

Michael G. Scholze

Nichtperturbative  
dimensionelle Regularisierung  
der Schwinger-Dyson-Gleichungen  
in der  
Quantenelektrodynamik

– 1995 –







– Theoretische Physik –

Nichtperturbative  
dimensionelle Regularisierung  
der Schwinger-Dyson-Gleichungen  
in der  
Quantenelektrodynamik

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Michael G. Scholze  
aus Münster

– 1995 –

Dekan: Prof. Dr. F. -K. Holtmeier  
Erster Gutachter: Prof. Dr. M. Stingl  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. A. Weiguny  
Tag der mündlichen Prüfungen: 8.2.95 und 9.2.95  
Tag der Promotion: 9.2.95

Never stop asking  
fundamental questions  
or challenging  
the standard answers  
never take a vacation  
from knowledge.

Tarthang Tulku



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>	
<b>1</b>	<b>Schwinger-Dyson-Gleichungen der QED</b>	<b>5</b>
1.1	Die SD-Gl. für die eigentlichen Greenschen Funktionen . . . . .	5
1.2	Die SD-Gl. in der Leiternäherung . . . . .	9
1.3	Tensoranalyse und skalare Projektion . . . . .	10
1.4	Übergang zur euklidischen Metrik . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Nichtperturbative dimensionelle Regularisierung</b>	<b>15</b>
2.1	Massenskalen und asymptotische Freiheit . . . . .	17
2.2	Die Divergenzstruktur der Loop-Integrale . . . . .	21
2.3	Nichtperturbative dimensionelle Regularisierbarkeit . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Numerische Lösung der SD-Gl. in Leiternäherung</b>	<b>29</b>
3.1	Die Lösung der nackten SD-Gl. . . . .	29
3.2	Renormierung . . . . .	33
3.3	Trivialität . . . . .	38
3.4	Die renormierten Lösungen . . . . .	41
3.5	Das Verhalten für $d \rightarrow 4$ . . . . .	45
3.6	Renormierungsgruppe . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Dynamische Massen</b>	<b>50</b>
4.1	Die Kopplungsabhängigkeiten . . . . .	50
4.2	Renormierung . . . . .	51
4.3	UV-Divergenzstruktur und Asymptotik . . . . .	51
4.4	Dynamische Massen als Lösung der SD-Gl. . . . .	54
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>		<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zur UV-Asymptotik</b>	<b>64</b>
A.1	Integrale für die UV-Asymptotik . . . . .	64
A.2	Konvergenz der Asymptotik . . . . .	65
A.3	Aufsummationen für kleine $\epsilon$ . . . . .	66
<b>B</b>	<b>Das numerische Lösungsverfahren</b>	<b>69</b>
B.1	Berechnung der Schleifenintegrale . . . . .	69
B.2	Numerische Darstellung der invarianten Funktionen . . . . .	71
B.3	Lösungsalgorithmus für das Selbstkonsistenzproblem . . . . .	74

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	2
B.4 Implementation des Lösungsverfahrens . . . . .	75
<b>C Kernabschätzungen</b>	<b>77</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>81</b>
<b>Schlußwort</b>	<b>83</b>

# Einleitung

Die als Eichfeldtheorien formulierten Quantenfeldtheorien für die Felder der Elementarteilchen führen auf divergente Greensche Funktionen. Sie müssen zunächst regularisiert und dann renormiert werden, um experimentelle Größen vorhersagen zu können. Bei den meisten der bekannten Regularisierungsverfahren, wie z.B. der Gitter- oder Cut-Off-Regularisierung, werden wichtige Symmetrien der Eichfeldtheorie, wie die Poincaré-Invarianz oder die Eichkovarianz, gebrochen. Die für die Störungstheorie entwickelte dimensionelle Regularisierung bricht keine dieser Symmetrien und gehört daher zu den besten perturbativen Regularisierungsverfahren. Für nichtperturbative Untersuchungen, bei denen die Greenschen Funktionen nicht wie in der Störungstheorie analytisch berechnet werden können, ist die dimensionelle Regularisierung bislang nicht verwendet worden. In der Fachwelt besteht nur wenig Hoffnung, daß dies möglich ist [Co 84].

In dieser Arbeit wird diskutiert, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit die Schwinger-Dyson-Gleichungen einer Eichfeldtheorie im Rahmen einer nichtperturbativen numerischen Lösung dimensionell regularisiert werden können. Am Beispiel der Schwinger-Dyson-Gleichungen in der QED, die wir im Rahmen der Leiternäherung<sup>1</sup> betrachten, führen wir eine Analyse der UV-Divergenzstruktur durch. Damit wird dann gezeigt, daß die dimensionelle Regularisierung nichtperturbativ möglich ist. Mit einem iterativ arbeitenden numerischen Lösungsverfahren zeigen wir, wie die Lösungen der regularisierten Schwinger-Dyson-Gleichungen gewonnen werden können. Diese Lösungen werden multiplikativ renormiert und stabilisieren sich, wenn die raumzeitliche Dimension  $d$  gegen 4 geführt wird.

Für die renormierte Kopplung finden wir eine obere Schranke, die im Kontinuumslices  $d \rightarrow 4$  wie  $\pi\sqrt{6(4-d)}$  gegen Null geht. Dieses Phänomen der Trivialität ist bekannt und zeigt sich z.B. auch in Cut-Off-Rechnungen bei [RA 91].

An den Schwinger-Dyson-Gleichungen der Leiternäherung ohne Strommasse studieren wir das Phänomen der dynamischen Massenbildung. Die dynamischen Massen sind ein Beispiel für eine rein nichtperturbative Erscheinung. Mit dem perturbativen Photonpropagator der nullten Ordnung finden wir dynamische Massen, die im Kontinuumslices endlich gehalten werden können, wenn die nackte Kopplung, wie bei der Cut-Off-Regularisierung, gegen eine kritische Kopplung geführt wird. Der Wert dieser kritischen

---

<sup>1</sup>In der Leiternäherung wird der Vertex durch die nullte Ordnung Störungstheorie approximiert.

Kopplung ist für beide Regularisierungsverfahren identisch. Im Rahmen der Leiternäherung mit nichtperturbativem Photonpropagator gibt es eine kritische Dimension, oberhalb derer wir in dimensioneller Regularisierung keine dynamischen Massen mehr finden. Abschätzungen der Integralgleichung geben starke Hinweise dafür, daß oberhalb der kritischen Dimension keine dynamischen Massen existieren.

# Kapitel 1

## Schwinger-Dyson-Gleichungen der QED

In diesem Kapitel formulieren wir als Ausgangspunkt für unsere nichtperturbativen Untersuchungen einen Satz von Schwinger-Dyson-Gleichungen (SD-Gl.) für die QED in  $d = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen.

### 1.1 Die SD-Gl. für die eigentlichen Greenschen Funktionen

Die SD-Gl. bilden eine zahlenwertige Formulierung der Feldtheorie. Im Impulsraum sind sie ein System von unendlich vielen, gekoppelten, nichtlinearen Integralgleichungen für die Greenschen Funktionen. Wir arbeiten mit den SD-Gl. für die sogenannten eigentlichen Vertices. Hierunter wollen wir - den in der Literatur üblichen Gebrauch dieses Begriffs einschränkend - die zusammenhängenden, amputierten, 1-Teilchen-irreduziblen *und oberflächlich divergenten* Greenschen Funktionen verstehen. Sie bilden einen endlichen Satz von Basisfunktionen, aus denen jede andere Greensche Funktion durch Skelettentwicklung gebildet werden kann. Die drei eigentlichen Greenschen Funktionen der QED sind der Fermionpropagator, der Photonpropagator und der Wechselwirkungsvertex<sup>1</sup>. Wir betrachten die eigentlichen Greenschen Funktionen, weil sich damit das System der SD-Gl. auf 3 Gleichungen reduziert. Der Preis, der dafür zu zahlen ist, besteht darin, daß bei der Vertexgleichung die Skelettentwicklung der Vierpunktfunction eine unendliche Summe von aus den Basisfunktionen zusammengesetzten Graphen ist.

Herleiten können wir die SD-Gl. mit dem erzeugenden Funktional für die Greenschen Funktionen:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \frac{I[J, \eta, \bar{\eta}]}{I[0, 0, 0]} \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Der Vierphotonenvertex ist aufgrund der von ihm zu erfüllenden Ward-Identität oberflächlich konvergent und somit keine eigentliche Greensche Funktion.

mit

$$I[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) e^{i \int d^d x (\mathcal{L}_{\text{QED}}(x) + A_\mu J^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}}(x) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \bar{\Psi}(x) [i\gamma_\mu \partial^\mu - m] \Psi(x) \quad (1.3) \\ &\quad - g \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) A^\mu(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 \\ F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \end{aligned}$$

Die unrenormierte QED-Lagrangedichte mit lorentzkovariantem Eichfixierungsterm enthält das Fermionfeld  $\Psi(x)$ , das Photonfeld  $A^\mu(x)$ , sowie die drei Parameter  $g, m, \xi$ . Es wird ausgenutzt, daß das Funktionalintegral verschwindet, wenn unter dem Integral eine Funktionalableitung nach einem Feld ausgeführt wird. Nach Ausführung dieser Funktionalableitung werden die nun als Faktoren vor der Exponentialfunktion stehenden Felder durch Ableitung nach den Quellen ausgedrückt und aus dem Funktionalintegral herausgezogen. Die resultierenden SD-Gl. für das Erzeugendenfunktional lauten:

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right] \frac{-i\delta}{\delta(-\eta(x))} - g\gamma_\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta(-\eta(x)) \delta J_\mu(x)} \right. \\ \left. + \bar{\eta}(x) \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - m \right] \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} - g\gamma_\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta \bar{\eta}(x) \delta J_\mu(x)} \right. \\ \left. + \eta(x) \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ g^{\mu\nu} \square - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \right] \frac{-i\delta}{\delta J^\nu(x)} - g\gamma^\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta(-\eta(x)) \delta \bar{\eta}(x)} \right. \\ \left. + J^\mu(x) \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \end{aligned}$$

Durch Anwendung weiterer Funktionalableitungen nach den Quellen und Fouriertransformation in den Impulsraum erhalten wir die SD-Gl. für die gewöhnlichen Greenschen Funktionen. Drücken wir in diesen Gl. die Greensfunktionen  $G_{n,m}^{\mu_1 \dots \mu_m}$  mit  $n$  Fermion- und  $m$  Bosonbeinen durch die eigentlichen Greenschen Funktionen  $\{\Gamma_{0,2}^{\mu\nu}(p), \Gamma_{2,0}(p), \Gamma_{2,1}^{\nu}(p; k; \cdot)\}$  aus, so führt dies zu einem System von drei Integralgleichungen.

Diese SD-Gl. bilden eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung dafür, daß die aus ihnen erhaltenen Lösungsfunktionen die physikalischen eigentlichen Vertexfunktionen zur Lagrangedichte Gl.(1.3) sind. Im allgemeinen muß damit gerechnet werden, daß diese Integralgleichungen auch unphysikalische Lösungen haben.

Die so erhaltenen SD-Gl. lassen sich durch Feynman-Graphen darstellen. Dazu werden neben den perturbativen Graphenelementen noch Graphen für die exakten Greensfunktionen benötigt. Diese werden, um sie von den perturbativen unterscheiden zu können, durch dicke Linien dargestellt. Wir verwenden folgende Bezeichnungen und Graphenelemente:

### Der Photonpropagator

$$G_{0,2}^{\mu\nu}(p) = -\Gamma_{0,2}^{-1,\mu\nu}(p) \quad (1.4a)$$

$$= iD^{\mu\nu}(p) \quad (1.4b)$$

$$= \int d^d x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T[A^\mu(x)A^\nu(0)] | 0 \rangle_c \quad (1.4c)$$

$$= i \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ p \end{array} \quad (1.4d)$$

### Der Fermionpropagator

$$G_{2,0}(p) = -\Gamma_{2,0}^{-1}(p) \quad (1.5a)$$

$$= iS(p) \quad (1.5b)$$

$$= \int d^d x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T[\Psi(x)\bar{\Psi}(0)] | 0 \rangle_c \quad (1.5c)$$

$$= i \begin{array}{c} \text{solid line} \\ p \end{array} \quad (1.5d)$$

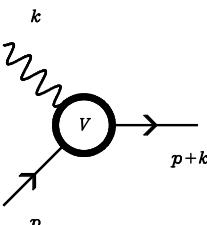
### Der eigentliche WW-Vertex

$$G_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = G_{2,0}(p)G_{0,2;\nu}^\mu(k)\Gamma_{2,1}^\nu(p; k; \cdot)G_{2,0}(p+k) \quad (1.6a)$$

$$= -gS(p)D^\mu_\nu(k)V^\nu(p; k; \cdot)S(p+k) \quad (1.6b)$$

$$= \int d^d x \int d^d y e^{i(p \cdot x + k \cdot y)} \langle 0 | T[\Psi(x)A^\mu(y)\bar{\Psi}(0)] | 0 \rangle_c \quad (1.6c)$$

$$\Gamma_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = -ig \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{circle vertex} \\ \text{solid line} \end{array} \quad (1.6d)$$



### Die perturbativen Graphenelemente

$$\Gamma_{0,2;\mu\nu}^{(0)}(p) = -ip^2 \left[ t_{\mu\nu}(p) + \frac{1}{\xi} l_{\mu\nu}(p) \right] \quad (1.7a)$$

$$= i(\overbrace{\hspace{1.5cm}}^p \text{~~~~~})^{-1} \quad (1.7b)$$

$$\Gamma_{2,0}^{(0)}(p) = -i(-\not{p} + m) \quad (1.7c)$$

$$= i(\overrightarrow{p})^{-1} \quad (1.7d)$$

$$\Gamma_{2,1;\mu}^{(0)} = -ig\gamma_\mu \quad (1.7e)$$

$$= -ig \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad (1.7f)$$

mit den Transversal- und Longitudinal Projektoren:

$$t_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (1.8)$$

$$l_{\mu\nu}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (1.9)$$

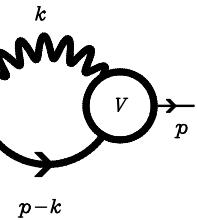
Mit diesen Graphenelementen lauten die SD-Gl.:

### Die Gleichung für den Fermionpropagator

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m\mathbf{1} + g^2\Sigma(p) \quad (1.10a)$$

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} \gamma^\mu S(q) D_{\mu\nu}(k) V^\nu(q; k; \cdot) \quad (1.10b)$$

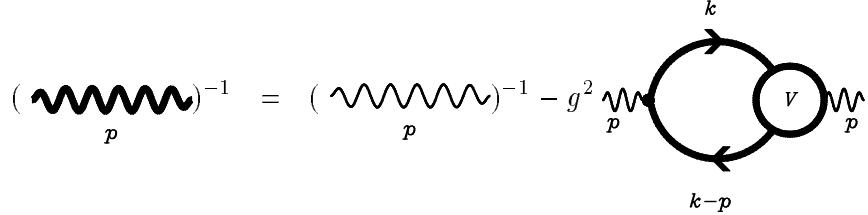
$$q = p - k$$

$$(\overrightarrow{p})^{-1} = (\overrightarrow{p})^{-1} + g^2 \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} \quad (1.10b)$$


### Die Gleichung für den Photonpropagator

$$[D^{\mu\nu}(p)]^{-1} = -p^2 \left[ t^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{\xi} l^{\mu\nu}(p) \right] - g^2 \Pi^{\mu\nu}(p) \quad (1.11a)$$

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{tr} \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) V^\nu(k; -p; \cdot) S(-q) \quad (1.11b)$$



### Die Gleichung für den Vertex

$$V^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu - g^2 \Lambda^\mu(p; k; \cdot) \quad (1.12a)$$

$$\Lambda^\mu(p; k; \cdot) = \int \frac{d^d l}{i(2\pi)^d} \gamma^\varrho S(p - l) D_{\varrho\sigma}(l) T_{4s}^{\sigma\mu}(p - l; l, k; \cdot)$$

$$T_{4s}^{\sigma\mu}(p - l, l, k, \cdot) = T_4^{\sigma\mu}(p - l, l, k, \cdot) - V^\sigma(p - l, l, \cdot) S(p) V^\mu(p, k, \cdot)$$

$$(1.12b)$$

Es gibt noch eine zweite Vertexgleichung, die anstatt der 2-Fermionen-2-Bosonen-Vierpunktfunction die 4-Fermionen-Vierpunktfunction enthält. Die Vierpunktfunctionen in diesen Gleichungen lassen sich durch Skelettentwicklungen nach den drei Basisvertizes ausdrücken. Im Rahmen der in dieser Arbeit betrachteten Leiternäherung, sind beide Gleichungen identisch.

## 1.2 Die SD-Gl. in der Leiternäherung

Die numerische Lösung der SD-Gl. diskutieren wir am Beispiel der Leiternäherung (eine nicht ganz konsequente, aber in der Literatur [Fo 83] eingebürgerte Bezeichnung). In dieser Näherung werden in der Skelettentwicklung der Vertexgleichung alle Schleifen vernachlässigt, so daß der Vertex durch die Nullte Ordnung der Störungstheorie approximiert wird:

$$V^\mu(p, k, \cdot) = \gamma^\mu \quad (1.13)$$

Mit diesem Vertex erhalten wir für die SD-Gl.:

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m \mathbf{1} + g^2 \Sigma(p) \quad (1.14a)$$

$$[D^{\mu\nu}(p)]^{-1} = -p^2 \left[ t^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{\xi} l^{\mu\nu}(p) \right] - g^2 \Pi^{\mu\nu}(p) \quad (1.14b)$$

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} \gamma^\mu S(p-k) D_{\mu\nu}(k) \gamma^\nu \quad (1.14c)$$

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \text{tr} \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} \gamma^\mu S(k) \gamma^\nu S(k-p) \quad (1.14d)$$

Wir wählen diese einfachste Näherung für den Vertex, weil es uns primär darum geht herauszufinden, ob die Dimension  $d$  als Regularisierungsparameter innerhalb von nichtperturbativen Lösungsverfahren verwendet werden kann. Die Leiternäherung führt zu einem überschaubaren System von Gleichungen, mit dem die drei von nur einem Impuls abhängenden, invarianten Funktionen der Propagatoren bestimmt werden können. Da die Photonselbstenergie berücksichtigt wird, ist dies die einfachste Näherung, in der sich das Phänomen der Trivialität zeigen kann.

Leider bricht die Leiternäherung die Vertex-Ward-Identität und damit die Eichinvarianz. Die Eichung, in der die Ward-Identitäten minimal verletzt werden, ist nach [RA 91] die Landau-Eichung bei  $\xi = 0$ . Auf Leading-Log-Niveau ist nämlich in dieser Eichung der genäherte Vertex sogar äquivalent zu dem der vollen Theorie und die aus der Ward-Identität folgende Beziehung  $A(p^2) = 1$  ist nach Gl.(A.6a/A.7a) auf Leading-Log-Niveau in Landau-Eichung erfüllt. Die Propagatoren hängen bei  $\xi = 0$  nicht vom Longitudinalteil des Vertex ab.

### 1.3 Tensoranalyse und skalare Projektion

Die Zerlegung der Propagatoren und Schleifenintegrale in Gl.(1.14) nach den Basistensoren  $\not{p}, \mathbf{1}$  für das Fermion und  $t^{\mu\nu}(p), l^{\mu\nu}(p)$  für das Photon führt auf skalare SD-Gl. für die invarianten Funktionen. Wir zerlegen die tensorwertigen Funktionen gemäß:

$$S^{-1}(p) = A(p^2) \not{p} - B(p^2) \mathbf{1} \quad (1.15a)$$

$$S(p) = -S_1(p^2) \not{p} - S_0(p^2) \mathbf{1} \quad (1.15b)$$

$$S_1(p^2) = \frac{A(p^2)}{-A^2(p^2)p^2 + B^2(p^2)} \quad (1.15c)$$

$$S_0(p^2) = \frac{B(p^2)}{-A^2(p^2)p^2 + B^2(p^2)} \quad (1.15d)$$

$$D_{\mu\nu}(p) = -\frac{d(p^2)}{p^2} t_{\mu\nu}(p) - \frac{\xi}{p^2} l_{\mu\nu}(p) \quad (1.15e)$$

$$\Sigma(p) = \Sigma_A(p^2) \not{p} + \Sigma_B(p^2) \mathbf{1} \quad (1.15f)$$

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = p^2 t^{\mu\nu}(p) \Pi(p^2) + p^2 l^{\mu\nu}(p) \Pi_L(p^2) \quad (1.15g)$$

Mit Hilfe der Projektionen

$$A(p^2) = \frac{1}{4p^2} \text{tr} \left\{ \not{p} S^{-1}(p) \right\} \quad (1.16a)$$

$$-B(p^2) = \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ S^{-1}(p) \right\} \quad (1.16b)$$

$$\Sigma_A(p^2) = \frac{1}{4p^2} \text{tr} \left\{ \not{p} \Sigma(p) \right\} \quad (1.16c)$$

$$\Sigma_B(p^2) = \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ \Sigma(p) \right\} \quad (1.16d)$$

erhalten wir mit der Konvention  $\text{tr}[\mathbf{1}_{d \times d}] = 4$  (als Bestandteil der Wahl des Regularisierungsschemas, vgl. [Co 84]) die Gleichungen für die invarianten Funktionen des Fermionpropagators:

$$A(p^2) = 1 + g^2 \Sigma_A(p^2) \quad (1.17a)$$

$$B(p^2) = m - g^2 \Sigma_B(p^2) \quad (1.17b)$$

mit den skalaren Anteilen der Selbstenergieloops

$$\begin{aligned} \Sigma_A(p^2) = & - \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} S_1(k^2) \left\{ \left[ 2 - \frac{p \cdot k}{p^2} - 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)^2}{p^2 q^2} \right] \frac{\xi}{q^2} \right. \\ & \left. + \left[ -2 + (d-1) \frac{p \cdot k}{p^2} + 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)^2}{p^2 q^2} \right] \frac{d(q^2)}{q^2} \right\} \quad (1.18a) \end{aligned}$$

$$\Sigma_B(p^2) = - \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} S_0(k^2) \frac{(1-d)d(q^2) - \xi}{q^2} \quad (1.18b)$$

mit  $q$  wie in Gl.(1.10b). Bei der Photongleichung wird der Longitudinalteil der Selbstenergie durch die Wardidentität des Photonpropagators

$$p_\mu [D^{\mu\nu}(p)]^{-1} = -\frac{p^2}{\xi} p^\nu \quad (1.19)$$

auf

$$\Pi_L(p^2) = 0 \quad (1.20)$$

festgelegt. Im Rahmen von Eichinvarianz-brechenden Näherungen, wie z. B. der Leiternäherung, ist jedoch damit zu rechnen, daß Gl.(1.20) nicht erfüllt ist.

Die skalare Projektion der Photongleichung mit dem Projektor

$$\frac{t_{\mu\nu}(p)}{(d-1)p^2}$$

führt bei Verletzung der Eichinvarianz zu einer echt quadratisch divergenten skalaren Selbstenergie  $\Pi(p^2)$ . Diese quadratischen Divergenzen resultieren aus der Brechung der Ward-Identität und machen eine numerische

Berechnung dieser Schleife unmöglich. Um dieses Problem zu vermeiden, geben wir der Photon-Ward-Identität Vorrang vor der Vertexnäherung, indem  $\Pi_L(p^2) = 0$  gesetzt wird. Mit dem in [BR 89] verwendeten Projektor

$$P^{\mu\nu}(p) := \frac{1}{(d-1)p^2} \left\{ g^{\mu\nu} - d \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right\} \quad (1.21)$$

$$P_{\mu\nu}(p)g^{\mu\nu} = 0 \quad (1.22)$$

$$P_{\mu\nu}(p)(-p^\mu p^\nu) = 1 \quad (1.23)$$

erhalten wir dann eine skalare Selbstenergie, die keine perturbativen quadratischen Divergenzen, die ja proportional zu  $g^{\mu\nu}$  sind, enthalten kann. Die skalare Photongleichung lautet dann:

$$d^{-1}(p^2) = 1 + g^2 \Pi(p^2) \quad (1.24a)$$

$$\Pi(p^2) = 8 \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} S_1(k^2) S_1(q^2) \left\{ \frac{p \cdot k}{p^2} + \frac{k^2}{p^2} \frac{(\hat{k} \cdot \hat{p})^2 d - 1}{1-d} \right\} \quad (1.24b)$$

$$\hat{p} = \frac{p}{|p|}$$

$$\hat{k} = \frac{k}{|k|}$$

## 1.4 Übergang zur euklidischen Metrik

Da wir in dieser Arbeit nach einer nichtperturbativen Lösung der SD-Gl. suchen, müssen wir mit einer euklidischen Feldtheorie starten. Die Postulierung der euklidischen Greenschen Funktionen und ihrer Gleichungen als grundlegend, und die indirekte Definition der Funktionen im physikalischen Gebiet durch deren analytische Fortsetzung, liegen der Mehrzahl der modernen Arbeiten zur Quantenfeldtheorie - insbesondere auch fast allen Arbeiten zur Gitterfeldtheorie - zugrunde. Wir haben die tensorwertigen SD-Gl. zunächst mit dem formalen Funktionalintegral im Minkowski-Koordinaten- system formuliert und auf skalare Gleichungen umgeschrieben. Die SD-Gl. der euklidischen Theorie erhalten wir, wie in [SC 91] erläutert, durch die formalen Ersetzungen:

$$\int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} \rightarrow \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \quad (1.25a)$$

$$p \cdot k, \dots \rightarrow -p_E \cdot k_E, \dots \quad (1.25b)$$

Dies entspricht einer Drehung des Integrationsweges um  $90^\circ$  in der komplexen  $p_0$ -Ebene, *ohne die Residuen der dabei eventuell überstrichenen Pole zu berücksichtigen*. Damit lauten die euklidischen invarianten Funktionen:

$$A_E(p_E^2) = A(-p_E^2) \quad (1.26a)$$

$$B_E(p_E^2) = B(-p_E^2) \quad (1.26\text{b})$$

$$d_E(p_E^2) = d(-p_E^2) \quad (1.26\text{c})$$

$$S_{1,E}(p_E^2) = S_1(-p_E^2) \quad (1.26\text{d})$$

$$= \frac{A_E(p_E^2)}{A_E^2(p_E^2)p_E^2 + B_E^2(p_E^2)} \quad (1.26\text{e})$$

$$S_{0,E}(p_E^2) = S_0(-p_E^2) \quad (1.26\text{f})$$

$$= \frac{B_E(p_E^2)}{A_E^2(p_E^2)p_E^2 + B_E^2(p_E^2)} \quad (1.26\text{g})$$

Die euklidischen Selbstenergien  $\Sigma_{A,E}, \Sigma_{B,E}, \Pi_E$  sind analog definiert. Da wir im folgenden nur noch mit der euklidischen Metrik rechnen, schreiben wir den Index  $E$  nicht mehr aus und vereinbaren, daß alle Impulse und Funktionen euklidisch sind.

Nach Anwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned} f(k^2, q^2) &= f(q^2, k^2) \Rightarrow \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2, q^2) p \cdot k &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2, q^2) \end{aligned} \quad (1.27)$$

in  $\Pi(p^2)$  sowie

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \left\{ 2 + (1-d) \frac{p \cdot k}{p^2} - 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)^2}{p^2 q^2} \right\} f(k^2) = 0 \quad (1.28)$$

in  $\Sigma_A(p^2)$  erhalten wir für die euklidischen SD-Gl.:

$$A(p^2) = 1 + g^2 \Sigma_A(p^2) \quad (1.29\text{a})$$

$$B(p^2) = m - g^2 \Sigma_B(p^2) \quad (1.29\text{b})$$

$$d^{-1}(p^2) = 1 + g^2 \Pi(p^2) \quad (1.29\text{c})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_A(p^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) \left\{ (d-2) \frac{p \cdot k}{p^2} \frac{\xi}{q^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[ -2 + (d-1) \frac{p \cdot k}{p^2} + 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)^2}{p^2 q^2} \right] \frac{d(q^2)}{q^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.29\text{d})$$

$$\Sigma_B(p^2) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_0(k^2) \frac{(1-d)d(q^2) - \xi}{q^2} \quad (1.29\text{e})$$

$$\Pi(p^2) = 8 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) S_1(q^2) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{k^2}{p^2} \frac{(\hat{k} \cdot \hat{p})^2 d - 1}{1 - d} \right\} \quad (1.29f)$$

Diese SD-Gl. der Leiternäherung sind bis auf die variable Dimension identisch mit denen, die bei [RA 91] im Rahmen einer Cut-Off-Regularisierung verwendet wurden.

## Kapitel 2

# Nichtperturbative dimensionelle Regularisierung

Regularisierungsverfahren sind Werkzeuge, mit denen divergente Schleifenintegrale definiert werden sollen. Durch Einführung eines Regularisierungsparameters und dessen Einschränkung auf bestimmte Intervalle werden die Schleifenintegrale konvergent und können berechnet werden. In den resultierenden Greenschen Funktionen wird dann die Abhängigkeit bezüglich des Regularisierungsparameters analytisch fortgesetzt. Dabei zeigen sich die Divergenzen der Schleifenintegrale als Singularitäten der Greenschen Funktionen bezüglich des regularisierenden Parameters.

Die dimensionelle Regularisierung wurde zuerst von 't Hooft und Veltman [Ho 72], von Bollini und Giambiagi [Bo 72], und von Ashmore [As 72], [As 73] für die Berechnung störungstheoretischer Integrale entwickelt. Eine schöne Einführung in diese Technik findet sich in [LE 75].

Indem die raumzeitliche Dimension  $d = 4 - 2\epsilon$  als kontinuierlicher Parameter eingeführt wird, können die perturbativen UV-Divergenzen bei  $d < 4$  regularisiert werden. Die so definierten Integrale sind für  $\epsilon > 0$  einfach analytisch berechenbar und können bezüglich  $\epsilon$  fortgesetzt werden. Die UV-Divergenzen zeigen sich als Pole der Form  $\frac{1}{\epsilon^n}$ , die durch ein geeignetes Renormierungsverfahren beseitigt werden können.

Ein großer Vorteil der dimensionellen Regularisierung gegenüber anderen Regularisierungsverfahren wie Cut-off oder Gitterregularisierung besteht in der Erhaltung wichtiger Symmetrien, wie Poincaré-Invarianz oder Eichkovarianz, bei Variation von  $d$ . Diese symmetriehaltende Eigenschaft hat die dimensionelle Regularisierung zum gängigen Verfahren der Störungstheorie gemacht<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>G. Leibbrand bemerkt hierzu in [LE 75]: The technique of dimensional regularisation is probably the best regularisation procedure on the market.

In summary, dimensional regularisation permits a consistent gauge-invariant treatment of divergent Feynman integrals to all orders in perturbation theory. The method can be applied not only to Abelian gauge models, but more importantly to non-Abelian theories such as Yang-Mills fields and quantum gravity, to which the majority of conventional regularisation procedures is inapplicable.

Neben der Störungstheorie gibt es auch nichtperturbative Anwendungen [KA 81] dieses Regularisierungsverfahrens, in denen die Integrale allerdings analytisch berechnet werden können. Es ist sehr interessant, dieses Regularisierungsverfahren auf nichtperturbative Untersuchungen, bei denen die Integrale analytisch nicht berechenbar sind, zu übertragen. In der Fachwelt besteht nur wenig Hoffnung, daß dies möglich ist<sup>2</sup>. Am Beispiel der QED in Leiternäherung studieren wir die, bei nichtperturbativer dimensioneller Regularisierung der SD-Gl. auftretenden, Probleme und ihre Lösungsmöglichkeiten.

