+1,r-3}^{(r)} - C_{4,r-2,r+4,r-4}^{(r)} \right) + \\
& \quad \frac{1}{2} \left(D_{5,r-1,r,r-3}^{(r)} + D_{5,r-1,r-1,r-2}^{(r)} + D_{5,r+1,r-3,r-4}^{(r)} - D_{5,r,r-1,r-4}^{(r)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{3} D_{5,r-2,r,r-1}^{(r)} + 2 \left(D_{5,r-1,r,r-3}^{(r)} - D_{5,r-1,r,r-3}^{(r)} \right) \right) \Big\} \cdot
\end{aligned}$$

Λ als einziger dimensionsbehafteter Parameter des Problems legt die Massenskala des Vakuumerwartungswertes (6.29) fest. Weiter läßt sich an den Indizes der in unserem Ergebnis auftretenden Vertexparameter ablesen, daß ein Anstieg in der Zahl der beitragenden Terme mit dem Grad der rationalen Approximationsstufe nur bis $r = 5$ zu erwarten ist. Für Nennergrad $r \geq 5$ sind also bereits alle Strukturmerkmale des in der Kopplung führenden Beitrags zum Quark-Gluon-Kondensat im chiralen Grenzfall erfaßt. Einfache Pole mit logarithmischen Residuen haben wir wiederum als nicht-führende Kondensatbeiträge vernachlässigt.

Speziell in der niedrigsten Stufe der rationalen Approximation lautet der Vakuumerwartungswert explizit :

$$\begin{aligned}
\bar{V}VF_{chiral}^{(1)} = & -\frac{6g^2(N_C^2 - 1)\Lambda^4}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2\left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2}\right) \right\} \cdot \\
& \left\{ \frac{1}{3} \left(\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,1} \sigma_{1,3} + \sigma_{1,3}^2 \right) C_{0,1,1,1}^{(1)} + (\sigma_{1,1} + \sigma_{1,3}) \cdot \right. \\
& \left[\lambda_{1,1} \lambda_{1,3} C_{0,1,1,1}^{(1)} + (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,3}) \left(\frac{1}{2} D_{2,1,0,0}^{(1)} - C_{1,1,1,0}^{(1)} \right) - \frac{1}{3} \left(C_{2,0,1,1}^{(1)} + \frac{1}{2} D_{3,0,1,0}^{(1)} \right) + C_{2,1,0,0}^{(1)} \right] - \\
& (3\lambda_{1,1}^2 + 2\lambda_{1,1} \lambda_{1,3} + 3\lambda_{1,3}^2) C_{2,0,2,0}^{(1)} - \lambda_{1,1} \lambda_{1,3} C_{2,0,1,1}^{(1)} + \\
& \frac{1}{2} (3\lambda_{1,1}^2 + 4\lambda_{1,1} \lambda_{1,3} + 3\lambda_{1,3}^2) D_{3,0,1,0}^{(1)} + (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,3}) \left[C_{3,0,1,0}^{(1)} - \frac{1}{2} D_{4,0,0,0}^{(1)} \right] - C_{4,0,0,0}^{(1)} + \\
& 2 (\lambda_{1,1}^2 + \lambda_{1,1} \lambda_{1,3} + \lambda_{1,3}^2) \left[C_{2,1,0,0}^{(1)} - C_{2,2,2,0}^{(1)} - (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,3}) C_{1,1,1,0}^{(1)} \right] + \\
& \left. (\lambda_{1,1}^3 + \lambda_{1,1}^2 \lambda_{1,3} + \lambda_{1,1} \lambda_{1,3}^2 + \lambda_{1,3}^3) \left[\frac{1}{2} D_{2,1,0,0}^{(1)} - 2 C_{1,1,1,0}^{(1)} + 2 (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,3}) C_{0,1,1,1}^{(1)} \right] \right\} . \\
& (6.30)
\end{aligned}$$

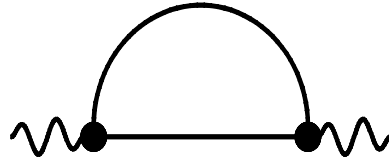
6.5 Renormierung des Quark-Gluon-Kondensats

Zur Beseitigung von Polbeiträgen mit logarithmischen Residuen greifen wir auch hier auf die Renormierungsvorschrift von 't Hooft und Veltman zurück.

Der gesamte Integral-Gegenterm zum Zweischleifenintegral (6.15) läßt sich wie folgt darstellen :

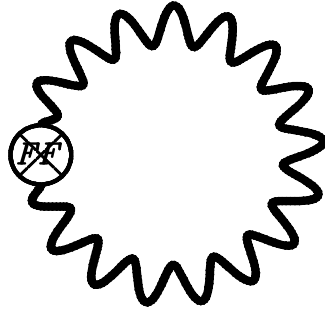
$$CT^{(r)} = CT_1^{(r)} + 2 \cdot CT_2^{(r)} . \quad (6.31)$$

Für den perturbativen Einschleifen-Counterterm zum fermionischen Beitrag der Gluon-Selbstenergie erhält man :



$$\begin{aligned}
I_{ab}^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{2} g^2 \delta_{ab} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \hat{m}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \hat{m}} \\
&= \frac{g^2}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2 - D/2) \delta_{ab} \{ \delta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \} \int_0^1 dx x (1-x) \left[x (1-x) \frac{p^2}{\mu_0^2} + \frac{\hat{m}^2}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} \\
&= \frac{2 g^2}{3 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \delta_{ab} \{ \delta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu \} + \mathcal{O}(\epsilon^0) .
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Jetzt wählen wir (6.32) als Insertion in der nicht-perturbativen Gluonschleife gemäß :

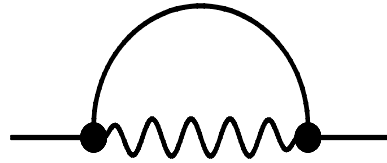


$$CT_1^{(r)} = \frac{2 g^2 (N_C^2 - 1) (D - 1)}{3 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^2 D_T^{(r)}(p^2) . \tag{6.33}$$

Mit dem Resultat (2.18) für das Abelsche Gluon-Kondensat folgt schließlich :

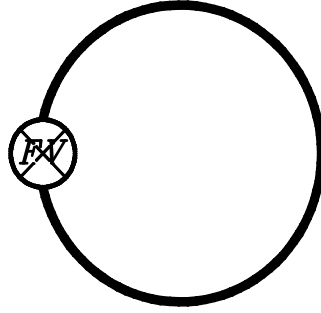
$$\begin{aligned}
CT_1^{(r)} &= \frac{4 g^2 (N_C^2 - 1) \Lambda^4}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} . \\
&\left\{ \sum_{\substack{s, s'=0 \\ s \leq s'}}^r \sigma_{r, 2s+1} \sigma_{r, 2s'+1} - \left(\sum_{t=1}^r u_{r, 2t} \right) \left(\sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \right) + \sum_{\substack{t, t'=1 \\ t < t'}}^r u_{r, 2t} u_{r, 2t'} \right\} .
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Um den zweiten Integral-Gegenterm aus (6.31) bestimmen zu können, benötigen wir zunächst den Counterterm zur Quark-Selbstenergie auf Einschleifen-Niveau. Hierfür gilt in Landau-Eichung :



$$\begin{aligned}
I_{ij}(p) &= -\frac{g^2 (N_C^2 - 1)}{2 N_C} \delta_{ij} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \hat{m}} \gamma^\beta \frac{\delta_{\alpha\beta} k^2 - k_\alpha k_\beta}{k^4} \\
&= -\frac{g^2 (N_C^2 - 1)}{2 N_C (4\pi)^{D/2}} \delta_{ij} \int_0^1 dx (1-x) \left[x(1-x) \frac{p^2}{\mu_0^2} + x \frac{\hat{m}^2}{\mu_0^2} \right]^{D/2-2} \cdot \\
&\quad \left\{ \Gamma(2 - D/2) \left(\frac{D(x(D-1) + 3 - D) + 2(x(D-1) - 1)}{2} \not{p} + \frac{D(1-D)}{2} \hat{m} \cdot \mathbf{1} \right) + \right. \\
&\quad \left. \Gamma(3 - D/2) (D-1) x^2 p^2 \frac{(x-1)\not{p} - \hat{m} \cdot \mathbf{1}}{x((1-x)p^2 + \hat{m}^2)} \right\} \\
&= \frac{3 g^2 (N_C^2 - 1)}{2 N_C (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \delta_{ij} \hat{m} \cdot \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon^0) .
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Verwendet man nun (6.35) als Einschub in die nicht-perturbative Quark-Schleife gemäß :



$$CT_2^{(r)} = \frac{3 g^2 (N_C^2 - 1) \hat{m}}{2 (4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{Tr } S^{(r)}(p) , \tag{6.36}$$

so ist das dabei auftretende Impulsraumintegral proportional zum Quark-Kondensat in seiner r -ten Approximation. Da wir hier den Fall massiver Quarks betrachten wollen, beschränken wir uns wie auch schon bei den entsprechenden Kondensatrechnungen auf $r = 1$ und erhalten dann mit (5.16) :

$$CT_2^{(1)} = \frac{12 g^2 (N_C^2 - 1) \hat{m}}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) \right\} \left\{ (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,3} - \kappa_{1,2}) (\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,3}^2) - \kappa_{1,1} \kappa_{1,2} \kappa_{1,3} \right\} . \tag{6.37}$$

Mit dem so bestimmten Gesamtgegenterm (6.31) läßt sich nun wie in Abschnitt 3.4 bereits allgemein diskutiert die Overall-Divergenz des Zweischleifenresultats (6.28) extrahieren.

Im Rahmen unserer Ausführungen über die Renormierung des Quark-Kondensats haben wir in 5.6 gesehen, daß sich als Folge der expliziten chiralen Symmetriebrechung ein

rein perturbativer Beitrag zum unrenormierten Vakuumkondensat zeigt. Wir wollen jetzt dementsprechend auch das Quark-Gluon-Kondensat auf nicht-spontane Anteile hin untersuchen.

Aus den Bedingungen (6.5) für die Gültigkeit des störungstheoretischen Grenzfalles erhalten wir die nicht-verschwindenden “perturbativen” Vertexkoeffizienten in der niedrigsten Stufe der rationalen Approximation :

$$C_{0,1,1,1}^{(1)} = C_{0,1,1,0}^{(1)} = C_{0,1,0,1}^{(1)} = C_{0,1,0,0}^{(1)} = 1 .$$

Einsetzen in unser Resultat (6.28) für das unrenormierte Quark-Gluon-Kondensat ergibt dann mit $\Lambda = 0$ sinngemäß³ den führenden perturbativen Beitrag :

$$\bar{V}VF_{pert}^{(0)} = -\frac{12 g^2 (N_C^2 - 1) \hat{m}^4}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\hat{m}^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\hat{m}^2}{\mu_0^2} \right) \right\} . \quad (6.38)$$

Es bleibt noch anzumerken, daß wir hierzu die bereits aus 5.6 bekannte Eigenschaft

$$\omega'_{1,2} = 1 \quad (6.39)$$

verwenden mußten und damit den perturbativen Grenzfall der in (5.25) definierten effektiven Quark-Masse identifizieren konnten. An dieser Stelle wird also ein hohes Maß an Konsistenz mit den Rechnungen zum Quark-Kondensat deutlich.

Wie man schließlich konkret die Beseitigung der Overall-Divergenz des Quark-Gluon-Kondensats realisiert, ist letztendlich eine Frage der Konvention. Man kann entweder innerhalb der COR das Mischungsproblem zusammengesetzter QCD-Operatoren mit kanonischer Massendimension vier studieren oder aber das fermionische Dreipunktkondensat als rein spontane Größe definieren, deren Renormierung – wie bereits am Beispiel des Quark-Kondensats demonstriert – subtraktiv zu erfolgen hat.

³Eine Rechnung im Rahmen der Störungstheorie führt zum selben Ergebnis.

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in den zurückliegenden Kapiteln im Rahmen einer mikroskopischen Rechnung führende Beiträge zu den niedrig-dimensionalen Vakuumkondensaten der Quantenchromodynamik bestimmt. Als Ausgangspunkt dienten uns dabei die nicht-perturbativ modifizierten Feynman-Regeln einer gemäß den Prinzipien asymptotischer Freiheit und perturbativer Renormierbarkeit systematisch erweiterten Störungsreihe. Weiterhin wurde das im Zusammenhang mit der Kondensatdefinition auftretende Renormierungsproblem zusammengesetzter Operatoren in seinen wesentlichen Grundzügen erläutert.

Im Verlauf unserer Diskussionen erfolgte verschiedentlich der Hinweis, daß die Vakuumkondensate als Charakterisierung der nicht-trivialen Struktur des QCD-Grundzustands wichtige Kenngrößen einer feldtheoretischen Beschreibung des hadronischen Spektrums darstellen. Vermöge des QCD-Skalenparameters Λ sind unsere nicht-perturbativen Vakuum Erwartungswerte jedoch grundsätzlich noch vom verwendeten Renormierungsschema abhängig; mit Ausnahme des Gluon- bzw. Quark-Kondensats erweisen sie sich sogar als RG-abhängig. Daraus darf jedoch keinesfalls gefolgert werden, daß sie physikalisch nicht von Nutzen sind. Denn einerseits treten die Kondensate in Observablen als RG-invariante Kombinationen auf; andererseits bleibt in jedem approximativen Verfahren endlicher Ordnung zur Bestimmung quantenchromodynamischer Größen eine gewisse Restschemaabhängigkeit immer bestehen. Diese sollte jedoch durch Höherentreiben des Approximationsgrades asymptotisch zum Verschwinden gebracht werden.

Um den Vergleich unserer Resultate mit experimentellen Daten bzw. Ergebnissen von Gitterrechnungen anstellen zu können, sind wir auf die noch ausstehende Lösung des Selbstkonsistenzproblems der nicht-perturbativen Ansätze in den DS-Gleichungen der QCD angewiesen. Die numerische Kenntnis der Parameter aus den rationalen Approximanten würde dann an Hand der Kondensate sofort eine Fülle von Kriterien zur Überprüfung der Güte der erweiterten Störungsentwicklung mit sich bringen. Stellvertretend sei hier das Verschwinden von Bewegungsgleichungskondensaten genannt. Mit den vorliegenden Rechnungen haben wir insbesondere auch die Grundlage für eine detaillierte Analyse des globalen Approximationsverhaltens hinsichtlich des Nennergrads r gelegt.

Anhang A

Mathematischer Anhang

A.1 Feynman-Integrale

A.1.1 Feynman-Parametrisierung

Wir verwenden zur Berechnung von Schleifenintegralen mit rationalen Approximanten für die nicht-perturbativ modifizierten Vertexfunktionen der QCD im allgemeinen die folgende Form der Feynman-Parametrisierung :

$$\frac{1}{f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)} \cdot \int_0^1 dx_1 x_1^{n-2} \int_0^1 dx_2 x_2^{n-3} \dots \int_0^1 dx_{n-1} \frac{y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} \dots y_n^{\alpha_n-1}}{\{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n\}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}} , \quad (\text{A.1})$$

wobei

$$y_1 = 1 - x_1 \quad y_2 = x_1 (1 - x_2) \quad y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3) \quad \dots \quad y_{n-1} = x_1 \dots x_{n-2} (1 - x_{n-1})$$

$$y_n = x_1 x_2 \dots x_{n-1} .$$

Im Falle ganzzahliger Exponenten α_j greifen wir auf eine äquivalente Formulierung mit Hilfe der Diracschen Delta-Distribution zurück :

$$\frac{1}{f_1 f_2 \dots f_n} = (n-1)! \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_n \frac{\delta(1 - z_1 - z_2 - \dots - z_n)}{\{z_1 f_1 + z_2 f_2 + \dots + z_n f_n\}^n} . \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Parameterintegrale

Zur quantitativen Auswertung der gemäß (A.2) gebildeten Parameterintegrale betrachten wir zunächst allgemein :

$$\mathcal{F}^{(n-1)} := \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_n \delta(1 - z_1 - z_2 - \dots - z_n) F(z_1, z_2, \dots, z_n) . \quad (\text{A.3})$$

Im ersten Schritt wird die Delta-Distribution mit Hilfe der Heavisideschen Theta-Funktion eliminiert und man erhält :

$$\mathcal{F}^{(n-1)} = \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_{n-1} \Theta(1 - (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1})) \cdot \\ F(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 1 - (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1})) .$$

Die durch

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - u_1 \\ z_2 &= u_1 (1 - u_2) \\ z_3 &= u_1 u_2 (1 - u_3) \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= u_1 u_2 \dots u_{n-2} (1 - u_{n-1}) \end{aligned}$$

definierte Variablentransformation besitzt die Eigenschaften :

$$0 \leq z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 1 - u_1 u_2 \dots u_{n-1} \leq 1 \\ \left| \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})} \right| = u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2} ,$$

womit für das allgemeine n -fache Parameterintegral folgt :

$$\mathcal{F}^{(n-1)} = \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2} \cdot \\ F(1 - u_1, u_1 (1 - u_2), u_1 u_2 (1 - u_3), \dots, u_1 u_2 \dots u_{n-2} (1 - u_{n-1}), u_1 u_2 \dots u_{n-1}) . \quad (\text{A.4})$$

Im Rahmen unserer Kondensatrechnungen haben wir es nun speziell zu tun mit Feynman-Parameterintegralen der Form ($1 \leq n' \leq n$) :

$$Z_m^{(n-1)} := Z_{m[n']}^{(n-1)} := \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_n \delta(1 - z_1 - z_2 - \dots - z_n) [w(\mathbf{z})]^m ,$$

wobei $w(\mathbf{z}) := w_{[n']}(\mathbf{z}) := z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_{n'}}$ für $i_1 < i_2 < \dots < i_{n'}$.