Der erste Schritt bei der Implementation der raumzeitlichen Dimension als Regularisierungsparameter besteht darin, sich einen Überblick über die Singularitätsstruktur der Integrale zu beschaffen. Ohne diese Information kann nicht beurteilt werden, ob überhaupt Divergenzen vorhanden sind und ob durch Variation der Dimension  $d$  eventuell vorhandene Divergenzen regularisiert werden können. In der Störungstheorie sind die Integranden analytisch bekannt und die Singularitätsstruktur kann durch Abzählen von Impulspotenzen ermittelt werden. Als Beispiel betrachten wir die quadratisch divergente Photonselbstenergie in 1-Loop-Ordnung:

$$\begin{aligned} \Pi_{(pert)}^{(1)}(p^2) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{8}{(k^2 + m^2)([p - k]^2 + m^2)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{k^2}{p^2} \frac{(\hat{k} \cdot \hat{p})^2 d - 1}{1 - d} \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die Singularitätsstruktur ist deswegen so einfach ablesbar, weil durch die perturbative Iteration der SD-Gl. für die invarianten Funktionen konkrete Ausdrücke in den Integralen erscheinen. Bei nichtperturbativen Lösungsversuchen bleiben im allgemeinen die noch unbekannten invarianten Funktionen in den Integralen stehen, so daß die Singularitätsstruktur nicht so einfach abgelesen werden kann.

Nach Aufklärung der Singularitätsstruktur ist der Einfluß der Dimension auf die Divergenzen der Integrale zu untersuchen. In der Störungstheorie werden die Integrale auf verallgemeinerte  $d$ -dimensionale Polarkoordinaten umgeschrieben, die für ganzzahlige  $d$  in die gewöhnlichen Polarkoordinaten übergehen. Schleifenintegrale mit nur einem äußeren Impuls<sup>3</sup> sind von der Form  $\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2, p \cdot k, p^2)$  und können durch Übergang zu  $d$ -dimensionalen Polarkoordinaten in ein zweidimensionales gewöhnliches Integral überführt werden:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} f(k^2, p \cdot k, p^2) = c_d \int_0^\infty dK K^{d-1} \tilde{f}(K, P) \quad (2.2)$$

<sup>2</sup>J. Collins bemerkt hierzu in [Co 84], S.206 :It is very convenient to use dimensional continuation as an ultra-violet cut-off in perturbation theory. However, there is no known construction of a complete theory in an arbitrary complex dimension, so one must beware of assigning too much physical significance to use of dimensional continuation. This is especially true when we use minimal subtraction, which is a procedure that exploits the form of the cut-off dependence of the theory.

<sup>3</sup>Die entsprechenden Formeln für Integrale mit mehreren äußeren Impulsen unterscheiden sich in der Anzahl der Winkelintegrationen. Der entscheidende regularisierende Faktor  $|k|^{d-1}$  ist jedoch unabhängig von der Anzahl der äußeren Impulse.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(K, P) &= \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} f(K^2, P K x, P^2) \\
c_d &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} - \epsilon) 2^{3-2\epsilon} \pi^{\frac{5}{2}-\epsilon}} \\
K &= |k| \\
P &= |p| \\
x &= \hat{p} \cdot \hat{k}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Dadurch erscheint die Dimension als Impulspotenz und ihr regularisierender Charakter wird deutlich sichtbar. Zum Beispiel verschwinden für  $d < 2$  die quadratischen UV-Divergenzen in Gl.(2.1). Es ist nicht schwer, sich Integranden vorzustellen, die durch Variation von  $d$  nicht regularisiert werden können.

Wenn die Regularisierung durch Variation von  $d$  möglich ist, besteht das nächste Problem darin, die Integrale in den Dimensionsbereichen, in denen sie regulär sind, auszuwerten und nach  $d = 4$  fortzusetzen. Bei den perturbativen Integralen ist die Abhängigkeit von  $d$  analytisch bekannt und kann ohne Probleme fortgesetzt werden. Die für  $d < 2$  berechnete störungstheoretische Photonselbstenergie Gl.(2.1) ist in ihrer analytischen Fortsetzung eine für  $d < 4$  endliche Funktion, die bei  $d = 4$  einen Pol  $\frac{1}{d-4}$  hat. Wenn die Integrale numerisch berechnet werden müssen, ist eine analytische Fortsetzung in dieser Form nicht möglich. Bei einem numerischen Zugang müssen wir uns schrittweise dem Fall  $d = 4$  nähern und beobachten, ob die Lösungen gegen einen Grenzwert konvergieren. Dazu ist es erforderlich, daß die Integrale beliebig nahe bei  $d = 4$  endlich sind. Quadratisch oder linear divergente Integrale sind in diesem Sinne numerisch nicht behandelbar.

## 2.1 Massenskalen und asymptotische Freiheit

Als Vorbereitung für die Untersuchungen zur Singularitätsstruktur und für die numerische Berechnung der Integrale betrachten wir zunächst die Massenskalen der Theorie.

Die unrenormierte 4-dimensionale QED enthält mit der Strommasse  $m$  nur eine Massenskala. Wie jedes Regularisierungsverfahren bringt auch die dimensionelle Regularisierung eine neue Massenskala in die Theorie. Das Herabsetzen der raumzeitlichen Dimension ist nur dann konsistent möglich, wenn die bei  $d = 4$  dimensionslose Kopplungskonstante  $g$  eine Massendimension mit der Potenz  $\epsilon$  erhält. Es ist ein Vorteil der dimensionellen Regularisierung, daß der Regularisierungsparameter unabhängig von der Massenskala ist. Bei der Cut-Off- oder Gitterregularisierung fallen diese beiden Parameter zusammen.

Für  $d < 4$  existieren die beiden Skalen  $\{m, g^{\frac{1}{\epsilon}}\}$ , mit denen es möglich ist, sämtliche Größen in den SD-Gl. dimensionslos zu schreiben. Da später auch der Fall  $m = 0$  betrachtet werden soll, drücken wir alle dimensionsbehafteten

Größen durch  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  aus. Für Strommasse und Impulse schreiben wir:

$$m = \bar{m} g^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (2.4a)$$

$$p_i = \bar{p}_i g^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (2.4b)$$

Eine allgemeine Greensche Funktion  $G$  mit der Massendimension  $\alpha$  und einem Satz von äußeren Impulsen  $\{p_i\}$  lässt sich durch eine dimensionslose Funktion  $\bar{G}$ , die nur von dimensionslosen Parametern abhängt, ausdrücken:

$$G(\{p_i\}, m, g, \xi) = g^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \bar{G}(\{\bar{p}_i\}, \bar{m}, \xi) \quad (2.5)$$

Aus dieser Gleichung folgt für  $d < 4$  ein Skalentransformationsgesetz, mit dem Aussagen über das UV-Verhalten der Greenschen Funktionen gewonnen werden können:

$$G(\lambda \{p_i\}, \lambda m, \lambda^\epsilon g, \xi) = \lambda^\alpha G(\{p_i\}, m, g, \xi) \quad (2.6a)$$

$$G(\lambda \{p_i\}, m, g, \xi) = \lambda^\alpha G(\{p_i\}, \frac{m}{\lambda}, \frac{g}{\lambda^\epsilon}, \xi) \quad (2.6b)$$

Dieses Skalentransformationsgesetz ist analog zu der, auf die nackte Greensche Funktion umgeschriebenen, Renormierungsgruppentransformation einer endlichen Theorie. Man könnte  $\frac{m}{\lambda}$  die laufende Masse und  $\frac{g}{\lambda^\epsilon}$  die laufende Kopplung der nackten Theorie nennen. Beide gehen für  $\epsilon > 0$  im UV-Limes gegen Null. Das Verschwinden der laufenden nackten Kopplung führt zur asymptotischen Freiheit der unrenormierten QED in  $d < 4$  Dimensionen. Im UV-Punkt stimmen die Greenschen Funktionen ohne Massendimension mit denen der freien masselosen Theorie überein. Aus Greenschen Funktionen mit Massendimension lassen sich mit der Strommasse dimensionslose Funktionen bilden, die dann im UV-Punkt mit entsprechenden perturbativen Funktionen übereinstimmen. Z.B. gilt für die invariante Funktion  $B(p^2, m, g, \xi)$ :

$$\frac{B(\lambda p^2, m, g, \xi)}{m} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B(p^2, \frac{m}{\lambda}, 0, \xi)}{\frac{m}{\lambda}} = 1 \quad (2.7)$$

*Diese asymptotische Freiheit der unrenormierten Feldtheorie bei  $d < 4$  ist eine wesentliche Eigenschaft des Regularisierungsverfahrens. Sie resultiert alleine aus der Kopplungsdimension und ist unabhängig von der speziellen Natur der Lagragedichte. Alle Feldtheorien mit Kopplungen, die bei  $d < 4$  eine positive Massendimension erhalten, sind für  $d < 4$  asymptotisch frei.*

Diese asymptotische Freiheit gilt nur für  $d < 4$  und steht damit nicht im Widerspruch zur gängigen Meinung, daß die 4-dimensionale QED nicht asymptotisch frei ist<sup>4</sup>. In [BE 95] wird diese asymptotische Freiheit der QED auf der Grundlage der Renormierungsgruppe diskutiert.

---

<sup>4</sup>Hier deutet sich an, daß der Übergang von  $d < 4$  nach  $d = 4$  unstetig sein kann.

Für die numerische Behandlung der SD-Gl. ist es erforderlich, diese dimensionslos zu formulieren. Eine Möglichkeit besteht darin, alle dimensionsbehafteten Größen durch die Massenskala  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  auszudrücken.

$$A(\bar{p}g^{\frac{1}{\epsilon}}, \bar{m}g^{\frac{1}{\epsilon}}, 1g, \xi) = \bar{A}(\bar{p}, \bar{m}, \xi) \quad (2.8a)$$

$$B(\bar{p}g^{\frac{1}{\epsilon}}, \bar{m}g^{\frac{1}{\epsilon}}, 1g, \xi) = \bar{B}(\bar{p}, \bar{m}, \xi)g^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (2.8b)$$

$$d(\bar{p}g^{\frac{1}{\epsilon}}, \bar{m}g^{\frac{1}{\epsilon}}, 1g, \xi) = \bar{d}(\bar{p}, \bar{m}, \xi) \quad (2.8c)$$

$$g^2 \Sigma_A(\bar{p}g^{\frac{1}{\epsilon}}, \bar{m}g^{\frac{1}{\epsilon}}, 1g, \xi) = \bar{\Sigma}_A(\bar{p}, \bar{m}, \xi) \quad (2.8d)$$

$$g^2 \Sigma_B(\bar{p}g^{\frac{1}{\epsilon}}, \bar{m}g^{\frac{1}{\epsilon}}, 1g, \xi) = \bar{\Sigma}_B(\bar{p}, \bar{m}, \xi)g^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (2.8e)$$

$$g^2 \Pi(\bar{p}g^{\frac{1}{\epsilon}}, \bar{m}g^{\frac{1}{\epsilon}}, 1g, \xi) = \bar{\Pi}(\bar{p}, \bar{m}, \xi) \quad (2.8f)$$

Damit lauten die SD-Gl.

$$\bar{A}(\bar{p}^2) = 1 + \bar{\Sigma}_A(\bar{p}^2) \quad (2.9a)$$

$$\bar{B}(\bar{p}^2) = \bar{m} - \bar{\Sigma}_B(\bar{p}^2) \quad (2.9b)$$

$$\bar{d}^{-1}(\bar{p}^2) = 1 + \bar{\Pi}(\bar{p}^2) \quad (2.9c)$$

mit den Selbstenergieloops

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_A(\bar{p}^2) &= \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_1(\bar{k}^2) \left\{ \xi(d-2) \frac{\bar{p} \cdot \bar{k}}{\bar{p}^2 \bar{q}^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[ -2 + (d-1) \frac{\bar{p} \cdot \bar{k}}{\bar{p}^2} + 2 \frac{(\bar{p}^2 - \bar{p} \cdot \bar{k})^2}{\bar{p}^2 \bar{q}^2} \right] \frac{\bar{d}(\bar{q}^2)}{\bar{q}^2} \right\} \quad (2.10a) \end{aligned}$$

$$\bar{\Sigma}_B(\bar{p}^2) = \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) \frac{(1-d)\bar{d}(\bar{q}^2) - \xi}{\bar{q}^2} \quad (2.10b)$$

$$\bar{\Pi}(\bar{p}^2) = 8 \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_1(\bar{k}^2) \bar{S}_1(\bar{q}^2) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\bar{k}^2}{\bar{p}^2} \frac{(\hat{\bar{k}} \cdot \hat{\bar{p}})^2 d - 1}{1-d} \right\} \quad (2.10c)$$

Aus diesen SD-Gl. ist die komplette Kopplungsabhängigkeit eliminiert. Das Gleichungssystem hängt nur noch von dem kopplungsartigen dimensionslosen Parameter  $\bar{m} = mg^{-\frac{1}{\epsilon}}$  und vom Eichfixierungsparameter  $\xi$  ab. Der aufwendig zu bestimmende Lösungsraum hat sich damit um eine Dimension verringert. Diese Gleichungen sind zunächst nur für  $d < 4$  äquivalent zu den Gl.(1.29). Es ist nicht klar, wie sich die Lösungen mit der bei  $d = 4$  singulär werdenden Massenskala  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  bei einer echten Fortsetzung nach  $d = 4$  verhalten. Für die numerischen Zwecke, wo  $d < 4$  immer gegeben ist, kann dieses Gleichungssystem mit Vorteil eingesetzt werden.

Damit wir an die konventionelle Formulierung der Renormierungstheorie anschließen können, ist es für Untersuchungen im Zusammenhang mit Renormierung und Renormierungsgruppe vorteilhafter, ein Gleichungssystem zu verwenden, das die Massen und Kopplungsparameter explizit enthält<sup>5</sup>. Dazu führen wir künstlich eine Massenskala  $\nu$  von außen ein. Diese Skala kann eine beliebige Masse sein, die wir nicht festlegen müssen, da sie in der dimensionslosen Theorie natürlich nicht auftaucht. Bei Betrachtungen zur Renormierungsgruppe werden wir diese Skala mit der Renormierungsgruppenskala gleichsetzen. Die mit  $\nu$  dimensionslos formulierten Größen lauten:

$$p_i = \tilde{p}_i \nu \quad (2.11a)$$

$$m = \tilde{m} \nu \quad (2.11b)$$

$$g = \tilde{g} \nu^\epsilon \quad (2.11c)$$

$$A(\tilde{p}\nu, \tilde{m}\nu, \tilde{g}\nu^\epsilon, \xi) = \tilde{A}(\tilde{p}, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (2.11d)$$

$$B(\tilde{p}\nu, \tilde{m}\nu, \tilde{g}\nu^\epsilon, \xi) = \tilde{B}(\tilde{p}, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \nu \quad (2.11e)$$

$$d(\tilde{p}\nu, \tilde{m}\nu, \tilde{g}\nu^\epsilon, \xi) = \tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (2.11f)$$

$$\Sigma_A(\tilde{p}\nu, \tilde{m}\nu, \tilde{g}\nu^\epsilon, \xi) = \tilde{\Sigma}_A(\tilde{p}, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (2.11g)$$

$$\Sigma_B(\tilde{p}\nu, \tilde{m}\nu, \tilde{g}\nu^\epsilon, \xi) = \tilde{\Sigma}_B(\tilde{p}, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \nu \quad (2.11h)$$

$$\Pi(\tilde{p}\nu, \tilde{m}\nu, \tilde{g}\nu^\epsilon, \xi) = \tilde{\Pi}(\tilde{p}, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (2.11i)$$

Damit erhalten wir für die SD-Gl.

$$\tilde{A}(\tilde{p}^2) = 1 + \tilde{g}^2 \tilde{\Sigma}_A(\tilde{p}^2) \quad (2.12a)$$

$$\tilde{B}(\tilde{p}^2) = \tilde{m} - \tilde{g}^2 \tilde{\Sigma}_B(\tilde{p}^2) \quad (2.12b)$$

$$\tilde{d}^{-1}(\tilde{p}^2) = 1 + \tilde{g}^2 \tilde{\Pi}(\tilde{p}^2) \quad (2.12c)$$

mit den Selbstenergieloops

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_A(\tilde{p}^2) &= \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_1(\tilde{k}^2) \left\{ \xi(d-2) \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{k}}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[ -2 + (d-1) \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{k}}{\tilde{p}^2} + 2 \frac{(\tilde{p}^2 - \tilde{p} \cdot \tilde{k})^2}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2} \right] \frac{\tilde{d}(\tilde{q}^2)}{\tilde{q}^2} \right\} \quad (2.13a) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Sigma}_B(\tilde{p}^2) = \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_0(\tilde{k}^2) \frac{(1-d)\tilde{d}(\tilde{q}^2) - \xi}{\tilde{q}^2} \quad (2.13b)$$

<sup>5</sup>Es wäre eine sehr interessante Aufgabe, eine Renormierungstheorie für die mit  $g^\frac{1}{\epsilon}$  dimensionslos gemachten und um einen Parameter reduzierten SD-Gl. zu formulieren.

$$\tilde{\Pi}(\tilde{p}^2) = 8 \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_1(\tilde{k}^2) \tilde{S}_1(\tilde{q}^2) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{p}^2} \frac{(\hat{\tilde{k}} \cdot \hat{\tilde{p}})^2 d - 1}{1-d} \right\} \quad (2.13c)$$

Wenn wir in diesem System für jede dimensionsbehaftete Größe  $x$  die Ersetzung  $\tilde{x} \rightarrow \bar{x}$  vornehmen und  $\tilde{g} = 1$  setzen, so erhalten wir Gl.(2.9,2.10). Diese Eigenschaft wird im numerischen Lösungsverfahren verwendet, um mit einem Programm beide Gleichungssysteme behandeln zu können.

## 2.2 Die Divergenzstruktur der Loop-Integrale

In der perturbativen QED, die gegenwärtig unter den Feldtheorien in größter Genauigkeit mit den Experimenten übereinstimmt, werden die Divergenzen der Integrale durch das UV-Verhalten der Greenschen Funktionen erzeugt. Als Arbeitshypothese gehen wir davon aus, daß das bei nichtperturbativen Lösungen auch so ist. Unsere Aufgabe besteht dann darin, das nichtperturbative UV-Verhalten der Greenschen Funktionen zu bestimmen. Die in Kapitel 2.1 gefundene asymptotische Freiheit legt es nahe zu vermuten, daß die Asymptotik der Greenschen Funktionen mit der perturbativen Asymptotik identisch ist. Um diese Vermutung zu verifizieren, lösen wir im folgenden die SD-Gl. im UV-Bereich. Dabei beschränken wir uns auf die Leiternäherung, um die Anzahl der Funktionen übersichtlich zu halten. Es sollte jedoch ohne prinzipielle Probleme möglich sein, die folgenden Überlegungen auf das volle Gleichungssystem zu übertragen. Für die Berechnung der Asymptotik verwenden wir die mit  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  dimensionslos gemachten SD-Gl.(2.9).

Wir starten mit einem Ansatz, der wie bei der perturbativen Asymptotik aus Potenzreihen in  $\bar{p}^{-2\epsilon}$  besteht:

$$\bar{A}(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{A}^{(N)}(\bar{p}^2) = \sum_{j=0}^N a_j \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (2.14a)$$

$$\bar{B}(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{B}^{(N)}(\bar{p}^2) = \bar{m} \sum_{j=0}^N b_j \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (2.14b)$$

$$\bar{d}(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{d}^{(N)}(\bar{p}^2) = \sum_{j=0}^N d_j \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (2.14c)$$

Es ist nun zu zeigen, daß diese Impulsabhängigkeit sich im UV-Bereich reproduziert und daß die Entwicklungskoeffizienten so bestimmt werden können, daß der Ansatz im UV-Bereich selbstkonsistent ist.

Für das Studium der Schleifenintegrale im UV-Bereich ist es, aufgrund der Nichtlinearitäten in diesen Integralen, zweckmäßig, sich zunächst mit Hilfe dieses Ansatzes die UV-Entwicklung von  $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{d}^{-1}$  zu beschaffen. Für die Berechnung von  $\bar{d}^{-1}$  muß eine Taylorreihe invertiert werden. Bei der Bestimmung der UV-Entwicklung von  $\bar{S}_0, \bar{S}_1$  starten wir mit Gl.(1.26e,1.26g). Die Funktion  $\bar{B}^2(\bar{p}^2)$  im Nenner des Fermionpropagators wird gegenüber

$\bar{A}(\bar{p}^2)\bar{p}^2$  vernachlässigt<sup>6</sup>. Dies führt zu einem Fehler bei den Koeffizienten zur Ordnung  $N$  wenn  $N > \frac{1}{2\epsilon}$ . Dieser Fehler ist eine Konsequenz aus der Verletzung der Wardidentitäten durch die Vertexnäherung. Bei Wahrung der Eichinvarianz existiert dieser Fehler nicht, da dann  $\bar{A}(\bar{p}^2) = 1$  gilt. Für die praktische Verwendung der Asymptotik stellt die Forderung  $N\epsilon < \frac{1}{2}$  keine wesentliche Einschränkung dar, weil wir uns für kleine  $\epsilon$  interessieren. Das Einsetzen unseres Ansatzes in die Gl.(1.26e,1.26g) führt im UV-Bereich auf die Impulsstruktur:

$$[\bar{d}(\bar{p}^2)]^{-1} \xrightarrow{UV} [\bar{d}^{(N)}(\bar{p}^2)]^{-1} = \sum_{j=0}^N \tilde{d}_j \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (2.15a)$$

$$\bar{S}_0(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{S}_0^{(N)}(\bar{p}^2) = \frac{\bar{m}}{\bar{p}^2} \sum_{j=0}^N s_j^{(0)} \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (2.15b)$$

$$\bar{S}_1(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{S}_1^{(N)}(\bar{p}^2) = \frac{1}{\bar{p}^2} \sum_{j=0}^N s_j^{(1)} \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (2.15c)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformeln für die Berechnung von  $s_n^{(0)}, s_n^{(1)}, d_n$  aus  $a_n, b_n, d_n$

$$s_n^{(0)} = \frac{1}{a_0^2} \left[ b_n - \sum_{k=1}^n s_{n-k}^{(0)} \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} \right] \quad \text{mit} \quad s_0^{(0)} = \frac{b_0}{a_0^2} \quad (2.16a)$$

$$s_n^{(1)} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n s_{n-k}^{(1)} a_k \quad \text{mit} \quad s_0^{(1)} = \frac{1}{a_0} \quad (2.16b)$$

$$\tilde{d}_n = -\frac{1}{d_0} \sum_{k=1}^n \tilde{d}_{n-k} d_k \quad \text{mit} \quad \tilde{d}_0 = \frac{1}{d_0} \quad (2.16c)$$

Die UV-Entwicklung der Schleifenintegrale Gl.(2.10) bezüglich des äußeren Impulses  $\bar{p}$  ist am einfachsten, wenn sie direkt am Integranden ausgeführt werden kann. Dies ist nur möglich, wenn die Integrale in jeder Ordnung der UV-Entwicklung für ein  $d < 4$  konvergieren. Da wir die invarianten Funktionen mit unserem Ansatz nur im UV-Bereich erfassen, müssen die Schleifenintegrale so umgeformt werden, daß für große  $\bar{p}$  in den Integranden nur die Asymptotiken benötigt werden.

Diesen Anforderungen wird eine direkte Potenzreihenentwicklung der Integranden in Gl.(2.10) nicht gerecht. Die Integrale werden mit zunehmender Ordnung divergenter<sup>7</sup> und es gibt invariante Funktionen, die nicht vom äußeren Impuls abhängen.

<sup>6</sup>Dies entspricht dem störungstheoretischen Phänomen, daß im UV-Limes Massen gegenüber Impulsen vernachlässigt werden können.

<sup>7</sup>Man sieht dies sehr einfach, wenn man z.B.  $\frac{1}{\bar{q}^2}$  für große  $\bar{p}^2$  entwickelt. Mit steigender Ordnung von  $\frac{1}{\bar{p}^2}$  steigen auch die Potenzen von  $\bar{k}^2$

Mit der Transformation des Integrationsimpulses  $\bar{k} = |\bar{p}|u$  und  $\hat{\bar{p}} = \frac{\bar{p}}{|\bar{p}|}$  erhalten wir Integrale, die eine UV-Entwicklung der Integranden ermöglichen:

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_A(\bar{p}^2) &= \bar{p}^d \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \bar{S}_1(\bar{p}^2 u^2) \left\{ \xi(d-2) \frac{\hat{\bar{p}} \cdot u}{\bar{p}^2 (\hat{\bar{p}} - u)^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[ -2 + (d-1) \hat{\bar{p}} \cdot u + 2 \frac{(1 - \hat{\bar{p}} \cdot u)^2}{(\hat{\bar{p}} - u)^2} \right] \frac{\bar{d}(\bar{p}^2 (\hat{\bar{p}} - u)^2)}{\bar{p}^2 (\hat{\bar{p}} - u)^2} \right\} \\ \bar{\Sigma}_B(\bar{p}^2) &= \bar{p}^d \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{p}^2 u^2) \frac{(1-d) \bar{d}(\bar{p}^2 (\hat{\bar{p}} - u)^2) - \xi}{\bar{p}^2 (\hat{\bar{p}} - u)^2} \\ \bar{\Pi}(\bar{p}^2) &= 8\bar{p}^d \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \bar{S}_1(\bar{p}^2 u^2) \bar{S}_1(\bar{p}^2 (\hat{\bar{p}} - u)^2) \left\{ \frac{1}{2} + u^2 \frac{(\hat{\bar{p}} \cdot \hat{\bar{p}})^2 d - 1}{1-d} \right\}\end{aligned}$$

Alle in den Integralen vorkommenden invarianten Funktionen haben Argumente die bei festem  $u$  proportional zu  $\bar{p}^2$  sind. Nur bei  $u = 0$  und  $u = \hat{\bar{p}}$  werden einige invariante Funktionen an der Stelle 0 ausgewertet. Diese Punkte bilden im gesamten Integrationsbereich aber Nullmengen und geben keinen Beitrag zum Integral, wenn der Integrand an diesen Punkten regulär ist. Für die Berechnung der Schleifenintegrale im UV-Bereich dürfen nun die Asymptotiksummen eingesetzt werden, weil dabei die Regularität der Integranden erhalten bleibt. Die resultierenden Integrale  $I(\epsilon)$  sind für  $d < 4$  konvergente analytisch auswertbare Standardintegrale, die nur von  $\epsilon$  und den Indizes der Asymptotikkoeffizienten abhängen. Sie werden im Anhang A berechnet und sind in den Gl.(A.3) zusammengestellt.

Die Schleifenintegrale lauten im UV-Bereich:

$$\bar{\Sigma}_A(\bar{p}^2) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^{[1+j+k]} s_j^{(1)} \left[ d_k I_{j,k}^{(4)}(\epsilon) + \xi \delta_{k,0} I_j^{(3)}(\epsilon) \right] \quad (2.17a)$$

$$\bar{\Sigma}_B(\bar{p}^2) = \bar{m} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^{[1+j+k]} s_j^{(0)} \left[ d_k I_{j,k}^{(2)}(\epsilon) + \xi \delta_{k,0} I_j^{(1)}(\epsilon) \right] \quad (2.17b)$$

$$\bar{\Pi}(\bar{p}^2) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^{[1+j+k]} s_j^{(1)} s_k^{(1)} I_{j,k}^{(5)}(\epsilon) \quad (2.17c)$$

Sie sind wieder Potenzreihen in  $\bar{p}^{-2\epsilon}$ , womit gezeigt ist, daß sich die Impulsstruktur der Ansätze reproduziert. Zur vollständigen Lösung des Selbstkonsistenzproblems im UV-Bereich benötigen wir noch Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Ansätze. Dazu setzen wir die UV-Entwicklung der Schleifenintegrale und die Ansätze für die invarianten Funktionen in Gl.(2.9) ein und führen einen Koeffizientenvergleich durch. Dieser führt auf

Rekursionsformeln für die Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n = \xi s_{n-1}^{(1)} I_{n-1}^{(3)}(\epsilon) + \sum_{j=0}^{n-1} s_j^{(1)} d_{n-j-1} I_{j,n-j-1}^{(4)}(\epsilon) \quad \text{mit } a_0 = 1 \quad (2.18a)$$

$$b_n = \xi s_{n-1}^{(0)} I_{n-1}^{(1)}(\epsilon) + \sum_{j=0}^{n-1} s_j^{(0)} d_{n-j-1} I_{j,n-j-1}^{(2)}(\epsilon) \quad \text{mit } b_0 = 1 \quad (2.18b)$$

$$\tilde{d}_n = \sum_{j=0}^{n-1} s_j^{(1)} s_{n-j-1}^{(1)} I_{j,n-j-1}^{(5)}(\epsilon) \quad \text{mit } \tilde{d}_0 = 1 \quad (2.18c)$$

Zusammen mit Gl.(2.16) ist dieses gekoppelte System rekursiv lösbar. Die Entwicklungskoeffizienten hängen von  $\epsilon, \xi$  und den Indizes ab. Sie bilden eine alternierende Folge deren Glieder aus Summen von Produkten von  $\Gamma$ -Funktionen mit bezüglich  $\epsilon$  rationalen Funktionen als Faktoren bestehen. In den Koeffizienten zur Ordnung  $\left(\frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}}\right)^n$  besteht der bezüglich  $\epsilon$  bei  $\epsilon = 0$  führende Term aus einem Pol der Form  $\frac{1}{\epsilon^n}$ .

Die Gleichungen für  $a_n, \tilde{d}_n$  entkoppeln von der Gleichung für  $b_n$ , da bei der UV-Entwicklung  $\bar{B}(p^2)$  aus den Schleifenintegralen  $\bar{\Sigma}_A, \bar{\Pi}$  herausfällt. Die Koeffizienten hängen nicht von dem kopplungsartigen Parameter  $\bar{m}$  ab. Dieser Parameter beeinflußt als multiplikativer Faktor nur die Asymptotik von  $\bar{B}(\bar{p}^2)$ .

Drücken wir die Asymptotiksummen durch die natürlichen dimensionsbehafteten Größen aus, z.B.

$$B(p^2) \xrightarrow{UV} m \sum_{j=0}^N b_j \left(\frac{g^2}{p^{2\epsilon}}\right)^j \quad (2.19)$$

so sehen wir, daß es Potenzreihen in  $g^2$  sind. Sie sind tatsächlich identisch mit der Störungstheoretischen Asymptotik der Leiternäherung. *Da diese Asymptotik aber nicht nur bezüglich  $g$  sondern auch bezüglich  $p$  selbstkonsistent ist, handelt es sich um eine im UV-Bereich vollständig selbstkonsistente nichtperturbative Lösung.*

Damit ist das UV-Verhalten der nichtperturbativen invarianten Funktionen im Rahmen der Leiternäherung aufgeklärt. Die UV-Divergenzstruktur der Schleifenintegrale wird durch die perturbative UV-Asymptotik festgelegt. Diese kann für kleine  $\epsilon$  mit den Rekursionsformeln Gl.(2.18) und Gl.(2.16) auch in hohen Ordnungen effektiv berechnet werden.