Wir erhalten dann unter Verwendung von (A.4) :

$$Z_0^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (\text{A.5a})$$

$$Z_{1[n']}^{(n-1)} = \frac{n'}{n!} \quad (\text{A.5b})$$

$$Z_{2[n']}^{(n-1)} = \frac{n'(n'+1)}{(n+1)!} . \quad (\text{A.5c})$$

Entsprechend folgt für die Größe

$$\tilde{Z}_{[n']}^{(n-1)} := \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \dots \int_0^1 dz_n \delta(1 - z_1 - z_2 - \dots - z_n) \tilde{w}(\mathbf{z}) ,$$

mit $\tilde{w}(\mathbf{z}) := \tilde{w}_{[n']}(\mathbf{z}) := (z_1 + z_{n'+1})\mu_{i_1} + (z_2 + z_{n'+2})\mu_{i_2} + \dots + (z_{n'} + z_{2n'})\mu_{i_{n'}}$
und $2n' \leq n$, nach Durchführung der Variablentransformation :

$$\tilde{Z}_{[n']}^{(n-1)} = \frac{2}{n!} \sum_{s=1}^{n'} \mu_{i_s} . \quad (\text{A.5d})$$

Feynman-Parametrisierung im Anschluß an die erste Impulsintegration bei Mehrschleifenintegralen ergibt im allgemeinen gemäß (A.1) einen Ausdruck der Form :

$$\mathcal{G}^{(n-1)} := \int_0^1 dx_1 x_1^{n-2} (1-x_1)^{\alpha_1-1} \int_0^1 dx_2 x_2^{n-3} \dots \int_0^1 dx_{n-1} G(\mathbf{x})$$

mit nicht-ganzzahligem Exponenten α_1 .

So führt uns beispielsweise die Anwendung der Gegentermtechnik zur Bestimmung führender divergenter Beiträge aus Zweischleifenintegralen in dimensioneller Regularisierung bei $D = 4 - \epsilon$ auf die Integralgröße :

$$\mathcal{G}_{D(i)}^{(n-1)} := \int_0^1 dx_1 x_1^{n-2} (1-x_1)^{i-D/2} \int_0^1 dx_2 x_2^{n-3} \dots \int_0^1 dx_{n-1} G_D(\mathbf{x}) ;$$

und damit speziell für $i \in \{0, 1\}$ auf divergente Parameterintegrale vom Typ :

$$T_{D(i)}^{(n)} := \int_0^1 dx x^{n-2} (1-x)^{i-D/2} f_D(x) . \quad (\text{A.6})$$

Setzen wir hierbei Analytizität der Funktion f_D in $x = 1$ voraus, so findet man eine Regularisierung dieser Integrale durch analytische Fortsetzung für $D < 4$ wie folgt :

$$\begin{aligned}
T_{D(1)}^{(n)} &= \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{1-D/2} f_D(x) = \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{1-D/2} \{ f_D(x) - f_D(1) + f_D(1) \} = \\
&= \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{1-D/2} f_D(1) + \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{2-D/2} \frac{f_D(x) - f_D(1)}{1-x} = \\
&= (n-2)! \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(n+1-D/2)} \cdot f_D(1) + \mathcal{O}(\epsilon^0),
\end{aligned} \tag{A.7a}$$

$$\begin{aligned}
T_{D(0)}^{(n)} &= \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{-D/2} f_D(x) = \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{-D/2} f_D(1) + \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{1-D/2} F_D(x) = \\
&= \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{-D/2} f_D(1) + \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{1-D/2} F_D(1) + \int_0^1 dx \, x^{n-2} (1-x)^{2-D/2} \frac{F_D(x) - F_D(1)}{1-x} = \\
&= (n-2)! \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(n-D/2)} \left\{ \frac{f_D(1)}{1-D/2} - \frac{f_D'(1)}{n-D/2} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^0),
\end{aligned} \tag{A.7b}$$

wobei im zweiten Fall noch $F_D(x) := \frac{f_D(x) - f_D(1)}{1-x}$ gesetzt wurde.

Im letzten Schritt haben wir jeweils von der Integraldarstellung der Eulerschen Beta-Funktion [15]

$$B(1+\alpha, 1+\beta) = \int_0^1 dx \, x^\alpha (1-x)^\beta = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\alpha+\beta)}$$

Gebrauch gemacht.

Es bleibt dann noch die Berechnung regulärer Parameterintegrale des Typs :

$$X_m^{(n-1)} := X_{m[n']}^{(n-1)} := \int_0^1 dx_2 \, x_2^{n-3} \int_0^1 dx_3 \, x_3^{n-4} \dots \int_0^1 dx_{n-1} \, [\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}})]^m, \tag{A.8}$$

mit $\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) := \tilde{\tau}_{[n']}(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{y}_{i_1} \mu_{i_1} + \hat{y}_{i_2} \mu_{i_2} + \dots + \hat{y}_{i_{n'}} \mu_{i_{n'}}$, wobei $i_1 < i_2 < \dots < i_{n'}$ und $\hat{y}_j := y_j|_{x_1=1}$.

Wir finden dafür :

$$X_0^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (\text{A.9a})$$

$$X_{1[n']}^{(n-1)} = \frac{1}{n!} \sum_{s=1}^{n'} \mu_{i_s} \quad (\text{A.9b})$$

$$X_{2[n']}^{(n-1)} = \frac{2}{(n+1)!} \sum_{\substack{t, t'=1 \\ t \leq t'}}^{n'} \mu_{i_t} \mu_{i_{t'}} . \quad (\text{A.9c})$$

Zur Auswertung von Feynman-Graphen mit internen Quarklinien haben wir im Falle massiver Quarks neben der rein spontanen Skala Λ_{QCD} auch noch externe Massenskalen in Form der Quarkflavour-Strommassen $\hat{m}_F$ zu berücksichtigen. Die Analyse nicht-perturbativer Logarithmen erfordert dann die Berechnung von Integralen über Logarithmen von Linearkombinationen der eingeführten Feynman-Parameter, wofür etwa (6.23) als Beispiel dient. Bei der expliziten Berechnung solcher Integraltypen machen wir intensiven Gebrauch von [62] und erhalten folgende nützliche Identitäten :

$$L_0(a) := \int_0^1 dx \ln^2(1+ax) = 2 + \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left\{ \ln^2(1+a) - 2 \ln(1+a) \right\} \quad (\text{A.10a})$$

$$L_1(a) := \int_0^1 dx x \ln^2(1+ax) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{a} + \left(-1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2}\right) \ln(1+a) + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \ln^2(1+a) \right\} \quad (\text{A.10b})$$

$$L_2(a) := \int_0^1 dx x^2 \ln^2(1+ax) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2a} + \frac{11}{a^2} \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} - \frac{11}{3a^3} \right) \ln(1+a) + \left(1 + \frac{1}{a^3} \right) \ln^2(1+a) \right\} . \quad (\text{A.10c})$$

A.1.3 Euklidische Impulsintegration

Nach Einführung einer Feynman-Parametrisierung und gegebenenfalls der Translation des Integrationsimpulses gelangen wir im Rahmen dimensioneller Regularisierung [12] zur Anwendung der Euklidischen Standardformel für D-dimensionale, sphärisch symmetrische Impulsraumintegrale :

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + M^2)^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha + D/2) \Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(\beta)} [M^2]^{D/2 + \alpha - \beta} . \quad (\text{A.11})$$

Um diese skalare Integralformel auch im Fall eines allgemein tensoriellen Integranden verwenden zu können, nutzen wir explizit die Kovarianz der Formulierung unserer Feldtheorie, welche sich manifestiert in den Eigenschaften *symmetrischer Integration* :

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} f(p^2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}}{D(D+2) \dots (D+n-2)} \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p (p^2)^{n/2} f(p^2) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Hierbei bezeichnet $S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ für $n \geq 2$ den totalsymmetrischen Tensor n -ter Stufe.

A.2 Euklidische γ -Algebra

Ausgehend von der Antikommutator-Relation der Euklidischen γ -Algebra in D Dimensionen :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2 \delta^{\mu\nu} , \quad (\text{A.13})$$

erhalten wir die Identitäten :

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = -D \quad (\text{A.14a})$$

$$\not{p} \not{p} = -p^2 \quad (\text{A.14b})$$

$$\not{p} \not{k} + \not{k} \not{p} = -2(p \cdot k) \quad (\text{A.14c})$$

$$\not{p} \not{k} \not{p} = p^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{p} . \quad (\text{A.14d})$$

Mit der Definition $Tr\{1\} = 4$ folgen die Spurrelationen :

$$Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = -4 \delta^{\mu\nu} \quad (\text{A.15a})$$

$$Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda\} = 4 \{ \delta^{\mu\nu} \delta^{\sigma\lambda} - \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\lambda} + \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\sigma} \} , \quad (\text{A.15b})$$

während die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen identisch verschwindet.

Als unmittelbare Konsequenz aus (A.14) ergibt sich im Fermionsektor für die rationalen Approximanten zum (ungeraden) Nennergrad r :

$$\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r,2s+1}) = \left\{ \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \not{p} - p^2 \right\} (-p^2)^{\frac{r-1}{2}} + \mathcal{O}(p^{r-2}) \quad (\text{A.16a})$$

$$\begin{aligned} \prod_{s=0}^r (\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) &= \left\{ p^4 + (r+1)(p \cdot k) p^2 + \frac{r+1}{2} k^2 p^2 + \frac{(r-1)(r+1)}{2} (p \cdot k)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \left(p^2 (\not{p} + \not{k}) + (1-r)(p \cdot k) \not{p} \right) - \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} p^2 \right\} (-p^2)^{\frac{r-3}{2}} + \mathcal{O}(p^{r-2}) . \end{aligned} \quad (\text{A.16b})$$

Schließlich finden wir weiter mit Hilfe von (A.16b) :

$$(\not{p} + \not{k})^n = \left\{ p^4 + n(p \cdot k)p^2 + \frac{n}{2}k^2p^2 + \frac{n(n-2)}{2}(p \cdot k)^2 \right\} (-p^2)^{\frac{n-4}{2}} + \mathcal{O}(p^{n-3}) \quad \text{falls } n \text{ gerade}$$
(A.16c)

$$\begin{aligned} (\not{p} + \not{k})^n = & \left\{ \not{p} \left[p^4 + (n-1)(p \cdot k)p^2 + \frac{n-1}{2}k^2p^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{2}(p \cdot k)^2 \right] + \right. \\ & \left. \not{k} \left[p^4 + (n-1)(p \cdot k)p^2 \right] \right\} (-p^2)^{\frac{n-5}{2}} + \mathcal{O}(p^{n-3}) \quad \text{falls } n \text{ ungerade .} \end{aligned}$$
(A.16d)

Die Entwicklungen (A.16) spielen bei der Berechnung des Quark-Gluon-Kondensats eine wesentliche Rolle.

A.3 $SU(N_C)$ -Farbalgebra

Gegenstand unserer feldtheoretischen Betrachtungen ist die Quantenchromodynamik mit lokaler $SU(N_C)$ -Eichinvarianz. In diesem Abschnitt sollen die für die Kondensatrechnungen benötigten Eigenschaften der Lie-Gruppe $SU(N_C)$ kurz vorgestellt werden.

Es bezeichnen T_a für $a \in \{1, 2, \dots, N_C^2 - 1\}$ die zugehörigen Generatoren. Diese bilden vermöge der Kommutator-Relationen

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (\text{A.17})$$

eine Lie-Algebra mit den total-antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} .

Die Gluonfelder transformieren sich gemäß der adjungierten Darstellung der $SU(N_C)$ mit

$$(T_a)_{bc} = -i f_{abc} , \quad (\text{A.18})$$

während die Quarkfelder unter Rotationen im Farbraum der fundamentalen Darstellung gehorchen :

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a ; \quad (\text{A.19})$$

dabei stellen die λ_a als spurlose, hermitische $(N_C \times N_C)$ -Matrizen die Verallgemeinerungen der Gell-Mann-Matrizen aus der $SU(3)$ dar. Es gilt [15] :

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{2}{N_C} \delta_{ab} \mathbf{1} + (d_{abc} + i f_{abc}) \lambda_c , \quad (\text{A.20})$$

mit totalsymmetrischen Strukturkonstanten d_{abc} . Hieraus erhalten wir Spurrelationen der fundamentalen Darstellung :

$$Tr \{ \lambda_a \lambda_b \} = 2 \delta_{ab} \quad (\text{A.21a})$$

$$Tr \{ \lambda_a \lambda_b \lambda_c \} = 2 (d_{abc} + i f_{abc}) , \quad (\text{A.21b})$$

und insbesondere

$$Tr \{ T_a T_a \} = \frac{N_C^2 - 1}{2} . \quad (\text{A.21c})$$

Damit lassen sich nun Farbtensoren als Spuren über Generatoren der $SU(N_C)$ in ihrer fundamentalen Darstellung schreiben :

$$\delta_{ab} = 2 Tr \{ T_a T_b \} \quad (\text{A.22a})$$

$$f_{abc} = -2i Tr \{ T_a [T_b, T_c] \} \quad (\text{A.22b})$$

$$d_{abc} = 2 Tr \{ T_a \{T_b, T_c\} \} \quad (\text{A.22c})$$

$$f_{abj} f_{cdj} = -2 Tr \{ [T_a, T_b] [T_c, T_d] \} . \quad (\text{A.22d})$$

Diese Identitäten wurden von uns insbesondere bei der Definition der Vakuumkondensate im gluonischen Sektor der QCD verwendet.