Über die Leiternäherung hinausgehend können wir mit Hilfe der asymptotischen Freiheit Gl.(2.6) sehen, daß bei  $\epsilon > 0$  die Greenschen Funktionen der vollen QED im UV-Punkt mit denen der freien QED, also der nullten Ordnung der Störungstheorie, übereinstimmen. Das bedeutet, daß die UV-Asymptotik aller Greenschen Funktionen durch die nullte Ordnung der Störungstheorie beschränkt ist.

## 2.3 Nichtperturbative dimensionelle Regularisierbarkeit

Aus den Betrachtungen des letzten Kapitels folgt, daß die Integranden der vollen SD-Gl. im UV-Bereich nicht stärker ansteigen als in den perturbativen Integralen und damit durch Herabsetzen der Dimension regularisierbar sind.

An dieser Stelle können wir bereits feststellen, daß die dimensionelle Regularisierung bei nichtperturbativen Untersuchungen mit den SD-Gl. der vollen QED anwendbar ist, wenn die Integrale analytisch berechenbar sind. Die analytische Form der Integrale erlaubt die Fortsetzung der Dimension nach  $d = 4$  auch dann, wenn die Integrale nur für  $d < 3$  oder  $d < 2$  definiert sind.

Mit der perturbativen Divergenzstruktur enthalten die Integrale der Leiternäherung neben logarithmischen auch lineare und quadratische Divergenzen. Stärker als logarithmisch divergente Integrale können ohne analytisch ausführbare Integrationen nicht in beliebiger Nähe von  $d = 4$  berechnet werden, so daß eine numerische Behandlung des Fortsetzungsproblems unmöglich ist. Die Begriffe linear und quadratisch divergent beziehen sich auf den durch Abzählen von Impulspotenzen ermittelten Divergenzgrad. Dieser Divergenzgrad ist sicherlich nur eine obere Schranke für den tatsächlichen Divergenzgrad. Damit die dimensionelle Regularisierung mit numerisch berechneten Integralen funktionieren kann, müssen wir zeigen, daß der tatsächliche Divergenzgrad maximal logarithmisch ist und die Integrale so umformen, daß sie für  $d < 4$  manifest konvergent<sup>8</sup> sind.

Quadratische Divergenzen gibt es nur in der Photonselbstenergie. Diese impulsunabhängigen Divergenzen müssen proportional zu  $g^{\mu\nu}$  sein und werden deswegen bereits beim Herausprojizieren der transversalen Komponente mit dem Projektor Gl.(1.21), als Konsequenz der Ward-Identität, eliminiert. Damit ist sichergestellt, daß unsere skalare Photonselbstenergie keine quadratischen Divergenzen enthält, obwohl der durch Potenzabzählen ermittelte Divergenzgrad noch quadratisch ist.

Als nächstes werden die drei Schleifenintegrale, mit Hilfe der in [BE 95] vorgeschlagenen Umformungen, für die numerische Berechnung so umformuliert, daß sie für  $d < 4$  manifest UV-konvergent sind:

- **Der zu  $\xi$  proportionale linear divergente Teil von  $\Sigma_A$**

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) \frac{p \cdot k}{p^2 q^2} \\
 &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) \frac{p \cdot k}{p^2} \left[ \frac{1}{q^2} - \underbrace{\frac{\Theta(k^2 - p^2)}{k^2} - \frac{\Theta(p^2 - k^2)}{p^2}}_{= 0 \text{ bei Winkelintegration}} \right]
 \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Eine numerische Integrationsroutine kann sich gegenseitig kompensierende Divergenzen nicht behandeln.

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) \frac{p \cdot k}{p^2 q^2} \left[ \underbrace{\Theta(k^2 - p^2) \frac{2p \cdot k - p^2}{k^2}}_{\text{regulär für } k \gg p} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\Theta(p^2 - k^2) \frac{2p \cdot k - k^2}{p^2}}_{\text{regulär für } k \approx 0} \right] \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Der Integrand ist bei  $p^2 = k^2$  stetig.

- **Der  $\xi$ -unabhängige, linear divergente Teil von  $\Sigma_A$**

Wir drücken den in Gl.(1.29d) vor  $d(q^2)$  stehenden Faktor durch eine Ableitung nach der Winkelvariablen  $x$  aus und übertragen diese Ableitung durch partielle Integration auf  $d(q^2)$ . Damit wird dieses Integral manifest logarithmisch divergent.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) \frac{d(q^2)}{q^2} \left[ -2 + (d-1) \frac{p \cdot k}{p^2} + 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)^2}{p^2 q^2} \right] \\
&= c_d \int_0^\infty dK K^{3-2\epsilon} S_1(K^2) \frac{K}{P} \int_{-1}^1 dx d(q^2) \frac{d}{dx} \left[ -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\epsilon}}{q^2} \right] \\
&= 2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(q^2) d'(k^2) \left[ (\hat{p} \cdot \hat{k})^2 - 1 \right] \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$$\text{mit } q^2 = P^2 + K^2 - 2PKx$$

Im letzten Schritt haben wir auch eine Translation  $k \rightarrow q$  in der Integrationsvariablen vorgenommen, damit weniger inverse  $q$ -Potenzen auftreten. Dadurch wird die Winkelintegration bei  $K = P$  regulärer.

- **Der quadratisch divergente Teil von II**

Auch in der Photonselbstenergie kann der Divergenzgrad reduziert werden, indem der Impulsfaktor des quadratisch divergenten Teils durch eine Ableitung nach  $x$  ausgedrückt wird. Der Divergenzgrad reduziert sich um eins, wenn diese Ableitung durch partielle Integration auf die invariante Funktion  $S_1(q^2)$  übertragen wird.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) S_1(q^2) \frac{k^2}{p^2} \left[ (\hat{k} \cdot \hat{p})^2 d - 1 \right] \\
&= -c_d \int_0^\infty dK K^{3-2\epsilon} S_1(K^2) \frac{K}{P} \int_{-1}^1 dx S_1(q^2) \frac{d}{dx} \left[ x(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\epsilon} \right] \\
&= -2c_d \int_0^\infty dK K^{3-2\epsilon} S_1(K^2) \\
&\quad \times \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{(p^2 k^2 - (p \cdot k)^2) p \cdot k}{p^4} S'_1(q^2) \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Mit der gleichen Vorgehensweise könnten wir den Divergenzgrad des nun linear divergenten Integrals um eine weitere Stufe reduzieren. Dann verbleibt ein Integral mit der zweifachen Ableitung von  $S_1$ . Um die zweifache Ableitung zu vermeiden, führen wir eine Translation der Integrationsvariablen ( $k \leftrightarrow q$ ) durch und wiederholen dann die obige Vorgehensweise für den linear divergenten Teil. Dies führt auf:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} S_1(k^2) S_1(q^2) \frac{k^2}{p^2} \left[ (\hat{k} \cdot \hat{p})^2 d - 1 \right] \\ &= -2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ k^2 \left( 1 - (\hat{p} \cdot \hat{k})^2 \right) S'_1(k^2) S_1(q^2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{d+1} k^4 \left( 1 - (\hat{p} \cdot \hat{k})^2 \right)^2 S'_1(k^2) S'_1(q^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Alle Integrale liegen nun in einer bei  $d < 4$  manifest konvergenten Form vor und eine numerische Berechnung in beliebiger Nähe von  $d = 4$  ist nur noch durch die Genauigkeit der verwendeten Zahlendarstellung beschränkt.

Der tatsächliche Divergenzgrad der Schleifenintegrale in der Leiternäherung ist logarithmisch. Bei Berücksichtigung der vollen Vertexgleichung steigen, aufgrund der asymptotischen Freiheit, die Integranden im UV-Bereich nicht stärker als perturbativ an. Da die perturbativen Vertexdiagramme maximal logarithmische Divergenzen ausbilden, können wir sagen, daß die gesamte QED nur logarithmische Divergenzen enthält.

Als Ergebnis der Überlegungen dieses Kapitels halten wir fest:

*Die SD-Gl. der QED werden auch bei nichtperturbativen Untersuchungen durch Herabsetzen von  $d$  auf  $d < 4$  im UV-Bereich regularisiert. Die Integrale sind für Dimensionen in beliebiger Nähe von  $d = 4$  konvergent.*

Die nichtperturbative dimensionelle Regularisierbarkeit basiert auf der asymptotischen Freiheit der nackten Theorie bei  $d < 4$  und auf der Möglichkeit, die Integrale manifest logarithmisch divergent zu formulieren. Da die asymptotische Freiheit eine über die QED hinausgehende Eigenschaft des Regularisierungsverfahrens ist, ist es denkbar, daß die dimensionelle Regularisierung auch bei anderen Feldtheorien für nichtperturbative Studien verwendet werden kann.

Abschließend stellen wir noch die manifest logarithmisch divergenten Schleifenintegrale der Leiternäherung zusammen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_A(\tilde{p}^2) &= 2 \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_1(\tilde{q}^2) \tilde{d}'(\tilde{k}^2) \left[ (\hat{\tilde{p}} \cdot \hat{\tilde{k}})^2 - 1 \right] \\
&+ \xi(d-2) \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_1(\tilde{k}^2) \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{k}}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2} \left[ \Theta(\tilde{k}^2 - \tilde{p}^2) \frac{2\tilde{p} \cdot \tilde{k} - \tilde{p}^2}{\tilde{k}^2} \right. \\
&\quad \left. + \Theta(\tilde{p}^2 - \tilde{k}^2) \frac{2\tilde{p} \cdot \tilde{k} - \tilde{k}^2}{\tilde{p}^2} \right] \quad (2.24a)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Sigma}_B(\tilde{p}^2) = \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_0(\tilde{k}^2) \frac{(1-d)\tilde{d}(\tilde{q}^2) - \xi}{\tilde{q}^2} \quad (2.24b)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}(\tilde{p}^2) &= 4 \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}_1(\tilde{k}^2) \tilde{S}_1(\tilde{q}^2) \\
&- \frac{16}{1-d} \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}'_1(\tilde{k}^2) \tilde{S}_1(\tilde{q}^2) \tilde{k}^2 \left( 1 - (\hat{\tilde{p}} \cdot \hat{\tilde{k}})^2 \right) \\
&- \frac{32}{1-d^2} \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d} \tilde{S}'_1(\tilde{k}^2) \tilde{S}'_1(\tilde{q}^2) \tilde{k}^4 \left( 1 - (\hat{\tilde{p}} \cdot \hat{\tilde{k}})^2 \right)^2 \quad (2.24c)
\end{aligned}$$

## Kapitel 3

# Numerische Lösung der SD-Gl. in Leiternäherung

Wir diskutieren im folgenden die mit einem numerischen Lösungsverfahren gefundenen Lösungen der SD-Gl. in der Leiternäherung. Zunächst betrachten wir die Lösung der nackten Theorie für  $m \neq 0$ . Der Kontinuumslices  $d \rightarrow 4$  wird an multiplikativ renormierten Lösungen im Off-Shell-Schema studiert.

### 3.1 Die Lösung der nackten SD-Gl.

Das numerische Lösungsverfahren berechnet die Lösung der Gl.(2.12/2.24) durch Iteration mit einem aus Leading-Log-Formeln gebildeten Startwert. Eine ausführliche Beschreibung des Lösungsverfahrens findet sich in Anhang B.

Da, wie in Kapitel 1.2 beschrieben, in der Leiternäherung die Ward-Identitäten bei  $\xi = 0$  am minimalsten verletzt werden, berechnen wir unsere Lösungen zunächst in Landau Eichung.

Die Abbildung 3.1 zeigt exemplarisch einen Satz von unrenormierten Lösungsfunktionen zu den nackten Parametern<sup>1</sup>  $\tilde{g} = 15$ ,  $\tilde{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}$ . Es sind jeweils drei Kurven geplottet. Die durchgezogene Linie ist die numerische Lösung für die nackten invarianten Funktionen. Zum Vergleich dazu zeigt die gepunktete Linie die mit den Leading-Log Formeln Gl.(B.6) gebildeten Funktionen für den Iterationsstart. In die Plots für  $\tilde{B}$  und  $\tilde{d}$  sind zusätzlich mit gestrichelten Linien die Funktionen eingezeichnet, die sich nach einer Iteration der SD-Gl., mit der nullten Ordnung der Störungstheorie als Startwert, ergeben<sup>2</sup>. Diese Funktionen entsprechen der 1-Loop Störungsrechnung in Leiternäherung, ohne die Funktion  $d(p^2) = (1 + g^2 \Pi(p^2))^{-1}$  nach der Kopplung zu entwickeln, und werden im folgenden stets als “1-Loop-Funktionen ohne Entwicklung nach  $\tilde{g}$ ” bezeichnet. An diesen Bildern

---

<sup>1</sup>Wir wählen diese speziellen Parameter, weil die gleiche Lösung in Kapitel 3.4 in ihrer renormierten Form, die zu den renormierten Parametern  $g_r = 1.088$ ,  $\tilde{m}_r = 1$  gehört, betrachtet wird.

<sup>2</sup>Im Plot für  $\tilde{A}$  ist diese Funktion nicht eingezeichnet, weil sie wie die Leading-Log-Formel identisch 1 ist.

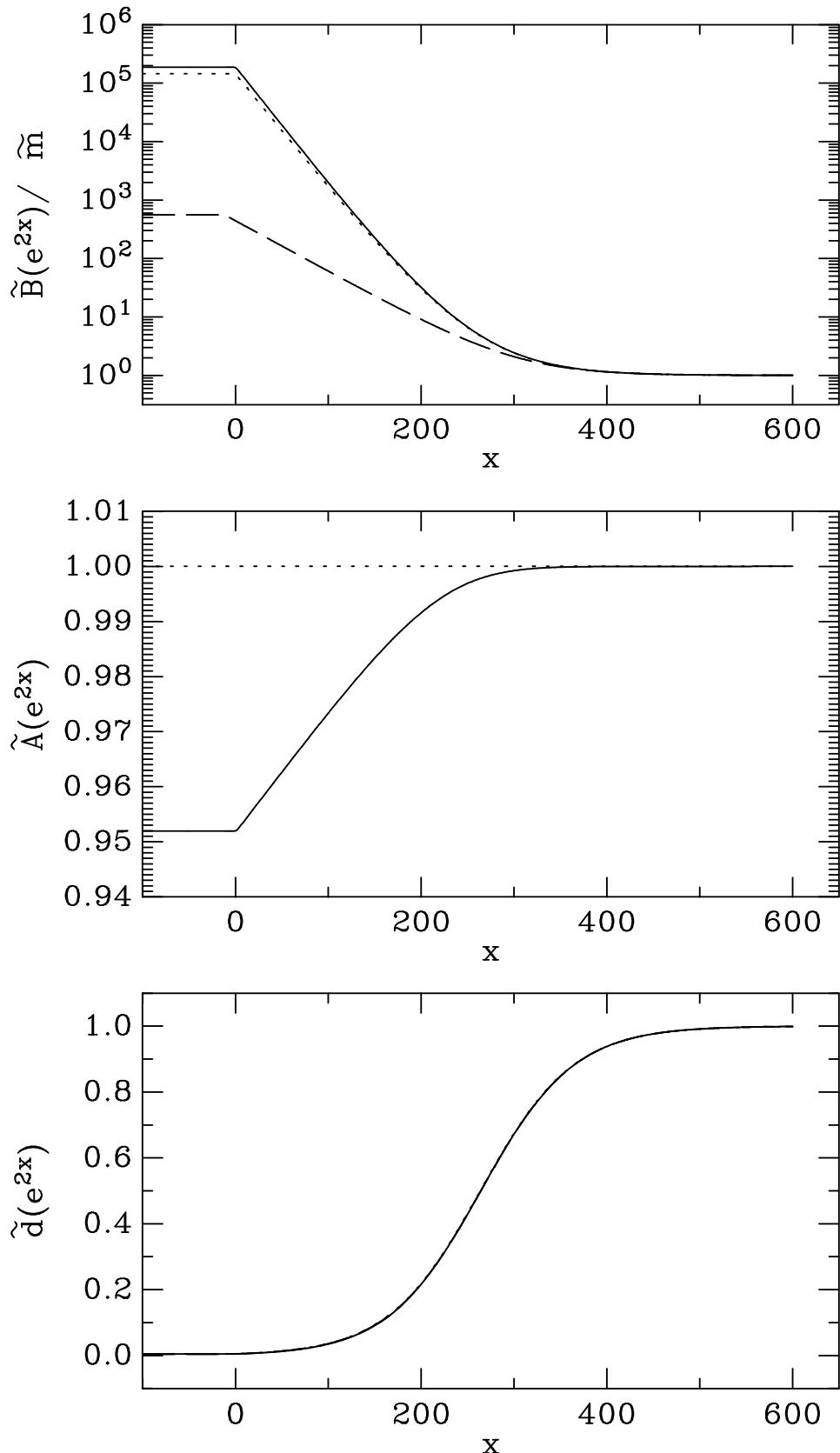


Abbildung 3.1: Nackte invariante Funktionen (durchgezogene Linie), Startwert aus Leading-Log-Formel (gepunktete Linie) und 1-Loop-Funktionen ohne Entwicklung nach  $\tilde{g}$  (gestrichelte Linie) auf einer logarithmischen Impulsskala. Parameter:  $\epsilon = 0.01$ ,  $\tilde{g} = 15$ ,  $\tilde{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}$ ,  $\xi = 0$

können die folgenden Eigenschaften der Lösung diskutiert werden:

- Da die Asymptotik der Greenschen Funktionen mit der perturbativen übereinstimmt, gehen bei jeder invarianten Funktion die drei Kurven im UV-Bereich ineinander über.
- Die Startfunktionen für die Iteration sind bereits eine erstaunlich gute Approximation der Lösung. Die größten Abweichungen bestehen im IR-Bereich und liegen für  $\tilde{A}, \tilde{d}$  um 5% und für  $\tilde{B}$  um 17%.
- Bei der invarianten Funktion  $\tilde{B}$  unterscheidet sich die mit einer Iteration der nullten Ordnung Störungstheorie gewonnene Funktion um mehrere Größenordnungen von der Lösung. Bei  $\tilde{d}, \tilde{A}$  ist diese nicht bezüglich  $\tilde{g}$  entwickelte erste Iteration im wesentlichen identisch mit der entsprechenden Leading-Log Formel.
- Der Photonpropagator ist im Iterationsprozeß am stabilsten. Im Plot können die drei Kurven nicht unterschieden werden. Er erfährt lediglich eine Änderung von ca. 6%, die hauptsächlich im IR-Bereich liegt, und wird daher sehr gut durch die Leading-Log Formel Gl.(B.6c) approximiert.
- Als Maß für die Brechung der Ward-Identität des Vertex dient die Abweichung der Funktion  $\tilde{A}$  von 1, die mit 5% recht gering ist.
- Der Wertebereich der Funktion  $\tilde{B}$  geht über viele Größenordnungen. Von Lösungen zu anderen  $\epsilon$ -Werten, die in dieser Arbeit nicht abgebildet sind, wissen wir, daß  $\tilde{B}(0)$  stark von  $\epsilon$  abhängt und mit kleiner werdendem  $\epsilon$  drastisch zunimmt. Hier deutet sich eine Divergenz an.
- Die invarianten Funktionen leben auf einer sehr großen Skala. Ihre wesentliche Struktur liegt im Impulsbereich  $0 < \tilde{p}^2 < 1.4 \cdot 10^{521}$ . Dies ist ein typisches Phänomen der dimensionellen Regularisierung. Die auftretenden Skalen hängen sehr empfindlich von  $\epsilon$  ab. Mit kleiner werdendem  $\epsilon$  dehnt sich die Impulsskala drastisch aus. Schon die von diesem Regularisierungsverfahren in die Theorie gebrachte Massenskala  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  hat mit ihrer  $\frac{1}{\epsilon}$ -Potenz ein solches Verhalten. Die  $\epsilon$ -Abhängigkeit der Impulsskala kann am Beispiel der Asymptotiksummen verdeutlicht werden. Diese Summen konvergieren als Potenzreihe in  $\frac{1}{\tilde{p}^{2\epsilon}}$  gut, wenn  $\tilde{p}^{2\epsilon}$  oberhalb einer festen Skala  $\Lambda$  liegt. Das bedeutet  $\tilde{p}^2 > \Lambda^{\frac{1}{\epsilon}}$ . Hier können wir sehen, daß die Impulsskala genauso wie die Skala  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  mit einer  $\frac{1}{\epsilon}$ -Potenz versehen ist. Dieses Verhalten ist unabhängig davon, ob wir die Impulse mit  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  dimensionslos machen oder nicht. Der tiefere Grund für das Auftreten dieser Impulsskala ist der mit der Potenz  $3 - 2\epsilon$  versehene Impuls im auf  $d$ -dimensionale Polarkoordinaten umgeschriebenen Integrationsmaß.
- Am Ende des IR-Bereichs sieht es so aus, als ob  $\tilde{B}$  und  $\tilde{A}$  einen nicht differenzierbaren Knick ausbilden. Dies ist Ausdruck der Tatsache, daß die invarianten Funktionen auf zwei Skalen leben und zwar im

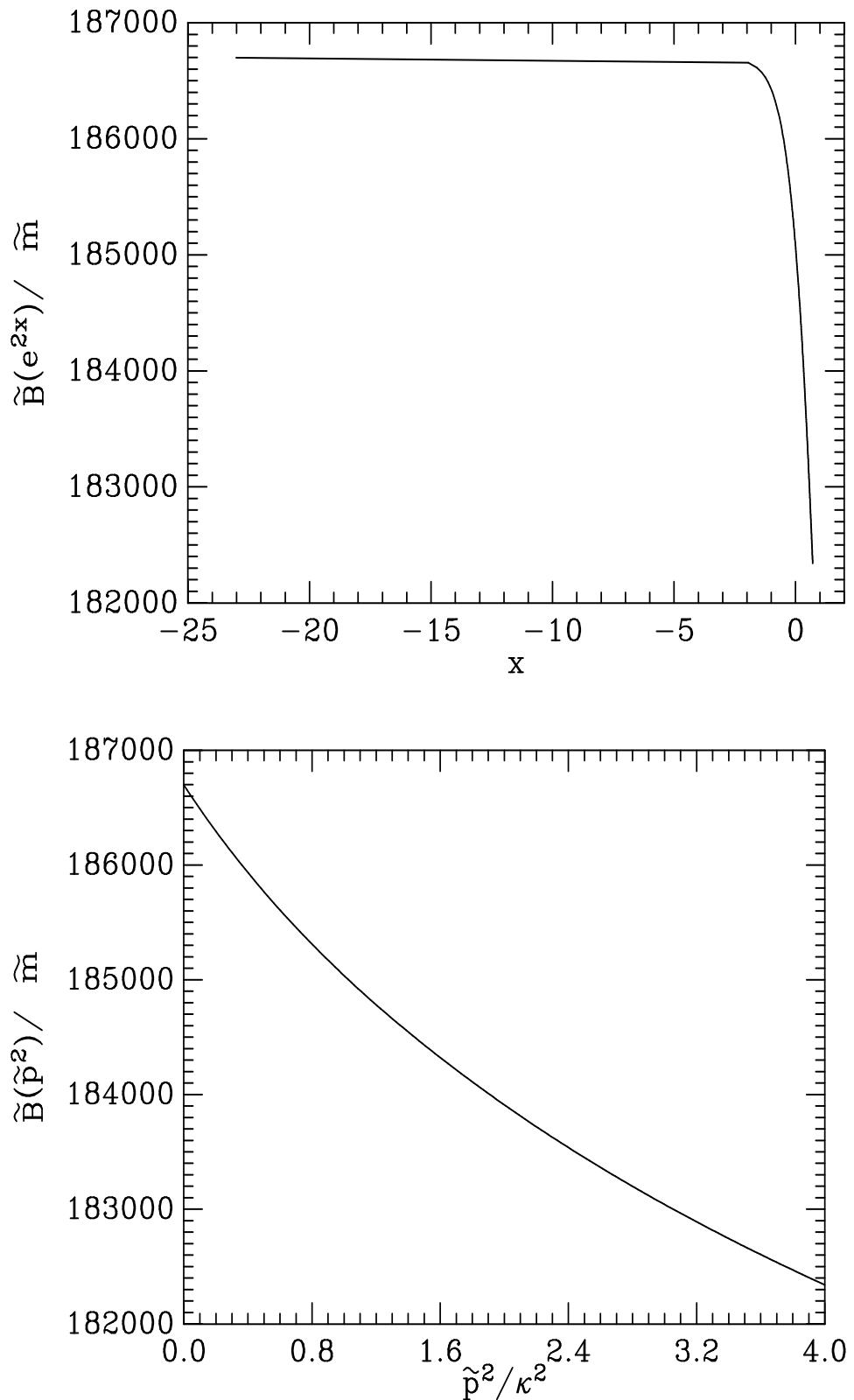


Abbildung 3.2: Nackte invariante Funktion  $B$  im IR-Bereich auf der logarithmischen  $x$ -Skala und auf der  $\frac{p^2}{\kappa^2}$  Skala für  $\epsilon = 0.01, \tilde{g} = 15, \tilde{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}, \xi = 0$ . Die IR-Massenskala hat den Wert  $\kappa = \frac{\tilde{B}(0)}{\tilde{A}(0)} \approx 1$ .

IR-Bereich auf einer  $\tilde{p}^2$ -Skala und jenseits des IR-Bereichs auf einer logarithmischen Skala. Wie Abbildung 3.2 am Beispiel der Funktion  $\tilde{B}$  verdeutlicht existiert dieser Knick auf der natürlichen  $\tilde{p}^2$ -Skala des IR-Bereichs nicht.

Insgesamt zeigen unsere Lösungen eine starke Übereinstimmung mit den Leading-Log-Formeln, die mit auf 1-Loop-Störungsrechnung basierenden Renormierungsgruppenmethoden gewonnen werden können. Im UV-Bereich sind unsere Lösungen sogar identisch mit den perturbativen. Daraus schließen wir, daß nichtperturbative Effekte, die mit Renormierungsgruppenmethoden nicht erfaßt werden, in unseren Lösungen für  $\tilde{m} > 0$  quantitativ unterdrückt sind.

Die hier diskutierten Lösungen sind alle in der die Eichinvarianz minimal brechenden Landau-Eichung berechnet worden. Um einen Eindruck vom Einfluß des Eichparameters  $\xi$  auf die Lösung zu bekommen, betrachten wir Abbildung 3.3. Hier werden die Lösungen aus Abbildung 3.1 mit den entsprechenden Lösungen bei  $\xi = 1$  verglichen. Bei allen drei Funktionen sind starke Abweichungen zu den Lösungen bei  $\xi = 0$  zu beobachten. Die  $\xi$ -Abhängigkeit der Vakuumpolarisation, die in der vollen QED nicht von  $\xi$  abhängen darf [LA 86], ist ein Hinweis auf eine stärkere Verletzung der Ward-Identitäten bei  $\xi = 1$ .

Der nächste Schritt besteht in der Diskussion der renormierten Lösungen. Dazu definieren wir zunächst ein Renormierungsverfahren.

## 3.2 Renormierung

Wir verwenden ein multiplikatives Renormierungsverfahren, bei dem die beiden Felder  $\Psi, A^\mu$  und Parameter  $m, g, \xi$  mit zahlenwertigen Renormierungs-constanten umskaliert werden. Diese fünf Konstanten werden durch das Off-Shell-Renormierungsschema definiert.

### Die multiplikative Renormierung

Der Zusammenhang zwischen nackten und renormierten Größen wird durch die multiplikativen Renormierungskonstanten hergestellt:

$$m = Z_m m_r \quad (3.1a)$$

$$\tilde{g} = Z_g g_r \quad (3.1b)$$

$$\xi = Z_\xi \xi_r \quad (3.1c)$$

$$\Psi = Z_2^{\frac{1}{2}} \Psi_r \quad (3.1d)$$

$$A^\mu = Z_3^{\frac{1}{2}} A_r^\mu \quad (3.1e)$$

Von den drei renormierten Parametern sind  $g_r, \xi_r$  bereits dimensionslos. Eine dimensionslose renormierte Masse definieren wir mit der gleichen Skala

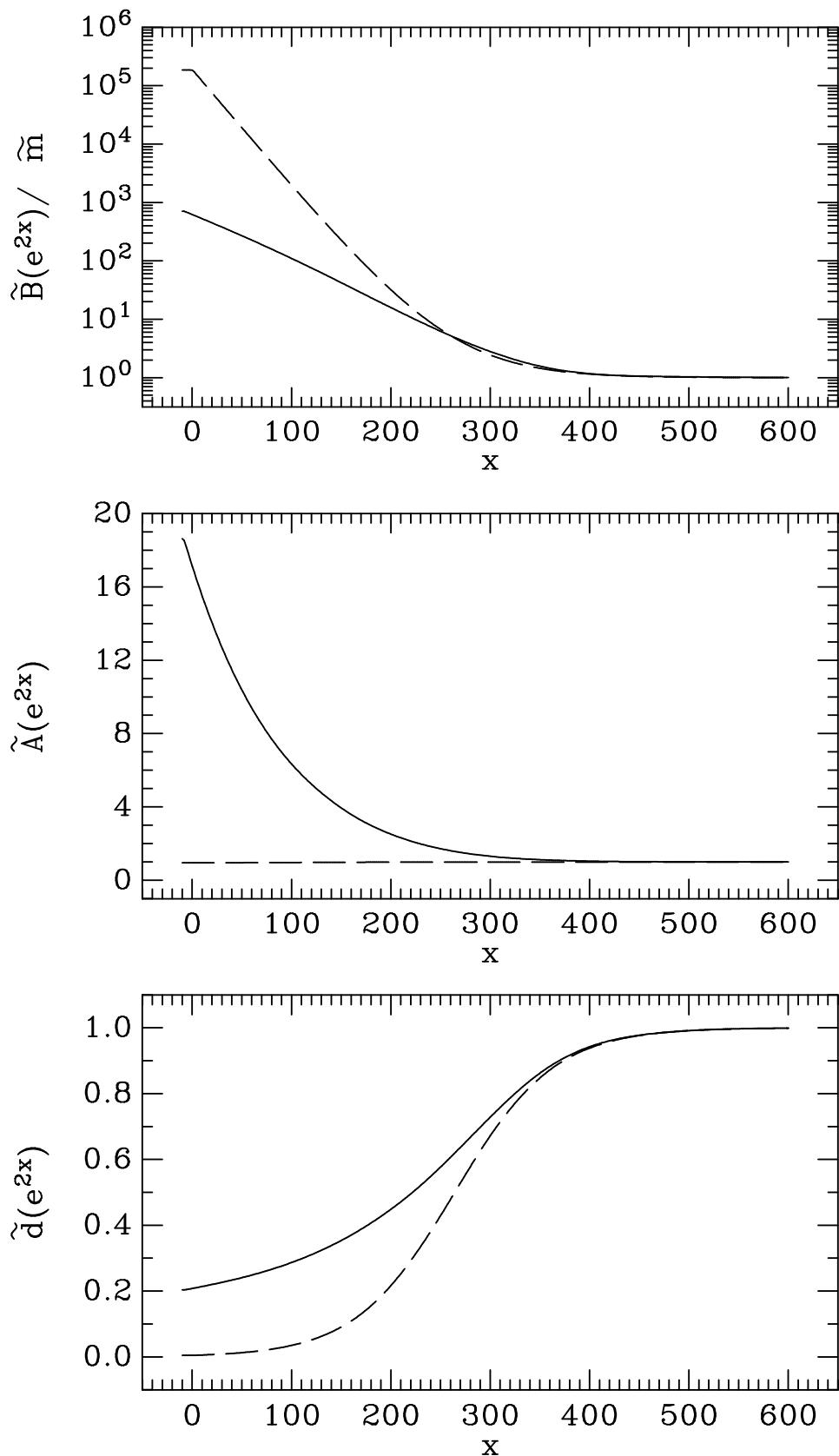


Abbildung 3.3: Vergleich der nackten invarianten Funktionen für zwei verschiedene Eichungen. Die durchgezogene Linie zeigt die Funktionen bei  $\xi = 1$  und die gestrichelte Linie bei  $\xi = 0$ .  
 Parameter:  $\epsilon = 0.01$ ,  $\tilde{g} = 15$ ,  $\tilde{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}$

wie bei der nackten Masse:

$$\tilde{m}_r = \frac{m_r}{\nu} \quad (3.2)$$

Die invarianten Funktionen renormieren sich gemäß:

$$A(p^2, m, g, \xi) = Z_2^{-1}(\mu, m_r, g_r, \xi_r) A_r(p^2, \mu, m_r, g_r, \xi_r) \quad (3.3a)$$

$$B(p^2, m, g, \xi) = Z_2^{-1}(\mu, m_r, g_r, \xi_r) B_r(p^2, \mu, m_r, g_r, \xi_r) \quad (3.3b)$$

$$d(p^2, m, g, \xi) = Z_3(\mu, m_r, g_r, \xi_r) d_r(p^2, \mu, m_r, g_r, \xi_r) \quad (3.3c)$$

Wir führen bereits an dieser Stelle die Renormierungsskala  $\mu$ , deren Definition bei der Festlegung des Renormierungsschemas gegeben wird, ein.

Der Vertex wird mit

$$Z_1 = Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} Z_g \quad (3.4)$$

gemäß

$$V^\mu = Z_1^{-1} V_r^\mu \quad (3.5)$$

renormiert.

Diese fünf Renormierungskonstanten werden durch die Forderung, die Divergenzen der Theorie zu beseitigen, in ihren endlichen Teilen nicht eindeutig festgelegt. Um eine vollständige Definition der Konstanten zu erhalten, benötigen wir noch fünf Bedingungen. Zwei davon ergeben sich aus den Ward-Identitäten für den Photonpropagator und den Vertex:

$$Z_\xi = Z_3 \quad (3.6)$$

$$Z_1 = Z_2 \quad (3.7)$$

In der Leiternäherung sind im allgemeinen beide Ward-Identitäten gebrochen. Wie in Kapitel 1.3 beschrieben fordern wir die Einhaltung der Photon-Ward-Identität, indem der Longitudinalteil der Selbstenergie auf Null gesetzt wird. Die Brechung der Vertex-Ward-Identität bleibt bestehen, so daß Gl.(3.7) nicht gilt. Da der Vertex in der Leiternäherung nicht divergent ist wird seine Renormierung durch

$$Z_1 = 1 \quad (3.8)$$

definiert. Die Konstante  $Z_2$  kann in ihrer Abweichung von 1 als Maß für die Brechung der Vertex-Ward-Identität betrachtet werden.

Die Kopplungsrenormierung kann damit durch die Feldrenormierungs- konstanten ausgedrückt werden:

$$Z_g^2 = Z_2^{-2} Z_3^{-1} \quad (3.9)$$

Mit Gl.(3.6) und Gl.(3.8) haben wir zwei Bedingungen zur Festlegung der Renormierungskonstanten. Die drei noch fehlenden Bedingungen werden durch das Renormierungsschema gegeben.

### Das Off-Shell-Renormierungsschema

Im Off-Shell-Schema besteht die Renormierungsbedingung darin, daß die renormierten Greenschen Funktionen an einem vorgegebenen Renormierungspunkt  $p^2 = \mu^2$  mit ihrer nullten Ordnung Störungstheorie übereinstimmen sollen. An dieser Stelle kommt eine neue Massenskala, die Renormierungsskala  $\mu$ , in die Theorie. Da sie in der nackten Theorie nicht existiert, dürfen physikalische Vorhersagen nicht von ihr abhängen. Im folgenden setzen wir unsere Skala  $\nu$ , mit der wir die SD-Gl. dimensionslos gemacht haben, auf die Renormierungsskala <sup>3</sup>  $\mu$ . Dies hat zur Konsequenz, daß der Renormierungspunkt in dimensionslosen Koordinaten bei  $\tilde{p}^2 = 1$  liegt. In der Leiternäherung ergeben sich für die invarianten Funktionen drei Bedingungen:

$$A_r(p^2 = \mu^2, \mu, m_r, g_r, \xi_r) = 1 \quad (3.10a)$$

$$B_r(p^2 = \mu^2, \mu, m_r, g_r, \xi_r) = m_r \quad (3.10b)$$

$$d_r(p^2 = \mu^2, \mu, m_r, g_r, \xi_r) = 1 \quad (3.10c)$$

Da das numerische Lösungsverfahren von nackten dimensionslosen Parametern abhängende, nackte invariante Funktionen berechnet, müssen als nächstes die renormierten Größen durch die nackten dimensionslosen Größen ausgedrückt werden.

Zu jedem Satz von nackten Parametern, zu dem es eine nackte Lösung gibt, existiert auch ein Satz von renormierten Parametern:

$$m_r = m_r(\mu, m, g, \xi) \quad (3.11a)$$

$$g_r = g_r(\mu, m, g, \xi) \quad (3.11b)$$

$$\xi_r = \xi_r(\mu, m, g, \xi) \quad (3.11c)$$

Mit diesen Funktionen werden die Renormierungskonstanten durch nackte Parameter ausgedrückt:

$$\hat{Z}_j(\mu, m, g, \xi) = Z_j(\mu, m_r, g_r, \xi_r) \quad \text{mit } j \in \{2, 3, g, m, \xi\} \quad (3.12)$$

Mit Gl.(3.10) und Gl.(3.3), in denen wir auch die renormierten Parameter mit Gl.(3.11) durch die nackten ausdrücken, erhalten wir die Renormierungskonstanten aus den nackten invarianten Funktionen:

$$\hat{Z}_2(\mu, m, g, \xi) = A^{-1}(p^2 = \mu^2, m, g, \xi) \quad (3.13a)$$

$$\hat{Z}_3(\mu, m, g, \xi) = d(p^2 = \mu^2, m, g, \xi) \quad (3.13b)$$

$$\hat{Z}_m(\mu, m, g, \xi) = m \frac{A(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)}{B(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)} \quad (3.13c)$$

$$\hat{Z}_g^2(\mu, m, g, \xi) = \frac{A^2(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)}{d(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)} \quad (3.13d)$$

---

<sup>3</sup>Dies ist erlaubt, weil  $\nu$  eine beliebige von außen eingeführte Skala ist, von der kein physikalisches Resultat abhängen darf.

Mit diesen von nackten Parametern abhängenden Renormierungskonstanten kann Gl.(3.11) durch invariante Funktionen ausgedrückt werden:

$$m_r(\mu, m, g, \xi) = \frac{B(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)}{A(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)} \quad (3.14a)$$

$$g_r^2(\mu, m, g, \xi) = \tilde{g}^2 \frac{d(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)}{A^2(p^2 = \mu^2, m, g, \xi)} \quad (3.14b)$$

$$\xi_r(\mu, m, g, \xi) = \xi d^{-1}(p^2 = \mu^2, m, g, \xi) \quad (3.14c)$$

Mit der Umkehrung dieser Gleichungen können die renormierten invarianten Funktionen und die Renormierungskonstanten in Abhängigkeit der renormierten Parameter angegeben werden.

Um die Verbindung zu den numerisch berechneten Funktionen herzustellen, müssen die Renormierungskonstanten und die renormierten Parameter noch dimensionslos formuliert werden:

$$\tilde{Z}_2(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = \hat{Z}_2(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi) = \tilde{A}^{-1}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (3.15a)$$

$$\tilde{Z}_3(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = \hat{Z}_3(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi) = \tilde{d}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (3.15b)$$

$$\tilde{Z}_m(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = \hat{Z}_m(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi) = \tilde{m} \frac{\tilde{A}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{B}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} \quad (3.15c)$$

$$\tilde{Z}_g^2(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = \hat{Z}_g^2(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi) = \frac{\tilde{A}^2(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{d}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} \quad (3.15d)$$

und die renormierten Parameter:

$$\tilde{m}_r(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = \frac{m_r(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi)}{\mu} = \frac{\tilde{B}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{A}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} \quad (3.16a)$$

$$\tilde{g}_r^2(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = g_r^2(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi) = \tilde{g}^2 \frac{\tilde{d}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{A}^2(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} \quad (3.16b)$$

$$\tilde{\xi}_r(\tilde{m}, \tilde{g}, \xi) = \xi_r(\mu, \tilde{m}\mu, \tilde{g}\mu^\epsilon, \xi) = \xi \tilde{d}^{-1}(1, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi) \quad (3.16c)$$

Die Berechnung einer renormierten Greenschen Funktion zu vorgegebenem renormierten Parameter  $g_r, m_r, \xi_r$  würde die Kenntnis der Umkehrung von Gl.(3.16) erfordern. Dazu muß die numerische Lösung im gesamten Parameterraum berechnet werden. Um diesen in Landau-Eichung 2-dimensionalen Parameterraum um eine Dimension zu verringern, kann in unserem Lösungsverfahren die nackte Masse nach jedem Iterationsschritt so nachgeführt werden, daß die renormierte Masse einen vorgegebenen Wert annimmt. Bei der Kopplung ist eine ähnliche Vorgehensweise denkbar, führt aber zu Konvergenzproblemen bei der Iteration. Wir berechnen daher die Lösungen für eine Reihe nackter Kopplungen  $0 < \tilde{g} < 15$  und lesen mit Gl.(3.16b) die entsprechenden renormierten Kopplungen ab.

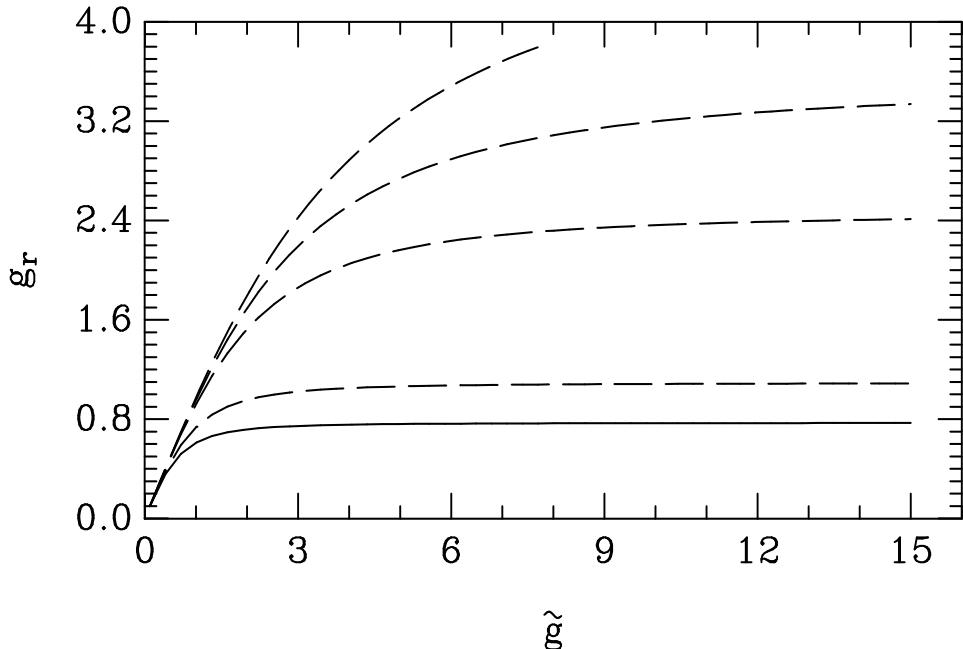


Abbildung 3.4: Renormierte Kopplung  $g_r$  gegen nackte Kopplung  $\tilde{g}$  für  $\tilde{m}_r = 1$  und  $\xi_r = 0$ . Durchgezogene Linie für  $\epsilon = 0.005$ , gestrichelte Linien für  $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$

### 3.3 Trivialität

Die unrenormierte QED in Landau-Eichung hängt von zwei Parametern  $g, m$  ab, für die beliebige reelle Werte vorgegeben werden können. Es ist interessant zu untersuchen, welche Werte die renormierten Parameter  $g_r, m_r$  in der renormierten QED annehmen dürfen, so daß Lösungen der SD-Gl. existieren. Zur Klärung dieser Frage müssen die  $\tilde{g}_r, \tilde{m}_r$  bestimmt werden, zu denen es bei vorgegebenen  $\epsilon$  Werte für  $\tilde{g}, \tilde{m}$  gibt, die Gl.(3.16) lösen. Für verschiedene  $\epsilon$  geben wir  $\tilde{m}_r, \tilde{g}$  vor und berechnen  $\tilde{g}_r$  mit Gl.(3.16b). Die nackte Masse  $\tilde{m}$  wird in jedem Iterationsschritt neu bestimmt, bis die renormierte Masse  $\tilde{m}_r$  stabil auf dem vorgegebenen Wert bleibt.

In Abbildung 3.4, 3.5 ist für verschiedene  $\epsilon$  die renormierte Kopplung gegen die nackte aufgetragen. Bei den Kurven zu kleineren  $\epsilon$ -Werten ist deutlich sichtbar, daß es für die renormierte Kopplung eine Grenzkopplung gibt, die von  $\tilde{g}_r$  nicht überschritten werden kann. Diese  $\epsilon$ -abhängige, maximal mögliche renormierte Kopplung nennen wir  $g_{max}(\epsilon)$ . Mit kleiner werdendem  $\epsilon$  wird auch  $g_{max}(\epsilon)$  kleiner. Dieser Effekt hängt qualitativ nicht von der renormierten Masse ab. Bei großem  $\tilde{m}_r$  und nicht zu kleinem  $\epsilon$  ist die Grenzkopplung größer als bei kleinerem  $\tilde{m}_r$ . Bei klein werdendem  $\epsilon$  laufen die zu unterschiedlichem  $\tilde{m}_r$  gehörenden Grenzkopplungen jedoch aufeinander zu.

Wir haben in Kapitel 3.1 gesehen, daß die invariante Funktion  $\tilde{A}(\tilde{p}^2)$  und der Photonpropagator sehr gut durch die Leading-Log-Formeln Gl.(B.6)

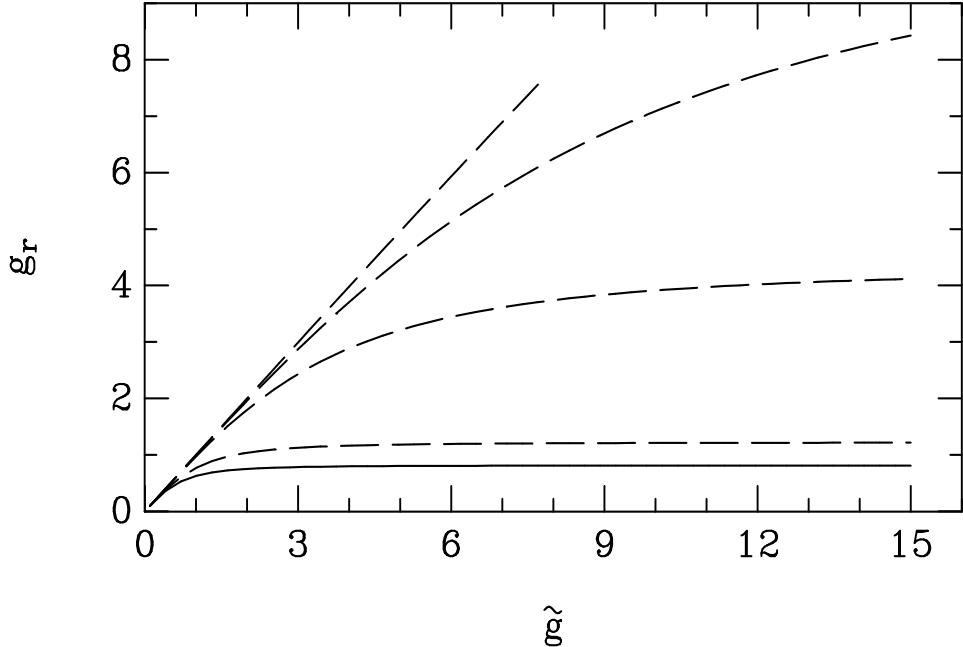


Abbildung 3.5: Renormierte Kopplung  $g_r$  gegen nackte Kopplung  $\tilde{g}$  für  $\tilde{m}_r = 10^5$  und  $\xi_r = 0$ . Durchgezogene Linie für  $\epsilon = 0.005$ , gestrichelte Linien für  $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$

approximiert werden. Mit diesen Formeln und Gl.(3.16b) erhalten wir einen einfachen analytischen Ausdruck, der uns die renormierte Kopplung in Abhängigkeit der nackten angibt:

$$\tilde{g}_r^2 = \tilde{g}^2 \frac{1}{1 + \frac{\beta_1^L(\epsilon)}{\epsilon} \frac{\tilde{g}^2}{(1+\kappa^2)^\epsilon}} \quad (3.17)$$

An dieser Formel können wir studieren, wie sich die Grenzkopplung für kleine  $\epsilon$  verhält:

$$\tilde{g}_r^2 = \frac{\epsilon}{\beta_1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.18)$$

$$g_{max}(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \sqrt{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \beta_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} \quad (3.19)$$

Im Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  kann die renormierte Kopplung nur den Wert Null annehmen. Dieses Phänomen, in dem durch den Renormierungsprozeß die renormierte Kopplung bei Abschalten des Regularisierungsparameters auf den Wert Null geführt werden muß, wird als Trivialität der Theorie bezeichnet. In Abbildung 3.6 wird unsere analytische Näherung mit den numerischen Werten für  $g_{max}(\epsilon)$  verglichen. Für  $\tilde{m}_r = 1$  sind die numerischen Werte mit dieser Approximation nahezu identisch. Bei der großen renormierten Masse gibt es starke Abweichungen für größere  $\epsilon$ , die damit zusammenhängen, daß die Leading-Log-Formeln in einem masselosen Schema

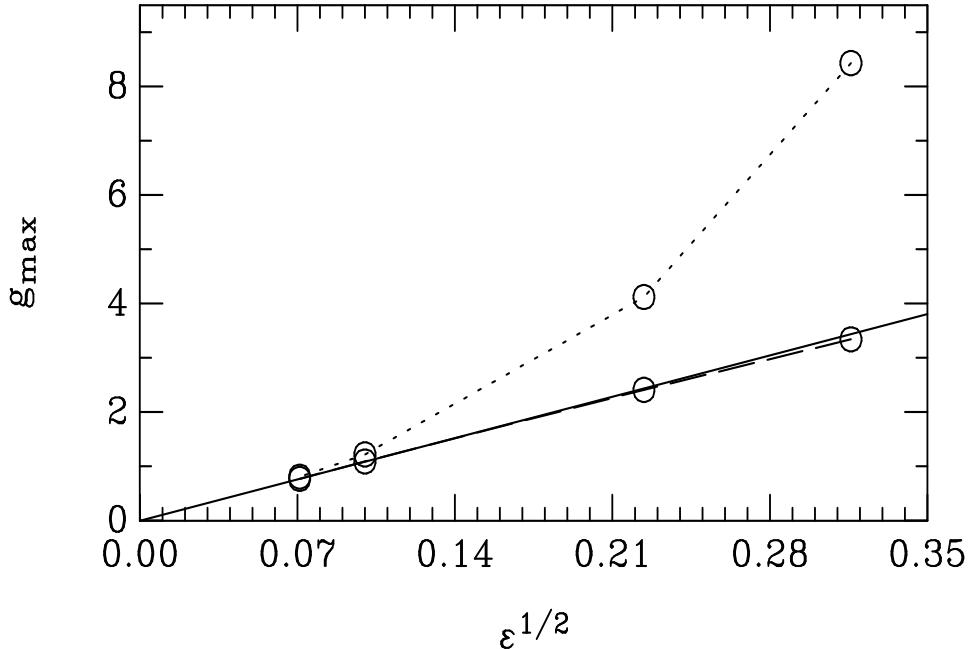


Abbildung 3.6: Maximal mögliche renormierte Kopplung  $g_{max}$  gegen  $\sqrt{\epsilon}$  für  $\tilde{m}_r = 1$  gestrichelte Linie (mit durchgezogener Linie identisch) und  $\tilde{m}_r = 10^5$  gepunktete Linie. Die durchgezogene Linie zeigt das RG. Resultat:  $g_{max} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta_1}}$ .

gewonnen sind. Diese Abweichungen verschwinden jedoch bei klein werdendem  $\epsilon$ . Insgesamt ist dieser Plot ein starker Hinweis darauf, daß die Grenzkopplung für  $\epsilon \rightarrow 0$  durch Gl.(3.19) gegeben ist.

Diese Trivialität bedeutet, daß die renormierte Kopplung für  $\epsilon > 0$  als Parameter nur in einem kleinen Intervall vorgegeben werden kann und im Kontinuumslimes  $\epsilon \rightarrow 0$  nicht mehr als Parameter existiert, da sie auch auf Null geführt werden muß. Der Renormierungsprozeß selbst eliminiert einen Parameter der QED. Wie Gl.(3.16b) zeigt, ist für dieses Phänomen der Photonpropagator verantwortlich<sup>4</sup>. Sein Verschwinden für  $\epsilon \rightarrow 0$  an einem beliebigen, fest vorgegebenen Impuls legt im wesentlichen die Grenzkopplung fest.

Diese Trivialität wird auch bei [RA 91] im Rahmen einer Cut-Off-Rechnung gefunden. Dort kann bei festgehaltener renormierter Masse der UV-Cut-off nur dann gegen  $\infty$  geführt werden, wenn die renormierte Kopplung dabei gegen Null geht.

Eine Konsequenz der Trivialität ist, daß die renormierte Störungstheorie mit kleiner werdendem  $\epsilon$  aufgrund der ebenfalls kleiner werdenden renor-

<sup>4</sup>Die invariante Funktion  $\tilde{A}$  trägt nicht zur Trivialität bei, weil sie bei Wahrung der Ward-Identitäten in Landau-Eichung konstant ist. Die durch die Brechung der Eichinvarianz verursachte Abweichung der Funktion  $\tilde{A}$  von eins ist viel zu gering, um die Trivialität zu erzeugen.

mierten Kopplung immer besser wird.

### 3.4 Die renormierten Lösungen

Am Beispiel der in Abbildung 3.1 gezeigten nackten invarianten Funktionen zeigen wir den Einfluß der Renormierung.

Bei der Berechnung dieser Lösungen sind die renormierte Masse und die nackte Kopplung mit  $\tilde{m}_r = 1$  und  $\tilde{g} = 15$  vorgegeben. Die nackte Masse wird im Iterationsprozeß mitbestimmt und stabilisiert sich auf  $\tilde{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}$ . Für die renormierte Kopplung erhalten wir mit Gl.(3.16b) einen Wert von  $g_r = 1.087$ .

Die renormierten invarianten Funktionen sind in Abbildung 3.7 dargestellt. Wir bemerken dazu:

- Qualitativ ändert sich die Form der renormierten Kurven im Vergleich zu den nackten nicht. Dies liegt daran, daß unser multiplikatives Renormierungsverfahren lediglich in einer Umskalierung der invarianten Funktionen und der Parameter besteht. Dadurch unterscheiden sich die renormierten invarianten Funktionen von den nackten nur in der Skala der Funktionswerte und in dem Punkt auf der Impulsachse, in dem die Lösung mit der nicht bezüglich  $g$  entwickelten 1-Loop perturbativen Lösung übereinstimmt.
- Aufgrund der Umskalierung der  $y$ -Achse und durch die Renormierungsbedingung des Off-Shell-Schemas ist der bei klein werdendem  $\epsilon$  divergenzartige Anstieg der Funktion  $\tilde{B}$  im IR-Bereich zu einem Abfall nach Null im UV-Bereich geworden. Umgekehrt ist durch den Renormierungsprozeß bei  $\tilde{A}, \tilde{d}$  aus dem Abfall im IR-Bereich ein Anstieg im UV-Bereich geworden.
- Das asymptotische UV-Verhalten der Lösungen unterscheidet sich in diesem Renormierungsverfahren stark von der Asymptotik der nicht bezüglich  $g$  entwickelten perturbativen 1-Loop-Funktionen. Dies liegt in der Natur des Off-Shell-Schemas, in dem beide Funktionen so skaliert werden, daß sie im Renormierungspunkt, der hier im IR-Bereich liegt, mit dem entsprechenden Wert der nullten Ordnung Störungstheorie identisch sind. Wenn der Renormierungspunkt im UV-Limes liegt, würden sich die renormierten Funktionen nicht von den nackten unterscheiden, weil aufgrund der perturbativen Asymptotik unserer Lösungen die Renormierungsbedingung im UV-Punkt bereits von den nackten Funktionen erfüllt wird.
- Auf den ersten Blick mag es verwundern, daß bei der Funktion  $\tilde{d}_r$  die Differenz dieser beiden Kurven im Vergleich zu den entsprechenden unrenormierten Funktionen, die grafisch nicht zu unterscheiden sind, recht groß aussieht. Diese Differenz von ca 5% ist tatsächlich auch bei den nackten Funktionen vorhanden, dort allerdings im IR-Bereich. Da  $\tilde{d}(0) \approx 4.7 \cdot 10^{-3}$ , kann sie auf der in Abbildung 3.1 verwendeten Skala nicht aufgelöst werden.

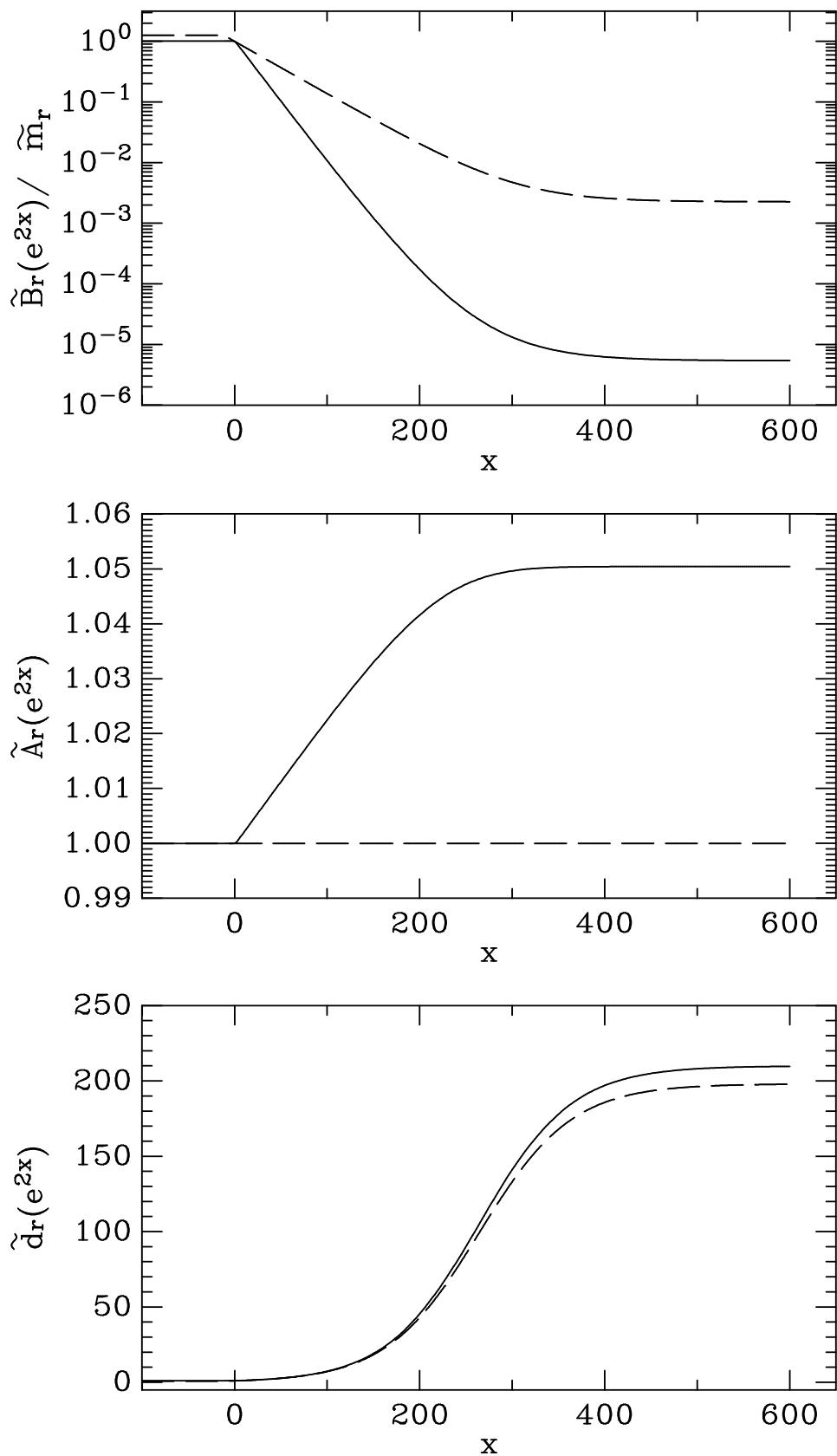


Abbildung 3.7: Renormierte invariante Funktionen (durchgezogene Linie), und 1-Loop-Funktionen ohne Entwicklung nach  $g$  (gestrichelte Linie) für  $g_r = 1.0875, \tilde{m}_r = 1, \xi = 0, \epsilon = 0.01$ . Der Renormierungspunkt liegt bei  $\tilde{p} = 1$

- Qualitativ stimmen die in dimensioneller Regularisierung berechneten Lösungen mit denen von Rakow [RA 91] in Cut-Off-Regularisierung berechneten Lösungen überein.

In der renormierten Theorie sind neben den renormierten invarianten Funktionen auch die Renormierungskonstanten selbst interessante Größen. Abbildung 3.8 zeigt gegen die renormierte Kopplung  $g_r$  aufgetragene Renormierungskonstanten  $Z_m, Z_2, Z_3 = Z_\xi$  für eine Reihe von  $\epsilon$ -Werten. Bei den Kurven für  $\epsilon < 0.2$  gehören die Endpunkte zur nackten Kopplung  $\tilde{g} = 15$ , und bei  $\epsilon = 0.2$  hat die nackte Kopplung am Endpunkt einen Wert von  $\tilde{g} = 7.7$ . An diesen Bildern zeigt sich:

- Der Definitionsbereich der Renormierungskonstanten wird durch die aus der Trivialität resultierende  $\epsilon$ -abhängige Grenzkopplung eingeschränkt.
- Die Massenrenormierung zeigt, daß die nackte Masse gegen Null geführt werden muß, wenn die renormierte Masse festgehalten wird und  $g_r$  gegen die Grenzkopplung  $g_{max}(\epsilon)$  geht.
- Die Abweichung der Renormierungskonstanten  $Z_2$  von 1 ist ein Maß für die Verletzung der Vertex-Ward-Identität. In den Parameterbereichen, in denen unser Lösungsverfahren gut arbeitet, hat  $Z_2$  die Größenordnung 1. Die größten Werte hat  $Z_2$  im Bereich der Grenzkopplung.
- Die Photonrenormierung  $Z_3$  bestimmt nach Gl.(3.9), von schwachen Eichinvarianzverletzungen abgesehen, im wesentlichen die Kopplungsrenormierung und zeigt mit  $Z_3 \approx \frac{g_r^2}{\tilde{g}^2}$  noch einmal das Vorhandensein der Grenzkopplung, gegen die  $g_r$  läuft, wenn  $\tilde{g}$  groß wird.