Anhang B

Details zur Berechnung des 3-Gluon-Kondensats

B.1 Subschleife mit $(m_2 m_3)$

Unter Bezugnahme auf (4.16) definieren wir als Hilfsgrößen die Einschleifenintegrale :

$$\begin{aligned} [K_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &:= \mu_0^\epsilon p^\omega \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} h_j^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p - k) \cdot \\ &\sum_{m_2, m_3 \geq 0}^{(*)} \frac{C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (k^2)^{m_2} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{2r-(m_2+m_3)-\delta_{j4}}}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Vor der Auswertung mit Hilfe von Feynman-Methoden legt ein Blick auf die Impulsstruktur der $h_j^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p - k)$ folgende Zerlegung nahe :

$$\begin{aligned} [K_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &=: \\ \mu_0^\epsilon p^\omega \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} &\left\{ \frac{[G_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p - k)}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2} + \right. \\ &\left. \frac{[H_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p - k)}{\left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Nach Einführung von Feynman-Parametern erhalten wir dann :

$$\begin{aligned}
[K_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) = \mu_0^\epsilon p^\omega \left\{ (2r+2)! \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{[G_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(p, q_1 - w_1 p, (w_1 - 1)p - q_1)}{\{q_1^2 + R_1^2(p^2)\}^{2r+3}} + \right. \\
\left. (2r+1)! \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \frac{[H_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(p, q_2 - w_2 p, (w_2 - 1)p - q_2)}{\{q_2^2 + R_2^2(p^2)\}^{2r+2}} \right\}, \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

wobei

$$q_1 := k + w_1 \cdot p$$

$$w_1 := w_1(\mathbf{z}) := z_{r+2} + z_{r+3} + \dots + z_{2r+3}$$

$$R_1^2(p^2) := w_1(1 - w_1)p^2 + \tilde{w} \Lambda^2$$

$$q_2 := k + w_2 \cdot p$$

$$w_2 := w_2(\mathbf{z}) := z_{r+2} + z_{r+3} + \dots + z_{2r+2}$$

$$R_2^2(p^2) := w_2(1 - w_2)p^2 + \tilde{w} \Lambda^2$$

$$\tilde{w} := \tilde{w}(\mathbf{z}) := (z_1 + z_{r+2})\sigma_{r,1} + (z_2 + z_{r+3})\sigma_{r,3} + \dots + (z_{r+1} + z_{2r+2})\sigma_{r,2r+1}.$$

Der oberflächliche UV-Divergenzgrad von (B.1) beträgt $\delta_k = D - 3$. Es kann also eine maximal lineare Divergenz im ersten Integrationsschritt auftreten. Mit Hilfe der Auswahlregeln $(\star)$ erhalten wir daraus notwendige Bedingungen für das Auftreten von UV-Divergenzen, ausgedrückt durch die Indizes unserer Vertex-Koeffizienten :

$$\begin{array}{llll}
m_2 + m_3 = 2r & \implies & m_1 \leq r & \text{für } j \in \{1, 2, 3\} \\
m_2 + m_3 = 2r - 1 & \implies & m_1 \leq r & \text{für } j = 4.
\end{array}$$

Berücksichtigen wir für die Zählerfunktionen in (B.3) noch die Eigenschaften symmetrischer Integration, so ergeben sich schließlich die Funktionen $[\tilde{G}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p)$ bzw. $[\tilde{H}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p)$, deren divergenzerzeugende Beiträge nachfolgend aufgelistet sind :

$$\begin{aligned}
[\tilde{G}_{(c)1}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{2}{D(D+2)} \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu - (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda \right\} \sum_{m_2+m_3=2r}^{(\star)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)1(r)} (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}), \\
[\tilde{H}_{(c)1}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{2}{D(D+2)} \left\{ t^{\mu\nu}(p) p^\lambda + t^{\mu\lambda}(p) p^\nu \right\} \sum_{m_2+m_3=2r}^{(\star)} \left\{ (D+4r) w_2 - 2m_3 \right\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)1(r)} (q^2)^{2r} \\
&\quad + \mathcal{O}(q^{4r-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{G}_{(c)2}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{2}{D(D+2)} \left\{ (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda - t^{\mu\lambda}(p) p^\nu \right\} \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)} (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) , \\
[\tilde{H}_{(c)2}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{2(1-D)}{D} t^{\mu\nu}(p) p^\lambda \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)} (q^2)^{2r} + \mathcal{O}(q^{4r-1}) , \\
[\tilde{G}_{(c)3}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{1}{D} \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu \left(D(1-w_1) - 1 + \frac{2(D+1)}{D+2} (m_3 - 2r w_1) \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{D+2} (m_3 - 2r w_1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda + w_1 (\delta^{\mu\nu} p^\lambda - \delta^{\mu\lambda} p^\nu) \right\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)3(r)} (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) , \\
[\tilde{H}_{(c)3}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{1}{D(D+2)} \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu ((D-1)(D+2) + (D+1)(D+4r)w_2 - 2m_3(D+1)) \right. \\
&\quad \left. - t^{\mu\nu}(p) p^\lambda ((D+4r)w_2 - 2m_3) \right\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)3(r)} (q^2)^{2r} + \mathcal{O}(q^{4r-1}) , \\
[\tilde{G}_{(c)4}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{4}{D(D+2)} \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu - (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda \right\} \sum_{m_2+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)4(r)} (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) , \\
[\tilde{H}_{(c)4}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu}(q^2, p) &= \frac{4}{D(D+2)} \left\{ (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda - t^{\mu\lambda}(p) p^\nu \right\} \sum_{m_2+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)4(r)} (q^2)^{2r} + \mathcal{O}(q^{4r-1}) .
\end{aligned}$$

Die Ausführung der Impulsintegrationen in (B.3) mit Hilfe der Standardformel (A.11) ergibt nun :

$$\begin{aligned}
[\tilde{K}_{(c)1}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &= \frac{2\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) p^\omega \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)1(r)} . \\
&\quad \left[(2r+D/2) \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu - (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda \right\} \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} (R_1^2(p^2))^{D/2-2} + \right. \\
&\quad \left. \left\{ t^{\mu\nu}(p) p^\lambda + t^{\mu\lambda}(p) p^\nu \right\} \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \left\{ (D+4r)w_2 - 2m_3 \right\} (R_2^2(p^2))^{D/2-2} \right] + (konv) ,
\end{aligned}$$

(B.4a)

$$\begin{aligned}
[K_{(c)2}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &= \frac{2\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) p^\omega \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)2(r)} \cdot \\
&\left[(2r+D/2) \left\{ (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda - t^{\mu\lambda}(p) p^\nu \right\} \int \mathcal{D}^{2r+3}\mathbf{z} (R_1^2(p^2))^{D/2-2} + \right. \\
&\left. (1-D)(D+2) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda \int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} (R_2^2(p^2))^{D/2-2} \right] + (konv), \tag{B.4b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{(c)3}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &= \frac{\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) p^\omega \sum_{m_2+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)3(r)} \cdot \\
&\left[(2r+D/2) \int \mathcal{D}^{2r+3}\mathbf{z} \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu (D(D+2)(1-w_1) - (D+2) + 2(D+1)(m_3-2r w_1)) + \right. \right. \\
&2(2r w_1 - m_3) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda + w_1(D+2) (\delta^{\mu\nu} p^\lambda - \delta^{\mu\lambda} p^\nu) \left. \right\} (R_1^2(p^2))^{D/2-2} + \\
&\int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu ((D-1)(D+2) + (D+1)(D+4r) w_2 - 2m_3(D+1)) - \right. \\
&\left. t^{\mu\nu}(p) p^\lambda ((D+4r) w_2 - 2m_3) \right\} (R_2^2(p^2))^{D/2-2} \left. \right] + (konv), \tag{B.4c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K_{(c)4}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &= \frac{4\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) p^\omega \left\{ t^{\mu\lambda}(p) p^\nu - (D+1) t^{\mu\nu}(p) p^\lambda \right\} \cdot \\
&\sum_{m_2+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)4(r)} \left\{ (2r+D/2) \int \mathcal{D}^{2r+3}\mathbf{z} (R_1^2(p^2))^{D/2-2} - \int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} (R_2^2(p^2))^{D/2-2} \right\} + (konv). \tag{B.4d}
\end{aligned}$$

Also läßt sich unser ursprüngliches 2-Loop-Integral (4.16) mit festgelegter Reihenfolge der Schleifenintegrationen in seinen divergenten Anteilen wie folgt darstellen :

$$\begin{aligned}
[\Omega_{1(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^\epsilon \sum_{m_1=0}^r \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} [K_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) \frac{(p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1}}{\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \\
&=: \mu_0^\epsilon \sum_{m_1=0}^r \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1}}{\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} \left\{ \int \mathcal{D}^{2r+3}\mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{G}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p; \mathbf{z})}{(R_1^2(p^2))^{2-D/2}} + \int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{H}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p; \mathbf{z})}{(R_2^2(p^2))^{2-D/2}} \right\}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Mit einer Feynman-Parametrisierung gemäß (A.1) erhalten wir dafür :

$$\begin{aligned}
[\Omega_{1(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^\epsilon \frac{\Gamma(r+3-D/2)}{\Gamma(2-D/2)} \int_0^1 dx_1 x_1^r \int_0^1 dx_2 x_2^{r-1} \dots \int_0^1 dx_r x_r \int_0^1 dx_{r+1} (1-x_1)^{1-D/2} \\
&\sum_{m_1=0}^r \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1} \cdot \\
&\left\{ \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{G}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R_1^2(p^2) + y_2 (p^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (p^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+3-D/2}} + \right. \\
&\left. \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{H}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R_2^2(p^2) + y_2 (p^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (p^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+3-D/2}} \right\}, \tag{B.6}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 - x_1 & y_2 &= x_1 (1 - x_2) & y_3 &= x_1 x_2 (1 - x_3) & \dots & y_{r+1} &= x_1 \dots x_r (1 - x_{r+1}) \\
y_{r+2} &= x_1 \dots x_{r+1} .
\end{aligned}$$

Damit folgt für die beiden Nenner des Integranden ($n \in \{1, 2\}$) :

$$y_1 R_n^2(p^2) + y_2 (p^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (p^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) = (1 - x_1) R_n^2(p^2) + x_1 p^2 + \tau(\mathbf{x}) \Lambda^2 ;$$

hierbei haben wir definiert :

$$\tau(\mathbf{x}) := y_2 \sigma_{r,1} + y_3 \sigma_{r,3} + \dots + y_{r+2} \sigma_{r,2r+1} .$$

Die Auswertung des divergenten Parameterintegrals in (B.6) ergibt nach (A.7) :

$$\int_0^1 dx_1 x_1^r (1-x_1)^{1-D/2} f_D(x_1) = r! \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+3-D/2)} f_D(1) + \mathcal{O}(\epsilon^0) .$$

Weiter setzen wir $\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) := \tau(\mathbf{x})|_{x_1=1}$, sowie

$$\begin{aligned}
[\mathcal{G}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &:= \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} [\tilde{\mathcal{G}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p; \mathbf{z}) \\
[\mathcal{H}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) &:= \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} [\tilde{\mathcal{H}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p; \mathbf{z}) ,
\end{aligned}$$

und erhalten dann für die gesuchten führenden divergenten Beiträge :

$$[\Omega_{1(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} = \mu_0^\epsilon r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \sum_{m_1=0}^r \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1} \left\{ [\mathcal{G}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) + [\mathcal{H}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) \right\}}{\{p^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+3-D/2}}. \quad (\text{B.7})$$

Definieren wir schließlich für den Zähler des Integranden in (B.7) :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0^\epsilon}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r + D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) [Q_{(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega}(p) := \\ \sum_{m_1=0}^r (p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1} \left\{ [\mathcal{G}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) + [\mathcal{H}_{(c)j}^{(r)}]_{m_1}^{\mu\lambda\nu\omega}(p) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

so folgen daraus zusammen mit den Resultaten (B.4) nach Anwendung der Regeln symmetrischer Integration Funktionen der Gestalt :

$$[\tilde{Q}_{(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega}(p^2) = p^2 \sum_{m_2+m_3=2r-\delta_{j4}}^{(*)} S_{(r)m_3}^{(j)\mu\lambda\nu\omega} \sum_{m_1=0}^r C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)j(r)} (p^2)^{m_1} (\Lambda^2)^{r-m_1}. \quad (\text{B.9})$$

Damit können wir schreiben :

$$[\Omega_{1(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} = \frac{\Gamma(2r + D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) \sum_{m_2+m_3=2r-\delta_{j4}}^{(*)} S_{(r)m_3}^{(j)\mu\lambda\nu\omega} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} T_{m_2,m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (\text{B.10})$$

wobei

$$T_{m_2,m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{m_1=0}^r C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)j(r)} (p^2)^{m_1+1} (\Lambda^2)^{r-m_1}}{\{p^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+3-D/2}}. \quad (\text{B.11})$$

Für die in (B.4) noch auszuführenden Integrationen bezüglich der Feynman-Parameter $\mathbf{z}$ finden wir mit (A.5) :

$$\begin{aligned} Z_0^{(2r+n)} &= \frac{1}{(2r+n)!} & n \in \{1, 2\} \\ Z_{1[r+n]}^{(2r+n)} &= \frac{r+n}{(2r+1+n)!}; \end{aligned}$$

und so lassen sich jetzt die in (B.9) definierten dimensionslosen Tensoren $S_{(r)m_3}^{(j)\mu\lambda\nu\omega}$ explizit bestimmen :

$$S_{(r)m_3}^{(1)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{144(2r+1)!} \left\{ (9 - 4(m_3 - r)) \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - (9 + 4(m_3 - r)) \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 2(m_3 - r) \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$S_{(r)m_3}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{144(2r+1)!} \left\{ 4 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 32 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$S_{(r)m_3}^{(3)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{144(2r+1)!} \left\{ 32 \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 4 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - 7 \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

$$S_{(r)m_3}^{(4)\mu\lambda\nu\omega} = 0 + \mathcal{O}(\epsilon) .$$

Es bleibt die Berechnung der UV-divergenten Beiträge aus den Integralen (B.11). Durch Anwendung der Euklidischen Standardintegrationsformel dimensioneller Regularisierung erhalten wir :

$$\begin{aligned} T_{m_2, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(r-1+D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(r+3-D/2)} \Gamma(4-D) \cdot \\ &\quad \left\{ \frac{(r+D/2)(r-1+D/2)}{(3-D)(2-D)} C_{r,r,r}^{(c)j(r)} [\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \frac{r-1+D/2}{3-D} C_{r-1,m_2,m_3}^{(c)j(r)} \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) + C_{r-2,m_2,m_3}^{(c)j(r)} \right\} \cdot \\ &\quad \left[\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} + (konv) . \end{aligned} \tag{B.12}$$

Unter Berücksichtigung der Laurent-Entwicklung :

$$\Gamma(2-D/2)\Gamma(4-D) \left[\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} = \frac{2}{\epsilon^2} + \ln^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right) , \tag{B.13}$$

haben wir in (B.10) noch folgende Feynman-Parameterintegrale gemäß (A.9) auszuführen :

$$\begin{aligned} X_0^{(r)} &= \frac{1}{r!} \\ X_{1[r+1]}^{(r)} &= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \\ X_{2[r+1]}^{(r)} &= \frac{2}{(r+2)!} \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} . \end{aligned}$$

Dies führt schließlich zum Endresultat (4.17).

B.2 Subschleife mit $(m_3 m_1)$

Entsprechend wie oben führen wir als Hilfsgrößen die folgenden Einschleifenintegrale ein :

$$\begin{aligned} [P_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &= \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} h_j^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p-k) p^\omega \\ &\sum_{m_1, m_3 \geq 0}^{(*)} \frac{C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (p^2)^{m_1} ((p+k)^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{2r-(m_1+m_3)-\delta_{j4}}}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

und zerlegen sie anschließend gemäß :

$$\begin{aligned} [P_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &=: \mu_0^\epsilon \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^\omega \\ &\left\{ \frac{[G_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p-k)}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] (p+k)^2} + \right. \\ &\left. \frac{[H_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu}(p, k, -p-k)}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Mit einer Feynman-Parametrisierung erhalten wir dann :

$$\begin{aligned} [P_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &= \mu_0^\epsilon \left\{ (2r+2)! \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{(q_1 - w_1 k)^\omega [G_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu}(q_1 - w_1 k, k, (w_1 - 1)k - q_1)}{\left\{ q_1^2 + R_1^2(k^2) \right\}^{2r+3}} + \right. \\ &\left. (2r+1)! \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \frac{(q_2 - w_2 k)^\omega [H_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu}(q_2 - w_2 k, k, (w_2 - 1)k - q_2)}{\left\{ q_2^2 + R_2^2(k^2) \right\}^{2r+2}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

wobei

$$q_1 := p + w_1 \cdot k$$

$$w_1 := w_1(\mathbf{z}) := z_{r+2} + z_{r+3} + \dots + z_{2r+3}$$

$$R_1^2(k^2) := w_1 (1 - w_1) k^2 + \tilde{w} \Lambda^2$$

$$q_2 := p + w_2 \cdot k$$

$$w_2 := w_2(\mathbf{z}) := z_{r+2} + z_{r+3} + \dots + z_{2r+2}$$

$$R_2^2(k^2) := w_2 (1 - w_2) k^2 + \tilde{w} \Lambda^2$$

$$\tilde{w} := \tilde{w}(\mathbf{z}) := (z_1 + z_{r+2}) \sigma_{r,1} + (z_2 + z_{r+3}) \sigma_{r,3} + \dots + (z_{r+1} + z_{2r+2}) \sigma_{r,2r+1} .$$

Aus Gleichung (B.14) liest man den oberflächlichen UV-Divergenzgrad $\delta_p = D - 2$ ab. Im ersten Integrationsschritt können daher keine höheren als quadratische Divergenzen auftreten.