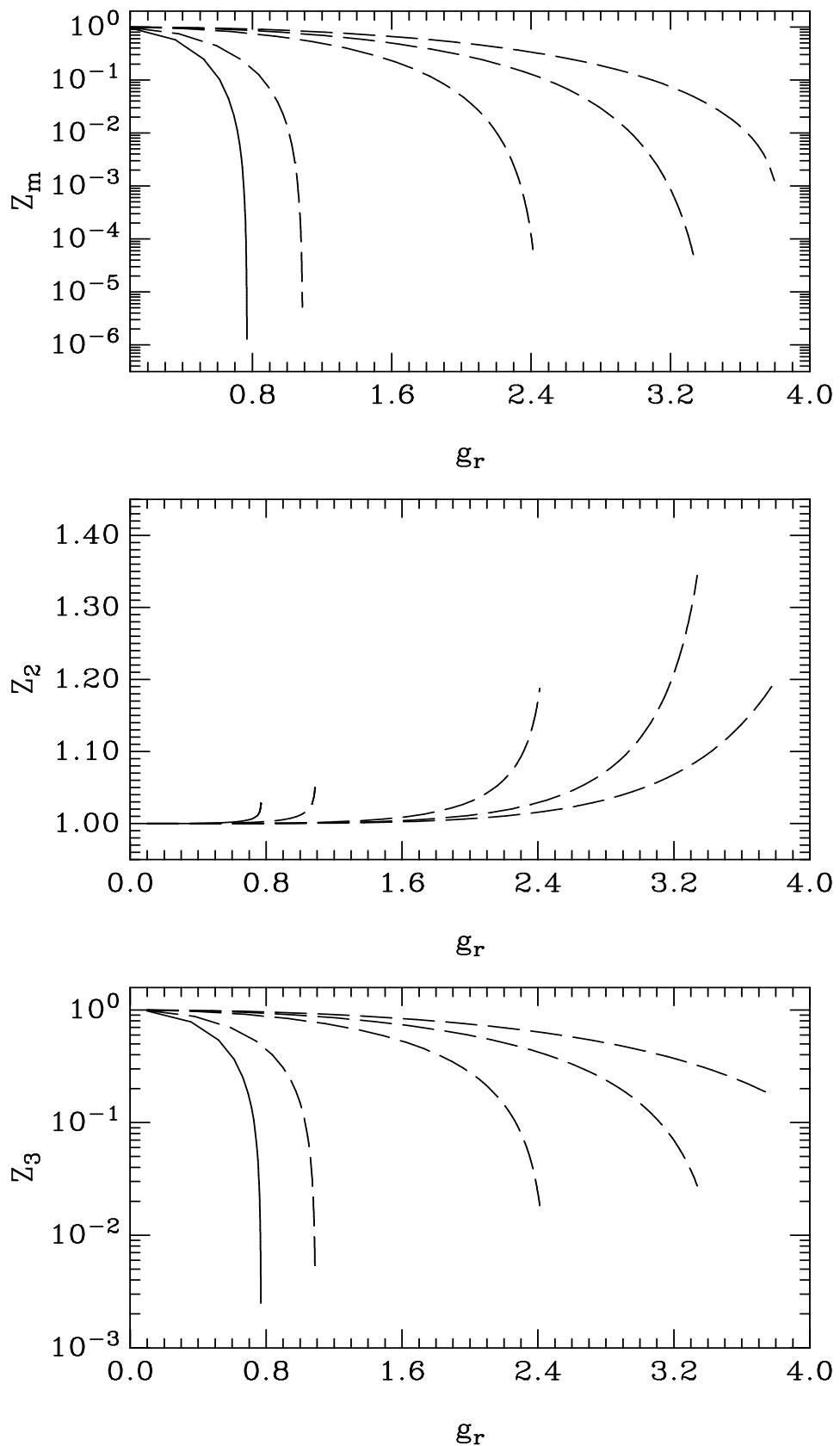


Abbildung 3.8: Renormierungskonstanten  $Z_m, Z_2, Z_3$  gegen renormierte Kopplung  $g_r$  für  $\tilde{m}_r = 1$  und  $\xi_r = 0$ . Durchgezogene Linie für  $\epsilon = 0.005$ , gestrichelte Linien für  $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$

### 3.5 Das Verhalten für $d \rightarrow 4$

Um das Verhalten der renormierten invarianten Funktionen beim Abschalten des Regularisierungsparameters  $\epsilon$  zu studieren, plotten wir diese Funktionen für eine Reihe von  $\epsilon$ -Werten. In Abbildung 3.9 sehen wir, daß der Impulsbereich, auf dem die invarianten Funktionen übereinstimmen, mit kleiner werdendem  $\epsilon$  immer größer wird. Vom IR-Bereich ausgehend stabilisiert sich die Lösung zu immer größeren Impulsen hin. Dies ist ähnlich wie in einer Cut-Off-Rechnung, wo sich die invarianten Funktionen im Bereich vor dem Impuls-Cut-Off bei Vergrößerung des Cut-Off nicht mehr ändern.

Für  $\epsilon \neq 0$  scheinen die Kurven für klein werdende  $\epsilon$  zu konvergieren. Es ist jedoch nicht klar, ob der Grenzübergang nach  $\epsilon = 0$  stetig verläuft. Es gibt einige Punkte, die darauf hinweisen, daß dieser Grenzübergang unstetig sein kann.

- Unsere Asymptotik ist mit ihren  $\bar{p}^{-2\epsilon}$ -Potenzen eine für  $\epsilon > 0$  im UV-Bereich abfallende Funktion, die mit ihren bei  $\epsilon = 0$  divergenten Koeffizienten in einer Entwicklung um  $\epsilon = 0$  zu einer Summe von im UV-Bereich ansteigenden Logarithmen wird.
- Die asymptotische Freiheit der nackten Theorie verschwindet für  $\epsilon = 0$ , und die durch die dimensionelle Regularisierung eingebrachte Massenskala  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  ist nicht mehr definiert.

Uns ist kein Regularisierungsverfahren bekannt, das die Stetigkeit der Greenschen Funktionen am Kontinuumsgrenzwert des Regularisierungsparameters zeigen kann, wenn die Greenschen Funktionen nicht analytisch bekannt sind, so daß der Kontinuumslimes explizit ausführbar ist.

### 3.6 Renormierungsgruppe

Bei jedem Renormierungsprozeß wird eine neue Massenskala in die Theorie gebracht. Im Off-Shell Schema ist dies der Renormierungspunkt  $\mu$ . Da diese Skala in der unrenormierten Theorie nicht existiert, hängen die nackten Größen nicht von ihr ab. Die Abhängigkeit der renormierten Größen von  $\mu$  kann mit der Renormierungsgruppe angegeben werden und wird bei den renormierten Parametern durch die Renormierungsgruppenfunktionen beschrieben. Diesen Renormierungsgruppenfunktionen kommt in der Störungstheorie eine besondere Bedeutung zu, weil sie nach  $\epsilon = 0$  endlich fortgesetzt werden können. Sie lassen sich als Ableitungen von Renormierungskonstanten schreiben und mit Gl.(3.13) durch die nackten invarianten Funktionen ausdrücken.

Die  $\beta$ -Funktion

$$\beta(\mu, m_r, g_r, \xi_r) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_r(\mu, m, g, \xi) \quad (3.20)$$

beschreibt die  $\mu$ -Abhängigkeit der renormierten Kopplung. Bei der Ableitung nach  $\mu$  müssen die nackten dimensionsbehafteten Parameter  $g, m, \xi$  als

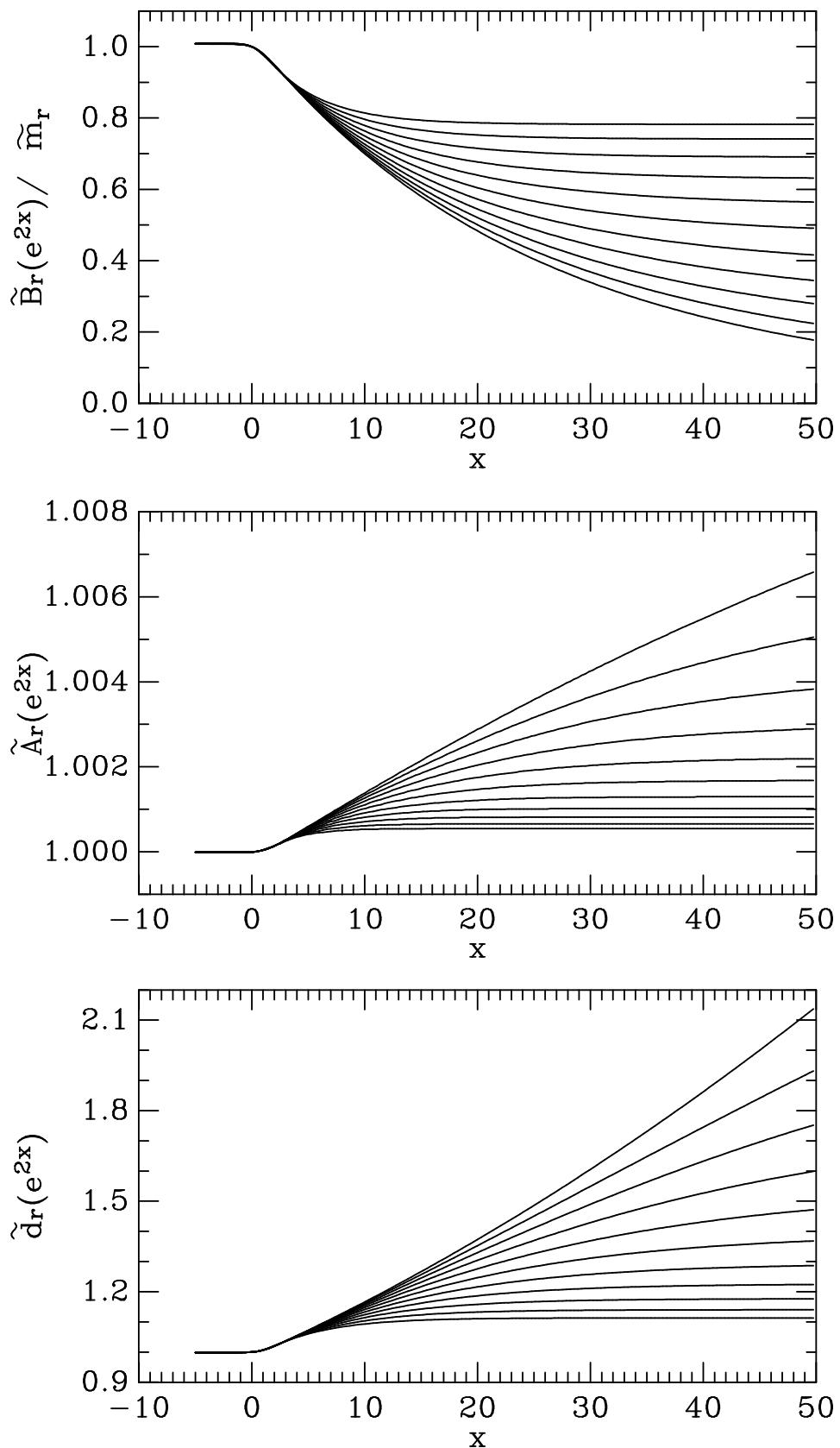


Abbildung 3.9: Renormierte invariante Funktionen für  $\tilde{g}_r = 1$ ,  $\tilde{m}_r = 1$ ,  $\xi = 0$ .  $\epsilon = 10^{-(1+\frac{n}{10})}$  mit  $n = 0, 1, \dots, 10$ . Bei  $\tilde{A}_r, \tilde{d}_r$  gehört die obere und bei  $\tilde{B}_r$  die untere Kurve zu  $\epsilon = 0.01$

$\mu$ -unabhängig betrachtet werden, da in der nackten Theorie keine Renormierungsskala existiert. Nach Ausführung der Ableitung sind die nackten Parameter mit der Umkehrung von Gl.(3.11) durch die renormierten auszudrücken. Durch die Renormierungskonstante  $Z_g$  ausgedrückt lautet die  $\beta$ -Funktion:

$$\beta(\mu, m_r, g_r, \xi_r) = -g_r[\epsilon + \beta_1(\mu, m_r, g_r, \xi_r)] \quad (3.21)$$

$$\beta_1(\mu, m_r, g_r, \xi_r) = \frac{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \hat{Z}_g(\mu, m, g, \xi)}{\hat{Z}_g(\mu, m, g, \xi)} \quad (3.22)$$

Mit Gl.(3.13d) drücken wir  $\beta_1$  durch invariante Funktionen aus:

$$\beta_1(\mu, m_r, g_r, \xi_r) = \left[ \frac{2p^2 \frac{d}{dp^2} A(p^2, m, g, \xi)}{A(p^2, m, g, \xi)} - \frac{1}{2} \frac{2p^2 \frac{d}{dp^2} d(p^2, m, g, \xi)}{d(p^2, m, g, \xi)} \right]_{p^2=\mu^2}$$

Vollständig dimensionslos geschrieben erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1(\tilde{m}_r, g_r, \xi_r) &= \beta_1(\mu, \tilde{m}_r \mu, g_r, \xi_r) \\ &= \left[ \frac{2\tilde{p}^2 \frac{d}{d\tilde{p}^2} \tilde{A}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{A}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} - \frac{1}{2} \frac{2\tilde{p}^2 \frac{d}{d\tilde{p}^2} \tilde{d}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{d}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} \right]_{\tilde{p}^2=1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Analog erhalten wir die anomale Dimension  $\gamma_m$ , die die  $\mu$ -Abhängigkeit der renormierten Masse beschreibt:

$$\gamma_m(\mu, m_r, g_r, \xi_r) = \frac{\mu}{m_r(\mu, m, g, \xi)} \frac{\partial}{\partial \mu} m_r(\mu, m, g, \xi) \quad (3.24)$$

$$= -\frac{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \hat{Z}_m(\mu, m, g, \xi)}{\hat{Z}_m(\mu, m, g, \xi)} \quad (3.25)$$

$$\tilde{\gamma}_m(\tilde{m}_r, g_r, \xi_r) = \gamma_m(\mu, \tilde{m}_r \mu, g_r, \xi_r) \quad (3.26)$$

$$= \left[ \frac{2\tilde{p}^2 \frac{d}{d\tilde{p}^2} \tilde{B}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{B}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} - \frac{2\tilde{p}^2 \frac{d}{d\tilde{p}^2} \tilde{A}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)}{\tilde{A}(\tilde{p}^2, \tilde{m}, \tilde{g}, \xi)} \right]_{\tilde{p}^2=1}$$

Bei den Renormierungsgruppenfunktionen  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\gamma}_m$ , die für ein großes und ein kleines  $\epsilon$  in Abbildung 3.10-3.13 dargestellt sind, zeigt sich eine nur geringe Abweichung zur Störungstheorie. Mit kleiner werdendem  $\epsilon$  verschwindet diese Abweichung immer mehr und ist bei  $\epsilon = 0.005$  graphisch nicht mehr auflösbar. Dies ist auch eine Konsequenz der Trivialität, da mit kleiner werdender Grenzkopplung die Störungsrechnung immer besser wird.

Der Definitionsbereich der Renormierungsgruppenfunktionen wird aufgrund der Grenzkopplung mit kleiner werdendem  $\epsilon$  immer kleiner und reduziert sich im Kontinuumslimit auf den Punkt  $g_r = 0$ , so daß die Kopplungsabhängigkeit dieser Funktionen ihre Bedeutung verliert.

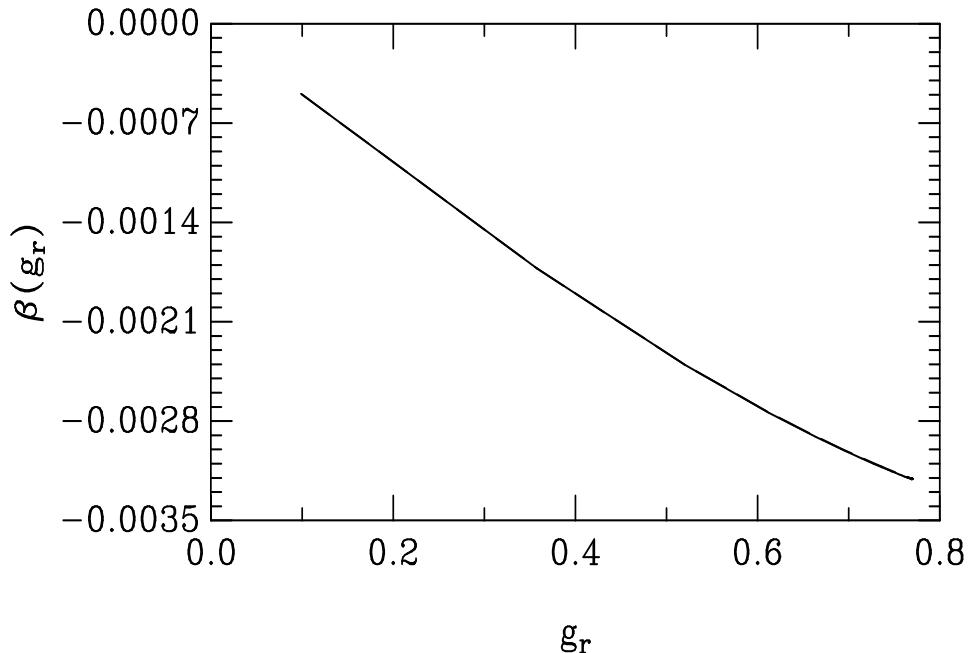


Abbildung 3.10:  $\beta$ -Funktion für  $\epsilon = 0.005$ ,  $\tilde{m}_r = 1$ ,  $\xi = 0$ . Die gestrichelte Linie ist die perturbative Funktion auf 1-Schleifen-Niveau (identisch mit der durchgezogenen Linie).

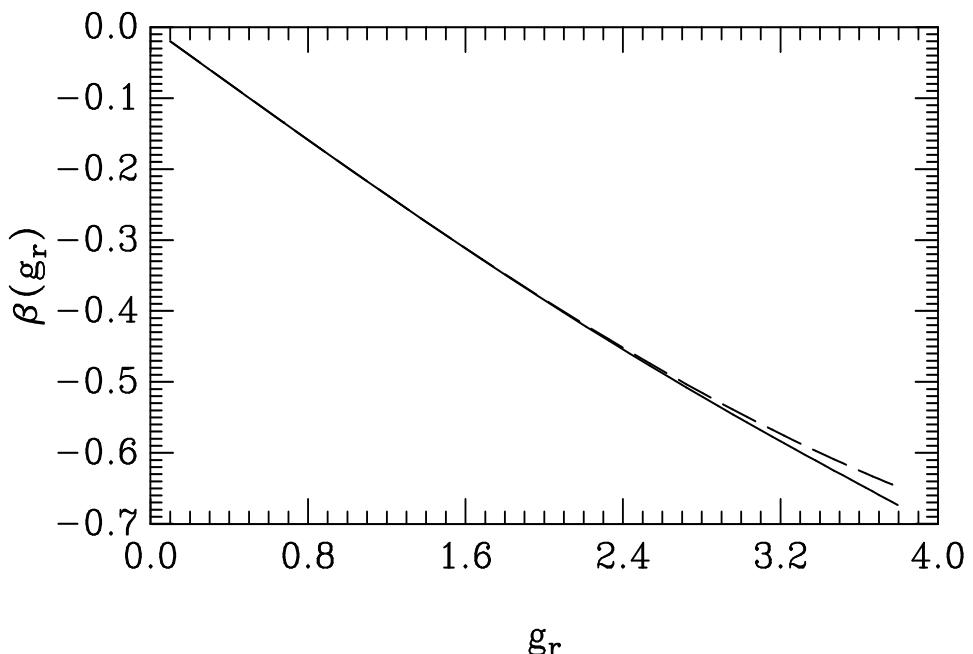


Abbildung 3.11:  $\beta$ -Funktion für  $\epsilon = 0.2$ ,  $\tilde{m}_r = 1$ ,  $\xi = 0$ . Die gestrichelte Linie ist die perturbative Funktion auf 1-Schleifen-Niveau.

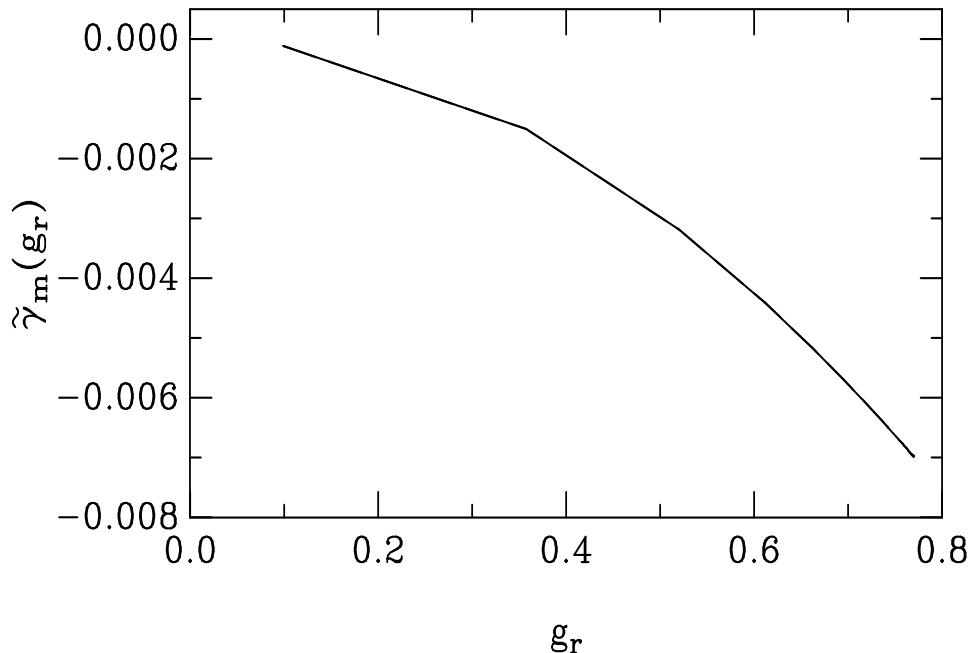


Abbildung 3.12: Anomale Dimension  $\tilde{\gamma}_m$  für  $\epsilon = 0.005, \tilde{m}_r = 1, \xi = 0$ . Die gestrichelte Linie ist die perturbative Funktion auf 1-Schleifen-Niveau (identisch mit der durchgezogenen Linie).

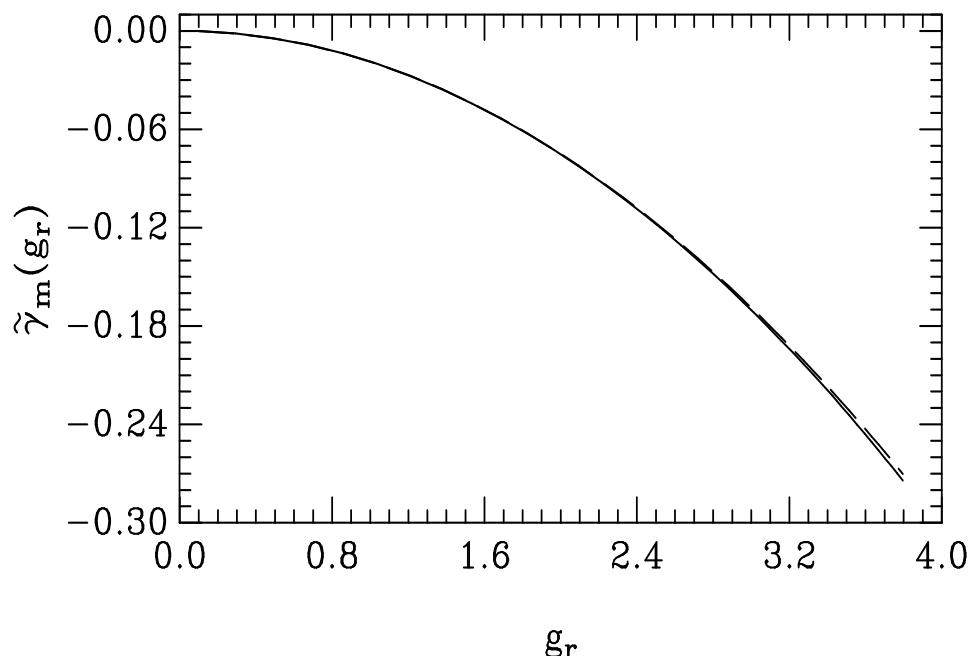


Abbildung 3.13: Anomale Dimension  $\tilde{\gamma}_m$  für  $\epsilon = 0.2, \tilde{m}_r = 1, \xi = 0$ . Die gestrichelte Linie ist die perturbative Funktion auf 1-Schleifen-Niveau.

# Kapitel 4

# Dynamische Massen

Die im letzten Kapitel diskutierten nichtperturbativen invarianten Funktionen haben große Ähnlichkeit zu den Leading-Log-Formeln, die mit auf 1-Loop-Störungstheorie basierenden Renormierungsgruppenmethoden erhalten werden können. Die Renormierungsgruppenfunktionen stehen in noch größerer Übereinstimmung mit den entsprechenden perturbativen 1-Loop-Resultaten. Aus diesen Beobachtungen schließen wir, daß bei den in Kapitel 3 diskutierten Lösungen die perturbativen Aspekte gegenüber eventuell vorhandenen nichtperturbativen Effekten dominieren. Am Beispiel der dynamischen Massenbildung ist es möglich, rein nichtperturbative Lösungen zu studieren.

Dynamische Massen sind in der invarianten Funktion  $B(p^2)$  enthalten und perturbativ nicht sichtbar, da in der Störungstheorie  $B(p^2) = 0$  bei  $m = 0$  gilt. Um diese Massen aufzuspüren, müssen wir nach nichttrivialen Lösungen  $B(p^2)$  bei  $m = 0$  suchen.

## 4.1 Die Kopplungsabhängigkeiten

Als einziger bei  $d < 4$  dimensionsbehafteter Parameter bleibt im Fall  $m = 0$  nur die Kopplung übrig. Dies ermöglicht es, alleine mit den in Kapitel 2.1 diskutierten Dimensionsbetrachtungen die vollständige Kopplungsabhängigkeit der Greenschen Funktionen anzugeben. Die Kopplungsabhängigkeit der invarianten Funktionen der Leiternäherung ist durch Gl.(2.8) gegeben.

Eine dynamische Masse  $m_d$  kann aus Dimensionsgründen nur aus einem Produkt von  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  mit einer dimensionslosen, lediglich von  $\epsilon$ -abhängigen, Funktion bestehen:

$$m_d = f(\epsilon)g^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (4.1)$$

Bei einer Cut-Off Regularisierung ist die Kopplung dimensionslos. Hier ist es nicht möglich, die Kopplungsabhängigkeit durch einfache Dimensionsbetrachtungen zu bestimmen. Die einzige Massenskala der Theorie ist der UV-Cut-Off  $\Lambda$ . Eine dynamische Masse muß in der Cut-Off-Theorie proportional zu  $\Lambda$  sein:

$$m_d = F(g)\Lambda \quad (4.2)$$

Die dimensionslose Massenfunktion hängt hier nur von der Kopplung und nicht vom Regularisierungsparameter ab.

## 4.2 Renormierung

Die Grundidee bei der Renormierung besteht darin, die nackten Parameter der Theorie so vom Regularisierungsparameter abhängig zu machen, daß physikalische Größen im Kontinuumslices endlich bleiben. Wenn dynamische Massen existieren, sollten sie als physikalische Größen im Kontinuumslices endliche Werte annehmen können. In Landau-Eichung bei  $m = 0$  ist die nackte Kopplung der einzige freie Parameter, dessen  $\epsilon$ -Abhängigkeit so gewählt werden muß, daß die dynamische Masse im Kontinuumslices einen endlichen Wert annimmt.

In der Cut-Off-Theorie gilt mit Gl.(4.2)

$$F(g) = \frac{m_d}{\Lambda} \quad (4.3)$$

Bei endlich gehaltenem  $m_d$  muß mit  $\Lambda \rightarrow \infty$  die Massenfunktion  $F(g)$  eine Nullstelle haben. Diese Nullstelle definiert eine kritische <sup>1</sup> Kopplung  $g_k$ , gegen die die nackte Kopplung im Kontinuumslices geführt werden muß.

In der dimensionellen Regularisierung folgt mit Gl.(4.1):

$$g(\epsilon) = m_d^\epsilon f^{-\epsilon}(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f^{-\epsilon}(\epsilon) \quad (4.4)$$

Wenn es hier wie in der Cut-Off-Regularisierung eine kritische Kopplung geben sollte, muß  $f(\epsilon)$  von der Form

$$f(\epsilon) = (g_k + h(\epsilon))^{-\frac{1}{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad h(0) = 0 \quad (4.5)$$

sein. Dann kann die dynamische Masse endlich gehalten werden, indem die Kopplung für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen die kritische Kopplung  $g_k$  geführt wird.

Bei beiden Regularisierungsverfahren tritt die kritische Kopplung auf sehr unterschiedliche Art in Erscheinung. In der Cut-Off-Theorie ist die kritische Kopplung als Nullstelle von  $F(g)$  bei endlichem Regulator explizit sichtbar. Ganz anders verhält es sich mit der dimensionellen Regularisierung. Da die Funktion  $h(\epsilon)$  nicht bekannt ist, kann sich die kritische Kopplung nur im Kontinuumslices bei  $\epsilon = 0$  zeigen. Es ist sogar allgemein unmöglich, daß sich für  $\epsilon > 0$  eine kritische Kopplung bilden kann, weil in den mit  $g^{\frac{1}{\epsilon}}$  dimensionslos gemachten SD-Gl. gar keine Kopplung mehr vorkommt. Wir haben für  $g_k$  die Bezeichnung *kritische Kopplung* nur aus Analogie zur Cut-Off-Theorie gewählt. In dimensioneller Regularisierung teilt die kritische Kopplung die Theorie nicht in zwei Phasen.

## 4.3 UV-Divergenzstruktur und Asymptotik

Bei den SD-Gl.(2.9) ändert sich für  $\bar{m} = 0$  nur die Gleichung für  $\bar{B}(\bar{p}^2)$ . Sie wird homogen.

Die UV-Divergenzstruktur der Schleifenintegrale kann mit der in Kapitel 2.2 berechneten Asymptotik abgeschätzt werden. Da im UV-Bereich die

---

<sup>1</sup> Diese Kopplung wird kritische Kopplung genannt, weil sie die Theorie in zwei Phasen teilt. Für  $g < g_k$  gibt es keine dynamischen Massen, während sich für  $g > g_k$  dynamische Massen ausbilden.

SD-Gl. für  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  von den beiden anderen entkoppelt und der Parameter  $\bar{m}$  nur in der Asymptotik von  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  vorkommt, ist die Asymptotik für  $\bar{A}(\bar{p}^2)$  und  $\bar{d}(\bar{p}^2)$  dieselbe wie bei  $\bar{m} \neq 0$ . Für die Funktion  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  folgt mit den Ergebnissen aus Kapitel 2.2 lediglich  $\bar{B}(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} 0$ . Damit ist die dimensionelle Regularisierbarkeit bei  $\bar{m} = 0$  sichergestellt, weil die Integranden der Schleifenintegrale im UV-Bereich nicht schwächer abfallen als bei  $\bar{m} \neq 0$ .

Im folgenden wollen wir mit ähnlichen Methoden wie in Kapitel 2.2 das Verhalten von  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  im UV-Bereich genauer bestimmen. Um einen ersten Einblick in das UV-Verhalten von  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  zu gewinnen, betrachten wir die SD-Gl. für diese Funktion im Grenzfall großer äußerer Impulse:

$$\bar{B}(\bar{p}^2) = \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) \frac{(d-1)\bar{d}((\bar{p}-\bar{k})^2) + \xi}{(\bar{p}-\bar{k})^2} \quad (4.6)$$

$$\xrightarrow{\bar{p}^2 \rightarrow \infty} \frac{(d-1) + \xi}{\bar{p}^2} \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) \quad (4.7)$$

Diese Überlegung führt zu den folgenden Einsichten:

- Im UV-Bereich geht  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  wie  $\frac{1}{\bar{p}^2}$  gegen Null, da das Integral nicht vom äußeren Impuls abhängt.
- Mit diesem UV-Verhalten von  $\bar{B}(\bar{p}^2)$  ist das Integral für  $d < 4$  UV-konvergent. Das heißt, daß unsere Betrachtung in sich konsistent ist.
- Das Integral in diesem Faktor ist proportional zum Fermionkondensat<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) &= g^{\frac{2\epsilon-3}{\epsilon}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \\ &= \frac{1}{4} g^{\frac{2\epsilon-3}{\epsilon}} \text{tr} \int \frac{d^d k_M}{i(2\pi)^d} \frac{-(A_M(k_M^2)\gamma_M + B_M(k_M^2)\mathbf{1})}{A_M^2(k_M^2)k_M^2 - B_M^2(k_M^2)} \\ &= \frac{1}{4} g^{\frac{2\epsilon-3}{\epsilon}} \text{tr} \int \frac{d^d k_M}{(2\pi)^d} iS(k_M) e^{-ik_M x} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{4} g^{\frac{2\epsilon-3}{\epsilon}} \text{tr} < 0 | \Psi(0) \bar{\Psi}(0) | 0 >_c \\ &=: \frac{1}{4} < \bar{\Psi} \bar{\Psi} > \end{aligned} \quad (4.8)$$

Der Index  $M$  kennzeichnet die Minkowskimetrik<sup>3</sup>. Dies Fermionkondensat kann aus den UV-Betrachtungen alleine nicht bestimmt werden. Es bleibt zunächst als Parameter in der Asymptotik. Wenn ein solches Fermionkondensat existiert, gibt es auch eine nichttriviale Lösung  $B(\bar{p}^2) \neq 0$  und damit dynamische Massen.

<sup>2</sup>In der Literatur findet sich für das Kondensat gelegentlich eine Konvention mit entgegengesetztem Vorzeichen.

<sup>3</sup>Das Kondensat ist als impulsunabhängige Größe invariant unter dem Wechsel der Metrik.

Im folgenden wollen wir mit den gleichen Methoden wie in Kapitel 2.2 die über den führenden Term der Asymptotik hinausgehende UV-Entwicklung berechnen. Als Ausgangspunkt wählen wir einen Ansatz wie in Kapitel 2.2, bei dem die Strommasse als führender Term durch  $\frac{C}{\bar{p}^2}$  ersetzt wird,

$$\bar{B}(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{B}^{(N)}(\bar{p}^2) = \frac{C}{\bar{p}^2} \sum_{j=0}^N b_j \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (4.9)$$

und der für  $\bar{S}_0$  auf die Asymptotik

$$\bar{S}_0(\bar{p}^2) \xrightarrow{UV} \bar{S}_0^{(N)}(\bar{p}^2) = \frac{C}{\bar{p}^4} \sum_{j=0}^N s_j^{(0)} \left( \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \quad (4.10)$$

führt. Die Koeffizienten können wieder mit Gl.(2.16) ineinander umgerechnet werden. Wie im Fall  $m \neq 0$  transformieren wir den Integrationsimpuls gemäß  $\bar{k} = |\bar{p}|u$  und betrachten den Integranden für große  $\bar{p}^2$ . Zusammen mit dem Ansatz erhalten wir:

$$\bar{B}(\bar{p}^2) \stackrel{UV}{=} C \bar{p}^d \sum_{j=0}^N s_j^{(0)} \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{1}{u^4 \bar{p}^4} \left( \frac{1}{u^{2\epsilon} \bar{p}^{2\epsilon}} \right)^j \frac{(d-1)\bar{d}(\bar{p}^2[\hat{p} - u]^2) + \xi}{\bar{p}^2[\hat{p} - u]^2}$$

Dies Integral hat im IR-Bereich des Integrationsimpulses eine Divergenz, die eine Regularisierung bei  $d < 4$  unmöglich macht<sup>4</sup>. Auf den ersten Blick liegt die Ursache dieser Divergenz darin, daß die UV-Asymptotik im IR-Bereich verwendet wird. Im Fall  $m \neq 0$  verwenden wir die UV-Asymptotik auch im IR-Bereich, jedoch nur in einem Integrationsvolumen vom Maß Null, in dem der Integrand regulär bleibt, so daß diese Teile nicht beitragen. Im hier vorliegenden Fall kann nicht ausgeschlossen werden, daß die IR-Divergenz in einem Integrationsvolumen vom Maß Null nichtverschwindende Beiträge liefert. Die tiefere Ursache für dieses Problem liegt im Fermionkondensat, welches implizit in unserem Integral enthalten ist und über das mit Hilfe der Asymptotik nicht integriert werden kann. Beim Versuch, die IR-Divergenz durch eine Subtraktion zu beseitigen, wird das Fermionkondensat auf natürliche Weise vom Integral separiert. Mit

$$H(\bar{p}^2) = \frac{(d-1)\bar{d}(\bar{p}^2) + \xi}{\bar{p}^2} \quad (4.11)$$

lautet die Selbstkonsistenzgleichung für  $\bar{B}(\bar{p}^2)$ :

$$\begin{aligned} \bar{B}(\bar{p}^2) &\stackrel{UV}{=} \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) [H(\bar{q}^2) + H(\bar{p}^2) - H(\bar{p}^2)] \\ &\stackrel{UV}{=} H(\bar{p}^2) \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) \\ &\quad + \bar{p}^d \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(u^2 \bar{p}^2) \underbrace{[H(\bar{p}^2[\hat{p} - u]^2) - H(\bar{p}^2)]}_{\text{IR-regularisierend}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

<sup>4</sup>Eine Regularisierung bei  $d > 4$  ist nicht möglich, weil sich das Potenzverhalten der Asymptotik bei  $\epsilon < 0$  umkehrt.

Mit unserem Ansatz für die UV-Entwicklung ist das zweite Integral jetzt IR-regulär. Das erste impulsunabhängige Integral ist nach Gl.(4.8) proportional zum Fermionkondensat und kann aus der Selbstkonsistenzbedingung im UV-Bereich nicht festgelegt werden. Durch die Ausbildung des Kondensats ist die Gleichung wieder inhomogen geworden. Mit den gleichen Methoden wie in Kapitel 2.2 wird das Schleifenintegral im UV-Bereich berechnet und mit der Selbstkonsistenzforderung eine Rekursionsformel für die Entwicklungskoeffizienten bestimmt:

$$b_n = \frac{3-2\epsilon}{3-2\epsilon+\xi} d_n + \xi s_{n-1}^{(0)} I_{n-1}^{(6)}(\epsilon) + \sum_{j=0}^{n-1} s_j^{(0)} d_{n-j-1} I_{j,n-j-1}^{(7)}(\epsilon) \quad (4.13a)$$

$$b_0 = 1 \quad (4.13b)$$

$$C = (3-2\epsilon+\xi) \int \frac{d^d \bar{k}}{(2\pi)^d} \bar{S}_0(\bar{k}^2) = \frac{3-2\epsilon+\xi}{4} \langle \bar{\Psi} \bar{\Psi} \rangle \quad (4.13c)$$

Die Integrale sind wieder in Anhang A berechnet und in den Gl.(A.3) zusammengestellt.

Der führende Term der Asymptotik stimmt mit dem bei unseren einführenden Überlegungen in Gl.(4.7) angegebenen überein. Die Koeffizienten  $b_n$  haben bezüglich  $\epsilon$  dieselbe Struktur wie im Fall  $m \neq 0$ . Eine Besonderheit dieser Rekursionsformel besteht darin, daß  $b_n$  von  $d_n$  abhängt. Die Rekursion ist trotzdem auflösbar, da aufgrund der Entkopplung der  $\bar{B}$ -Gleichung für die Berechnung von  $d_n$  die Kenntnis von  $b_n$  nicht erforderlich ist.

In dimensionsbehafteten Größen geschrieben lautet unsere Asymptotik für  $B(p^2)$ :

$$B^{(N)}(p^2) = g^{\frac{3}{\epsilon}} \frac{\langle \bar{\Psi} \bar{\Psi} \rangle}{p^2} \frac{3-2\epsilon+\xi}{4} \sum_{j=0}^N b_j \left( \frac{g^2}{p^{2\epsilon}} \right)^j \quad (4.14)$$

Das Fermionkondensat bleibt in der dimensionslosen Schreibweise, weil so die gesamte Kopplungsabhängigkeit der Asymptotik sichtbar ist. Das Kondensat  $\langle \bar{\Psi} \bar{\Psi} \rangle$  ist eine dimensionslose nur von  $\epsilon$  abhängende Funktion. Die Summe ist wie im Fall  $\bar{m} \neq 0$  eine Potenzreihe in  $g^2$ . Durch das Fermionkondensat erhält die Asymptotik mit  $g^{\frac{3}{\epsilon}}$  jedoch eine rein nichtperturbative Kopplungsabhängigkeit. Die in Gl.(4.14) angegebene Form der Asymptotik ist aus der Operatorproduktentwicklung bekannt.

Zusammenfassend halten wir fest:

*Bei  $m = 0$  kann eine nichttriviale Asymptotik für  $B(p^2)$  bis auf einen konstanten Faktor, das Fermionkondensat, angegeben werden. Der führende Term der Asymptotik verschwindet im UV-Bereich wie  $\frac{1}{p^2}$ . Diese Asymptotik existiert, wenn es ein nichtverschwindendes Fermionkondensat gibt.*

## 4.4 Dynamische Massen als Lösung der SD-Gl.

In Kapitel 4.1 und 4.2 haben wir die Kopplungsabhängigkeit dynamischer Massen und eine Möglichkeit der Renormierung diskutiert. Bei der Be-

rechnung der UV-Asymptotik wurde bereits deutlich, daß das Selbstkonsistenzproblem im UV-Bereich eventuell vorhandene dynamische Massen nicht festlegen kann. Um die Existenz solcher Massen nachzuweisen, ist es erforderlich, die SD-Gl. auf der gesamten Impulsskala zu lösen.

Für die folgende Diskussion definieren wir eine totale und eine dynamische Masse durch:

$$m_t(m) := B(p^2 = 0, m, g) \quad (4.15)$$

$$m_d := B(p^2 = 0, m = 0, g) = m_t(0) \quad (4.16)$$

Die totale Masse  $m_t$  ist eine Mischung aus nackter und dynamischer Masse, während  $m_d$  rein dynamischer Natur ist.

Einen ersten Überblick über die Mechanismen bei der dynamischen Massenbildung gewinnen wir an einem genäherten System von SD-Gl., das noch analytische Lösungen zuläßt. Ausgehend von der Leiternäherung bei  $\xi = 0$  werden die invarianten Funktionen  $A(p^2)$  und  $d(p^2)$  durch ihre nullte Ordnung der Störungstheorie ersetzt (Quenched-Ladder-Approximation), so daß sich die SD-Gl. auf eine Gleichung für  $B(p^2)$  reduzieren:

$$B(p^2) = m - g^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1-d}{(p-k)^2} \quad (4.17)$$

Eine ausführliche Untersuchung dieser Gleichung in Cut-Off-Regularisierung findet sich in [Fo 83].

In [BE 95] wird aus ihr die folgende analytische Näherung für den Zusammenhang zwischen  $m$  und  $m_t$  hergeleitet:

$$m = \Gamma\left(\frac{1}{\epsilon}\right) (2\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}-1} m_t^{2-\epsilon} \left(\frac{g}{g_k(\epsilon)}\right)^{1-\frac{1}{\epsilon}} J_{\frac{1}{\epsilon}-1} \left(\frac{g}{g_k(\epsilon)} \frac{1}{\epsilon} m_t^{-\epsilon}\right) \quad (4.18)$$

$$g_k(\epsilon) = \sqrt{\frac{\Gamma(2-\epsilon)(4\pi)^{2-\epsilon}}{4(3-2\epsilon)}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} g_k := \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.628 \quad (4.19)$$

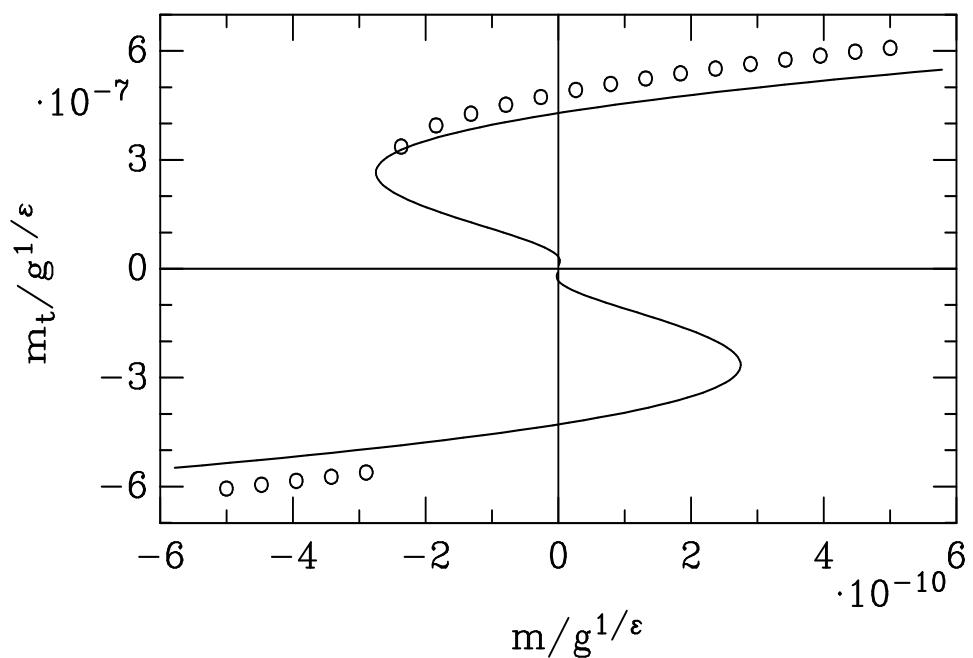
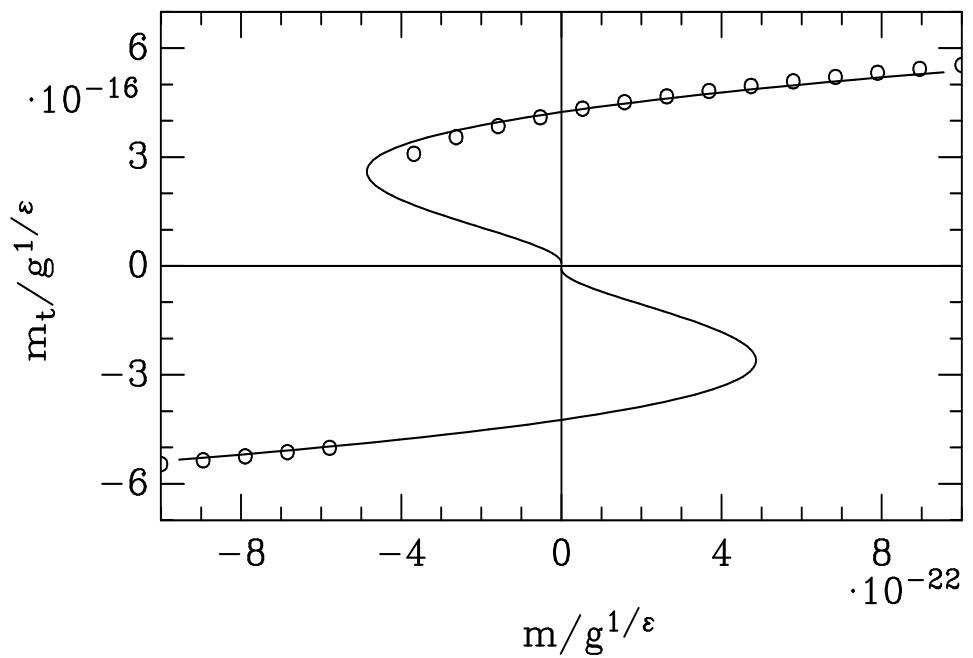
In diesen Gl. wird der Einfluß der bei der Herleitung gemachten Näherungen mit kleiner werdendem  $\epsilon$  immer geringer.

In Abbildung 4.1 und 4.2 ist die Relation  $m_t(m)$  als Umkehrung von Gl.(4.18) mit einer durchgezogenen Linie dargestellt. Diese Relation ist auch für negative  $m$  definiert und zeigt die aus Gl.(4.17) unmittelbar folgende Symmetrie:

$$B(p^2, m, g) = -B(p^2, -m, g)$$

Die Kreise zeigen die mit dem numerischen Lösungsverfahren gewonnenen Werte. Wir bemerken zu diesen Bildern:

- Bei  $m = 0$  gibt es mehrere dynamische Massen, die sich als Schnittpunkte der Kurven mit der  $m_t$ -Achse zeigen. Diese Schnittpunkte werden durch die Nullstellen der Bessel-Funktion in Gl.(4.18) festgelegt. Diese Bessel-Funktion hat sogar  $\infty$  viele Nullstellen, so daß wir bei  $m = 0$  auch  $\infty$  viele dynamische Massen als Lösungen der SD-Gl. haben. Diese Massen häufen sich im Ursprung des Koordinatensystems und können in unseren Bildern nicht aufgelöst werden.

Abbildung 4.1: Totale Masse gegen nackte Masse für  $\epsilon = 0.1$ Abbildung 4.2: Totale Masse gegen nackte Masse für  $\epsilon = 0.04$

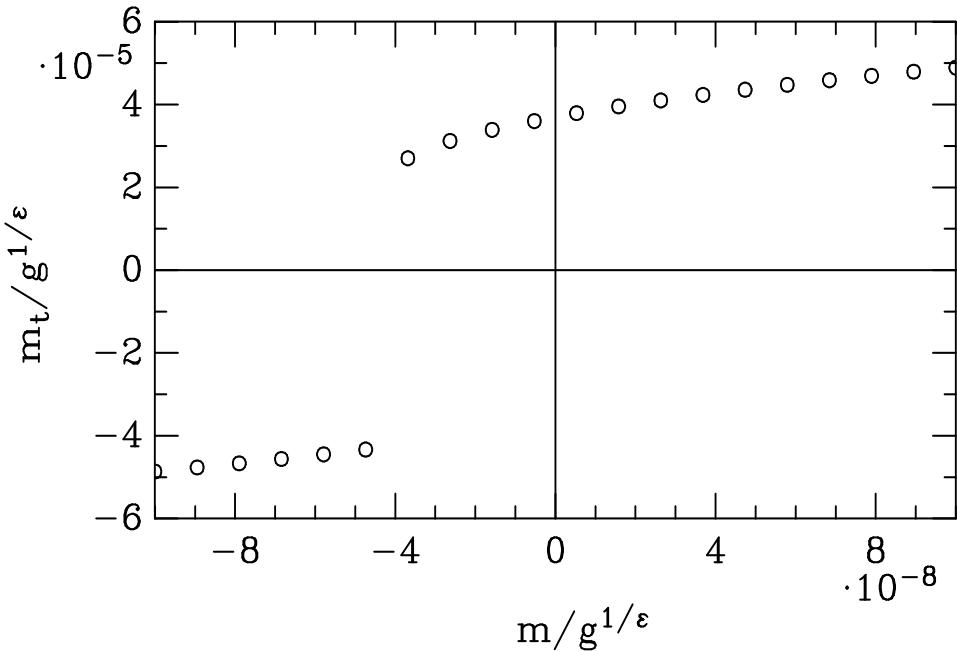
- Aufgrund der Mehrdeutigkeit der Lösungen bei  $m = 0$  kann unser iterativ arbeitendes numerisches Lösungsverfahren ohne Strommasse nicht stabil arbeiten. Wir beginnen daher mit einer positiven Strommasse, die schrittweise verkleinert wird. Wenn wir nahe genug bei  $m = 0$  sind, bleibt das Lösungsverfahren stabil, wenn  $m = 0$  übersprungen und mit negativen Massen weiter gerechnet wird. Als Startwert für jede Iteration wird das Ergebnis der vorhergehenden Iteration verwendet. Dadurch wird die numerische Lösung eindeutig, weil sie bei hinreichend kleiner Schrittweite für  $m$  stetig an die vorhergehende Lösung anschließt. Die anderen Lösungen in der Nähe von  $m = 0$  kann unser Lösungsverfahren zunächst nicht finden. Im Rahmen eines iterativen Lösungsprozesses hängt die Stabilisierung solcher Lösungen sehr empfindlich von der Vorgabe geeigneter Startfunktionen ab.
- An dem Punkt der numerischen Lösung, wo  $m_t$  einen Vorzeichenwechsel macht, wird das iterative Lösungsverfahren instabil, weil hier ein bezüglich  $m$  unstetiger Sprung kommen muß. Die numerischen Punkte in der Nähe dieses Sprungs sind mit einem etwas größeren Fehler behaftet. Jenseits dieses Vorzeichenwechsels arbeitet das Verfahren stabil weiter.
- Die Übereinstimmung der numerischen Lösung mit der analytischen Näherung ist gut und nimmt mit kleiner werdendem  $\epsilon$  zu. Dies ist ein Hinweis darauf, daß die bei der analytischen Berechnung gemachten Näherungen für kleine  $\epsilon$  nur einen geringen Einfluß auf die Lösung haben. Diese Beobachtung unterstützt die Annahme, daß die analytische Formel auch in den Bereichen um  $m = 0$  gültig ist, in denen das numerische Verfahren nicht mehr arbeiten kann.
- Die Mehrdeutigkeit der Lösung im Bereich um  $m = 0$  wirft die Frage nach der physikalischen Lösung auf. Wir verlangen, daß die physikalischen Lösungen der SD-Gl. stetig bezüglich  $m$  sein sollen und erhalten damit die größte dynamische Masse als die physikalische. Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht zwingend.

Für die Diskussion der Renormierung der dynamischen Masse benötigen wir die größte Nullstelle der Besselfunktion in Gl.(4.18) für kleine  $\epsilon$ . Diese kann analytisch angegeben werden. Für die größte dynamische Masse erhalten wir [BE 95]:

$$m_d = g^{\frac{1}{\epsilon}} (g_k + h(\epsilon))^{-\frac{1}{\epsilon}} \quad (4.20)$$

mit  $g_k$  aus Gl.(4.19) und  $h(0) = 0$ . Dies ist genau die in Gl.(4.5) angegebene Form für eine dynamische Masse, die endlich gehalten werden kann, wenn im Kontinuumslimes die Kopplung  $g$  gegen die kritische Kopplung  $g_k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$  geführt wird. Diese kritische Kopplung ist die gleiche, die bei [Fo 83] im Rahmen einer Cut-Off-Regularisierung gefunden wird. Zusammenfassend halten wir fest:

*Die mit perturbativem Vertex und Photonpropagator genäherten SD-Gl. in Landau-Eichung haben im Rahmen der analytischen*

Abbildung 4.3: Totale Masse gegen nackte Masse für  $\epsilon = 0.2$ 

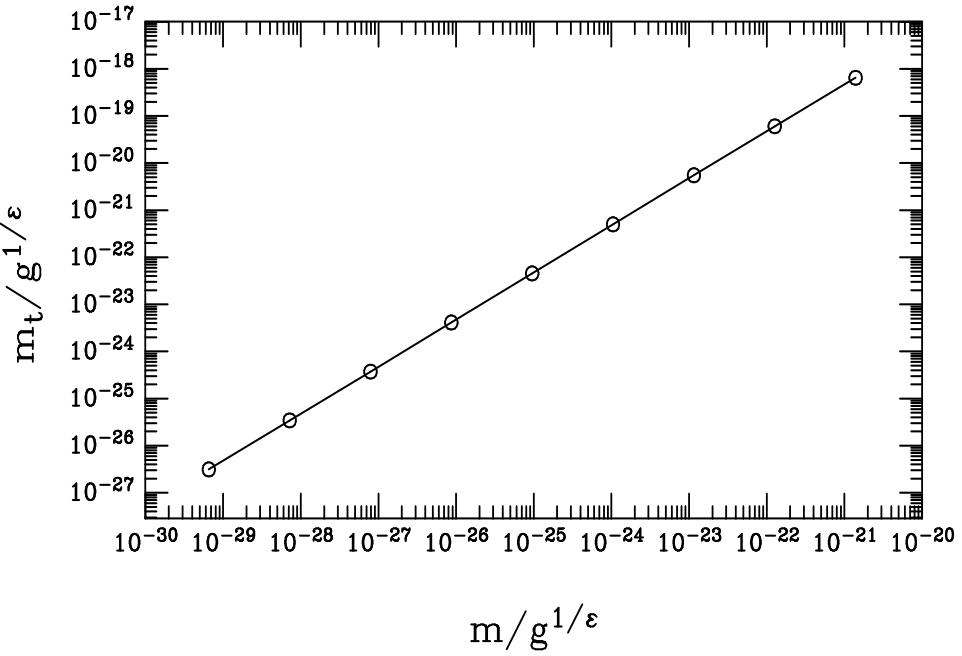
*Näherung bei  $m = 0$  unendlich viele nichttriviale Lösungen (dynamische Massen) für  $B(p^2)$ . Die größte dieser dynamischen Massen kann für  $\epsilon \rightarrow 0$  endlich gehalten werden, wenn die Kopplung gegen die kritische Kopplung  $g_k$  geführt wird. Für  $\epsilon > 0$  ist die kritische Kopplung nicht sichtbar.*

Mit diesen Einsichten diskutieren wir im folgenden, wie sich dynamische Massen in der Leiternäherung in Landau-Eichung zeigen. Im Gegensatz zu der oben betrachteten Näherung zeigt sich in der Leiternäherung, in der die Photonselbstenergie berücksichtigt wird, das Phänomen der Trivialität. Daher ist es nicht auszuschließen, daß sich in dieser Näherung die Lösungen bei  $m = 0$  qualitativ ganz anders verhalten.

Mit ähnlichen analytischen Methoden wie bei obiger Quenched-Ladder-Approximation wird in [BE 95] gezeigt, daß in der Leiternäherung die Fähigkeit der SD-Gl. zur dynamischen Massenbildung von der raumzeitlichen Dimension abhängt. Oberhalb von  $\epsilon \approx 0.1$  gibt es für  $B(p^2)$  nichttriviale Lösungen bei  $m = 0$ , während unterhalb dieser Schranke nur die triviale Lösung  $B(p^2) = 0$  existiert.

Die numerischen Lösungen sind konsistent mit dieser Aussage. Abbildung 4.3 zeigt für  $\epsilon = 0.2$  die Existenz einer nichttrivialen Lösung bei  $m = 0$ . Für  $\epsilon = 0.05$  zeigt Abbildung 4.4 in einer doppelt logarithmischen Darstellung eine Gerade, die bis zu  $\frac{m}{g_1^1} = 0.5 \cdot 10^{-30}$  keine dynamische Masse andeutet.

Eine zuverlässige Aussage über die Nichtexistenz dynamischer Massen bei  $\epsilon < 0.1$  kann mit dem numerischen Lösungsverfahren nicht gewonnen

Abbildung 4.4: Totale Masse gegen nackte Masse für  $\epsilon = 0.05$ 

werden. Mit analytischen Abschätzungen diskutieren wir im folgenden in Analogie zu [Fo 83], wie bei kleinen  $\epsilon$  die Existenz nichttrivialer Lösungen für  $B(p^2)$  bei  $m = 0$  verhindert wird.

Dazu betrachten wir die SD-Gl. der Leiternäherung bei  $m = 0$  in Landau-Eichung. In dieser Eichung ist es kein sehr großer Fehler die invariante Funktion  $A(p^2)$  durch  $A(p^2) = 1$  zu nähern<sup>5</sup>. In der homogenen SD-Gl. für  $B(p^2)$

$$B(p^2) = g^2(3 - 2\epsilon) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{d((p - k)^2)}{(p - k)^2} \quad (4.21)$$

wird die Funktion  $B^2(p^2)$  im Nenner durch  $m_d^2 = B^2(p^2 = 0)$  ersetzt. In dieser Näherung stimmt der Integrand sowohl im IR-Punkt als auch im UV-Punkt mit dem exakten Integranden überein. Über  $m_d$  ist die so genäherte Gleichung noch nichtlinear. Wir linearisieren sie, indem  $m_d$  als Parameter der Gleichung aufgefaßt wird. Mit einer solchen Vorgehensweise kann die Nichtexistenz dynamischer Massen dadurch nachgewiesen werden, daß für alle  $m_d$  nur  $B(p^2) = 0$  als Lösung existiert. Um eine Integralgleichung mit einem symmetrischen Kern zu erhalten, transformieren wir sie mit

$$\hat{B}(p^2) := \sqrt{\frac{p^{3-2\epsilon}}{p^2 + m_d^2}} B(p^2) \quad (4.22)$$

<sup>5</sup>Wenn die Ward-Identitäten durch die Vertexnäherung nicht verletzt werden, gilt  $A(p^2) = 1$ .

auf die Funktion  $\hat{B}(p^2)$ . Mit Gl.(2.2) lautet die Integralgleichung:

$$\hat{B}(p^2) = \int_0^\infty dk K(k, p) \hat{B}(k^2) \quad (4.23)$$

$$K(k, p) = g^2 c_d (3 - 2\epsilon) \sqrt{\frac{p^{3-2\epsilon}}{p^2 + m_d^2} \frac{k^{3-2\epsilon}}{k^2 + m_d^2}} \int_{-1}^1 dx (1 - x^2)^{\frac{1}{2} - \epsilon} \frac{d(q^2)}{q^2} \quad (4.24)$$

$$= K(p, k) \quad (4.25)$$

$$q^2 = k^2 + p^2 - 2pkx \quad (4.26)$$

Hier sind die Impulse  $p, k$  als Impulsbeträge zu lesen. Diese Integralgleichung ist eine homogene Fredholm-Gleichung zweiter Art. Für den Kern dieser Integralgleichung wird durch

$$\|K\| := \sqrt{\int_0^\infty dp \int_0^\infty dk |K(p, k)|^2} \quad (4.27)$$

eine Norm definiert. Die Gl.(4.23) hat mit dem symmetrischen reellen Kern nur dann nichttriviale Lösungen<sup>6</sup>, wenn

$$\|K\| \geq 1 \quad (4.28)$$

Mit diesem Satz ist die Nichtexistenz dynamischer Massen nachweisbar, indem wir zeigen, daß die Norm des Kerns unterhalb von 1 liegt. Mit den in Anhang C zusammengestellten Abschätzungen erhalten wir für die obere Schranke der Norm:

$$\|K\| \leq \frac{8}{\sqrt{2}\beta_1} \sqrt{\frac{\epsilon^2}{\epsilon + \frac{\beta_1}{2}g^2m_d^{-2\epsilon}} + \epsilon \ln \left( \epsilon + \frac{\beta_1}{2}g^2m_d^{-2\epsilon} \right) - \epsilon \ln \epsilon - \epsilon} \quad (4.29)$$

An dieser Form der Abschätzung können wir noch nicht beurteilen, wie sich die Norm für kleine  $\epsilon$  verhält, weil die  $\epsilon$ -Abhängigkeit von  $m_d$  nicht bekannt ist. Die einzige uns bekannte sinnvolle  $\epsilon$ -Abhängigkeit für dynamische Massen, die wie in Kapitel 4.2 beschrieben eine Renormierung mit einer kritischen Kopplung erlaubt, ist die in Gl.(4.1) und Gl.(4.5) angegebene. Mit

$$m_d = g^{\frac{1}{\epsilon}} (g_k + h(\epsilon))^{-\frac{1}{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad h(\epsilon) = 0 \quad (4.30)$$

$$m_d^{-2\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g_k^2}{g^2} \quad (4.31)$$

---

<sup>6</sup>Nach [DE 85] hat die homogene Fredholm-Gleichung zweiter Art

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt$$

mit dem hermitischen Kern  $K(x, y) = K^*(y, x)$  reelle Eigenwerte  $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ , die durch  $|\gamma| \leq \|K\| < \infty$  beschränkt sind.

erhalten wir für die Normabschätzung im Grenzfall kleiner  $\epsilon$

$$\|K\|_{\epsilon \rightarrow 0} < \frac{8}{\sqrt{2}\beta_1} \sqrt{\epsilon \left( \ln \left( \frac{\beta_1}{2} g_k^2 \right) - \ln \epsilon - 1 \right)} \quad (4.32)$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{8}{\sqrt{2}\beta_1} \sqrt{-\epsilon \ln \epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad (4.33)$$

Aus dieser Abschätzung folgt, daß es dynamische Massen, die mit einer kritischen Kopplung renormiert werden können, im Kontinuumslices nicht geben kann. Wie Gl.(C.6) zeigt, ist für das Verschwinden der Norm der Photonpropagator verantwortlich. Bei festgehaltenem Impuls  $p_0$  geht mit  $\epsilon \rightarrow 0$  auch  $d(p_0^2) \rightarrow 0$ . Diese Eigenschaft des Photonpropagators ist auch der Grund für die Trivialität. In der Quenched-Ladder-Approximation mit  $d(p^2) = 1$  verschwindet die Norm im Kontinuumslices nicht, und ermöglicht somit die Bildung der dynamischen Massen in dieser Näherung.