Gemäß $(\star)$ lautet dann die notwendige Divergenzbedingung :

$$2r - 1 - \delta_{j4} \leq m_1 + m_3 \leq 2r - \delta_{j4} ,$$

und daraus folgend $m_2 \leq r$.

Definieren wir nun für (B.16) die Zählerfunktionen :

$$[U_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(l_1, l_2, l_3) := l_1^\omega [G_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu}(l_1, l_2, l_3)$$

$$[V_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(l_1, l_2, l_3) := l_1^\omega [H_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu}(l_1, l_2, l_3) ,$$

so ergeben sich unter Anwendung der Eigenschaften symmetrischer Integration anschließend Funktionen $[\tilde{U}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k)$ beziehungsweise $[\tilde{V}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k)$, die nachfolgend explizit aufgeführt sind :

$$\begin{aligned} [\tilde{U}_{(c)1}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= \frac{2}{D(D+2)} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(\star)} \left\{ ((D+2)w_1 - (D+1)) t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu + (D+2) w_1 t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega + \right. \\ &\quad (1 - 2w_1) t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega - w_1 k^2 [t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} + t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega}] + \\ &\quad \frac{2(m_3 + w_1(1-2r))}{D+4} [t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} - (D+2) k^\mu k^\nu) + t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} - (D+2) k^\mu k^\omega) + \\ &\quad \left. t^{\mu\lambda}(k) (\delta^{\nu\omega} + 2 k^\nu k^\omega) \right] \Big\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)1(r)}(q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) , \\ [\tilde{V}_{(c)1}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= \frac{2}{D(D+2)} t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} - D k^\mu k^\omega) k^2 \sum_{m_1+m_3=2r}^{(\star)} \left\{ (D+2) w_2 - 2 (w_2(1-2r) + m_3) \right\} \cdot \\ &\quad C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)1(r)}(q^2)^{2r} + \mathcal{O}(q^{4r-1}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{U}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= \frac{2}{D(D+2)} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} \left\{ ((D+1) - w_1(D+2)) t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu - (D+2) w_1 t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega + \right. \\
&\quad (2w_1 - 1) t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega + w_1 k^2 [t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} + t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega}] - \\
&\quad \frac{2(m_3 + w_1(1-2r))}{D+4} [t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 - (D+2) k^\mu k^\nu) + t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 - (D+2) k^\mu k^\omega) + \\
&\quad \left. t^{\mu\lambda}(k) (\delta^{\nu\omega} k^2 + 2k^\nu k^\omega) \right] \Big\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)}(q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}), \\
[\tilde{V}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= \frac{2}{D(D+2)} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} \left\{ [t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} - (D+1) t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu}] q^2 - \right. \\
&\quad \frac{(-w_2^2)(D(D+2) + 8r(D+2r+1)) + 4w_2 m_3(D+4r) - 4m_3(m_3-1)}{D+4} \cdot \\
&\quad [t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega + t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega + t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu] + \\
&\quad [2(D+4r)(-rw_2^2 + m_3 w_2) - m_3(D+2m_3)] t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} k^2 + \\
&\quad \left. \frac{(D+4r)((2r-1)w_2^2 - 2m_3 w_2) + m_3(D+2(m_3+1))}{D+4} \cdot \right. \\
&\quad \left. [t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} + t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu}] k^2 \right\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)}(q^2)^{2r} + \\
&\quad \frac{2}{D(D+2)} \left\{ t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} - (D+1) t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} \right\} \Lambda^2 \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)}(q^2)^{2r} + \mathcal{O}(q^{4r-1}), \\
[\tilde{U}_{(c)3}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= \frac{2}{D(D+2)} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} \left\{ \frac{2(m_3 + w_1(1-2r))}{D+4} [(D+3) t^{\mu\lambda}(k) (\delta^{\nu\omega} k^2 + 2k^\nu k^\omega) - \right. \\
&\quad t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 + 2k^\mu k^\omega) - t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 + 2k^\mu k^\nu)] - \\
&\quad (2m_3 + 1 + w_1(1-4r)) [(D+1) t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega - t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu] + \\
&\quad (D+1) t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} k^2 - t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} k^2 - t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} k^2 + \\
&\quad w_1 [t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 + 2k^\mu k^\omega) + t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 - (D+1) k^\mu k^\nu) - \\
&\quad \left. t^{\mu\lambda}(k) ((D+3) \delta^{\nu\omega} k^2 + (3-D(D+2)) k^\nu k^\omega) \right] \Big\} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)3(r)}(q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{V}_{(c)3}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= 0 + \mathcal{O}(q^{4r-1}) , \\
[\tilde{U}_{(c)4}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= \frac{8}{D(D+2)(D+4)} \left\{ D(D+6) t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu - (D+2) \left[t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega + t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega \right] + \right. \\
&\quad \left. t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} k^2 + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} k^2 + t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} k^2 \right\} \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)4(r)} (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) , \\
[\tilde{V}_{(c)4}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(q^2, k) &= 0 + \mathcal{O}(q^{4r-1}) .
\end{aligned}$$

Die vorliegenden Resultate zeigen, daß nur für $j = 2$ die maximal mögliche quadratische Divergenz auch tatsächlich auftritt. In den Fällen $j \in \{1, 3, 4\}$ kompensieren sich dagegen jeweils die führenden divergenten Beiträge, sodaß lediglich lineare Divergenzen erscheinen. Die UV-Divergenzbedingungen reduzieren sich dann auf

$$m_1 + m_3 = 2r - \delta_{j4} \quad \text{und} \quad m_2 \leq r .$$

Mit Hilfe der Euklidischen Integralformel erhalten wir schließlich für die Einschleifengrößen aus (B.16) :

$$\begin{aligned}
[P_{(c)1}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &= \frac{2\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)1(r)} . \\
&\left[(2r+D/2) \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \left\{ ((D+2)w_1 - (D+1)) t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu + (D+2)w_1 t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega + \right. \right. \\
&\quad (1-2w_1) t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega - w_1 k^2 [t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} + t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega}] + \\
&\quad \frac{2(m_3 + w_1(1-2r))}{D+4} [t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 - (D+2)k^\mu k^\nu) + t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 - (D+2)k^\mu k^\omega) + \\
&\quad \left. t^{\mu\lambda}(k) (\delta^{\nu\omega} k^2 + 2k^\nu k^\omega) \right\} (R_1^2(k^2))^{D/2-2} + \\
&\quad \left. t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 - D k^\mu k^\omega) \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \left\{ (D+2)w_2 - 2(w_2(1-2r) + m_3) \right\} (R_2^2(k^2))^{D/2-2} \right] \\
&+ (konv) ,
\end{aligned} \tag{B.17a}$$

$$\begin{aligned}
[P_{(c)3}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &= \frac{2\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+1+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)3(r)} \cdot \\
&\int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \left\{ \frac{2(m_3 + w_1(1-2r))}{D+4} \left[(D+3) t^{\mu\lambda}(k) (\delta^{\nu\omega} k^2 + 2k^\nu k^\omega) - \right. \right. \\
&t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 + 2k^\mu k^\omega) - t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 + 2k^\mu k^\nu) \left. \right] - \\
&(2m_3 + 1 + w_1(1-4r)) \left[(D+1) t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega - t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu \right] + \\
&(D+1) t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} k^2 - t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} k^2 - t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} k^2 + \\
&w_1 \left[t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 + 2k^\mu k^\omega) + t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 - (D+1) k^\mu k^\nu) - \right. \\
&t^{\mu\lambda}(k) ((D+3) \delta^{\nu\omega} k^2 + (3-D(D+2)) k^\nu k^\omega) \left. \right] \left. \right\} (R_1^2(k^2))^{D/2-2} \\
&+ (konv) ,
\end{aligned} \tag{B.17b}$$

$$\begin{aligned}
[P_{(c)4}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &= \frac{8\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(D+4)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+1+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)4(r)} \cdot \\
&\int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \left\{ D(D+6) t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu - (D+2) \left[t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega + t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega \right] + \right. \\
&t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} k^2 + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} k^2 + t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} k^2 \left. \right\} (R_1^2(k^2))^{D/2-2} \\
&+ (konv) ,
\end{aligned} \tag{B.17c}$$

$$\begin{aligned}
[P_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) &= \frac{2\mu_0^\epsilon}{D(D+2)(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \cdot \\
&\left[(2r+D/2) \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)2(r)} \int \mathcal{D}^{2r+3}\mathbf{z} \left\{ (D+1-w_1(D+2)) t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu - \right. \right. \\
&(D+2) w_1 t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega + (2w_1-1) t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega + w_1 k^2 [t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} + t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega}] - \\
&\frac{2(m_3+w_1(1-2r))}{D+4} [t^{\lambda\omega}(k) (\delta^{\mu\nu} k^2 - (D+2) k^\mu k^\nu) + t^{\lambda\nu}(k) (\delta^{\mu\omega} k^2 - (D+2) k^\mu k^\omega) + \\
&t^{\mu\lambda}(k) (\delta^{\nu\omega} k^2 + 2k^\nu k^\omega)] \left. \right\} (R_1^2(k^2))^{D/2-2} + \left\{ t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} - (D+1) t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} \right\} \cdot \\
&\int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} \left\{ \frac{2r+D/2}{1-D/2} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)2(r)} (R_2^2(k^2))^{D/2-1} + \right. \\
&\Lambda^2 \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)2(r)} (R_2^2(k^2))^{D/2-2} \left. \right\} \\
&+ \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} C_{m_1,m_2,m_3}^{(c)2(r)} \int \mathcal{D}^{2r+2}\mathbf{z} \left\{ \left(\frac{(-w_2^2)(D(D+2)+8r(D+2r+1))}{D+4} + \right. \right. \\
&\frac{4w_2 m_3 (D+4r) - 4m_3 (m_3-1)}{D+4} \left. \right) [t^{\mu\lambda}(k) k^\nu k^\omega + t^{\lambda\nu}(k) k^\mu k^\omega + t^{\lambda\omega}(k) k^\mu k^\nu] + \\
&\left[2(D+4r)(-r w_2^2 + m_3 w_2) - m_3 (D+2m_3) \right] t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} k^2 + \\
&\frac{(D+4r)((2r-1)w_2^2 - 2m_3 w_2) + m_3 (D+2(m_3+1))}{D+4} \cdot \\
&\left[t^{\mu\lambda}(k) \delta^{\nu\omega} + t^{\lambda\nu}(k) \delta^{\mu\omega} + t^{\lambda\omega}(k) \delta^{\mu\nu} \right] k^2 \left. \right\} (R_2^2(k^2))^{D/2-2} \Big] \\
&+ (konv) .
\end{aligned} \tag{B.17d}$$

Damit lassen sich die UV-divergenten Beiträge der Zweischleifenintegrale (4.18) wie folgt darstellen :

$$\begin{aligned}
[\Omega_{2(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega} =: & \\
\mu_0^\epsilon \sum_{m_2=0}^r \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} & \left\{ \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{G}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{(R_1^2(k^2))^{2-D/2}} + \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{H}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{(R_2^2(k^2))^{2-D/2}} \right\} + \\
\delta_{j2} \mu_0^\epsilon \sum_{m_2=0}^r \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} & \frac{(k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} [\tilde{\mathcal{I}}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) (R_2^2(k^2))^{1-D/2}} .
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Die Einführung einer Feynman-Parametrisierung ergibt dann :

$$\begin{aligned}
[\Omega_{2(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega} = \mu_0^\epsilon \int_0^1 dx_1 x_1^r \int_0^1 dx_2 x_2^{r-1} \dots \int_0^1 dx_r x_r \int_0^1 dx_{r+1} & \\
\sum_{m_2=0}^r \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \left[\frac{\Gamma(r+3-D/2)}{\Gamma(2-D/2)} (1-x_1)^{1-D/2} \cdot \right. & \\
\left\{ \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{G}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R_1^2(k^2) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+3-D/2}} + \right. & \\
\left. \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{H}}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R_2^2(k^2) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+3-D/2}} \right\} + \frac{\Gamma(r+2-D/2)}{\Gamma(1-D/2)} \cdot & \\
\delta_{j2} (1-x_1)^{-D/2} \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \frac{[\tilde{\mathcal{I}}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R_2^2(k^2) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+2-D/2}} \Bigg] , & \\
\end{aligned} \tag{B.19}$$

wobei

$$y_1 = 1 - x_1 \quad y_2 = x_1 (1 - x_2) \quad y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3) \quad \dots \quad y_{r+1} = x_1 \dots x_r (1 - x_{r+1})$$

$$y_{r+2} = x_1 \dots x_{r+1} .$$

Für die Nenner der Integranden ($n \in \{1, 2\}$) folgt hiermit :

$$y_1 R_n^2(k^2) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) = (1 - x_1) R_n^2(k^2) + x_1 k^2 + \tau(\mathbf{x}) \Lambda^2 ;$$

dabei haben wir wiederum definiert :

$$\tau(\mathbf{x}) := y_2 \sigma_{r,1} + y_3 \sigma_{r,3} + \dots + y_{r+2} \sigma_{r,2r+1} .$$

Die Auswertung der divergenten Feynman-Parameterintegrale mit Hilfe der Euler-Formel ergibt nach A.1.2 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx_1 x_1^r (1-x_1)^{1-D/2} f_D(x_1) &= r! \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+3-D/2)} f_D(1) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \\ \int_0^1 dx_1 x_1^r (1-x_1)^{-D/2} f_D(x_1) &= r! \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+2-D/2)} \left\{ \frac{f_D(1)}{1-D/2} - \frac{f_D'(1)}{r+2-D/2} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^0) . \end{aligned}$$

Mit entsprechenden Definitionen wie in (B.7) können wir damit für die gesuchte Zweischleifengröße schreiben :

$$\begin{aligned} [\Omega_{2(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega} &= \mu_0^\epsilon r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \sum_{m_2=0}^r \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} . \\ &\left[\frac{[\mathcal{G}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) + [\mathcal{H}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k)}{\{k^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+3-D/2}} + \delta_{j2} \left\{ \frac{[\mathcal{I}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k)}{\{k^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+2-D/2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \frac{(1-D/2) \left\{ (1+w_2(\mathbf{z})(w_2(\mathbf{z})-1)) k^2 + (\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{w}(\mathbf{z})) \Lambda^2 \right\} [\tilde{\mathcal{I}}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z})}{\{k^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+3-D/2}} \right\} \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Setzt man nun für die Zählerfunktionen der obigen Integranden :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0^\epsilon}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) [Q_{(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \hat{\mathbf{x}}) &:= \\ \sum_{m_2=0}^r (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \left\{ [\mathcal{G}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) + [\mathcal{H}_{(c)j}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) + \right. \\ \delta_{j2} (2r+D/2) \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \left\{ (1+w_2(\mathbf{z})(w_2(\mathbf{z})-1)) k^2 + (\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{w}(\mathbf{z})) \Lambda^2 \right\} [\tilde{\mathcal{I}}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k; \mathbf{z}) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{B.21a})$$

$$\frac{\mu_0^\epsilon}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2r+1+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(1-D/2) [R_{(c)j}^{(r)}]^{\mu\lambda\nu\omega}(k) := \delta_{j2} \sum_{m_2=0}^r (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} [\mathcal{I}_{(c)2}^{(r)}]_{m_2}^{\mu\lambda\nu\omega}(k) , \quad (\text{B.21b})$$

so ergeben sich dann aus den Einschleifenresultaten (B.17) unter Anwendung der Eigenschaften symmetrischer Integration Funktionen der Gestalt :

$$\begin{aligned}
[\tilde{Q}_{(c)j}^{(r)}]^\mu{}^{\lambda\nu\omega}(k^2; \hat{\mathbf{x}}) = \\
\sum_{m_1+m_3=2r-\delta_{j4}}^{(*)} \sum_{m_2=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} \left\{ k^2 S_{(r)m_3}^{(j)\mu\lambda\nu\omega} + \delta_{j2} (2r + D/2) \left\{ \xi_1 k^2 + \xi_0(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2 \right\} T_{(r)}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} \right\} \\
+ \delta_{j2} T_{(r)}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} \sum_{m_2=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r+1-m_2} ,
\end{aligned} \tag{B.22a}$$

$$[\tilde{R}_{(c)j}^{(r)}]^\mu{}^{\lambda\nu\omega}(k^2) = \delta_{j2} T_{(r)}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} \sum_{m_2=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)2(r)} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} , \tag{B.22b}$$

mit

$$\begin{aligned}
\xi_0(\hat{\mathbf{x}}) &:= \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \left(\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{w}(\mathbf{z}) \right) \\
\xi_1 &:= \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \left(1 + w_2(\mathbf{z}) (w_2(\mathbf{z}) - 1) \right) .
\end{aligned}$$

Daher gilt also :

$$\begin{aligned}
[\tilde{\Omega}_{2(c)j}^{(r)}]^\mu{}^{\lambda\nu\omega} &= \frac{\Gamma(2r + D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) \left\{ \sum_{m_1+m_3=2r-\delta_{j4}}^{(*)} S_{(r)m_3}^{(j)\mu\lambda\nu\omega} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} K_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) + \right. \\
&\delta_{j2} (2r + D/2) T_{(r)}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \sum_{m_1+m_3=2r}^{(*)} \left\{ \xi_1 K_{m_1, m_3}^{(c)2(r)}(\hat{\mathbf{x}}) + \xi_0(\hat{\mathbf{x}}) L_{m_1, m_3}^{(c)2(r)}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{1 - D/2} M_{m_1, m_3}^{(c)2(r)}(\hat{\mathbf{x}}) \right\} + \\
&\delta_{j2} T_{(r)}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \sum_{m_1+m_3=2r-1}^{(*)} L_{m_1, m_3}^{(c)2(r)}(\hat{\mathbf{x}}) \left. \right\} ,
\end{aligned} \tag{B.23}$$

wobei

$$K_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{m_2=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (k^2)^{m_2+1} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{\{k^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+3-D/2}} , \tag{B.24a}$$

$$L_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{m_2=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r+1-m_2}}{\{k^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+3-D/2}} , \tag{B.24b}$$

$$M_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{m_2=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{(c)j(r)} (k^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2}}{\{k^2 + \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2\}^{r+2-D/2}} . \quad (\text{B.24c})$$

Zur Berechnung der in (B.22) enthaltenen Feynman-Parameterintegrale bezüglich $\mathbf{z}$ verwenden wir aus A.1.2 :

$$Z_0^{(2r+n)} = \frac{1}{(2r+n)!} \quad n \in \{1, 2\}$$

$$Z_{1[r+n]}^{(2r+n)} = \frac{r+n}{(2r+1+n)!}$$

$$Z_{2[r+1]}^{(2r+1)} = \frac{(r+1)(r+2)}{(2r+3)!}$$

$$\tilde{Z}_{[r+1]}^{(2r+1)} = \frac{2}{(2r+2)!} \sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} .$$

Damit können wir nun die in (B.22) eingeführten dimensionslosen Lorentz-Tensoren vierter Stufe explizit bestimmen. Das Ergebnis dieser algebraisch äußerst aufwendigen Rechnung lautet schließlich :

$$S_{(r)m_3}^{(1)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{144(2r+1)!} \left\{ (m_3 - r - 1) \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + (5(r-1-m_3) - 2) \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + (m_3 + 2 - r) \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) ,$$

$$S_{(r)m_3}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{144(2r+1)!} \left\{ 3 \left[\frac{2r(r+1)(r+2)}{2r+3} + m_3(m_3 - 2r) \right] \left[\delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 5 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right] + 5(r - m_3 + 1) \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} + (11 + m_3 - r) \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - (r - m_3 + 4) \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) ,$$

$$S_{(r)m_3}^{(3)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{144(2r+1)!} \left\{ (r - m_3 + 34) \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - (5(r - m_3) + 14) \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + (r - m_3 - 5) \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) ,$$

$$S_{(r)m_3}^{(4)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{23}{288(2r+1)!} \left\{ 5 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} - \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) ,$$

$$T_{(r)}^{(2)\mu\lambda\nu\omega} = \frac{1}{16(2r+1)!} \left\{ \delta^{\mu\lambda} \delta^{\nu\omega} - 5 \delta^{\mu\nu} \delta^{\lambda\omega} + \delta^{\mu\omega} \delta^{\nu\lambda} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon) .$$

Es bleibt jetzt noch die Berechnung der UV-divergenten Beiträge aus den Integralen (B.24). Unter Anwendung der Euklidischen Standardintegralformel dimensioneller Regularisierung (A.11) erhalten wir :

$$\begin{aligned}
K_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(r-1+D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(r+3-D/2)} \Gamma(4-D) \cdot \\
&\quad \left\{ \frac{(r+D/2)(r-1+D/2)}{(3-D)(2-D)} C_{r,r,r}^{(c)j(r)} [\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \frac{r-1+D/2}{3-D} C_{m_1, r-1, m_3}^{(c)j(r)} \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) + C_{m_1, r-2, m_3}^{(c)j(r)} \right\} \cdot \\
&\quad \left[\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} + (konv) ,
\end{aligned} \tag{B.25a}$$

$$\begin{aligned}
L_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(r-1+D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(r+3-D/2)} \Gamma(4-D) \left\{ \frac{r-1+D/2}{3-D} C_{m_1, r, m_3}^{(c)j(r)} \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) + C_{m_1, r-1, m_3}^{(c)j(r)} \right\} \cdot \\
&\quad \left[\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} + (konv) ,
\end{aligned} \tag{B.25b}$$

$$\begin{aligned}
M_{m_1, m_3}^{(c)j(r)}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^D} \frac{\Gamma(r-2+D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(r+2-D/2)} \Gamma(4-D) \cdot \\
&\quad \left\{ \frac{(r-1+D/2)(r-2+D/2)}{(3-D)(2-D)} C_{r,r,r}^{(c)j(r)} [\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \frac{r-2+D/2}{3-D} C_{m_1, r-1, m_3}^{(c)j(r)} \tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) + C_{m_1, r-2, m_3}^{(c)j(r)} \right\} \cdot \\
&\quad \left[\tilde{\tau}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} + (konv) .
\end{aligned} \tag{B.25c}$$

Nach Laurent-Entwicklung gemäß (B.13) ergibt sich mit Hilfe der Formeln (A.9) für die in (B.23) auszuführenden Feynman-Parameterintegrale bezüglich $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}
X_0^{(r)} &= \frac{1}{r!} \\
X_{1[r+1]}^{(r)} &= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \sigma_{r, 2s+1} \\
X_{2[r+1]}^{(r)} &= \frac{2}{(r+2)!} \sum_{\substack{t, t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r, 2t+1} \sigma_{r, 2t'+1} .
\end{aligned}$$

Das hieraus folgende Endresultat des Zweischleifenintegrals (4.18) haben wir in 4.3.2 angegeben.

Anhang C

Details zur Berechnung des Quark-Gluon-Kondensats

C.1 Subschleife mit $(n\ n')$

Einführung von Feynman-Parametern für die p -Integration in (6.17) und anschließende Impuls-Shift ergeben :

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(r)} &= \mu_0^{2\epsilon} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{t^{\mu\nu}(k) (k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} . \\ & (2r+1)! \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \, Tr \, \gamma_\nu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\prod_{s=0}^r (\not{q} - w_r \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \right] (\not{q} - w_r \not{k})^n . \\ & \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma_\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{2q_\mu + (1-2w_r)k_\mu}{2\Lambda} \right\} . \\ & (\not{q} + (1-w_r)\not{k})^{n'} \left[\prod_{s=0}^r (\not{q} + (1-w_r)\not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \right] \frac{1}{\{q^2 + R^2(k^2)\}^{2r+2}} , \end{aligned} \quad (C.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} q &:= p + w_r \cdot k \\ R^2(k^2) &:= w_r (1-w_r) \cdot k^2 + (z_1 + z_{r+2}) \kappa_{r,1}^2 + (z_2 + z_{r+3}) \kappa_{r,3}^2 + \dots + (z_{r+1} + z_{2r+2}) \kappa_{r,2r+1}^2 \\ w_r &:= w_r(\mathbf{z}) := z_{r+2} + z_{r+3} + \dots + z_{2r+2} . \end{aligned}$$

Für den oberflächlichen UV-Divergenzgrad des Subintegrals gilt :

$$\delta_q = D + n + n' + \delta_D - (2r+2) \leq D-3 . \quad (C.2)$$

Hierbei haben wir definiert :

$$\delta_D := \begin{cases} 1 & \text{für } D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \\ 0 & \text{für } C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \end{cases}$$

Die Quark-Antiquark-Schleife weist also eine höchstens lineare Divergenz auf.

Unter Berücksichtigung von (6.6) folgt damit als notwendige Divergenzbedingung ausgedrückt in den Indizes des nicht-perturbativen Quark-Gluon-Vertex :

$$2r - 2 \leq n + n' + \delta_D \leq 2r . \quad (\text{C.3})$$

Zur Berechnung der Spuren im Zähler unseres Integranden erweist es sich als praktisch, dies zunächst auf dem Niveau von Gleichung (6.17) zu tun und die Impuls-Shift im Anschluß daran auszuführen. Wir definieren zu diesem Zweck die Hilfsgrößen :

$$(Z_C^{nn'})^{\mu\nu}(p, k) := Tr \gamma^\nu \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r,2s+1}) \right] (\not{p})^n \gamma^\mu (\not{p} + \not{k})^{n'} \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \right]$$

$$(Z_D^{nn'})^{\mu\nu}(p, k) := Tr \gamma^\nu \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r,2s+1}) \right] (\not{p})^n \frac{(2p+k)^\mu}{2\Lambda} (\not{p} + \not{k})^{n'} \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \right] ,$$

und bilden damit die geshifteten Größen :

$$(W_C^{nn'})^{\mu\nu}(q, k) := (Z_C^{nn'})^{\mu\nu}(q - w_r k, k) \quad , \quad (W_D^{nn'})^{\mu\nu}(q, k) := (Z_D^{nn'})^{\mu\nu}(q - w_r k, k) .$$

Anwendung der Eigenschaften symmetrischer Integration gemäß (A.12) führt uns schließlich auf die Funktionen $(\tilde{W}_C^{nn'})^{\mu\nu}(q^2, k)$ bzw. $(\tilde{W}_D^{nn'})^{\mu\nu}(q^2, k)$. Bei der relativ umfangreichen Analyse dieser Hilfsfunktionen haben wir intensiven Gebrauch von den Identitäten (A.16) gemacht und zur Identifizierung divergenter Beiträge die Auswahlregel (C.3) benutzt. Zur vollständigen Berechnung der Zählerstruktur aus (C.1) bilden wir dann noch die Transversalprojektionen :

$$\tilde{X}_\tau^{nn'}(q^2, k^2) := t_{\mu\nu}(k) (\tilde{W}_\tau^{nn'})^{\mu\nu}(q, k) \quad \text{für } \tau \in \{C, D\} ,$$

und zerlegen diese gemäß

$$\tilde{X}_\tau^{nn'}(q^2, k^2) =: \left\{ \alpha_\tau^{(n,n')} q^2 + \beta_\tau^{(n,n')} k^2 + \gamma_\tau^{(n,n')} \Lambda^2 \right\} (q^2)^{2r} + \mathcal{O}(q^{4r-1}) . \quad (\text{C.4})$$

Für die hierbei eingeführten Koeffizienten gilt explizit :

$$1. \quad n + n' = 2r$$

(a) n gerade

$$\alpha_C^{(n,n')} = 4(D-1) ,$$

$$\beta_C^{(n,n')} = \frac{2(D-1)}{D} \left\{ (2n' + r - 1)(r + 1) + n'(n' - 2) + (r + n' + 1)(D - 2(D + 4r)w_r) \right. \\ \left. + 2((2r + 1)D + 4(1 + (r + 1)(2r - 1)))w_r^2 \right\} ,$$

$$\gamma_C^{(n,n')} = \frac{4(D-1)}{\Lambda^2} \left\{ \frac{D-2}{D} \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 - 2 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right\} .$$

(b) n ungerade

$$\alpha_C^{(n,n')} = \frac{4(D-1)(2-D)}{D} ,$$

$$\beta_C^{(n,n')} = \frac{4(D-1)}{D} \left\{ \frac{2-D}{2} \left((n' + r)(1 - 2w_r) + 4r w_r^2 \right) - \right. \\ \frac{D}{2(D+2)} \left((n' - 1)(n' - 3) + (r + 1)(2n' + r - 3) - \right. \\ \left. 4(2r - 1)(n' + r)w_r + 8(1 + (r - 1)(2r + 1))w_r^2 \right) - \\ \left. \left((2w_r - 1)(4r w_r - r - n') + D w_r (w_r - 1) \right) \right\} ,$$

$$\gamma_C^{(n,n')} = \frac{4(D-1)}{\Lambda^2} \left\{ \frac{2(D-2)}{D} \left(\sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right) - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 \right\} .$$

2. $n + n' = 2r - 1$ (a) n gerade

$$\gamma_C^{(n,n')} = \frac{8(D-1)}{D \Lambda^2} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} ,$$

$$\alpha_D^{(n,n')} = -\frac{4(D-1)}{D \Lambda} ,$$

$$\beta_D^{(n,n')} = -\frac{2(D-1)}{D \Lambda} \left\{ (n' + r)(1 - 2w_r) + 4r w_r^2 + \frac{1}{D+2} \left((n' - 1)(n' - 3) + \right. \right. \\ \left. \left. (r + 1)(2n' + r - 3) - 4(2r - 1)(n' + r)w_r + 8(1 + (r - 1)(2r + 1))w_r^2 \right) \right\} ,$$

$$\gamma_D^{(n,n')} = \frac{4(D-1)}{D\Lambda^3} \left\{ \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right\} .$$

(b) n ungerade

$$\gamma_C^{(n,n')} = \frac{8(D-1)}{D\Lambda^2} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} ,$$

$$\alpha_D^{(n,n')} = -\frac{4(D-1)}{D\Lambda} ,$$

$$\beta_D^{(n,n')} = -\frac{2(D-1)}{D\Lambda} \left\{ (n' + r + 1)(1 - 2w_r) + 4r w_r^2 + \frac{1}{D+2} \left(n'(n' - 2) + \right. \right. \\ \left. \left. (r+1)(2n' + r - 1) - 4(2r-1)(n' + r + 1)w_r + 8(1 + (r-1)(2r+1))w_r^2 \right) \right\} ,$$

$$\gamma_D^{(nn')} = \frac{4(D-1)}{D\Lambda^3} \left\{ \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t < t'}}^r \kappa_{r,2t+1} \kappa_{r,2t'+1} \right\} .$$

3. $n + n' = 2r - 2$

(a) n gerade

$$\gamma_C^{(n,n')} = -\frac{4(D-1)}{\Lambda^2} ,$$

$$\gamma_D^{(n,n')} = -\frac{8(D-1)}{D\Lambda^3} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} .$$

(b) n ungerade

$$\gamma_C^{(n,n')} = \frac{4(D-1)(D-2)}{D\Lambda^2} ,$$

$$\alpha_D^{(n,n')} = -\frac{8(D-1)}{D\Lambda^3} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} .$$

4. $n + n' = 2r - 3$

für n gerade bzw. n ungerade gilt dann jeweils

$$\alpha_D^{(n,n')} = \frac{4(D-1)}{D\Lambda^3} .$$

Damit erhalten wir nun :

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(r)} = & \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{2(r-m)-\lambda} \mu_0^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2)} (2r+1)! \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \\
& \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^{2r}}{\{q^2 + R^2(k^2)\}^{2r+2}} \left\{ \sum_{\substack{n+n'=2r \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \left(\alpha_C^{(n,n')} q^2 + \beta_C^{(n,n')} k^2 + \gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 \right) C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \right. \\
& \sum_{\substack{n+n'=2r \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \left(\alpha_C^{(n,n')} q^2 + \beta_C^{(n,n')} k^2 + \gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 \right) C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \\
& \hat{m} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \left[\gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \left(\alpha_D^{(n,n')} q^2 + \beta_D^{(n,n')} k^2 + \gamma_D^{(n,n')} \Lambda^2 \right) D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right] + \\
& \hat{m} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \left[\gamma_C^{(n,n')} \Lambda^2 C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \left(\alpha_D^{(n,n')} q^2 + \beta_D^{(n,n')} k^2 + \gamma_D^{(n,n')} \Lambda^2 \right) D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right] + \\
& \hat{m}^2 \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ n \text{ gerade}}}^{(*)} \left(\gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right) + \\
& \left. \hat{m}^2 \Lambda^2 \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ n \text{ ungerade}}}^{(*)} \left(\gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} + \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right) + \hat{m}^3 \Lambda^2 \sum_{n+n'=2r-3}^{(*)} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \right\}. \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Die Ausführung der Euklidischen Impulsintegration über q gemäß (A.11) ergibt dann das Zwischenresultat (6.18).

Wir fahren auf dieser Grundlage mit der Berechnung des Zweischleifenintegrals fort und setzen dazu :

$$\Omega_1^{(r)} = \frac{\Gamma(2r + D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2 - D/2) \int \mathcal{D}^{2r+2} \mathbf{z} \left\{ J_1^{(r)}(\mathbf{z}) + \frac{2r + D/2}{1 - D/2} J_2^{(r)}(\mathbf{z}) \right\}, \tag{C.6}$$

wobei

$$J_1^{(r)}(\mathbf{z}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m V_m^{(r)}(k^2; \mathbf{z})}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) [R^2(k^2; \mathbf{z})]^{2-D/2}} \quad (\text{C.7a})$$

$$J_2^{(r)}(\mathbf{z}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m W_m^{(r)}(\mathbf{z})}{\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) [R^2(k^2; \mathbf{z})]^{1-D/2}}. \quad (\text{C.7b})$$

Mit einer Feynman-Parametrisierung gemäß (A.1) ergibt sich dann :

$$J_1^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r+3-D/2)}{\Gamma(2-D/2)} \int_0^1 dx_1 x_1^r \int_0^1 dx_2 x_2^{r-1} \dots \int_0^1 dx_r x_r \int_0^1 dx_{r+1} (1-x_1)^{1-D/2} \\ \sum_{m \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m V_m^{(r)}(k^2; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R^2(k^2; \mathbf{z}) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+3-D/2}} \quad (\text{C.8a})$$

$$J_2^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r+2-D/2)}{\Gamma(1-D/2)} \int_0^1 dx_1 x_1^r \int_0^1 dx_2 x_2^{r-1} \dots \int_0^1 dx_r x_r \int_0^1 dx_{r+1} (1-x_1)^{-D/2} \\ \sum_{m \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m W_m^{(r)}(\mathbf{z})}{\left\{ y_1 R^2(k^2; \mathbf{z}) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) \right\}^{r+2-D/2}}, \quad (\text{C.8b})$$

wobei

$$y_1 = 1 - x_1 \quad y_2 = x_1 (1 - x_2) \quad y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3) \quad \dots \quad y_{r+1} = x_1 \dots x_r (1 - x_{r+1}) \\ y_{r+2} = x_1 \dots x_{r+1}.$$

Für den Nenner der Integranden erhalten wir mit $\psi_r(\mathbf{x}) := y_2 \sigma_{r,1} + y_3 \sigma_{r,3} + \dots + y_{r+2} \sigma_{r,2r+1}$:

$$y_1 R^2(k^2) + y_2 (k^2 + \sigma_{r,1} \Lambda^2) + \dots + y_{r+2} (k^2 + \sigma_{r,2r+1} \Lambda^2) = (1 - x_1) R^2(k^2) + x_1 k^2 + \psi_r(\mathbf{x}) \Lambda^2. \quad (\text{C.9})$$

Die Ausführung der divergenten Parameterintegrale in (C.8) ergibt mit (A.7) :

$$\int_0^1 dx_1 x_1^r (1-x_1)^{1-D/2} f_D(x_1) = \frac{r! \Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+3-D/2)} f_D(1) + \mathcal{O}(\epsilon^0) \\ \int_0^1 dx_1 x_1^r (1-x_1)^{-D/2} f_D(x_1) = \frac{r! \Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+2-D/2)} \left\{ \frac{f_D(1)}{1-D/2} - \frac{f_D'(1)}{r+2-D/2} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^0).$$

Wir setzen wieder $\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) := \psi_r(\mathbf{x})|_{x_1=1}$, führen die bereits bekannte abkürzende Schreibweise für das verbleibende, reguläre Feynman-Parameterintegral ein und erhalten schließlich mit der Zerlegung $V_m^{(r)}(k^2; \mathbf{z}) =: \nu_{1,m}^{(r)}(\mathbf{z}) k^2 + \nu_{0,m}^{(r)}(\mathbf{z}) \Lambda^2$ das Resultat :

$$J_1^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon}}{(4\pi)^{D/2}} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\left\{ \nu_{1,m}^{(r)}(\mathbf{z}) k^2 + \nu_{0,m}^{(r)}(\mathbf{z}) \Lambda^2 \right\} (k^2)^m}{\left\{ k^2 + \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2 \right\}^{r+3-D/2}}. \quad (\text{C.10a})$$

Entsprechend folgt :

$$J_2^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon} W_m^{(r)}(\mathbf{z})}{(4\pi)^{D/2}} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^m \left\{ \frac{1}{\left\{ k^2 + \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2 \right\}^{r+2-D/2}} + \right. \\ \left. (1 - D/2) \frac{\left[1 + w_r(\mathbf{z}) (w_r(\mathbf{z}) - 1) \right] k^2 + \left[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{\tau}_r(\mathbf{z}) \right] \Lambda^2}{\left\{ k^2 + \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2 \right\}^{r+3-D/2}} \right\}, \quad (\text{C.10b})$$

wobei noch

$$\tilde{\tau}_r(\mathbf{z}) := \frac{1}{\Lambda^2} \left\{ (z_1 + z_{r+2}) \kappa_{r,1}^2 + (z_2 + z_{r+3}) \kappa_{r,3}^2 + \dots + (z_{r+1} + z_{2r+2}) \kappa_{r,2r+1}^2 \right\}$$

definiert wurde.

Die anschließende Ausführung der Impulsintegration mit Hilfe der Euklidischen Standardformel ergibt dann :

$$J_1^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon} \Lambda^2}{(4\pi)^D \Gamma(D/2) \Gamma(r+3-D/2)} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \Gamma(m+D/2) \Gamma(r+2-m-D) \cdot \\ r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \left\{ (m+D/2) \nu_{1,m}^{(r)}(\mathbf{z}) \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) + (r+2-m-D) \nu_{0,m}^{(r)}(\mathbf{z}) \right\} \left[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2 \right]^{m-r+D-3}, \quad (\text{C.11a})$$

$$J_2^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon} \Lambda^2}{(4\pi)^D \Gamma(D/2) \Gamma(r+2-D/2)} \sum_{m \geq 0}^{(*)} \Gamma(m+D/2) \Gamma(r+2-m-D) W_m^{(r)}(\mathbf{z}) \cdot \\ r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \left\{ \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1-D/2}{r+2-D/2} \left[(m+D/2) (1 + w_r(\mathbf{z}) (w_r(\mathbf{z}) - 1)) \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) + \right. \right. \\ \left. \left. (r-m+2-D) (\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{\tau}_r(\mathbf{z})) \right] \right\} \left[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \Lambda^2 \right]^{m-r+D-3}. \quad (\text{C.11b})$$

UV-Divergenzen in (C.11) treten als Pole im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ vermöge des Faktors $\Gamma(r + 2 - m - D)$ auf.

Zur expliziten Bestimmung divergenter Beiträge kehren wir zunächst zurück zur Auswahlregel (6.6a) für die Koeffizienten $C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)}$ und folgern die Ungleichung :

$$4m + n + n' \leq 6r . \quad (\text{C.12})$$

Es sind nun zu unterscheiden die Fälle :

1. $n + n' = 2r$

Dann ergibt sich mit (C.12) sofort die Bedingung $m \leq r$,
und Divergenzen treten auf für :

(a) $m = r$

und damit verbunden wegen (6.6a) die Kombination

$$n = r, n' = r$$

sowie $\lambda = 0$.

(b) $m = r - 1$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 2, n' = r - 2 \quad n = r + 1, n' = r - 1 \quad \dots \quad n = r - 2, n' = r + 2$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 2$.

(c) $m = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 4, n' = r - 4 \quad n = r + 3, n' = r - 3 \quad \dots \quad n = r - 4, n' = r + 4$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 4$.

2. $n + n' = 2r - 1$

Also $m \leq r$ gemäß (C.12) und UV-divergente Beiträge entstehen, falls

(a) $m = r$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r, n' = r - 1 \quad n = r - 1, n' = r$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 1$.

(b) $m = r - 1$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 2, n' = r - 3 \quad n = r + 1, n' = r - 2 \quad \dots \quad n = r - 3, n' = r + 2$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 3$.

(c) $m = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 4, n' = r - 5 \quad n = r + 3, n' = r - 4 \quad \dots \quad n = r - 5, n' = r + 4$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 5$.3. $n + n' = 2r - 2$ Also wiederum $m \leq r$ und Divergenzen treten auf für :(a) $m = r$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r, n' = r - 2 \quad n = r - 1, n' = r - 1 \quad \dots \quad n = r - 2, n' = r$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 2$.(b) $m = r - 1$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 2, n' = r - 4 \quad n = r + 1, n' = r - 3 \quad \dots \quad n = r - 4, n' = r + 2$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 4$.(c) $m = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 4, n' = r - 6 \quad n = r + 3, n' = r - 5 \quad \dots \quad n = r - 6, n' = r + 4$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 6$.

Völlig analog betrachten wir jetzt die Auswahlregel (6.6b) für die Koeffizienten $D_{\lambda, m, n, n'}^{(r)}$ und erhalten :

$$4m + n + n' \leq 6r - 2. \quad (\text{C.13})$$

Zur Bestimmung der UV-divergenten Beiträge unterscheiden wir hierbei die Fälle :

1. $n + n' = 2r - 1$

Dann folgt aus (C.13) die Einschränkung $m \leq r - 1$,
und Divergenzen sind zu erwarten für :

(a) $m = r - 1$

und damit verbunden wegen (6.6b) die Kombinationen

$$n = r + 1, n' = r - 2 \quad n = r, n' = r - 1 \quad \dots \quad n = r - 2, n' = r + 1$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 3$.

(b) $m = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 3, n' = r - 4 \quad n = r + 2, n' = r - 3 \quad \dots \quad n = r - 4, n' = r + 3$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 5$.

2. $n + n' = 2r - 2$

Also $m \leq r$ und UV-Divergenzen für :

(a) $m = r$

zusammen mit der Kombination

$$n = r - 1, n' = r - 1$$

sowie $\lambda = 2$.

(b) $m = r - 1$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 1, n' = r - 3 \quad n = r, n' = r - 2 \quad \dots \quad n = r - 3, n' = r + 1$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 4$.

(c) $m = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 3, n' = r - 5 \quad n = r + 2, n' = r - 4 \quad \dots \quad n = r - 5, n' = r + 3$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 6$.

3. $n + n' = 2r - 3$

Wiederum mit der Beschränkung $m \leq r$ und Divergenzen ergeben sich, falls

(a) $m = r$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r - 1, n' = r - 2 \quad n = r - 2, n' = r - 1$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 3$.

(b) $m = r - 1$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 1, n' = r - 4 \quad n = r, n' = r - 3 \quad \dots \quad n = r - 4, n' = r + 1$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 5$.

(c) $m = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$n = r + 3, n' = r - 6 \quad n = r + 2, n' = r - 5 \quad \dots \quad n = r - 6, n' = r + 3$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 7$.

Damit folgt aus (C.11a) :

$$\begin{aligned}
J_1^{(r)}(\mathbf{z}) &= \frac{\Lambda^2 \Gamma(r-1+D/2) \Gamma(4-D)}{(4\pi)^D \Gamma(D/2) \Gamma(r+3-D/2)} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \left[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} \\
&\left\{ \frac{(r-1+D/2)(r+D/2)}{(2-D)(3-D)} \beta_C^{(r,r)} C_{0,r,r,r}^{(r)} [\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}})]^2 \Lambda^2 + \frac{r-1+D/2}{3-D} \right. \\
&\left[\sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \sum_{\substack{n+n'=2r \\ r-2 \leq n \leq r+2}} \beta_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} + \hat{m} \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ r-2 \leq n \leq r+1}} \beta_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} \right] \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \hat{m}^2 + \\
&\left[\sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r \\ r-4 \leq n \leq r+4}} \beta_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-2,n,n'}^{(r)} + \hat{m} \sum_{\lambda=2}^5 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ r-4 \leq n \leq r+3}} \beta_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-2,n,n'}^{(r)} \right] \hat{m}^2 + \\
&\frac{r-1+D/2}{3-D} \left[\gamma_C^{(r,r)} C_{0,r,r,r}^{(r)} + \sum_{\lambda=0}^1 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} (\gamma_C^{(r-1,r)} C_{\lambda,r,r-1,r}^{(r)} + \gamma_C^{(r,r-1)} C_{\lambda,r,r,r-1}^{(r)}) + \right. \\
&\sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ r-2 \leq n \leq r}} \gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,r,n,n'}^{(r)} + \gamma_D^{(r-1,r-1)} D_{2,r,r-1,r-1}^{(r)} + \\
&\hat{m} \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} (\gamma_D^{(r-1,r-2)} D_{\lambda,r,r-1,r-2}^{(r)} + \gamma_D^{(r-2,r-1)} D_{\lambda,r,r-2,r-1}^{(r)}) \left. \right] + \\
&\left[\sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \sum_{\substack{n+n'=2r \\ r-2 \leq n \leq r+2}} \gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} + \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ r-3 \leq n \leq r+2}} \gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} + \right. \\
&\hat{m} \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ r-2 \leq n \leq r+1}} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} + \sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ r-4 \leq n \leq r+2}} \gamma_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} + \\
&\hat{m} \sum_{\lambda=2}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-1}}{\hat{m}^{\lambda-1}} \sum_{\substack{n+n'=2r-2 \\ r-3 \leq n \leq r+1}} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} + \hat{m} \sum_{\lambda=2}^5 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r-3 \\ r-4 \leq n \leq r+1}} \gamma_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} \left. \right] \hat{m}^2 \left. \right\} \\
&+ (konv) .
\end{aligned} \tag{C.14a}$$

Der Hinweis auf die $\mathbf{z}$ -Abhängigkeit der Koeffizientenfunktionen (siehe C.1) wurde hier aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

Entsprechend erhalten wir für (C.11b) :

$$\begin{aligned}
J_2^{(r)}(\mathbf{z}) &= \frac{\Lambda^2 \Gamma(r-2+D/2) \Gamma(4-D)}{(4\pi)^D \Gamma(D/2) \Gamma(r+2-D/2)} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} \left[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} \right]^{D-4} \\
&\left\{ \frac{(r-2+D/2)(r-1+D/2)}{(2-D)(3-D)} \left[[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \frac{1-D/2}{r+2-D/2} \left\{ (1+w_r(w_r-1))(r+D/2) [\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}})]^2 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (2-D) \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) (\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{\tau}_r(\mathbf{z})) \right\} \right] \alpha_C^{(r,r)} C_{0,r,r,r}^{(r)} \Lambda^2 + \\
&\frac{r-2+D/2}{3-D} \left[\sum_{\lambda=0}^2 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \sum_{\substack{n+n'=2r \\ r-2 \leq n \leq r+2}} \alpha_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} \hat{m}^2 + \sum_{\lambda=2}^3 \frac{\Lambda^\lambda}{\hat{m}^\lambda} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ r-2 \leq n \leq r+1}} \alpha_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-1,n,n'}^{(r)} \hat{m}^3 \right] \cdot \\
&\left[\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1-D/2}{r+2-D/2} \left\{ (1+w_r(w_r-1))(r-1+D/2) \tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) + (3-D) (\tilde{\psi}_r(\hat{\mathbf{x}}) - \tilde{\tau}_r(\mathbf{z})) \right\} \right] + \\
&\left[\sum_{\lambda=0}^4 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r \\ r-4 \leq n \leq r+4}} \alpha_C^{(n,n')} C_{\lambda,r-2,n,n'}^{(r)} \hat{m}^2 + \sum_{\lambda=2}^5 \frac{\Lambda^{\lambda-2}}{\hat{m}^{\lambda-2}} \sum_{\substack{n+n'=2r-1 \\ r-4 \leq n \leq r+3}} \alpha_D^{(n,n')} D_{\lambda,r-2,n,n'}^{(r)} \hat{m}^3 \right] \cdot \\
&\left. \left[1 + \frac{1-D/2}{r+2-D/2} (1+w_r(w_r-1))(r-2+D/2) \right] \right\} + (konv) .
\end{aligned} \tag{C.14b}$$

Hierbei haben wir $w_r = w_r(\mathbf{z})$ aus (C.1) verwendet. Weiter ist im Folgenden zu beachten, daß die oben auftretenden Koeffizienten $\alpha_\tau^{(n,n')}$ tatsächlich nicht mehr von $\mathbf{z}$ abhängen. Für die Parameterintegrale in $\mathbf{z}$ erhalten wir dann mit (A.5) :

$$\begin{aligned}
Z_0^{(2r+1)} &= \frac{1}{(2r+1)!} \\
Z_{1[r+1]}^{(2r+1)} &= \frac{r+1}{(2r+2)!} \\
Z_{2[r+1]}^{(2r+1)} &= \frac{(r+1)(r+2)}{(2r+3)!} \\
\tilde{Z}_{[r+1]}^{(2r+1)} &= \frac{2}{(2r+2)!} \sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1}^2 .
\end{aligned}$$

Die Ausführung der $\mathbf{x}$ -Integration ergibt gemäß (A.9) :

$$\begin{aligned}
X_0^{(r)} &= \frac{1}{r!} \\
X_{1[r+1]}^{(r)} &= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{s=0}^r \sigma_{r,2s+1} \\
X_{2[r+1]}^{(r)} &= \frac{2}{(r+2)!} \sum_{\substack{t,t'=0 \\ t \leq t'}}^r \sigma_{r,2t+1} \sigma_{r,2t'+1} .
\end{aligned}$$

Das hieraus nach längerer algebraischer Rechnung folgende Endresultat für (C.6) haben wir in (6.19) formuliert.

C.2 Subschleife mit $(m n')$

Nach unserer Konvention ist in (6.20) zunächst die divergente k -Integration auszuführen. Wir definieren deshalb das Subintegral :

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(r)}(p) &:= \mu_0^\epsilon \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma^\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{(2p+k)^\mu}{2\Lambda} \right\} . \\
&\quad (\not{p} + \not{k})^{n'} \prod_{s=0}^r (\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \frac{t_{\mu\nu}(k) (k^2)^m}{\left[\prod_{s=0}^r ((p+k)^2 + \kappa_{r,2s+1}^2) \right] \left[\prod_{s=0}^r (k^2 + \sigma_{r,2s+1} \Lambda^2) \right]} .
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Einführung von Feynman-Parametern und anschließende Impuls-Shift ergeben :

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(r)}(p) &= \mu_0^\epsilon \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{m,n,n' \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} (2r+2)! \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \\
&\quad \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ C_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \gamma^\mu + D_{\lambda,m,n,n'}^{(r)} \frac{2q^\mu + (1-2u_r)p^\mu}{2\Lambda} \right\} (\not{q} + (1-w_r)\not{p})^{n'} . \\
&\quad \left[\prod_{s=0}^r (\not{q} + (1-w_r)\not{p} - \kappa_{r,2s+1}) \right] \frac{t_{\mu\nu}(q-w_r p) ((q-w_r p)^2)^m}{\{q^2 + R^2(p^2)\}^{2r+3}} ,
\end{aligned} \tag{C.16}$$

wobei

$$q := k + w_r \cdot p$$

$$\begin{aligned} R^2(p^2) &:= w_r (1 - w_r) \cdot p^2 + z_1 \kappa_{r,1}^2 + z_2 \kappa_{r,3}^2 + \dots + z_{r+1} \kappa_{r,2r+1}^2 + \\ &\quad (z_{r+2} \sigma_{r,1} + z_{r+3} \sigma_{r,3} + \dots + z_{2r+2} \sigma_{r,2r+1}) \Lambda^2 \\ w_r &:= w_r(\mathbf{z}) := z_1 + z_2 + \dots + z_{r+1} . \end{aligned}$$

Für den oberflächlichen UV-Divergenzgrad des Subintegrals gilt :

$$\delta_q = D + 2m + n' + \delta_D - (3r + 3) \leq D - 3 .$$

Also haben wir eine höchstens lineare Divergenz zu erwarten.

Unter Berücksichtigung von (6.6) folgt dann als notwendige Divergenzbedingung ausgedrückt in den Indizes des nicht-perturbativen Quark-Gluon-Vertex :

$$3r - 1 \leq 2m + n' + \delta_D \leq 3r . \quad (\text{C.17})$$

Von (C.15) ausgehend bilden wir die Hilfsgrößen :

$$\begin{aligned} (Z_C^{mn'})_\nu(p, k) &:= \gamma^\mu (\not{p} + \not{k})^{n'} \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \right] t_{\mu\nu}(k) (k^2)^m \\ (Z_D^{mn'})_\nu(p, k) &:= \frac{(2p + k)^\mu}{2\Lambda} (\not{p} + \not{k})^{n'} \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} + \not{k} - \kappa_{r,2s+1}) \right] t_{\mu\nu}(k) (k^2)^m , \end{aligned}$$

sowie die geshifteten Funktionen :

$$(W_C^{mn'})_\nu(q, p) := (Z_C^{mn'})_\nu(q - u_r p, p) \quad (W_D^{mn'})_\nu(q, p) := (Z_D^{mn'})_\nu(q - u_r p, p) .$$

Unter Anwendung der Eigenschaften symmetrischer Integration aus (A.12) kommen wir dann zu den Größen $(\tilde{W}_C^{nn'})_{\mu\nu}(q^2, p)$ bzw. $(\tilde{W}_D^{nn'})_{\mu\nu}(q^2, p)$. Ihre, der Auswahlregel (C.17) entsprechend, mit dem Auftreten von UV-Divergenzen verbundenen Beiträge haben wir nachfolgend explizit aufgelistet :

1. $2m + n' = 3r$

In der Quasiteilchensequenz (r ungerade) ist dann auch n' ungerade und wir erhalten :

$$\begin{aligned} (\tilde{W}_C^{mn'})_\nu(q^2, p) &= \frac{(-1)^m}{D} \left\{ (r + n' - 1 - 2(2r + 1) w_r + D(1 - w_r)) \gamma_\nu \not{p} + \right. \\ &\quad \left. (r + n' - 2(2r + 1) w_r - D w_r) p_\nu + (1 - D) \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r,2s+1} \right) \gamma_\nu \right\} (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) . \end{aligned}$$

2. $2m + n' = 3r - 1$ n' gerade

$$(\tilde{W}_C^{mn'})_\nu(q^2, p) = \frac{(-1)^m (D-1)}{D} \gamma_\nu (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) ,$$

$$(\tilde{W}_D^{mn'})_\nu(q^2, p) = \frac{(-1)^m (D-1)}{D \Lambda} p_\nu (q^2)^{2r+1} + \mathcal{O}(q^{4r+1}) .$$

3. $2m + n' = 3r - 2$ n' ungerade

$$(\tilde{W}_D^{mn'})_\nu(q^2, p) = 0 + \mathcal{O}(q)^{4r+1} .$$

Man erhält schließlich :

$$\begin{aligned} H_\nu^{(r)}(p) = & \frac{\mu_0^\epsilon}{D} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{n \geq 0}^{(*)} \Lambda^\lambda \hat{m}^{r-n-\lambda} (2r+2)! \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \left\{ (D-1) \hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} \gamma_\nu + \right. \\ & \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} \left[(r+n'-1 - 2(2r+1)w_r + D(1-w_r)) \gamma_\nu \not{p} + \right. \\ & \left. (r+n'-2(2r+1)w_r - D w_r) p_\nu + (1-D) \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r, 2s+1} \right) \gamma_\nu \right] + \\ & \left. (D-1) \hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m D_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} \frac{p_\nu}{\Lambda} \right\} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^{2r+1}}{\{q^2 + R^2(p^2)\}^{2r+3}} + (konv) . \end{aligned} \quad (C.18)$$

Mit der Standardintegralformel folgt dann das Resultat (6.21).

Wir fahren fort mit der Berechnung des Zweischleifenintegrals (6.20) und setzen :

$$\Omega_2^{(r)} = \frac{\Gamma(2r+1+D/2)}{\Gamma(D/2)} \Gamma(2-D/2) \int \mathcal{D}^{2r+3} \mathbf{z} \sum_{\lambda=0}^{4r} \sum_{n \geq 0}^{(*)} J_{\lambda, n}^{(r)}(\mathbf{z}) , \quad (C.19)$$

wobei

$$J_{\lambda, n}^{(r)}(\mathbf{z}) := \frac{\mu_0^{2\epsilon} \Lambda^\lambda \hat{m}^{r-n-\lambda}}{(4\pi)^{D/2}} Tr \gamma^\nu \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left[\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r, 2s+1}) \right] (\not{p})^n \left(V_{\lambda, n}^{(r)} \right)_\nu(p; \mathbf{z})}{\left[\prod_{s=0}^r (p^2 + \kappa_{r, 2s+1}^2) \right] \left[R^2(p^2) \right]^{2-D/2}} . \quad (C.20)$$

Die explizite Gestalt der hier eingeführten Hilfsfunktionen $(V_{\lambda,n}^{(r)})_\nu(p; \mathbf{z})$ läßt sich unmittelbar aus Gleichung (6.21) ablesen.

Mit einer Feynman-Parametrisierung gemäß (A.1) erhalten wir dann :

$$J_{\lambda,n}^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon} \Lambda^\lambda \hat{m}^{r-n-\lambda}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r+3-D/2)}{\Gamma(2-D/2)} \int_0^1 dx_1 x_1^r \int_0^1 dx_2 x_2^{r-1} \dots \int_0^1 dx_r x_r \int_0^1 dx_{r+1} (1-x_1)^{1-D/2} \\ Tr \gamma^\nu \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left[\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r,2s+1}) \right] (\not{p})^n (V_{\lambda,n}^{(r)})_\nu(p; \mathbf{z})}{\left\{ y_1 R^2(p^2; \mathbf{z}) + y_2 (p^2 + \kappa_{r,1}^2) + \dots + y_{r+2} (p^2 + \kappa_{r,2r+1}^2) \right\}^{r+3-D/2}} , \quad (\text{C.21})$$

wobei

$$y_1 = 1 - x_1 \quad y_2 = x_1 (1 - x_2) \quad y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3) \quad \dots \quad y_{r+1} = x_1 \dots x_r (1 - x_{r+1}) \\ y_{r+2} = x_1 \dots x_{r+1} .$$

Für den Nenner des Integranden gilt :

$$y_1 R^2(p^2) + y_2 (p^2 + \kappa_{r,1}^2) + \dots + y_{r+2} (p^2 + \kappa_{r,2r+1}^2) = (1 - x_1) R^2(p^2) + x_1 p^2 + \mathcal{M}_r^2(\mathbf{x}) . \quad (\text{C.22})$$

Hierbei haben wir definiert :

$$\mathcal{M}_r^2(\mathbf{x}) := y_2 \kappa_{r,1}^2 + y_3 \kappa_{r,3}^2 + \dots + y_{r+2} \kappa_{r,2r+1}^2 .$$

Ausführung des divergenten Parameterintegrals ergibt wegen (A.7) :

$$\int_0^1 dx_1 x_1^r (1 - x_1)^{1-D/2} f_D(x_1) = \frac{r! \Gamma(2-D/2)}{\Gamma(r+3-D/2)} f_D(1) + \mathcal{O}(\epsilon^0) .$$

Mit der Definition $\tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{M}_r^2(\mathbf{x})|_{x_1=1}$ erhalten wir schließlich :

$$J_{\lambda,n}^{(r)}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0^{2\epsilon} \Lambda^\lambda \hat{m}^{r-n-\lambda}}{(4\pi)^{D/2}} r! \int \hat{\mathcal{D}}^{r+1} \mathbf{x} Tr \gamma^\nu \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\left[\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r,2s+1}) \right] (\not{p})^n (V_{\lambda,n}^{(r)})_\nu(p; \mathbf{z})}{\left\{ p^2 + \tilde{\mathcal{M}}_r^2(\hat{\mathbf{x}}) \right\}^{r+3-D/2}} + (konv) . \quad (\text{C.23})$$

Aus den Auswahlregeln (6.6) folgen als Bestimmungsungleichungen des maximalen Wertebereichs für n :

$$2n \leq 5r - (2m + n') \quad \text{für } C_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} \quad (\text{C.24a})$$

$$2n \leq 5r - (2m + n') \quad \text{für } D_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} . \quad (\text{C.24b})$$

Die mit UV-Divergenzen verknüpften Werte von $2m + n'$ aus (6.21) ergeben damit als obere Grenzen :

$$n \leq r \quad \text{für } C_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} \quad (\text{C.25a})$$

$$n \leq r - 1 \quad \text{für } D_{\lambda, m, n, n'}^{(r)} . \quad (\text{C.25b})$$

Aus Gleichung (C.21) lesen wir den maximalen oberflächlichen UV-Divergenzgrad der verbleibenden Impulsschleife ab :

$$\delta_p = D + n - r .$$

Demnach haben wir für $n = r$ eine maximal quartische UV-Divergenz zu erwarten. Im Folgenden untersuchen wir daher den Zähler des Impulsintegranden aus (C.21) für die Fälle $n \in \{r, r - 1, r - 2, r - 3, r - 4\}$ und definieren dazu :

$$A_{\lambda, n}^{(r)}(p^2; \mathbf{z}) := \Lambda^\lambda \hat{m}^{r-n-\lambda} T^r \gamma^\nu \left[\prod_{s=0}^r (\not{p} - \kappa_{r, 2s+1}) \right] (\not{p})^n \left(V_{\lambda, n}^{(r)} \right)_\nu(p; \mathbf{z}) . \quad (\text{C.26})$$

Die Ergebnisse dieser Zähleranalyse sind nachfolgend aufgelistet :

1. $n = r$

$$\begin{aligned} A_{\lambda, r}^{(r)}(p^2; \mathbf{z}) = & \frac{4}{D} \Lambda^\lambda \hat{m}^{-\lambda} \left\{ \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r, n'}^{(r)} \left[(r + n' - w_r(4r + 2 + D)) + \right. \right. \\ & \left. \left. (D - 2)(r + n' + D - 1 - w_r(4r + 2 + D)) \right] (p^4 - \omega_2 \Lambda^2 p^2 + \omega_4 \Lambda^4) + \right. \\ & D(D - 1) \left[\hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r, n'}^{(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r, 2s+1} \right) \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r, n'}^{(r)} \right] \\ & \left. \left. (\omega_3 \Lambda^3 - \omega_1 \Lambda p^2) \right\} (p^2)^{r-1} + \mathcal{O}(p^{2r-3}) . \end{aligned}$$

2. $n = r - 1$

$$\begin{aligned}
A_{\lambda, r-1}^{(r)}(p^2; \mathbf{z}) &= \frac{4}{D} \Lambda^\lambda \hat{m}^{1-\lambda} \left\{ \left[\sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-1, n'}^{(r)} \left\{ (r+n'-w_r(4r+2+D)) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (D-2)(r+n'+D-1-w_r(4r+2+D)) \right\} + \right. \\
&\quad \left. (D-1) \frac{\hat{m}}{\Lambda} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m D_{\lambda, m, r-1, n'}^{(r)} \right] (\omega_1 \Lambda p^2 - \omega_3 \Lambda^3) + \\
&\quad D(D-1) \left[\hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-1, n'}^{(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r, 2s+1} \right) \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-1, n'}^{(r)} \right] \cdot \\
&\quad \left. (p^2 - \omega_2 \Lambda^2) \right\} (p^2)^{r-1} + \mathcal{O}(p^{2r-3}) .
\end{aligned}$$

3. $n = r - 2$

$$\begin{aligned}
A_{\lambda, r-2}^{(r)}(p^2; \mathbf{z}) &= \frac{4}{D} \Lambda^\lambda \hat{m}^{2-\lambda} \left\{ \left[\sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-2, n'}^{(r)} \left\{ (r+n'-w_r(4r+2+D)) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (D-2)(r+n'+D-1-w_r(4r+2+D)) \right\} + \right. \\
&\quad \left. (D-1) \frac{\hat{m}}{\Lambda} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m D_{\lambda, m, r-2, n'}^{(r)} \right] (\omega_2 \Lambda^2 - p^2) + \\
&\quad D(D-1) \left[\hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-2, n'}^{(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r, 2s+1} \right) \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-2, n'}^{(r)} \right] \cdot \\
&\quad \left. \omega_1 \Lambda \right\} (p^2)^{r-1} + \mathcal{O}(p^{2r-3}) .
\end{aligned}$$

4. $n = r - 3$

$$\begin{aligned}
A_{\lambda, r-3}^{(r)}(p^2; \mathbf{z}) &= \frac{4}{D} \Lambda^\lambda \hat{m}^{3-\lambda} \left\{ \left[\sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-3, n'}^{(r)} \left\{ (r + n' - w_r(4r + 2 + D)) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (D - 2)(r + n' + D - 1 - w_r(4r + 2 + D)) \right\} + \right. \\
&\quad \left. (D - 1) \frac{\hat{m}}{\Lambda} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m D_{\lambda, m, r-3, n'}^{(r)} \right] (-\omega_1 \Lambda) - \\
&\quad \left. D(D - 1) \left[\hat{m} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-3, n'}^{(r)} - \left(\sum_{s=0}^r \kappa_{r, 2s+1} \right) \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-3, n'}^{(r)} \right] \right\} (p^2)^{r-1} \\
&\quad + \mathcal{O}(p^{2r-3}) .
\end{aligned}$$

5. $n = r - 4$

$$\begin{aligned}
A_{\lambda, r-4}^{(r)}(p^2; \mathbf{z}) &= \frac{4}{D} \Lambda^\lambda \hat{m}^{4-\lambda} \left\{ \sum_{2m+n'=3r}^{(*)} (-1)^m C_{\lambda, m, r-4, n'}^{(r)} \left[(r + n' - w_r(4r + 2 + D)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (D - 2)(r + n' + D - 1 - w_r(4r + 2 + D)) \right] + \right. \\
&\quad \left. (D - 1) \frac{\hat{m}}{\Lambda} \sum_{2m+n'=3r-1}^{(*)} (-1)^m D_{\lambda, m, r-4, n'}^{(r)} \right\} (p^2)^{r-1} + \mathcal{O}(p^{2r-3}) .
\end{aligned}$$

Zur vollständigen Bestimmung der mit UV-Divergenzen verbundenen Vertexkoeffizienten verwenden wir zunächst die Auswahlregel (C.24a) für die $C_{\lambda, m, n, n'}^{(r)}$ und unterscheiden dabei die Fälle :

1. $2m + n' = 3r$

(a) $n = r$

und damit verbunden wegen (6.6a) die Kombination

$$m = r, n' = r$$

sowie $\lambda = 0$.

(b) $n = r - 1$

zusammen mit der Kombination

$$m = r, n' = r$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 1$.

(c) $n = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 1, n' = r - 2 \quad m = r, n' = r \quad m = r - 1, n' = r + 2$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 2$.(d) $n = r - 3$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 1, n' = r - 2 \quad m = r, n' = r \quad m = r - 1, n' = r + 2$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 3$.(e) $n = r - 4$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 2, n' = r - 4 \quad m = r + 1, n' = r - 2 \quad \dots \quad m = r - 2, n' = r + 4$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 4$.2. $2m + n' = 3r - 1$ (a) $n = r$

zusammen mit der Kombination

$$m = r, n' = r - 1$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 1$.(b) $n = r - 1$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r, n' = r - 1 \quad m = r - 1, n' = r + 1$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 2$.(c) $n = r - 2$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 1, n' = r - 3 \quad m = r, n' = r - 1 \quad m = r - 1, n' = r + 1$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 3$.(d) $n = r - 3$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 1, n' = r - 3 \quad m = r, n' = r - 1 \quad \dots \quad m = r - 2, n' = r + 3$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 4$.(e) $n = r - 4$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 2, n' = r - 5 \quad m = r + 1, n' = r - 3 \quad \dots \quad m = r - 2, n' = r + 3$$

sowie $0 \leq \lambda \leq 5$.

Entsprechend erhalten wir aus (C.24b) für die $D_{\lambda, m, n, n'}^{(r)}$ die Fallunterscheidung :

$$1. \quad 2m + n' = 3r - 1$$

$$(a) \quad n = r - 1$$

und damit verbunden wegen (6.6b) die Kombination

$$m = r, n' = r - 1$$

sowie $\lambda = 2$.

$$(b) \quad n = r - 2$$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r, n' = r - 1$$

$$m = r - 1, n' = r + 1$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 3$.

$$(c) \quad n = r - 3$$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 1, n' = r - 3$$

$$m = r, n' = r - 1$$

$$m = r - 1, n' = r + 1$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 4$.

$$(d) \quad n = r - 4$$

zusammen mit den Kombinationen

$$m = r + 1, n' = r - 3$$

$$m = r, n' = r - 1$$

$$\dots \quad m = r - 2, n' = r + 3$$

sowie $2 \leq \lambda \leq 5$.

Ausführung der $\mathbf{z}$ -Integration gemäß (A.5) :

$$Z_0^{(2r+2)} = \frac{1}{(2r+2)!}$$

$$Z_{1[r+1]}^{(2r+2)} = \frac{r+1}{(2r+3)!},$$

und Anwendung der Euklidischen Integralformel (A.11) ergeben dann im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ für (C.19) das vorläufige Endresultat (6.22).

Literaturverzeichnis

- [1] G. 't Hooft, *Renormalization of Massless Yang-Mills-Fields*, Nucl. Phys. **B33**, 173 (1971)
- [2] D.J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Letters **30**, 1343 (1973)
- [3] M. Stingl, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Z. Physik **A353**, 423 (1996)
- [4] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford 1991)
- [5] H. Lehmann, Nuovo Cim. **11**, 342 (1954); G. Källen, Helv. Phys. Acta **25**, 417 (1952)
- [6] U. Häbel, R. Könnig, H.-G. Reusch, M. Stingl und S. Wigard, *A Nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger Equations of QCD*, Z. Physik **A336**, 423, 435 (1990)
- [7] W. Marciano, H. Pagels, *Quantum Chromodynamics*, Phys. Rep. **C36** 137 (1978)
- [8] J.L. Basdevant, *The Padé Approximation and its Physical Applications*, Fortschritte der Physik **20**, 283 (1972)
- [9] M. Stingl, Persönliche Mitteilungen (Münster 1994)
- [10] G. 't Hooft, *Dimensional Regularization and the Renormalization Group*, Nucl. Phys. **B61**, 455 (1973)
- [11] M. Stingl, *Propagation Properties and Condensate Formation of the Confined Yang-Mills-Field*, Phys. Rev. **D34**, 3863 (1986)
- [12] J.C. Collins, *Renormalization* (Cambridge 1989)
- [13] J.C. Collins, R.J. Scalise, *The Renormalization of Composite Operators in Yang-Mills Theories using general covariant Gauge*, HEP-PH/9403231, (Pennsylvania State University 1994)
- [14] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw Hill 1980)
- [15] F.J. Ynduráin, *The Theory of Quarks and Gluon Interactions*, (Springer-Verlag 1993)
- [16] J.C. Collins, *The Problem of Scales: Renormalization and All That*, HEP-PH/9510276, erscheint bei D.E. Soper, *Theoretical Advanced Institute in Elementary Particle Physics, 1995 : QCD and Beyond*, (World Scientific Singapur)

- [17] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949); J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452, 455 (1951)
- [18] W. Zimmermann, Ann. Phys. **77**, 536 (1973)
- [19] H. Kluberg-Stern, J.B. Zuber, *Ward Identities and some Clues to the Renormalization of gauge-invariant Operators*, Phys. Rev. **D12**, 467 (1975)
- [20] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Phys. Lett. **B52**, 344 (1974)
- [21] S.D. Joglekar, B.W. Lee, Ann. Phys. **97**, 160 (1976)
- [22] M. Henneaux, Phys. Lett. **B313**, 35 (1993)
- [23] M.J. Lavelle, M. Schaden, *Propagators and Condensates in QCD*, Phys. Lett. **B208**, 297 (1988)
- [24] L.J. Reinders, H.R. Rubinstein, S. Yazaki, Nucl. Phys. **B186**, 109 (1981)
- [25] N.K. Nielsen, *The Energy-Momentum Tensor in a non-Abelian Quark-Gluon-Theory*, Nucl. Phys. **B120**, 212 (1976)
- [26] R. Tarrach, *The Renormalization of FF*, Nucl. Phys. **B196**, 45 (1982)
- [27] F. Belinfante, Physica **VII**, 449 (1940)
- [28] D. Freedman, I. Muzinich, E. Weinberg, Annals of Physics **87**, 95 (1974)
- [29] D. Freedman, E. Weinberg, Annals of Physics **87**, 354 (1974)
- [30] L.S. Brown, *Quantum Field Theory* (Cambridge 1992)
- [31] J.C. Collins, A. Duncan, S.D. Joglekar, *Trace and Dilatation Anomalies In Gauge Theories*, Phys. Rev. **D16**, 438 (1976)
- [32] K.G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969)
- [33] A.J. Buras, Rev. Mod. Phys. **52**, 199 (1980)
- [34] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. **23**, 49 (1971)
- [35] W. Zimmermann, Ann. Phys. **77**, 570 (1973)
- [36] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. **D9**, 980 (1974)
- [37] R. Geyer, R. Robaschik, W. Wieczorek, Fortsch. d. Phys. **27**, 75 (1979)
- [38] C.G. Callan, Phys. Rev. **D2**, 1541 (1970); K. Symanzik, Comm. Math. Phys. **18**, 227 (1970)
- [39] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, (World Scientific 1987)
- [40] J. Ahlback, A. Streibl, M. Schaden, *Non-perturbative Solutions to the Dyson-Schwinger-Equations of Pure QCD*, erschienen bei H.M. Fried, B. Müller, *QCD Vacuum Structure*, (World Scientific Singapur)

- [41] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *QCD and Resonance Physics*, Nucl. Phys. **B147**, 385, 448 (1979)
- [42] K.A. Langfeld, *Nicht-störungstheoretische Konzepte in Anwendung auf die Quantenchromodynamik*, Dissertation TU München (1991)
- [43] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960); M. Gell-Mann, M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960)
- [44] R. Dashen, Phys. Rev. **183**, 1245 (1969); R. Dashen, M. Weinstein, Phys. Rev. **183**, 1261 (1969)
- [45] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, (Springer-Verlag 1984)
- [46] L.J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki, *Hadron Properties from QCD Sum Rules*, Phys. Rep. **127**, 1 (1985)
- [47] V.P. Spiridonov, *Operator Product Expansions, Slavnov-Taylor identities and $D = 4$ Condensates*, Preprint (1990)
- [48] M. Lavelle, M. Oleszczuk, *The Quark-Condensate and Three-Point-Functions in QCD*, Z. Phys. **C51**, 615 (1991)
- [49] J. Ahlback, M. Lavelle, M. Schaden, A. Streibl, *Propagators and Four Dimensional Condensates in Pure QCD*, Phys. Lett. **B275**, 124 (1992)
- [50] J. Ahlback, *Untersuchung der nicht-störungstheoretischen Anteile der Vertexfunktionen der QCD mit Hilfe der Operator-Produkt-Entwicklung*, Diplomarbeit TU München (1992)
- [51] J. Ahlback, *Untersuchung des Grundzustands der QCD mit Hilfe der Renormierungsgruppe und Wilsons Operator-Produkt-Entwicklung*, Dissertation TU München (1996)
- [52] L. Driesen, Dissertation WWU Münster (in Vorbereitung)
- [53] J. Kuhrs, *Der Fermionsektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die QCD*, Dissertation WWU Münster (in Vorbereitung)
- [54] U. Häbel, *Nicht-störungstheoretische Propagation des QCD-Eichfeldes*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [55] H.-G. Reusch, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [56] S. Wigard, *Eine nicht-störungstheoretische Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Fermionpropagator der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [57] R. Könnig, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Quark-Quark-Gluon-Vertex der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1990)

- [58] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972)
- [59] J.S. Ball, T.-W. Chiu, *Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories*, Phys. Rev. **D22**, 2542 (1980)
- [60] M. Abramowicz, I.E. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York 1965)
- [61] M. Stingl, Persönliche Mitteilungen (Münster 1995)
- [62] A. Devoto, D.W. Duke, *Table of Integrals and formulae for Feynman diagram calculations*, La Rivista del Nuovo Cimento **7**, No. 6 (1984)
- [63] A. Streibl, *Die Operator-Produkt-Entwicklung für Vertexfunktionen und nichtstörungstheoretische Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD*, Diplomarbeit TU München (1992)

Schlußwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich in den vergangenen drei Jahren während der Anfertigung dieser Arbeit auf unterschiedliche Weise begleitet und ermutigt haben.

Namentlich erwähnen möchte ich zuallerst meinen Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Stingl, dem mein Dank für seine Bereitschaft gilt, mich bei dem vorliegenden Thema zu betreuen. In zahlreichen interessanten Diskussionen habe ich von ihm wertvolle Anregungen erhalten, die nicht nur mein Verständnis der Quantenfeldtheorie vertieften.

Danke sagen möchte ich auch Herrn Dr. Markus Becker für anregende Diskussionen, insbesondere über die Renormierung von Feldtheorien. Ich glaube, wir haben einiges Bleibende voneinander gelernt. Bei Frau Gudrun Pinter und Herrn Dipl.-Phys. Jürgen Kuhrs bedanke ich mich für ihr engagiertes Korrekturlesen.

Weiter sei all meinen Drensteinfurter Freundinnen und Freunden von Bündnis 90/Die Grünen gedankt : Sie haben in den beiden Jahren seit Gründung unseres Ortsverbandes großen Anteil daran gehabt, daß ich mich in einer zunächst fremden Umgebung mittlerweile sehr vertraut fühle.

Ganz besonders bedanke ich mich jedoch bei meiner Familie, ohne deren Geduld und Verständnis diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Insbesondere meine Frau Andrea hat in der letzten Phase der Anfertigung manch zusätzliche Belastung auf sich genommen, danke.

Lebenslauf

Name	Andreas Franz-Jörg Streibl
geboren	am 9.12.1963 in Saulgau
Eltern	Jörg Streibl Hannelore Streibl, geb. Dangel
Familienstand	verheiratet, drei Kinder
1970 - 1974	Besuch der Berta-Hummel-Grundschule in Saulgau
1974 - 1983	Besuch des Störck-Gymnasiums in Saulgau
19.5.1983	Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife
1983 - 1985	Militärischer Grundwehrdienst Soldat auf Zeit in der Laufbahn der Reserveoffiziere
WS 1985/86	Aufnahme des Studiums der Physik an der Technischen Universität München
1987	Vordiplom in Physik an der TU München
Dezember 1990	Beginn der Diplomarbeit
1.4.1991 - 30.4.1992	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Kernphysik der TU München
7.4.1992	Diplom in Physik an der TU München Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. K. Dietrich über das Thema : Die Operator-Produkt-Entwicklung für Vertexfunktionen und nicht-störungstheoretische Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD

1.5.1992 - 31.7.1992	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für für Theoretische Kernphysik der TU München
August 1992	Beginn der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1.8.1992 - 31.5.1994	Graduierten-Stipendium des Landes Nordrhein-Westfalen wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
seit 1.6.1994	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
seit 16.10.1994	Mitglied des Rates sowie des Haupt- und Finanzausschusses der Stadt Drensteinfurt Sprecher der Fraktion Bündnis 90/Die Grünen