Im Rahmen einer numerischen Cut-Off-Rechnung findet Rakow [RA 91] in der Leiternäherung eine dynamische Masse in Form des Fermionkondensats. In den Bereichen, in denen Rakow rechnet, scheint das mit dem Cut-Off  $\Lambda$  dimensionslos geschriebene Kondensat bei Annäherung an eine kritische Kopplung  $\alpha_c$  zu verschwinden, so daß es mit einer kritischen Kopplung renormiert werden kann. In diesen Cut-Off-Rechnungen nähert er sich mit der nackten Kopplung  $\alpha_0$  der kritischen Kopplung bis zu  $\alpha_0 - \alpha_c = 10^{-13}$ . Wenn sich dieses Verhalten im vollständig ausgeführten Kontinuumslices bestätigt, zeigt die dimensionelle Regularisierung hier im Vergleich zur Cut-Off-Regularisierung sich widersprechende Resultate für den Kontinuumslices.

Um diesen Widerspruch aufzuklären, ist eine tiefergehende Untersuchung des Kontinuumslices der beiden Regularisierungsverfahren erforderlich. Diese Aufgabe geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Wir fassen die Einsichten zur dynamischen Massenbildung in der Leiternäherung zusammen:

*Die Normabschätzung und die numerischen Lösungen weisen auf ein kritisches  $\epsilon_k$  hin, das zwei Bereiche unterscheidet. Für  $\epsilon < \epsilon_k$  bilden sich keine mit einer kritischen Kopplung renormierbaren dynamischen Massen. Für  $\epsilon > \epsilon_k$  bilden sich dynamische Massen. Die Nichtexistenz dynamischer Massen im Kontinuumslices scheint im Widerspruch zu Rechnungen in Cut-Off-Regularisierung zu stehen.*

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird am Beispiel der QED untersucht, wie die SD-Gl., durch Variation der raumzeitlichen Dimension, im Rahmen nichtperturbativer Lösungsmethoden regularisiert werden können.

Eine dimensionell regularisierte Feldtheorie ist für  $d < 4$  im allgemeinen asymptotisch frei. Die Greenschen Funktionen sind dann im UV-Punkt durch ihre nullte Ordnung der Störungstheorie gegeben.

Am Beispiel der Leiternäherung haben wir die UV-Asymptotik der Greenschen Funktionen, als selbstkonsistente Lösung der SD-Gl. im UV-Bereich, in Form von Potenzreihen in der Variablen  $\frac{g^2}{p^{2\epsilon}}$  angegeben. Diese Reihen erweisen sich als identisch mit der perturbativen Asymptotik, so daß die UV-Divergenzstruktur wie in der Störungstheorie ist. Die Schleifenintegrale sind für  $d < 4$  endlich und können numerisch berechnet werden.

Zur numerischen Lösung der SD-Gl. verwenden wir ein iterativ arbeitendes Lösungsverfahren, das mit Leading-Log-Formeln gestartet wird. Die Lösungen werden multiplikativ im Off-Shell-Schema renormiert. Wenn die Dimension  $d$  gegen 4 geführt wird, stabilisieren sich die Greenschen Funktionen zuerst im IR-Bereich und mit zunehmender Annäherung an  $d = 4$  immer weiter in den UV-Bereich hinein. Eine vollständige Ausführung des Kontinuumslices  $d \rightarrow 4$  ist wie bei allen anderen Regularisierungsverfahren numerisch nicht möglich.

Für die renormierte Kopplung finden wir eine  $\epsilon$ -abhängige obere Schranke, die für kleine  $\epsilon$  wie  $\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}\sqrt{\epsilon}$  gegen Null geht. Im Kontinuumslices ist die Theorie trivial, weil die renormierte Kopplung nur den Wert Null annehmen kann. Diese Trivialität folgt bereits aus der Leading-Log-Formel des Photonpropagators.

Die numerischen Lösungen der Leiternäherung zeigen qualitativ keine großen Unterschiede zu den mit auf 1-Loop Störungstheorie basierenden in den IR-Bereich fortgesetzten Leading-Log-Formeln. Nichtperturbative Effekte, die durch auf Störungsrechnung beruhenden Renormierungsgruppenmethoden nicht beschrieben werden, sind in diesen Lösungen quantitativ unterdrückt. Frei von perturbativen Beimischungen können solche Effekte bei  $m = 0$  studiert werden. Sie zeigen sich als dynamisch gebildete Massen.

Wir finden solche dynamischen Massen in der Näherung der SD-Gl., in der außer der Funktion  $B(p^2)$  alle invarianten Funktionen in der nullten Ordnung Störungsrechnung verwendet werden. Diese Massen sind renormierbar,

indem die nackte Kopplung gegen eine kritische Kopplung geführt wird. Im Gegensatz zur Cut-Off-Regularisierung, wo die kritische Kopplung auch bei endlichem Cut-Off existiert, ist sie bei der dimensionellen Regularisierung für  $d < 4$  nicht sichtbar, sie zeigt sich dort erst im Kontinuumslimes. In dieser Näherung der SD-Gl. stimmen unsere Resultate im Kontinuumslimes mit denen der Cut-Off-Theorie überein.

In der Leiternäherung mit nichtperturbativem Photonpropagator finden wir in dimensioneller Regularisierung numerisch keine dynamischen Massen, wenn  $\epsilon < 0.1$ . Eine Abschätzung des Integralkerns der SD-Gl. für  $B(p^2)$  deutet darauf hin, daß dynamische Massen, die im Kontinuumslimes an einer kritischen Kopplung endlich gehalten werden können, nicht existieren. Dies scheint im Widerspruch zu den Ergebnissen der Cut-Off-Theorie zu stehen. Für  $\epsilon > 0.1$  finden wir numerisch dynamische Massen.

Die dimensionelle Regularisierung erhält wichtige Symmetrien, wie die Poincaré-Invarianz oder die Eichkovarianz. Diese Eigenschaft haben wir nicht voll ausgenutzt, weil in der Leiternäherung aufgrund der Vertexnäherung die Ward-Identitäten verletzt sind. Für weiterführende Untersuchungen wäre es interessant, zunächst die SD-Gl. mit einem Vertex zu nähern, der die Ward-Identitäten erfüllt und in einem zweiten Schritt den gesamten Vertex selbstkonsistent mitzubestimmen.

Der wichtigste Schritt in einem Regularisierungsverfahren ist das Abschalten des Regularisierungsparameters, der Kontinuumslimes. Es ist eine interessante Aufgabe, diesen Punkt tiefgehender zu untersuchen und die folgenden Fragen zu studieren:

- Wie kann renormiert werden ?
- Ist die renormierte Theorie bei  $\epsilon = 0$  stetig ?
- Warum gibt es bei den dynamischen Massen Widersprüche zur Cut-Off-Regularisierung ?

Einen anderen Ansatzpunkt für weiterführende Studien zur QED liefert die Trivialität. Da die perturbative QED extrem genaue Vorhersagen für das Experiment macht, kann die Trivialität nicht bedeuten, daß die QED eine wertlose wechselwirkungsfreie Theorie ist. Beim Versuch, Trivialität besser zu verstehen, können vielleicht sehr tiefgehende Einsichten über den Renormierungsprozeß gewonnen werden.

## Anhang A

# Ergänzungen zur UV-Asymptotik

### A.1 Integrale für die UV-Asymptotik

Bei der Berechnung der UV-Asymptotik in Kapitel 2.2 treten die folgenden Integrale auf:

$$I_j^{(1)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[1+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1a})$$

$$I_{j,k}^{(2)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{(3 - 2\epsilon)}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[1+\epsilon k]} u^{2[1+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1b})$$

$$I_j^{(3)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{2(1 - \epsilon)u \cdot \hat{p}}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[1+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1c})$$

$$I_{j,k}^{(4)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{2 \frac{(1-u \cdot \hat{p})^2}{(\hat{p}-u)^2} - 2 + (3 - 2\epsilon)u \cdot \hat{p}}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[1+\epsilon k]} u^{2[1+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1d})$$

$$I_{j,k}^{(5)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{4 + \frac{8}{2\epsilon-3}[(4 - 2\epsilon)(\hat{p} \cdot u)^2 - u^2]}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[1+\epsilon k]} u^{2[1+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1e})$$

$$I_j^{(6)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[2+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1f})$$

$$I_{j,k}^{(7)}(\epsilon) = \int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{(3 - 2\epsilon)}{(\hat{p} - u)^2 u^{2[1+\epsilon k]} u^{2[2+\epsilon j]}} \quad (\text{A.1g})$$

Mit der Feynmanparametrisierung

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!(\beta - 1)!} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[xA + (1-x)B]^{\alpha+\beta}}$$

und dem Standard-Impulsintegral in  $d$  Dimensionen [Co 84]

$$\int \frac{d^d u}{(2\pi)^d} \frac{(u^2)^n}{[u^2 + L]^m} = \frac{L^{2+n-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{L}\right)^\epsilon R(n, m, \epsilon) \quad (\text{A.2a})$$

$$R(n, m, \epsilon) = \frac{\Gamma(2 - \epsilon + n)\Gamma(-2 + \epsilon - n + m)}{(4\pi)^{-\epsilon}\Gamma(2 - \epsilon)\Gamma(m)} \quad (\text{A.2b})$$

erhalten wir für die Integrale Gl.(A.1):

$$I_j^{(1)}(\epsilon) = c_{j,0}(\epsilon) \quad (\text{A.3a})$$

$$I_{j,k}^{(2)}(\epsilon) = c_{j,k}(\epsilon) [3 - 2\epsilon] \quad (\text{A.3b})$$

$$I_j^{(3)}(\epsilon) = c_{j,0}(\epsilon) \left[ \frac{2(1 - \epsilon)(1 - \epsilon[1 + j])}{2 - \epsilon[2 + j]} \right] \quad (\text{A.3c})$$

$$I_{j,k}^{(4)}(\epsilon) = c_{j,k}(\epsilon) \left[ \epsilon \frac{k(3 - 2\epsilon)(1 - \epsilon[1 + j])}{(1 + \epsilon k)(2 - \epsilon[2 + j + k])} \right] \quad (\text{A.3d})$$

$$I_{j,k}^{(5)}(\epsilon) = c_{j,k}(\epsilon) \left[ 4 \frac{(2[1 + k]^2 - [j - k]^2)\epsilon^2 + (j - 5k - 4)\epsilon + 2}{(3 - \epsilon[2 + j + k])(2 - \epsilon[2 + j + k])} \right] \quad (\text{A.3e})$$

$$I_j^{(6)}(\epsilon) = c_{j,0}(\epsilon) \left[ \frac{\epsilon[2 + j] - 1}{1 + \epsilon j} \right] \quad (\text{A.3f})$$

$$I_{j,k}^{(7)}(\epsilon) = c_{j,k}(\epsilon) \left[ (2\epsilon - 3) \frac{(1 + j + k)(1 - \epsilon[2 + j + k])}{(1 + j)(1 + \epsilon j)} \right] \quad (\text{A.3g})$$

$$c_{j,k}(\epsilon) = (4\pi)^{\epsilon-2} \frac{\Gamma(\epsilon[1 + j + k])\Gamma(1 - \epsilon[1 + j])\Gamma(1 - \epsilon[1 + k])}{\Gamma(1 + \epsilon k)\Gamma(1 + \epsilon j)\Gamma(2 - \epsilon[2 + j + k])} \quad (\text{A.3h})$$

## A.2 Konvergenz der Asymptotik

Mit den in Kapitel 2.2 erhaltenen Ausdrücken für die UV-Asymptotik der invarianten Funktionen Gl.(2.14, 2.16, 2.18) ist es einfach möglich, diese in nahezu beliebiger perturbativer Ordnung anzugeben. Beim Betrachten hoher Ordnungen ist jedoch zu beachten, daß die Asymptotik, wie auf Seite 22 beschrieben, mit der Einschränkung  $N\epsilon < \frac{1}{2}$  hergeleitet ist. Mit dieser Randbedingung kann die Eigenschaft der Asymptotiksummen in hohen Ordnungen für kleine  $\epsilon$  studiert werden.

Bei Potenzreihen ist der Konvergenzradius eine sehr wichtige Größe. Der Konvergenzradius  $r$  einer Potenzreihe mit den Koeffizienten  $c_n$  ist durch [Tr 81]:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} \quad (\text{A.4})$$

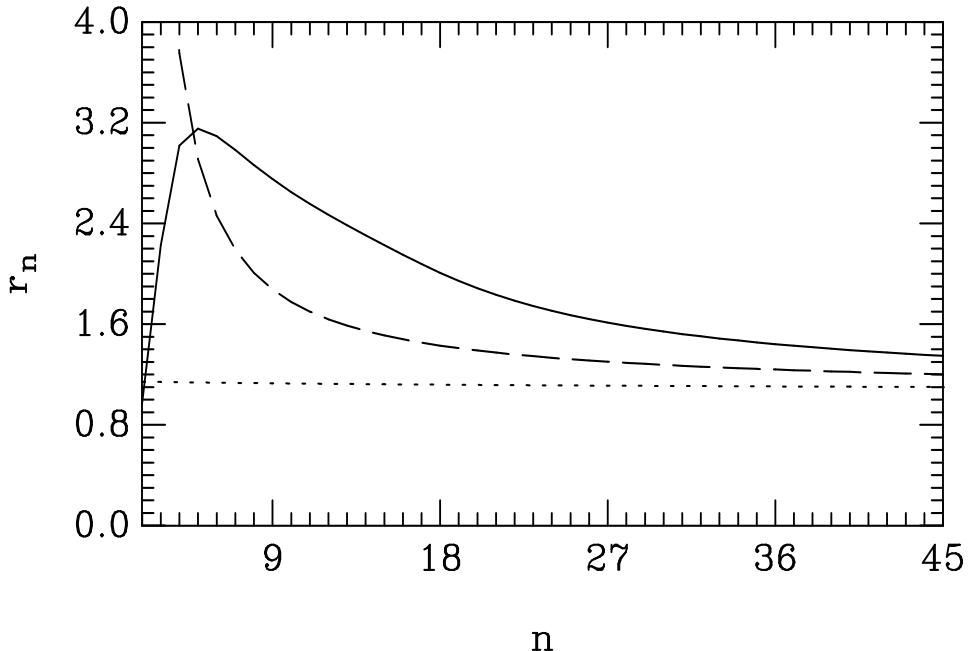


Abbildung A.1: Die bei  $\epsilon = 0.01$  gegen den Konvergenzradius konvergierende Folge  $r_n$  für B (durchgezogene Linie), A (gestrichelte Linie), d (gepunktete Linie)

gegeben. Wir berechnen die Folge

$$r_n = |c_n|^{-\frac{1}{n}} \quad (\text{A.5})$$

bis zur Ordnung 45 für die Koeffizienten der drei Asymptotikreihen und tragen sie in Abbildung A.1 und Abbildung A.2 gegen den Index  $n$  auf. Die Grenzwerte, gegen die diese Folgen konvergieren, sind die Konvergenzradien, die sich in unseren Bildern bereits klar andeuten. Es fällt auf, daß diese Konvergenzradien bei festem  $\epsilon$  für die drei Asymptotiksummen in etwa gleich groß sind. Mit kleiner werdendem  $\epsilon$  wird auch der Konvergenzradius kleiner. Dies ist auch zu erwarten, da die perturbativen Reihen bei  $\epsilon = 0$  asymptotische Reihen sind.

### A.3 Aufsummationen für kleine $\epsilon$

Die Asymptotiksummen Gl.(2.14) können in der Näherung, daß wir von den Koeffizienten nur die bezüglich  $\epsilon$  führenden Terme mitnehmen, ausgeführt werden. Dies kann mit Renormierungsgruppen-Methoden wie bei den perturbativen Leading-Log-Summationen geschehen. Eine andere in [BE 95] dargestellte Methode führt Leading-Log-artige Summationen der bezüglich  $\epsilon$  führenden Terme direkt mit den SD-Gl. aus und kommt ohne Renormierungsbetrachtungen zum Ziel. Die so erhaltenen Leading-Log-Formeln entsprechen den, auf nackte invariante Funktionen umgeschriebenen, Auf-

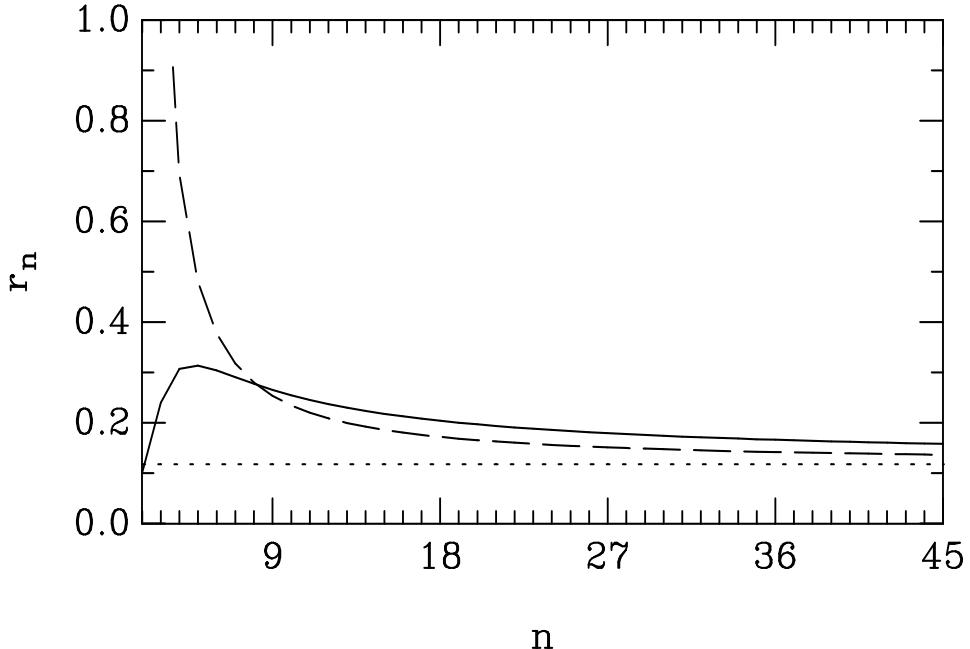


Abbildung A.2: Die bei  $\epsilon = 0.001$  gegen den Konvergenzradius konvergierende Folge  $r_n$  für  $B$  (durchgezogene Linie),  $A$  (gestrichelte Linie),  $d$  (gepunktete Linie)

summationen mit der Renormierungsgruppe bei Verwendung eines massenunabhängigen Schemas. Diese Formeln lauten [BE 95]:

$$\bar{A}_{LL}(\bar{p}^2) = \sqrt{1 + \xi \frac{\alpha_1(\epsilon)}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}}} \quad (\text{A.6a})$$

$$\bar{d}_{LL}(p^2) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_4(\epsilon)}{\xi} \ln \bar{A}_{LL}(\bar{p}^2)} \quad (\text{A.6b})$$

$$\bar{B}_{LL, \bar{m} \neq 0}(\bar{p}^2) = \bar{m} [\bar{A}_{LL}(\bar{p}^2)]^{\alpha_2(\epsilon)} \left\{ 1 + \frac{\alpha_4(\epsilon)}{\xi} \ln \bar{A}_{LL}(\bar{p}^2) \right\}^{\alpha_3(\epsilon)} \quad (\text{A.6c})$$

$$\bar{B}_{LL, \bar{m} = 0}(\bar{p}^2) = \frac{1}{\bar{p}^2} < \bar{\Psi} \bar{\Psi} > \frac{\xi + (3 - 2\epsilon) \bar{d}_{LL}(\bar{p}^2)}{4} \quad (\text{A.6d})$$

$$\times [\bar{A}_{LL}(\bar{p}^2)]^{-\alpha_2(\epsilon)} \left\{ 1 + \frac{\alpha_4(\epsilon)}{\xi} \ln \bar{A}_{LL}(\bar{p}^2) \right\}^{-\alpha_3(\epsilon)}$$

$$\alpha_1(\epsilon) = (4\pi)^{\epsilon-2} \frac{4(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)\Gamma(2-\epsilon)} \quad (\text{A.6e})$$

$$\alpha_2(\epsilon) = \frac{2 - \epsilon}{2(1 - \epsilon)} \quad (\text{A.6f})$$

$$\alpha_3(\epsilon) = \frac{3 - 2\epsilon}{4} - \frac{\epsilon^2 - 5\epsilon + 6}{\epsilon^2 - 5\epsilon + 2} \quad (\text{A.6g})$$

$$\alpha_4(\epsilon) = \frac{4 - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \left( 1 - \frac{4}{\epsilon^2 - 5\epsilon + 6} \right) \quad (\text{A.6h})$$

Diese Leading-Log-Formeln sind für  $\xi = 0$  regulär und lauten in der Landau-Eichung:

$$\bar{A}_{LL}(\bar{p}^2) = 1 \quad (\text{A.7a})$$

$$\bar{d}_{LL}(\bar{p}^2) = \frac{1}{1 + \frac{\beta_1^L(\epsilon)}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}}} \quad (\text{A.7b})$$

$$\bar{B}_{LL, \bar{m} \neq 0}(\bar{p}^2) = \bar{m} \left\{ 1 + \frac{\beta_1^L(\epsilon)}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right\}^{-\frac{\gamma_{m,1}^L(\epsilon)}{2\beta_1^L(\epsilon)}} \quad (\text{A.7c})$$

$$\bar{B}_{LL, \bar{m} = 0}(\bar{p}^2) = (3 - 2\epsilon) \frac{1}{4} \frac{1}{\bar{p}^2} < \overline{\Psi \Psi} > \left\{ 1 + \frac{\beta_1^L(\epsilon)}{\epsilon} \frac{1}{\bar{p}^{2\epsilon}} \right\}^{\frac{\gamma_{m,1}^L(\epsilon)}{2\beta_1^L(\epsilon)} - 1} \quad (\text{A.7d})$$

$$\beta_1^L(\epsilon) = \frac{4(4\pi)^{\epsilon-2}}{\Gamma(2-\epsilon)} \left( 1 - \frac{4}{\epsilon^2 - 5\epsilon + 6} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} \quad (\text{A.7e})$$

$$\gamma_{m,1}^L(\epsilon) = 2(4\pi)^{\epsilon-2} \frac{2\epsilon - 3}{\Gamma(2-\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -6 \frac{1}{(4\pi)^2} \quad (\text{A.7f})$$

Für kleine  $\epsilon$  gehen  $\beta_1^L(\epsilon), \gamma_{m,1}^L(\epsilon)$  in die Koeffizienten der Betafunktion und der anomalen Dimension der ersten Ordnung Störungsrechnung über.

## Anhang B

# Das numerische Lösungsverfahren

In diesem Anhang zeigen wir, wie das Selbstkonsistenzproblem der unrenormierten SD-Gl. in der Leiternäherung für  $d < 4$  numerisch durch Iteration gelöst werden kann. Für das numerische Lösungsverfahren werden drei Module benötigt:

- Berechnung der Schleifenintegrale
- Numerische Darstellung der invarianten Funktionen
- Lösungsalgorithmus für das Selbstkonsistenzproblem

Als Ausgangspunkt für unser Lösungsverfahren verwenden wir Gl.(2.12), da hier die beiden Parameter  $\tilde{g}, \tilde{m}$  explizit vorkommen. Dies ist vorteilhaft bei der Berechnung renormierter Lösungen, wenn neben der Selbstkonsistenz auch noch Renormierungsbedingungen durch Nachführen der nackten Parameter eingehalten werden müssen. Wenn wir  $\tilde{g} = 1$  setzen, ist es, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, mit diesen Gleichungen möglich, auch die Lösungen von Gl.(2.9) zu berechnen. Wir verwenden dieses System bei den Rechnungen zur dynamischen Massenbildung.

Charakteristisch für die dimensionelle Regularisierung ist, daß die Impulsskala, wie in Kapitel 3.1 diskutiert, über sehr viele Größenordnungen betrachtet werden muß. Je mehr wir uns  $d = 4$  nähern desto weiter dehnt sich die Impulsskala, auf der die wesentlichen Strukturen der invarianten Funktionen leben, aus. Die auftretenden Skalen überschreiten schnell den in der Numerik zur Verfügung stehenden Darstellungsbereich der reelle Zahlen, so daß es hier besonders darauf ankommt, geeignete Aufteilungen und Transformationen auf numerisch behandelbare Zahlenbereiche zu finden.

### B.1 Berechnung der Schleifenintegrale

In den Integranden treten sehr große und sehr kleine Zahlen auf, die teilweise einzeln numerisch nicht mehr handhabbar sind. Daher ist es wichtig, die Impulsintegrale aufzuteilen und den Integrationsimpuls geeignet zu transformieren, so daß die großen und kleinen Zahlen analytisch zusammengefaßt

werden können und numerisch nicht mehr in Erscheinung treten. Den Integrationsbereich zerlegen wir in drei Teile. Mit Hilfe der Integrationsformel Gl.(2.2) schreiben wir für eine Selbstenergieschleife  $F(\bar{p}^2)$ :

$$F(\bar{p}^2) = F^{(A)}(\bar{p}^2) + F^{(B)}(\bar{p}^2) + F^{(C)}(\bar{p}^2) \quad (\text{B.1a})$$

$$F^{(A)}(\bar{p}^2) = c_d \int_0^P dK K^{3-2\epsilon} \tilde{f}(K, P) \quad (\text{B.1b})$$

$$F^{(B)}(\bar{p}^2) = c_d \int_P^\Lambda dK K^{3-2\epsilon} \tilde{f}(K, P) \quad (\text{B.1c})$$

$$F^{(C)}(\bar{p}^2) = c_d \int_\Lambda^\infty dK K^{3-2\epsilon} \tilde{f}(K, P) \quad (\text{B.1d})$$

Das erste Integrationsintervall geht bis  $P = |\bar{p}|$ , weil die Integranden bei  $P = K$  oft eine nicht differenzierbare Kante ausbilden<sup>1</sup>. Es ist vorteilhaft eine solche Kante auf den Rand des Integrationsbereichs zu legen, da sie in den einzelnen Integralen dann nicht mehr als numerisch aufwendig abzutastende Kante erscheint. Die untere Grenze des dritten Intervalls ist mit  $\Lambda = \Lambda_{UV} + P$  so gewählt, daß für die Berechnung des dritten Integranden von den invarianten Funktionen nur die Asymptotik benötigt wird<sup>2</sup>. Es ist möglich  $F^{(C)}(\bar{p}^2)$  analytisch zu berechnen. Da jedoch aufgrund des Propagatorprodukts nach Einsetzen der Asymptotiksumme eine Doppelsumme auszuwerten ist, ist es effektiver, dieses Integral numerisch zu behandeln.

Mit geeigneten Transformationen des Integrationsimpulses erhalten wir die Integrale

$$F^{(A)}(p^2) = c_d P^{-2\epsilon} \int_0^1 dy P^4 y^{3-2\epsilon} \tilde{f}(Py, P) \quad (\text{B.2a})$$

$$\text{mit } y = \frac{K}{P}$$

$$F^{(B)}(p^2) = c_d P^{-2\epsilon} \int_0^{\ln \frac{\Lambda}{P}} dy (Pe^y)^4 e^{-2\epsilon y} \tilde{f}(Pe^y, P) \quad (\text{B.2b})$$

$$\text{mit } y = \ln \frac{K}{P}$$

$$F^{(C)}(p^2) = \frac{c_d}{2\epsilon} P^{-2\epsilon} \int_0^{(\frac{\Lambda}{P})^{-2\epsilon}} dy (Py^{-\frac{1}{2\epsilon}})^4 \tilde{f}(Py^{-\frac{1}{2\epsilon}}, P) \quad (\text{B.2c})$$

$$\text{mit } y = (\frac{K}{P})^{-2\epsilon}$$

---

<sup>1</sup>Der Grund für diese nicht differenzierbare Stelle liegt darin, daß bei  $P = K, x = 1$  die Variable  $q^2$  eine Nullstelle hat.

<sup>2</sup> $\Lambda_{UV}$  ist der Punkt auf der Impulsskala, ab dem die invarianten Funktionen hinreichend genau durch ihre Asymptotiksumme Gl.(2.14) beschrieben werden.

deren Integranden nun so formuliert werden können, daß keine sehr großen oder sehr kleinen Zahlen in der Numerik auftauchen.

## B.2 Numerische Darstellung der invarianten Funktionen

Im UV-Bereich werden die invarianten Funktionen mit ihrer Asymptotik Gl.(2.14) berechnet und auf der übrigen Impulsskala durch kubische Splines interpoliert. Kubische Splines sind in ihrer ersten Ableitung noch stetig differenzierbar, so daß die erste Ableitung der invarianten Funktionen, die ja benötigt wird, um die Integrale für  $d < 4$  konvergent zu formulieren, ebenfalls gut interpoliert wird.

Da die wesentliche Struktur dieser Funktionen auf zwei Skalen lebt, werden sie abschnittsweise definiert. Insgesamt gehen diese Skalen über viele Größenordnungen, so daß wir die Funktionen auf einer logarithmischen Skala  $x = \ln |\tilde{p}|$  definieren.

Wie in Abbildung 3.2 gezeigt, scheint die invariante Funktion  $\tilde{B}$  auf der logarithmischen  $x$ -Skala eine Kante auszubilden, die auf der  $\tilde{p}^2$ -Skala aber absolut glatt aussieht. Für die abschnittsweise Definition der Funktionen verwenden wir im IR-Bereich eine  $\tilde{p}^2$ -Skala und jenseits des IR-Bereichs die logarithmische  $x$ -Skala:

$$\tilde{A}(e^{2x}) = \begin{cases} S_A^{(0)}\left(\frac{e^{2x}}{\kappa^2}\right) & \text{für } -\infty < x \leq \Lambda_{IR} \\ S_A^{(1)}(x) & \text{für } \Lambda_{IR} < x < \Lambda_{UV} \\ \tilde{A}^{(N)}(x) & \text{für } \Lambda_{UV} \leq x < \infty \end{cases} \quad (\text{B.3a})$$

$$\tilde{B}(e^{2x}) = \begin{cases} \exp\left(S_B^{(0)}\left(\frac{e^{2x}}{\kappa^2}\right)\right) & \text{für } -\infty < x \leq \Lambda_{IR} \\ \exp\left(S_B^{(1)}(x)\right) & \text{für } \Lambda_{IR} < x < \Lambda_{UV} \\ \tilde{B}^{(N)}(x) & \text{für } \Lambda_{UV} \leq x < \infty \end{cases} \quad (\text{B.3b})$$

$$\tilde{d}(e^{2x}) = \begin{cases} S_d^{(0)}\left(\frac{e^{2x}}{\kappa^2}\right) & \text{für } -\infty < x \leq \Lambda_{IR} \\ S_d^{(1)}(x) & \text{für } \Lambda_{IR} < x < \Lambda_{UV} \\ \tilde{d}^{(N)}(x) & \text{für } \Lambda_{UV} \leq x < \infty \end{cases} \quad (\text{B.3c})$$

Das Ende des IR-Intervalls  $\Lambda_{IR}$  liegt an dem Punkt, wo  $\tilde{B}(e^{2x})$  beginnt, eine Kante auszubilden. Empirisch zeigt sich, daß dieser Punkt durch die Infrarotmassenskala  $\kappa$  gegeben ist:

$$\kappa = \frac{\tilde{B}(0)}{\tilde{A}(0)} \quad (\text{B.4a})$$

$$\Lambda_{IR} = \ln \kappa \quad (B.4b)$$

Den Beginn des UV-Intervalls wählen wir so, daß für  $x \geq \Lambda_{UV}$  die Asymptotiksummen:

$$\tilde{A}^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^N a_j e^{-2x\epsilon j} \quad (B.5a)$$

$$\tilde{B}^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^N b_j e^{-2x\epsilon j} \quad (B.5b)$$

$$\tilde{d}^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^N d_j e^{-2x\epsilon j} \quad (B.5c)$$

mit den Koeffizienten aus Gl.(2.18), bei gegebenem  $N$  eine hinreichend genaue Approximation der Asymptotik sind.

Da für große Kopplungen und kleine  $\epsilon$  die invariante Funktion  $\tilde{B}(e^{2x})$  über viele Größenordnungen variieren kann, wird sie nicht direkt, sondern über ihren Logarithmus durch Splines dargestellt. Bei den Untersuchungen zur dynamischen Massenbildung wird  $\tilde{B}(e^{2x})$  nicht so groß und kann sogar bei negativem  $\bar{m}$  negativ werden. In diesen Rechnungen wird  $\tilde{B}(e^{2x})$  ohne die Exponentialfunktion dargestellt.

Die kubischen Splines  $S_A^{(0)}, S_B^{(0)}, S_d^{(0)}$  werden an  $n_0$  Punkten, die äquidistant in der Variablen  $\tilde{p}^2$  sind, angefittet. Die beiden letzten Punkte liegen rechts von  $\Lambda_{IR}$ , so daß ein Überlapp mit dem mittleren Intervall besteht. Die auf dem mittleren Intervall definierten Splines  $S_A^{(1)}, S_B^{(1)}, S_d^{(1)}$  werden an  $n_1$  Punkten, die äquidistant in der Variablen  $x$  sind, angefittet. Die beiden ersten Punkte liegen links von  $\Lambda_{IR}$ , so daß ein Überlapp mit dem IR-Intervall besteht. Die fünf letzten Punkte liegen zwischen  $\Lambda_{UV}$  und  $\frac{11}{10}\Lambda_{UV}$ . Die Funktionswerte an diesen Punkten werden mit der Asymptotiksumme berechnet. Wenn die Parameter  $\epsilon, \tilde{g}, \tilde{m}$  in extreme Bereiche geführt werden, wird  $\Lambda_{UV}$  und  $\tilde{B}(0)$  sehr groß und die Kante im IR-Bereich immer schärfer, so daß im Bereich der Kante eine höhere Punktdichte erforderlich wird. Wenn  $\Lambda_{UV} > \Lambda_{IR} + 10$  verteilen wir die Hälfte der Stützstellen des mittleren Bereiches zwischen  $\Lambda_{IR}$  und  $\Lambda_{IR} + 10$  und die andere Hälfte im restlichen Intervall. Beide Verteilungen sind wieder äquidistant auf der  $x$ -Skala.

Dadurch, daß für die Fits sich überlappende Intervalle gewählt werden, ist sichergestellt, daß die invarianten Funktionen und ihre Ableitungen, im Rahmen der numerischen Genauigkeit, bei  $\Lambda_{IR}$  und  $\Lambda_{UV}$  stetig sind. Für  $n_0$  verwenden wir Werte zwischen 7 und 12 und für  $n_1$  ungefähr das doppelte bis vierfache. Die Abbildung B.1 zeigt graphisch, wie die Stützstellenverteilung auf den beiden Skalen aussieht.

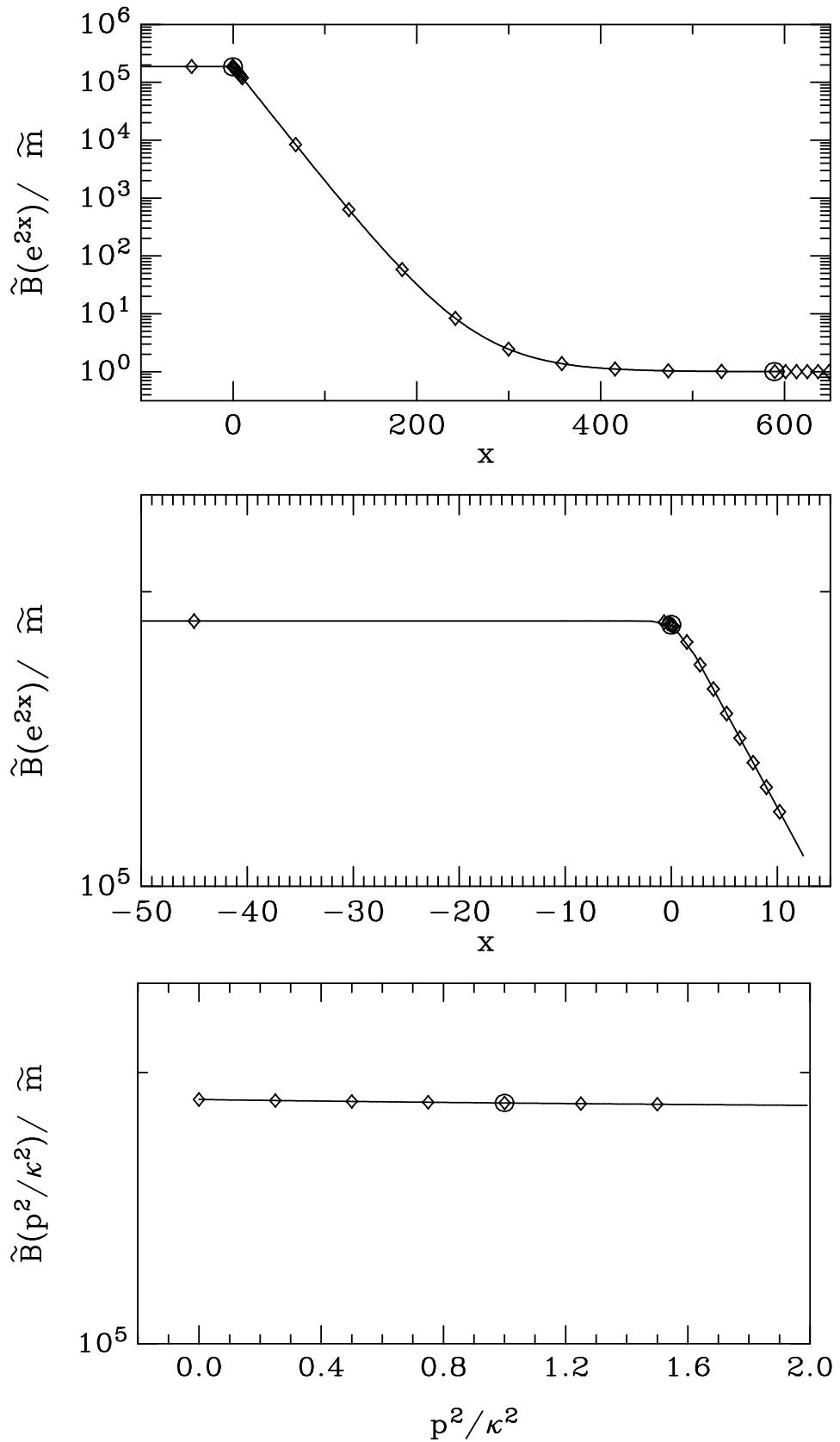


Abbildung B.1: Invariante Funktion  $\tilde{B}$  mit ihren Fitpunkten für  $\epsilon = 0.01, \tilde{g} = 15, \tilde{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}, \xi = 0, \kappa = \frac{\tilde{B}(0)}{\tilde{A}(0)} \approx 1$ . Die beiden Kreise stehen bei  $\Lambda_{IR}$  und  $\Lambda_{UV}$

### B.3 Lösungsalgorithmus für das Selbstkonsistenzproblem

Unser Lösungsalgorithmus ist ein Iterationsverfahren, bei dem die invarianten Funktionen mit der rechten Seite von Gl.(2.12) berechnet werden. Wir setzen sie immer wieder in die rechte Seite ein und berechnen die Integrale neu, bis sie sich im Rahmen einer vorgegebenen Fehlerschranke stabilisiert haben. Im einzelnen besteht der Iterationsprozeß aus den folgenden Schritten:

- Zu Beginn der Iteration müssen Startwerte für die invarianten Funktionen berechnet werden. Dazu verwenden wir die Leading-Log-ähnlichen Aufsummationen der Asymptotik Gl.(A.6), die das richtige Verhalten im UV-Bereich haben. Damit diese bei  $\tilde{p}^2 = 0$  singulären Funktionen auch im IR-Punkt einen sinnvollen Startwert ergeben, ersetzen wir  $\tilde{p}^2 \rightarrow \tilde{p}^2 + \kappa^2$  und bestimmen die IR-Massenskala  $\kappa = \frac{\tilde{B}_{LL}(0)}{\tilde{A}_{LL}(0)}$  durch Iteration der Gl.(A.6). Die so gewonnenen Startfunktionen

$$\tilde{A}(\tilde{p}^2) = \tilde{A}_{LL}(\tilde{p}^2 + \kappa^2) \quad (\text{B.6a})$$

$$\tilde{B}(\tilde{p}^2) = \tilde{B}_{LL}(\tilde{p}^2 + \kappa^2) \quad (\text{B.6b})$$

$$\tilde{d}(\tilde{p}^2) = \tilde{d}_{LL}(\tilde{p}^2 + \kappa^2) \quad (\text{B.6c})$$

stimmen für nicht zu kleine  $\epsilon$  und zu große Kopplungen erstaunlich gut mit den selbstkonsistenten Lösungen der SD-Gl. überein.

- Vor jedem Iterationsschritt wird die Verteilung der Stützstellen neu ermittelt. Dies ist notwendig, da die Qualität, mit der die Splines die invarianten Funktionen darstellen können, sehr empfindlich von der sich im Iterationsprozeß ändernden Größe  $\Lambda_{IR}$  bzw.  $\kappa = \frac{\tilde{B}(0)}{\tilde{A}(0)}$  abhängt.
- Beim Iterationsschritt wird zunächst für jede Stützstelle das entsprechende Schleifenintegral der rechten Seite von Gl.(2.12) ausgewertet. An diese Punkte werden dann die Splines der invarianten Funktionen angefittet und im nächsten Iterationsschritt als Startwert verwendet.
- Nach jedem Iterationsschritt wird an den Stützstellen die maximale relative Abweichung der neu berechneten invarianten Funktionen vom entsprechenden Startwert des jeweiligen Iterationsschritts ermittelt. Der Iterationsprozeß wird abgebrochen, wenn diese Abweichung kleiner als 0.1% ist.

Die meiste Zeit benötigt dieses Lösungsverfahren zum Berechnen der Integrale. Eine Verbesserung der Performance kann in einer schnelleren Berechnung der Integrale oder in der Reduzierung der Iterationszahl bestehen.

Besonders zeitaufwendig ist die Berechnung der Photonselbstenergie. Es ist zu beobachten, daß sich diese Funktion im Iterationsprozeß nahezu

nicht verändert, selbst wenn die Fermionselbstenergie sehr große Änderungen erfährt. Bevor die Photonschleife an allen Stützstellen berechnet wird, überprüfen wir am IR-Punkt, ob die relative Änderung im Vergleich zum letzten Fit kleiner als 0.1% ist. Die Photonschleife wird an den anderen Stützstellen in diesem Iterationsschritt nur dann neu berechnet, wenn dies nicht der Fall ist. Nach Abbruch der Iteration schalten wir in einen Modus um, bei dem die Photonschleife grundsätzlich voll mitberechnet wird, und iterieren weiter. Nach ein bis zwei dieser zusätzlichen Iterationen ist die Lösung dann stabil.

Die Gesamtzahl der Iterationen kann durch bessere Startwerte reduziert werden. In extremen Parameterbereichen, wenn z.B.  $\tilde{g}$  groß wird, sind die Leading-Log-Formeln keine guten Startwerte mehr. Es gibt daher einen Modus, in dem alternativ auch die zuletzt gefundene Lösung als Startwert für einen neuen Iterationsprozeß verwendet werden kann. Damit ist es möglich, von einer kleinen Kopplung ausgehend schrittweise die Lösungen für immer größere Kopplungen zu berechnen.

Bei der Berechnung renormierter Lösungen möchten wir anstatt  $\tilde{g}, \tilde{m}$  die Parameter  $\tilde{g}, \tilde{m}_r$  vorgeben. Dazu ist es möglich, in jedem Iterationsschritt die nackte Masse durch Iteration so nachzuführen, daß die renormierte Masse den vorgegebenen Wert behält. Die Iterationszahl erhöht sich dadurch nur unwesentlich.

## B.4 Implementation des Lösungsverfahrens

Unser Lösungsverfahren ist als Fortran 77 Programm implementiert. Für die Berechnung der Integrale und für die Darstellung der invarianten Funktionen durch Splines verwenden wir Unterprogramme aus der NAG [NA 91] und der IMSL [IM 91] Bibliothek.

Die verwendeten Integrationsprogramme aus NAG und IMSL sind adaptiven Routinen, die bei Vorgabe eines relativen Fehlers automatisch eine geeignete Abtastung des Integranden vornehmen und diese solange verfeinern, bis das Ergebnis unterhalb der gewünschten Fehlerschranke liegt. Wir haben sämtliche Integrationen mit einer Fehlerschranke von 0.1% ausgeführt. Die tatsächlichen Fehler waren meistens einige Größenordnungen kleiner. Die adaptiven Routinen sind nicht die schnellsten, aber hinsichtlich des Fehlers die sichersten.

Die Iterationsroutine bricht ab, wenn der größte Fehler an einer der Stützstellen unterhalb von 0.1% liegt. Wenn die Parameter  $\tilde{g}, \tilde{m}, \epsilon$  nicht gerade in extreme Bereiche vorstoßen, genügen bei dieser Fehlerschranke zwischen 2 und 20 Iterationen.

Für die Asymptotiksummen werden zwischen 2 und 10 Summanden verwendet und  $\Lambda_{UV}$  solange verdoppelt, bis der Beitrag des letzten Summanden zur Asymptotik unter 0.01% liegt und die Abweichung der Asymptotik von den Leading-Log-Formeln 0.1% nicht übersteigt.

Die Rechnungen wurden auf DEC-Workstations vom Typ DEC-Station 5000/200 ausgeführt. Die auf diesen Rechnern benötigte Rechenzeit beträgt z.B. für die 240 Lösungen zu Abbildung 3.4 428 Stunden. Im Mittel werden

pro Lösung 1.8 Stunden benötigt.

## Anhang C

# Kernabschätzungen

In diesem Anhang sind die für die Kernabschätzung in Kapitel 4.4 benötigten Rechnungen zusammengestellt. Es soll für kleine <sup>1</sup>  $\epsilon$  eine obere Schranke für die Norm des Integralkerns Gl.(4.27) angegeben werden. Diese Norm besteht aus einem dreifachen Integral:

$$\begin{aligned} \|K\| &= g^2 c_d (3 - 2\epsilon) & (C.1) \\ &\times \sqrt{\int_0^\infty dp \int_0^\infty dk \frac{p^{3-2\epsilon}}{p^2 + m_d^2} \frac{k^{3-2\epsilon}}{k^2 + m_d^2} \left( \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d(q^2)}{q^2} \right)^2} \\ q^2 &= k^2 + p^2 - 2pkx \end{aligned}$$

Der Faktor vor der Wurzel wird durch eine Konstante abgeschätzt:

$$c_d (3 - 2\epsilon) < \frac{1}{11} & (C.2)$$

Mit der Abschätzung des Winkelintegrals durch die invariante Funktion  $d(p^2)$  nach Gl.(C.11) erhalten wir für die Norm:

$$\|K\| \leq 2g^2 \sqrt{\int_0^\infty dp \int_0^\infty dk \frac{p^{3-2\epsilon}}{p^2 + m_d^2} \frac{k^{3-2\epsilon}}{k^2 + m_d^2} \frac{d(2(p^2 + k^2))}{(p^2 + k^2)^2}} & (C.3)$$

Diese Darstellung legt es nahe, für die Impulsbeträge Polarkoordinaten

$$p = r \cos \varphi & (C.4)$$

$$k = r \sin \varphi & (C.5)$$

einzuführen, da das Winkelintegral dann nicht von  $d(p^2)$  abhängt:

$$\|K\| \leq 2g^2 \sqrt{\int_0^\infty dr r^{3-4\epsilon} d^2(2r^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{(\cos \varphi \sin \varphi)^{3-2\epsilon}}{(r^2 \cos^2 \varphi + m_d^2)(r^2 \sin^2 \varphi + m_d^2)}}$$

---

<sup>1</sup>Einige der in diesem Anhang durchgeführten Abschätzungen gelten bei größer werdendem  $\epsilon$  nicht mehr. Für  $\epsilon < 0.1$  sollten alle Abschätzungen stimmen.

Das Integral über  $\varphi$  wird mit Gl.(C.23) abgeschätzt, so daß die Norm nur noch aus einem Integral über  $r$  besteht:

$$\begin{aligned} \|K\| &\leq 2g^2 \sqrt{\int_0^\infty dr r^{3-4\epsilon} d^2(2r^2) \frac{4}{(r^2 + m_d^2)^2}} \\ &\leq 4g^2 \sqrt{\int_0^\infty dr \frac{r(r^2 + m_d^2)^{1-2\epsilon}}{(r^2 + m_d^2)^2} d^2(2r^2)} \end{aligned}$$

Mit  $z = (r^2 + m_d^2)^{-\epsilon}$  wird dieses Integral zu:

$$\|K\| \leq 4g^2 \sqrt{\frac{1}{2\epsilon} \int_0^{m_d^{-2\epsilon}} dz z d^2(2r^2)} \quad (\text{C.6})$$

Der Photonpropagator wird mit Gl.(C.15) durch seine Leading-Log-Formel abgeschätzt:

$$\|K\| < 4g^2 \sqrt{\frac{1}{2\epsilon} \int_0^{m_d^{-2\epsilon}} dz \frac{z}{\left(1 + \frac{\beta_1}{2\epsilon} g^2 z\right)^2}} \quad (\text{C.7})$$

Dies analytisch ausführbare Integral führt auf die obere Schranke der Norm,

$$\|K\| \leq \frac{8}{\sqrt{2}\beta_1} \sqrt{\frac{\epsilon^2}{\epsilon + \frac{\beta_1}{2} g^2 m_d^{-2\epsilon}} + \epsilon \ln \left( \epsilon + \frac{\beta_1}{2} g^2 m_d^{-2\epsilon} \right) - \epsilon \ln \epsilon - \epsilon} \quad (\text{C.8})$$

mit der in Kapitel 4.4 die Nichtexistenz dynamischer Massen bei kleinen  $\epsilon$  gezeigt wird.

## Abschätzung für das Winkelintegral über $x$

Für die Abschätzung des Winkelintegrals in Gl.(C.1) teilen wir den Integrationsbereich bei  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d(q^2)}{q^2} &= \int_{-1}^0 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d((p^2+k^2)f(p,k,x))}{(p^2+k^2)f(p,k,x)} \\ &\quad + \int_0^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d((p^2+k^2)f(p,k,x))}{(p^2+k^2)f(p,k,x)} \\ f(p,k,x) &= 1 - \frac{2pk}{p^2+k^2} x \end{aligned}$$

Für die folgende Abschätzung verwenden wir, daß die invariante Funktion  $d(p^2)$  des Photonpropagators eine monoton ansteigende Funktion ist:

$$d(p^2) \leq d(p^2 + \alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \quad (\text{C.9})$$

Mit Gl.(C.15) wird gezeigt, daß  $d(p^2)$  durch die Leading-Log-Formel, die diese Monotonieeigenschaft hat, abgeschätzt werden kann. Mit  $\frac{2pk}{p^2+k^2} \leq 1$  wird das Winkelintegral abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d(q^2)}{q^2} &\leq \frac{1}{p^2+k^2} \left\{ \int_{-1}^0 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} d(2(p^2+k^2)) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d(2(p^2+k^2))}{1-x} \right\} \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

Diese nur von  $\epsilon$  abhängenden Integrale können analytisch berechnet werden und sind durch Konstanten abschätzbar:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} < 2 \quad \text{für } \epsilon < 1 \\ \int_0^1 dx \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{1-x} &= \frac{2}{1-2\epsilon} < 20 \quad \text{für } \epsilon < 0.45 \end{aligned}$$

Damit kann nun das Winkelintegral durch die invariante Funktion des Photonpropagators abgeschätzt werden:

$$\int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{d(q^2)}{q^2} \leq \frac{22}{p^2+k^2} d(2(p^2+k^2)) \quad (\text{C.11})$$

### Abschätzung für $d(p^2)$

Die Abschätzung für die invariante Funktion  $d(p^2)$  gewinnen wir aus der SD-Gl. für  $d(p^2)$ , in der, wie bei Gl.(4.21), die Funktion  $B^2(p^2)$  im Nenner durch  $m_d^2 = B^2(p^2 = 0)$  und  $A(p^2)$  durch  $A(p^2) = 1$  ersetzt wird. Mit Gl.(1.29) erhalten wir damit:

$$d(p^2) = \frac{1}{1+g^2\Pi(p^2)} \quad (\text{C.12a})$$

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) &= 8 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2+m_d^2)((p-k)^2+m_d^2)} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{k^2 (\hat{k} \cdot \hat{p})^2 d - 1}{p^2 - 1 - d} \right\} \\ &= \Pi_{pert}(p^2, m = m_d) \quad (\text{C.12b}) \end{aligned}$$

Mit dem perturbativen Selbstenergie-Integral erhalten wir [BE 95]:

$$\Pi(p^2) = \underbrace{\frac{4\Gamma(\epsilon)}{3(4\pi)^{2-\epsilon}}}_{\geq \frac{\beta_1}{\epsilon}} \underbrace{\left( \frac{1}{4} p^2 + m_d^2 \right)^{-\epsilon}}_{\geq (p^2+m_d^2)^{-\epsilon}} \underbrace{{}_2F_1 \left[ \epsilon, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{p^2}{p^2+4m_d^2} \right]}_{\geq 1} \quad (\text{C.13})$$

$$\Pi(p^2) \geq \frac{\beta_1}{\epsilon} (p^2 + m_d^2)^{-\epsilon} \quad (\text{C.14})$$

Damit ist die invariante Funktion im wesentlichen durch die Leading-Log-Formel abgeschätzt:

$$d(p^2) \leq \frac{1}{1 + g^2 \frac{\beta_1}{\epsilon} (p^2 + m_d^2)^{-\epsilon}} \quad \text{mit} \quad \beta_1 = \frac{4}{3(4\pi)^2} \quad (\text{C.15})$$

### Abschätzung für das Winkelintegral über $\varphi$

Für die Abschätzung des Winkelintegrals

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{(\cos \varphi \sin \varphi)^{3-2\epsilon}}{(r^2 \cos^2 \varphi + m_d^2)(r^2 \sin^2 \varphi + m_d^2)} \quad (\text{C.16})$$

transformieren wir mit  $x = \cos \varphi$  und  $\alpha = \frac{r^2}{m_d^2}$  auf:

$$I = \frac{1}{m_d^4} \int_0^1 dx \frac{x(x\sqrt{1-x^2})^{2-2\epsilon}}{1 + \alpha + \alpha^2 x^2(1-x^2)} \quad (\text{C.17})$$

$$\leq \frac{1}{m_d^4} \int_0^1 dx \frac{x(x\sqrt{1-x^2})^{\frac{3}{2}}}{1 + \alpha + \alpha^2 x^2(1-x^2)} \quad \text{für} \quad \epsilon \leq \frac{1}{4} \quad (\text{C.18})$$

Eine grobe Abschätzung erhalten wir, indem  $\alpha = 0$  gesetzt wird:

$$I \leq \frac{1}{m_d^4} \int_0^1 dx x(x\sqrt{1-x^2})^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{m_d^4} \quad (\text{C.19})$$

Diese Abschätzung ist bei großen  $\alpha$  für unsere Anwendung zu grob. Wir benutzen sie nur, um das Integral für kleine  $\alpha$  abzuschätzen:

$$I \leq \frac{1}{m_d^4} \leq \frac{1}{m_d^4} \frac{4}{(\alpha+1)^2} \quad \text{für} \quad \alpha \leq 1 \quad (\text{C.20})$$

Für  $\alpha \geq 1$  gilt

$$I \leq \frac{1}{m_d^4} \int_0^1 dx \frac{x(x\sqrt{1-x^2})^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2 x^2(1-x^2)} = \frac{1}{m_d^4} \frac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\sqrt{\pi} \alpha^2} \quad (\text{C.21})$$

$$\leq \frac{1}{m_d^4} \frac{1}{\alpha^2} \leq \frac{1}{m_d^4} \frac{4}{(\alpha+1)^2} \quad (\text{C.22})$$

Damit gilt für alle  $\alpha$ :

$$I \leq \frac{1}{m_d^4} \frac{4}{(\alpha+1)^2} = \frac{4}{r^2 + m_d^2} \quad (\text{C.23})$$

# Literaturverzeichnis

- [As 72] Ashmore, J. F. (1972). *Nuovo Cimento Lett.* **4**, 289.
- [As 73] Ashmore, J. F. (1973). *Commun. Math. Phys.* **29**, 177.
- [BE 95] Becker, M. (1995). *Nichtperturbative Strukturuntersuchungen der QED mittels genäherter Schwinger-Dyson-Gleichungen in dimensioneller Regularisierung*, Dissertation an der WWU Münster.
- [Bo 72] Bollini, C. G., Giambiagi, J. J. (1972). *Nuovo Cimento B* **12**, 20.
- [BR 89] Brown, N., Pennington, M. R. (1989). Studies of confinement: How the gluon propagates, *Phys. Rev. D* **39**, 2723.
- [Co 84] Collins, J. (1984). *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [DE 85] Delves, L.M., Mohamed, J.L. (1985). *Computational methods for integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [Fo 83] Fomin, P.I., Gusynin, V.P., Miransky, V.A., Sitenko, Yu.A. (1983). Dynamical Symmetrie Breaking and Particle Mass Generation in Gauge Field Theories, *Riv. Nuovo Cimento* **6**, No. 5.
- [Ho 72] 't Hooft, G., Veltman, M. (1972). *Nucl. Phys. B* **44**, 189.
- [IM 91] *IMSL Math Library – Version 2.0* (1991), IMSL, Inc., Houston, Texas.
- [KA 81] Kaempffer, F. A., (1981). Toward an exact quantum electrodynamics, *Phys. Rev. D* **25**, 439.
- [LA 86] Landau, L.D., Lifschitz E.M. (1986). *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band IV, Quantenelektrodynamik*, Akademie-Verlag Berlin.
- [LE 75] Leibbrandt, G. (1975). *Introduction to the technique of dimensional regularization*, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 849.
- [NA 91] *NAG Fortran Library Manual – Mark 15* (1991), Numerical Algorithms Group Ltd, Oxford.

- [RA 91] Rakow, P.E.L. (1991). Renormalisation group flow in QED - An investigation of the Schwinger-Dyson equations, *Nucl. Phys.* **B356**, 27.
- [Sc 91] Scholze, M. (1991). *Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgs-Feld*, Diplomarbeit an der WWU Münster.
- [Tr 81] Triebel, H. (1981). *Analysis und mathematische Physik*, Carl Hanser Verlag München Wien.

# **Schlußwort**

Zum Schluß möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit in irgendeiner Weise unterstützt haben.

Zuerst gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. M. Stingl für die Anregung zu diesem interessanten Thema und für die ständige Bereitschaft zu klärenden Diskussionen.

Ganz besonders bedanke ich mich bei Markus Becker für die gute Arbeitsatmosphäre, die durch den regen Gedankenaustausch und die gute Zusammenarbeit die Anfertigung dieser Arbeit wesentlich gefördert hat.

# Lebenslauf

Name	Michael Georg Scholze
geboren	am 30. 4. 1965 in Münster
Eltern	Georg Scholze Agnes Scholze, geb. Eilert
Familienstand	ledig
1971-1975	Besuch der Grundschule in Westbevern
1975-1982	Besuch der Kardinal-von-Galen-Schule (Realschule) in Telgte
1982-1985	Besuch der Oberstufe des Augustin-Wibbelt-Gymnasiums in Warendorf
6. 5. 1985	Zeugnis der allgemeinen Hochschulreife
WS 1985/86	Aufnahme des Studiums der Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster
6. 10. 1987	Vordiplom in Physik an der WWU in Münster
Oktober 1989	Beginn der Diplomarbeit
2. 1. 1990 - 30. 9. 1991	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
25. 9. 1991	Diplom in Physik Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl über das Thema: Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgs-Feld

1.10. 1991 - 31.12. 1991	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1.01. 1992 - 30.09. 1992	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
Januar 1992	Beginn der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1.10. 1992 - 31.12. 1992	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
seit 1. 1. 1993	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster









