

Behandlung des nichtlinearen σ -Modells mit Hilfe einer erweiterten Störungstheorie

Als Diplomarbeit vorgelegt
von
Gudrun Pinter

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
März 1997

Behandlung des nichtlinearen σ -Modells mit Hilfe einer erweiterten Störungstheorie

Als Diplomarbeit vorgelegt
von
Gudrun Pinter

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
März 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Das σ-Modell	4
1.1 Das lineare σ -Modell	4
1.2 Das nichtlineare σ -Modell	6
1.2.1 Wirkung und Funktionalintegral	6
1.2.2 Feynman-Regeln	10
2 Die Dyson-Schwinger-Gleichungen	12
2.1 DS-Gleichungen im nichtlinearen σ -Modell	12
2.2 DS-Gleichungen für verbundene und Vertexfunktionen	18
2.3 Abbruchkriterien	26
2.3.1 Graphen	26
2.3.2 N -Abhängigkeiten	31
3 Nichtperturbative Erweiterung der Störungsreihe	36
3.1 Die Renormierungsgruppengleichungen	36
3.2 Nichtperturbative Ansätze	40
3.3 Die Selbstkonsistenzgleichungen	43
3.4 $1/g^2$ -Mechanismus bei divergenten Schleifenintegralen	44
3.5 $1/g^2$ -Mechanismus konvergenter Schleifenintegrale	45
4 Der Hilfsfeldpropagator	47
4.1 Rechnung in der Ordnung $r = 0$	47
4.2 Rechnung in der Ordnung $r = 1$	49
5 Der unphysikalische Dreipunktvertex	52
6 Der Propagator des physikalischen Feldes	55
7 Die (2,1)-Vertexgleichung (A.2.1)	59
7.1 Die „entschärften“ Diagramme	60
7.2 Die „entschärfte“ DS-Gleichung	64
7.2.1 Der dritte Beitrag	65
7.2.2 Die „entschärfte“ zweite Schleife	66
7.2.3 Die „entschärfte“ erste Schleife	68

7.3	Selbstkonsistenzgleichungen	69
7.3.1	SK-Gleichungen im ersten Fall	70
7.3.2	SK-Gleichungen im zweiten Fall	72
8	Diskussion der Selbstkonsistenzgleichungen	76
8.1	SK-Gleichungen im ersten Fall	76
8.2	SK-Gleichungen im zweiten Fall	79
	Zusammenfassung	82
A	Formeln	84
B	Der Hilfsfeldpropagator in $r = 0$	86
B.1	Rechnung	86
B.2	Näherung	87
C	Der Hilfsfeldpropagator in $r = 1$	88
C.1	Rechnung	88
C.2	Näherung	98
D	Der unphysikalische Dreipunktvertex	101
E	Rechnungen zum Φ-Feld-Propagator	115
E.1	Divergente Anteile von B_0	115
E.2	Divergente Anteile von B_1	117
F	Berechnung der zweiten Schleife	121
F.1	Terme mit Pol und komp. Pol	121
F.2	Berechnung des B_0 - B_1 -Terms	124
F.3	Berechnung des B_0 - B_0 -Terms	125
G	Berechnung der ersten Schleife	127
H	Quadratisch divergente Integrale	131
	Literaturverzeichnis	133

Einleitung

In der Feldtheorie verwendet man viel Mühe auf die Untersuchung nichtabelscher Eichtheorien, aber diese Aufgabe ist schwierig und verwickelt. Trotz beachtlicher Fortschritte hat man Phänomene wie Confinement, dimensionelle Transmutation und spontane Brechung der chiralen Symmetrie noch nicht vollständig verstanden. Um neue Einblicke zu gewinnen, vereinfacht man die ursprüngliche Theorie, z.B. ersetzt man sie durch ein einfacheres Modell, welches einige Eigenschaften der nicht-abelschen Theorie besitzt. Ein solches Modell ist das nichtlineare σ -Modell. Dieses Modell besitzt die Eigenschaften der Renormierbarkeit, der asymptotischen Freiheit und der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie. Polyakov [1] erwähnt erstmals die Analogien zwischen vierdimensionalen Yang-Mills-Theorien und zweidimensionalen σ -Modellen. Den Theoretikern dient das σ -Modell als Spielzeugmodell, um die Methoden und Näherungsverfahren an ihm zu testen, die sie in der Yang-Mills-Theorie anwenden.

In dieser Arbeit wenden wir im nichtlinearen σ -Modell die Methode an, die störungstheoretischen Feynman-Regeln für die Vertexfunktionen durch rationale Approximanten in der renormierungsgruppeninvarianten Massenskala Λ nichtperturbativ zu erweitern. Die ersten Ansätze dieser Methode wurden bereits in [2, 3] benutzt. Ihre Systematik wird in [4] ausführlich beschrieben. In der QCD sind die Rechnungen in erster Stufe des rationalen Approximationsgrades inzwischen fast abgeschlossen [5, 6, 7, 8, 9].

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert: in Kapitel 1 und 2 geben wir zunächst einen Überblick über die Theorie und Eigenschaften des nichtlinearen σ -Modells. Insbesondere leiten wir in Kapitel 2 die Dyson-Schwinger-Gleichungen für dieses Modell her und diskutieren mögliche Abbruchkriterien dieser Gleichungssysteme. Die Gleichungen liefern Aussagen über die Dynamik der Theorie und dienen uns als Randbedingungen für die nichtstörungstheoretischen Ansätze. In Kapitel 3 konstruieren wir diese Ansätze, nachdem wir eine Renormierungsgruppengleichung hergeleitet haben. Mit den Lösungen dieser Gleichung kann man die nichtperturbativen Effekte erklären, die beim Rechnen mit den Ansätzen auftreten. In den folgenden Kapiteln 4 bis 7 setzen wir die Ansätze in die Dyson-Schwinger-Gleichungen ein und erhalten nichtlineare Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Ansätze, die sogenannten Selbstkonsistenzgleichungen (SK-Gleichungen). Schließlich stellen wir in Kapitel 8 alle Selbstkonsistenzgleichungen zusammen und diskutieren sie.

Kapitel 1

Das σ -Modell

1.1 Das lineare σ -Modell

Das lineare σ -Modell wurde schon 1960 von Gell-Mann und Levy [10] als Modell zur spontanen Brechung der chiralen Symmetrie vorgeschlagen. Es dient zur Beschreibung der Streuung von Pionen an Nukleonen, und seine Lagrange-Dichte enthält dementsprechend Pion- und Nukleonfelder. Wir werden uns im folgenden nur um den bosonischen Teil der Lagrange-Dichte kümmern. Er enthält die Pionfelder π_1 , π_2 , und π_3 , die zu dem Pion-Isovektor $\vec{\pi}$ zusammengefaßt werden. Die geladenen Zustände des π -Mesons kann man als Kombination der Pionfeldkomponenten erhalten:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2), \\ \pi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2), \\ \pi^0 &= \pi_3.\end{aligned}$$

Um die chirale Symmetrie zu beschreiben, geben wir die zwei Transformationen an, unter denen eine chiral-symmetrische Lagrange-Dichte invariant ist:

- Zum einen ist die Lagrange-Dichte invariant unter Isospintransformationen. Die Pionen werden dabei gemäß

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta} \times \vec{\pi}, \quad (\Theta \ll 1)$$

transformiert, d.h. der Pion-Isovektor wird um den Winkel Θ gedreht. Der nach dem Noether-Theorem wegen dieser Invarianz existierende erhaltene Strom ist der Vektorstrom

$$V_\mu^a = \epsilon_{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c,$$

und es gilt:

$$\partial^\mu V_\mu^a = 0 \quad \forall a.$$

- Als zweiten näherungsweise erhaltenen Strom beobachtet man in der Natur den Axialvektorstrom, dessen pionischer Anteil die Form

$$A_\mu^a = -\pi^a \partial_\mu \sigma + \sigma \partial_\mu \pi^a$$

besitzt. Eine chiral invariante Lagrange-Dichte ist auch unter den Transformationen, die zu diesem Strom gehören, invariant. Bei diesen Transformationen werden die Pionen mit einem weiteren skalaren Feld σ vermischt:

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &\rightarrow \vec{\pi} + \sigma \vec{\Theta}, \\ \sigma &\rightarrow \sigma - \vec{\Theta} \vec{\pi}, \end{aligned} \quad (\Theta \ll 1).$$

Daß die Natur in Wirklichkeit nicht chiral invariant ist, wird durch die PCAC¹-Hypothese ausgedrückt:

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^a(q) \rangle = -f_\pi m_\pi^2 \exp(-iqx),$$

wobei f_π eine Konstante ist.

Die Pionmasse verhindert also die Erhaltung des Axialvektorstromes. Da die Pionen aber mit etwa 135 MeV relativ kleine Massen haben, kann man den Strom in guter Näherung als erhalten betrachten.

Die zweite Symmetrie ist außerdem spontan gebrochen, das heißt die Wirkung besitzt diese Symmetrie, während der Grundzustand nicht symmetrisch ist. Die Goldstone-Bosonen sind die Pionen, und das σ -Teilchen ist ein massives Teilchen. Wäre die Natur exakt chiral invariant, so hätten die Pionen daher keine Massen. Da das σ -Feld dieser Theorie keinem realen Teilchen entspricht, vollzieht man den Grenzübergang zum nichtlinearen σ -Modell, indem man die Masse des σ -Teilchens unendlich groß werden läßt (die mathematische Beschreibung dieses Grenzübergangs findet man in [11]). Dadurch schränkt man die Dynamik auf einen Kreis im Isospinraum ein. Als weitere Verallgemeinerung läßt man die Anzahl der Pionfeldkomponenten variabel.

Eine ausführliche Behandlung der chiralen Symmetrie und ihrer Beschreibung durch σ -Modelle findet man in [12].

¹„partially conserved axial vector current“

1.2 Das nichtlineare σ -Modell

Das nichtlineare σ -Modell beschreibt ein N -Tupel von skalaren Feldern,

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{pmatrix},$$

welches eine Normierungsbedingung erfüllt:

$$\vec{\Phi}^2 = 1. \quad (1.1)$$

Man kann alle N -Tupel mit der gleichen Normierung durch orthogonale Transformationen ineinander überführen. Durch die Normierungsbedingung wird das Modell also auf die Klasse von Feldvektoren eingeschränkt, die eine Einheitskugel im N -dimensionalen Isospinraum bilden, oder anders ausgedrückt, auf die Äquivalenzklasse von Feldern unter $O(N)/O(N-1)$ -Transformationen. $O(N-1)$ ist dabei die Untergruppe von $O(N)$, die einen gegebenen Feldvektor $\vec{\Phi}$ invariant läßt, weil sie Drehungen um die durch $\vec{\Phi}$ vorgegebene Drehachse beschreibt.

Das Modell soll invariant unter $O(N)$ -Transformationen sein. Identifizieren wir unser Feld mit dem N -Tupel $(\pi_1, \dots, \pi_{N-1}, \sigma)$ von Feldern, dessen erste $N-1$ Komponenten π -artige Felder beschreiben und dessen letzte Komponente ein σ -artiges Feld beschreibt, so ist durch die $O(N)$ -Invarianz die chirale Invarianz des Modells gegeben.

1.2.1 Wirkung und Funktionalintegral

Das nichtlineare σ -Modell ist invariant gegenüber Drehungen im Isospinraum, d.h. für die Wirkung gilt:

$$S[\vec{\Phi}] = S[A\vec{\Phi}] \quad \text{mit} \quad A \in O(N).$$

Die allgemeine Form einer solchen drehinvarianten Wirkung ist

$$S[\vec{\Phi}] = \int d^D x \left\{ \sum_{k,l,m} A_{klm} (\vec{\Phi}^2(x))^k (\partial_\mu \vec{\Phi}(x))^{2l} \left((\partial_\mu \vec{\Phi}(x)) \vec{\Phi}(x) \right)^m \right\}.$$

Massenterme der Art $\frac{1}{2}m\vec{\Phi}^2$ und Terme oder Faktoren der Art $(\vec{\Phi}^2)^n$ ergeben wegen der Normierungsbedingung nur konstante Beiträge.

Das nichtlineare σ -Modell besitzt die einfachste nichttriviale $O(N)$ -invariante Wirkung, die höchstens zwei Ableitungen enthält:

$$S[\vec{\Phi}] = \frac{1}{2g_0^2} \int d^D x \left\{ \partial_\mu \vec{\Phi}(x) \partial^\mu \vec{\Phi}(x) \right\}. \quad (1.2)$$

Da die Massendimension eines skalaren Feldes in D Dimensionen durch

$$[\Phi] = \frac{D-2}{2} \quad (1.3)$$

gegeben ist, ist unser Feld in zwei Dimensionen dimensionslos. Weil die Wirkung dimensionslos ist, muß auch die Kopplungskonstante g_0 dimensionslos sein. In diesem Fall ist die Theorie renormierbar [13, 14]. Für höhere Dimensionen als zwei ist die Theorie nicht mehr renormierbar, daher rechnen wir in zwei Dimensionen.

Wegen der Normierungsbedingung muß man bei der Bildung des erzeugenden Funktionals der Greenschen Funktionen nur über die normierten Felder integrieren:

$$Z[\vec{J}] = \int \mathcal{D}\vec{\Phi} \delta(\vec{\Phi}^2 - 1) \exp\left(-S[\Phi] + \int d^D x \vec{J}(x) \vec{\Phi}(x)\right), \quad (1.4)$$

wobei wir im folgenden die abkürzende Schreibweise

$$\vec{J}\vec{\Phi} := \int d^D x \vec{J}(x) \vec{\Phi}(x)$$

benutzen werden. Obwohl die Wirkung zunächst nur einen kinetischen Term enthält, ergeben sich wegen der Normierungsbedingung zusätzliche Wechselwirkungsterme in den einzelnen Feldkomponenten, und die Theorie wird nichtlinear.

Man kann die δ -Distribution in (1.4) auf verschiedene Arten behandeln:

1. Da die einzelnen Feldkomponenten von $\vec{\Phi}$ durch die Normierungsbedingung nicht mehr unabhängig voneinander sind, kann man eine von ihnen eliminieren. Für

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{N-1} \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_{N-1} \end{pmatrix}$$

folgt mit (1.1), daß man die letzte Komponente von $\vec{\Phi}$ durch

$$\sigma = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_i^2} = \sqrt{1 - \vec{\pi}^2}$$

ausdrücken kann. Damit erhält man für die Wirkung die Form:

$$S[\pi_1, \dots, \pi_{N-1}] = \frac{1}{2g_0^2} \int d^D x \left((\partial_\mu \vec{\pi})^2 + \frac{((\partial_\mu \vec{\pi}) \vec{\pi})^2}{1 - \vec{\pi}^2} \right).$$

Da $|\vec{\pi}| < 1$ ist, macht eine Taylor-Entwicklung Sinn:

$$S[\pi_1, \dots, \pi_{N-1}] = \frac{1}{2g_0^2} \int d^D x \left((\partial_\mu \vec{\pi})^2 + (\vec{\pi} (\partial_\mu \vec{\pi}))^2 + \frac{1}{2} (\vec{\pi} (\partial_\mu \vec{\pi}))^4 \vec{\pi}^2 + \dots \right). \quad (1.5)$$

Die Wirkung besteht in dieser Formulierung also aus einer unendlichen Anzahl von Termen, die gerade Potenzen von $\vec{\pi}$, $\vec{\pi} (\partial_\mu \vec{\pi})$, $\partial_\mu \vec{\pi}$ und Kombinationen von ihnen enthalten.

In dieser Form kann man die WT(Ward-Takahashi)-Identitäten als Differentialgleichungen für die Wirkung ausdrücken. Die renormierte Wirkung muß diese Gleichungen erfüllen. Deshalb wird in [14] geschlossen, daß man nur zwei Renormierungskonstanten braucht, da in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen nur zwei freie Integrationskonstanten auftreten.

2. Benutzt man die Integraldarstellung der δ -Distribution und interpretiert die Integrationsvariable $\alpha(x)$ als neues, unphysikalisches Hilfsfeld mit dem dazugehörigen Quellterm $j(x)$, so erhält man:

$$Z[\vec{J}, j] = \int \mathcal{D}\vec{\Phi} \int \mathcal{D}\alpha \exp\left(-i\frac{\alpha}{2} (\vec{\Phi}^2 - 1)\right) \exp(-S[\vec{\Phi}]) \exp(\vec{J}\vec{\Phi} + j\alpha)$$

(wobei wir eigentlich über $\frac{\alpha}{2}$ integrieren, wegen der Normierung von Z können wir den Faktor $1/2$ bei der Integration jedoch weglassen), mit

$$j\alpha = \int d^2x j(x) \alpha(x).$$

Anders ausgedrückt:

$$Z[\vec{J}, j] = \int \mathcal{D}\vec{\Phi} \int \mathcal{D}\alpha \exp(-S^{eff} + \vec{J}\vec{\Phi} + j\alpha), \quad (1.6)$$

mit

$$S^{eff} = \int d^D x \left(\frac{1}{2g_0^2} (\partial_\mu \vec{\Phi})^2 + i\frac{\alpha}{2} (\vec{\Phi}^2 - 1) \right).$$

Nach der folgenden Umskalierung der Felder,

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} &\longrightarrow g_0 \vec{\Phi}, \\ \alpha &\longrightarrow g_0^{-1} \alpha, \end{aligned}$$

erhält man eine Wirkung, bei der g_0 als Kopplungskonstante vor dem Wechselwirkungsterm und nicht mehr vor dem kinetischen Term erscheint:

$$S^{eff} = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\Phi})^2 + \frac{i\alpha}{2} \left(g_0 \vec{\Phi}^2 - \frac{1}{g_0} \right) \right).$$

Das α -Feld ist ein skalares Feld, hat aber die Massendimension zwei. Daher nehmen wir noch eine Umskalierung vor:

$$\alpha \rightarrow \Lambda'^2 \alpha,$$

wobei Λ' die renormierungsgruppeninvariante Massenskala Λ ist, die wir, wie später deutlich wird, hier nur aus Buchhaltungsgründen mit Λ' bezeichnen. Das neue α ist nun dimensionslos, wie man es nach (1.3) für ein skalares Feld erwartet. Mit

$$f_0 = \Lambda'^2 g_0 \tag{1.7}$$

erhalten wir:

$$S^{eff} = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\Phi})^2 + \frac{i\alpha}{2} \left(f_0 \vec{\Phi}^2 - \frac{\Lambda'^4}{f_0} \right) \right). \tag{1.8}$$

In dem Term, der das α -Feld enthält, sind alle unendlich vielen Wechselwirkungsterme aus (1.5) zusammengefaßt. Diese Tatsache spiegelt sich in den Eigenschaften des unphysikalischen Hilfsfeldes wieder. Man kann das α -Feld auch als Lagrange-Multiplikator für die Zwangsbedingung (1.1) auffassen. Diese Form des nichtlinearen σ -Modells nennt man auch die linearisierte Darstellung; von ihr kann man leicht den Übergang zum linearen σ -Modell vollziehen [11]. Ein Nachteil dieser Formulierung ist, daß man zunächst unendlich viele Renormierungskonstanten braucht.

Wir werden im folgenden mit der linearisierten Darstellung arbeiten, wie sie auch in [20, 21] benutzt wird.

1.2.2 Feynman-Regeln

Wir bezeichnen alle Greensche Funktionen mit einem doppelten Index, die erste Zahl gibt die Anzahl der Beine physikalischer Felder und die zweite Zahl die Anzahl der Beine unphysikalischer Felder an. Die Feynman-Regeln, die man aus der Wirkung (1.8) ablesen kann, lauten im Impulsraum:

$$\tilde{G}_{2,0}(p^2) = \frac{1}{p^2}, \quad (1.9)$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}(p^2, q^2, k^2) = -ig_0\Lambda'^2. \quad (1.10)$$

Um zu erkennen, in welcher Form Vertizes der Art $\Gamma_{0,m}$ in der Wirkung enthalten sind, führt man im erzeugenden Funktional die Φ -Feld-Integration durch. Da die Φ -Felder quadratisch in der Wirkung vorkommen, handelt es sich um Gauß-Integrale. Man erhält:

$$Z[\vec{J}, j] = \int \mathcal{D}\alpha \exp\left(-S_1[\alpha] + j\alpha + \frac{1}{2} \int d^D x \left(\sum_a J^a \frac{1}{-\partial^2 + i\alpha f_0} J^a\right)\right)$$

mit

$$S_1[\alpha] = \int d^D x \left(\frac{i\alpha\Lambda'^4}{2f_0} + \frac{N}{2} \text{Tr} \ln(-\partial^2 + i\alpha f_0)\right).$$

Durch diese Integration werden alle Graphen, die sich nur um Schleifen aus physikalischen Linien unterscheiden, zusammengefaßt. Die Form S_1 der Wirkung hilft uns nur weiter, wenn wir annehmen, daß ein Wert für α existiert, der S_1 minimiert. Dann können wir das α -Feld um diesen Wert, den wir mit $\frac{m^2}{if_0}$ bezeichnen, entwickeln (vgl. auch [15]):

$$\alpha(x) = \frac{m^2}{if_0} + \alpha_{qu}(x). \quad (1.11)$$

Das α -Feld soll also nur kleine Quantenfluktuationen α_{qu} um diesen Wert machen. Bei der Entwicklung (1.11) erhält der Propagator (1.9) der Feynman-Regeln die Masse m , die niedrigste Ordnung der semiklassischen Entwicklung entspricht also insbesondere einer *dynamischen Massenerzeugung* für das Φ -Feld. In [15] wird gezeigt, daß die so eingeführte Masse m sich wie die in Abschnitt 3.2 besprochene renormierungsgruppeninvariante Massenskala, d. h. wie $\exp(-\text{const.}/g^2)$, verhält. Man erhält damit:

$$\begin{aligned} S_1[\alpha] &= \int d^D x \left(\frac{i\alpha\Lambda'^4}{2f_0} + \frac{N}{2} \text{Tr} \ln(-\partial^2 + m^2 + i\alpha_{qu}f_0)\right) \\ &= \int d^D x \left(\frac{i\alpha\Lambda'^4}{2f_0} + \frac{N}{2} \left\{ \text{Tr} \ln(-\partial^2 + m^2) + \text{Tr} \ln\left(1 + \frac{if_0\alpha_{qu}}{-\partial^2 + m^2}\right) \right\}\right). \end{aligned}$$

Mit der Reihenentwicklung erhält man für den letzten Logarithmustrm die Form

$$\frac{N}{2} \text{Tr} \ln \left(1 + \frac{if_0 \alpha_{qu}}{-\partial^2 + m^2} \right) = \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{Tr} \left(\frac{if_0 \alpha_{qu}}{-\partial^2 + m^2} \right)^k. \quad (1.12)$$

In diesem Ausdruck treten beliebig viele Potenzen von α_{qu} auf, man hat also Wechselwirkungen zwischen beliebig vielen α_{qu} -Feldern. *Alle diese Wechselwirkungsterme sind von der Ordnung N .*

Der lineare Term ergibt den Beitrag Null, weil wir um das Minimum $\frac{m^2}{if_0}$ von S_1 entwickelt haben.

Der quadratische Term ergibt

$$-\frac{N}{4} \text{Tr} \left[\frac{if_0}{-\partial^2 + m^2} \alpha_{qu} \right]^2 = - \int d^D x \int d^D y (\alpha_{qu}(x) \Gamma_{0,2}(x-y) \alpha_{qu}(y))$$

mit

$$\Gamma_{0,2}(x-y) = \frac{N}{4} \langle x | \frac{if_0}{\partial^2 + m^2} | y \rangle \langle y | \frac{if_0}{\partial^2 + m^2} | x \rangle$$

bzw.

$$\tilde{\Gamma}_{0,2}(p^2) = \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{if_0}{(p+Q)^2 + m^2} \frac{if_0}{Q^2 + m^2}. \quad (1.13)$$

Auf analoge Weise kann man die höheren Wechselwirkungsterme in (1.12) umformen und erhält für sie ähnliche Schleifenintegrale.

Da wir diese Beziehungen mit einer semiklassischen Methode hergeleitet haben, werden wir sie im folgenden als semiklassische Feynman-Regeln bezeichnen.

Kapitel 2

Die Dyson-Schwinger-Gleichungen

In diesem Kapitel berechnen wir zunächst (in Analogie zu der Rechnung für die Φ^4 -Theorie in [16]) die Dyson-Schwinger-Gleichungen (DS-Gleichungen) für Greensche Funktionen im nichtlinearen σ -Modell. Da die eigentlichen Vertexfunktionen die einfachsten Bausteine sind, aus denen sich die Greenschen Funktionen ohne die Lösung zusätzlicher Integralgleichungen durch rein algebraische Operationen zusammensetzen lassen, formen wir die Gleichungen um, so daß sie nur noch Propagatoren und Vertexfunktionen enthalten. Die graphische Darstellung der Gleichungen erleichtert schließlich die Diskussion eines Abbruchkriteriums und den Vergleich mit den Ergebnissen aus der Literatur.

2.1 DS-Gleichungen im nichtlinearen σ -Modell

Die Wirkung (1.8) des nichtlinearen σ -Modells hat die Form

$$S[\vec{\Phi}, \alpha] = \frac{1}{2} \int d^D x \left\{ \left(\partial_\mu \vec{\Phi}(x) \right)^2 + i\alpha(x) \left(f_0 \vec{\Phi}^2(x) - \frac{\Lambda'^4}{f_0} \right) \right\}, \quad (2.1)$$

und aus dieser Beziehung kann man leicht folgende Funktionalableitungen berechnen:

$$\frac{\delta S[\vec{\Phi}, \alpha]}{\delta \Phi^i(x)} = -\square_x \Phi^i(x) + i f_0 \alpha(x) \Phi^i(x), \quad (2.2)$$

$$\frac{\delta S[\vec{\Phi}, \alpha]}{\delta \alpha(x)} = \frac{1}{2} \left(i f_0 \vec{\Phi}^2(x) - \frac{i \Lambda'^4}{f_0} \right). \quad (2.3)$$

Wir haben in Kapitel 1.2.2 aus der Wirkung schon die Feynman-Regeln abgelesen, d.h. die niedrigsten Ordnungen der Störungsreihe in f_0 für die Propagatoren und Vertexfunktionen der Teilchen. Weitergehende Aussagen über die Dynamik unserer Theorie liefern uns die Gleichungen

$$D\left\langle \frac{\delta S}{\delta \vec{\Phi}} - \vec{J} \right\rangle = D\left\langle \frac{\delta S}{\delta \alpha} - j \right\rangle = 0,$$

wobei J^i und j die Quellen der Felder Φ^i und α im erzeugenden Funktional sind und für D beliebige Ableitungen nach den Quellen J^i und j eingesetzt werden können. Für jedes Feld, das in der Wirkung vorkommt und im erzeugenden Funktional einen Quellterm besitzt, existiert eine solche Gleichung. Der Mittelwert einer Größe A in Gegenwart der Quellen ist hier wie folgt definiert:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{K} \int \mathcal{D}\vec{\Phi} \int \mathcal{D}\alpha A \exp\left(-S[\vec{\Phi}, \alpha] + \int dx \left(\vec{J}(x) \vec{\Phi}(x) + \alpha(x) j(x)\right)\right).$$

Verschiedene Wege zur Herleitung dieser Beziehung sind in [17] beschrieben, eine genaue Herleitung findet man in [16].

Mit (2.2,2.3) und

$$\langle \Phi^i(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta J^i(x)} Z[\vec{J}, j], \quad \langle \alpha(y) \rangle = \frac{\delta}{\delta j(y)} Z[\vec{J}, j]$$

erhält man die Gleichungssysteme

$$D\left(-\square_x \frac{\delta}{\delta J^i(x)} + i f_0 \frac{\delta}{\delta j(x)} \frac{\delta}{\delta J^i(x)} - J^i(x)\right) Z[\vec{J}, j] = 0 \quad (2.4)$$

und

$$D\left(\frac{1}{2} i f_0 \sum_k \frac{\delta}{\delta J^k(x)} \frac{\delta}{\delta J^k(x)} - \frac{i \Lambda'^4}{2 f_0} - j(x)\right) Z[\vec{J}, j] = 0. \quad (2.5)$$

Da $Z[\vec{J}, j]$ das erzeugende Funktional der Greenschen Funktionen ist,

$$G_{m,n}^{i_1 \dots i_m} (u_1, \dots, u_m, v_1 \dots v_n) = \left. \frac{\delta Z[\vec{J}, j]}{\delta J^{i_1}(u_1) \dots \delta J^{i_m}(u_m) \delta j(v_1) \dots \delta j(v_n)} \right|_{\vec{J}=j=0},$$

erhält man, wenn man die Gleichungen an der Stelle $\vec{J} = j = 0$ auswertet, zwei Gleichungssysteme unendlich vieler nichtlinearer Integralgleichungen zwischen den unzusammenhängenden Greenschen Funktionen, die Dyson-Schwinger-Gleichungen. Die Wirkung (2.1) enthält nur quadratische Ausdrücke der physikalischen Felder, sie ist daher invariant unter der Transformation $\Phi^i \rightarrow -\Phi^i$. Demnach müssen auch alle Erwartungswerte der Feldprodukte, die Greenschen Funktionen, invariant unter

diesen Transformationen sein. Dies ist nur der Fall, wenn Greensche Funktionen mit einer ungeraden Anzahl physikalischer Beine verschwinden. Berücksichtigt man $G_{2n+1,m} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, so lauten die ersten Gleichungen des ersten Gleichungssystems (1.3):

$$\begin{aligned} -\square_x G_{2,0}^{ik}(x, u_1) + if_0 G_{2,1}^{ik}(x, u_1, x) - \delta^{ik} \delta(x - u_1) &= 0, \\ -\square_x G_{2,1}^{ik}(x, u_1, v_1) + if_0 G_{2,2}^{ik}(x, u_1, x, v_1) - \delta^{ik} \delta(x - u_1) G_{0,1}(v_1) &= 0, \\ -\square_x G_{2,2}^{ik}(x, u_1, v_1, v_2) + if_0 G_{2,3}^{ik}(x, u_1, x, v_1, v_2) - \delta^{ik} \delta(x - u_1) G_{0,2}(v_1, v_2) &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Form dieser Gleichungen für gerades n ist:

$$\begin{aligned} -\square_x G_{n,m}^{i_0 \dots i_{n-1}}(x, u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_m) + if_0 G_{n,m+1}^{i_0 \dots i_{n-1}}(x, u_1, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_m, x) \\ - \sum_{l=1}^{n-1} \delta^{i_0, i_l} \delta^D(x - u_l) G_{n-2,m}^{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{n-1}}(u_1, \dots, u_{l-1}, u_{l+1}, \dots, u_{n-1}, v_1, \dots, v_m) &= 0. \end{aligned}$$

Man formt die Gleichungen weiter um, indem man mit dem Feynman-Propagator $\Delta_F(x - z)$, dem zum d'Alembert-Operator bezüglich der Faltung inversen Operator, multipliziert und über x integriert. Greensche Funktionen im Ortsraum hängen immer nur von den Differenzen ihrer Argumente ab. Daher geben wir bei Zweipunkt-funktionen als Argument nur noch die Ortsdifferenz an. Bei Greenschen Funktionen mit mehr als zwei Argumenten kann man auf verschiedene Weisen linear unabhängige Ortsdifferenzen der Argumente bilden. Hier behalten wir die bisher verwendete Schreibweise bei und beachten, daß die Variablen redundant sind. Mit G' bezeichnen wir im folgenden die Greenschen Funktionen ohne δ -Abhängigkeiten der oberen Indizes, die man aus den Gleichungen verkürzen kann, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \delta^{ij} G', \\ G_{4,0}^{ijkl}(u, v, x, y) &= \delta^{ij} \delta^{kl} G'_{4,0}(u, v, x, y) + \delta^{ik} \delta^{jl} G'_{4,0}(u, x, v, y) + \delta^{il} \delta^{jk} G'_{4,0}(u, y, v, x). \end{aligned}$$

Bei den gestrichenen Größen kommt es auf die Reihenfolge der Argumente an, $G'_{4,0}$ beschreibt also nur einen Reaktionskanal. $G_{0,1}$ ist als Erwartungswert eines einzelnen Feldes im translationsinvarianten Vakuumzustand ortsunabhängig. Damit erhält man die ersten **Gleichungen des ersten Systems im Ortsraum** :

$$\begin{aligned} G'_{2,0}(z - u_1) &= \Delta_F(z - u_1) - if_0 \int dx \Delta_F(z - x) G'_{2,1}(x, u_1, x), \\ G'_{2,1}(z, u_1, v_1) &= \Delta_F(z - u_1) G_{0,1} - if_0 \int dx \Delta_F(z - x) G'_{2,2}(x, u_1, v_1, x), \\ G'_{2,2}(z, u_1, v_1, v_2) &= \Delta_F(z - u_1) G_{0,2}(v_1 - v_2) - if_0 \int dx \Delta_F(z - x) G'_{2,3}(x, u_1, x, v_1, v_2). \end{aligned}$$

Im Impulsraum geben wir bei Greenschen Funktionen mit physikalischen und unphysikalischen Beinen in den Argumenten erst die Impulse der physikalischen und dann die der unphysikalischen Beine an. Aus drucktechnischen Gründen wählen wir bei den Schleifenintegralen eine unsymmetrische Impulsverteilung. Die symmetrische Form ist leicht durch Verschiebung des Integrationsimpulses zu erreichen. Im Impulsraum vereinfachen sich die Faltungsintegrale zu Produkten, und es wird über die Schleifenimpulse integriert. Die ersten **Gleichungen des ersten Systems im Impulsraum** lauten:

$$\begin{aligned}\tilde{G}'_{2,0}(p) &= \tilde{\Delta}_F(p) - if_0 \tilde{\Delta}_F(p) \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,1}(-p, p+Q, -Q), \\ \tilde{G}'_{2,1}(p+q, -p, -q) &= \tilde{\Delta}_F(p) (2\pi)^D \delta^D(q) \tilde{G}_{0,1} \\ &\quad - if_0 \Delta_F(p+q) \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,2}(-p, p-Q; Q+q, -q), \\ \tilde{G}'_{2,2}(p_1, -p_1-p_2, p_2+p_3, -p_3) &= \tilde{\Delta}_F(p_1) (2\pi)^D \delta^D(p_2) \tilde{G}_{0,2}(p_3) \\ &\quad - if_0 \Delta_F(p_1) \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,3}(p_1-Q, -p_1-p_2, p_2+p_3, -p_3, Q).\end{aligned}$$

Auf demselben Weg berechnet man aus (1.4) das zweite System von DS-Gleichungen. Die ersten Gleichungen dieses Systems lauten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}if_0 \sum_i G_{2,0}^{ii}(x, x) - \frac{i\Lambda'^4}{2f_0} &= 0, \\ \frac{1}{2}if_0 \sum_i G_{2,1}^{ii}(x, x, v_1) - \frac{i\Lambda'^4}{2f_0} G_{0,1}(v_1) - \delta^D(x - v_1) &= 0, \\ \frac{1}{2}if_0 \sum_i G_{2,2}^{ii}(x, x, v_1, v_2) - \frac{i\Lambda'^4}{2f_0} G_{0,2}(v_1, v_2) - \delta^D(x - v_1) G_{0,1}(v_2) \\ &\quad - \delta^D(x - v_2) G_{0,1}(v_1) = 0, \\ \frac{1}{2}if_0 \sum_i G_{4,0}^{iijk}(x, x, u_1, u_2) - \frac{i\Lambda'^4}{2f_0} G_{2,0}^{jk}(u_1, u_2) &= 0, \\ \frac{1}{2}if_0 \sum_i G_{4,1}^{iijk}(x, x, u_1, u_2, v_1) - \frac{i\Lambda'^4}{2f_0} G_{2,1}^{jk}(u_1, u_2, v_1) - \delta^D(x - v_1) G_{2,0}^{jk}(u_1, u_2) &= 0,\end{aligned}$$

mit der allgemeinen Form:

$$\begin{aligned} \frac{if_0}{2} \sum_i G_{n+2,m}^{ii j_1 \dots j_n}(x, x, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) - \frac{i\Lambda'^4}{2f_0} G_{n,m}^{j_1 \dots j_n}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) \\ - \sum_{k=1}^m \delta^D(x - v_k) G_{n,m-1}^{j_1 \dots j_n}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_m) = 0. \end{aligned}$$

Auffällig ist die ableitungsfreie Form der Gleichungen im zweiten System, die man durch funktionales Ableiten von S nach dem unphysikalischen Hilfsfeld α erhalten hat. Die Wirkung enthält keinen kinetischen Term des α -Feldes, daher können die Gleichungen auch keine α -Propagatoren enthalten. Da das α -Feld einen Lagrange-Multiplikator für die Zwangsbedingung $\vec{\Phi}^2(x) - 1 = 0$ darstellt, ergeben sich hier Gleichungen für Greensche Funktionen mit gleichen Ortsargumenten in zwei physikalischen Beinen, d.h. zwei äußere physikalische Beine sind in diesen Gleichungen immer zu einer Schleife geschlossen.

Die Gleichungen des zweiten Systems nehmen eine einfachere Form an, wenn man $\sum_i \delta^{ii} = N$ und die folgenden Beziehungen zwischen verbundenen und unverbundenen Greenschen Funktionen ausnutzt. Folgende Umformungen nehmen wir deshalb dem nächsten Abschnitt vorweg.

$$\begin{aligned} G_{2,1}(x, y, z) &= G_{2,1}^{conn}(x, y, z) + G_{2,0}(x - y) G_{0,1}(z), \\ G_{2,2}(w, x, y, z) &= G_{2,1}^{conn}(w, x, z) G_{0,1}(y) + G_{2,1}^{conn}(w, x, y) G_{0,1}(z) \\ &\quad + G_{2,0}(w - x) G_{0,2}(y - z) + G_{2,2}^{conn}(w, x, y, z), \\ G_{4,0}(w, x, y, z) &= G_{2,0}(w - x) G_{2,0}(y - z) + G_{2,0}(w - y) G_{2,0}(x - z) \\ &\quad + G_{2,0}(w - z) G_{2,0}(x - y) + G_{4,0}^{conn}(w, x, y, z), \\ G_{4,1}(v, w, x, y, z) &= G_{4,1}^{conn}(v, w, x, y, z) + G_{4,0}^{conn}(v, w, x, y) G_{0,1}(z) \\ &\quad + G_{2,0}(v - w) G_{2,1}(x, y, z) + G_{2,0}(v - x) G_{2,1}(w, y, z) \\ &\quad + G_{2,0}(v - y) G_{2,1}(w, x, z) + G_{2,0}(w - x) G_{2,1}(v, y, z) \\ &\quad + G_{2,0}(w - y) G_{2,1}(v, x, z) + G_{2,0}(x - y) G_{2,1}(v, w, z). \end{aligned}$$

Damit folgen die ersten **Gleichungen des zweiten Systems im Ortsraum** :

$$\begin{aligned} G'_{2,0}(0) &= \frac{\Lambda'^4}{N f_0^2}, \\ G_{2,1}^{conn'}(x, x, v_1) &= -\frac{2i\Lambda'^2}{N f_0} \delta^D(x - v_1), \end{aligned}$$

$$G_{2,2}^{conn'}(x, x, v_1, v_2) = 0,$$

$$NG_{4,0}^{conn'}(x, x, u_1, u_2) + G_{4,0}^{conn'}(x, u_1, x, u_2) + G_{4,0}^{conn'}(x, u_1, u_2, x) = -2G'_{2,0}(x - u_1)G'_{2,0}(x - u_2),$$

$$\begin{aligned} NG_{4,1}^{conn'}(x, x, u_1, u_2, v) + G_{4,1}^{conn'}(x, u_1, x, u_2, v) + G_{4,1}^{conn'}(x, u_2, x, u_1, v) \\ = -2G'_{2,0}(x - u_1)G_{2,1}^{conn'}(x, u_2, v) - 2G'_{2,0}(x - u_2)G_{2,1}^{conn'}(x, u_1, v) \\ - 2G'_{2,0}(x - u_2)G'_{2,0}(x - u_1)G_{0,1}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden **Gleichungen des zweiten Systems im Impulsraum** lauten:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p) = \frac{\Lambda'^4}{N f_0^2},$$

$$\int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{2,1}^{conn'}(Q, -p - Q, p) = -\frac{2i\Lambda'^2}{N f_0} \quad \forall p,$$

$$\int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{2,2}^{conn'}(Q, -Q - p_1 - p_2, p_1, p_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \left[N\tilde{G}_{4,0}^{conn'}(-Q - p_1 - p_2, Q, p_1, p_2) + \tilde{G}_{4,0}^{conn'}(-Q - p_1 - p_2, p_1, Q, p_2) \right. \\ \left. + \tilde{G}_{4,0}^{conn'}(-Q - p_1 - p_2, p_1, p_2, Q) \right] = -2\tilde{G}'_{2,0}(p_1)\tilde{G}'_{2,0}(p_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \left[N\tilde{G}_{4,1}^{conn'}(-Q - p_1 - p_2 - p_3, Q, p_1, p_2, p_3) \right. \\ \left. + \tilde{G}_{4,1}^{conn'}(-Q - p_1 - p_2 - p_3, p_1, Q, p_2, p_3) + \tilde{G}_{4,1}^{conn'}(-Q - p_1 - p_2 - p_3, p_1, p_2, Q, p_3) \right] \\ = -2\tilde{G}'_{2,0}(p_1)\tilde{G}'_{2,1}(-p_2 - p_3, p_2, p_3) - 2\tilde{G}'_{2,0}(p_2)\tilde{G}'_{2,1}(-p_1 - p_3, p_1, p_3) \\ - 2\tilde{G}'_{2,0}(p_1)\tilde{G}'_{2,0}(p_2)G_{0,1}. \end{aligned}$$

2.2 DS-Gleichungen für verbundene und Vertexfunktionen

Wir wollen nun die für weitere Rechnungen allein wichtigen verbundenen Greenschen Funktionen und Vertexfunktionen einführen und die DS-Gleichungen für diese Funktionen berechnen. Schreibt man

$$Z[\vec{J}, j] = \langle \exp(-S[\vec{\Phi}, \alpha] + \vec{J}\vec{\Phi} + j\alpha) \rangle = \exp(+W[\vec{J}, j]),$$

so ist $W[\vec{J}, j]$ das erzeugende Funktional der verbundenen Greenschen Funktionen. Man kann die Gleichung

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} - J^i \right\rangle = \left(\left. \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \right|_{\vec{\Phi}_{op}^i} - J^i \right) Z[\vec{J}, j] = 0, \quad \text{mit} \quad \vec{\Phi}_{op}^i = \frac{\delta}{\delta J^i},$$

von links mit $\exp(-W[\vec{J}, j])$ multiplizieren und erhält

$$\left[\left. \frac{\delta S[\vec{\Phi}, \alpha]}{\delta \Phi^i} \right|_{\vec{\Phi}_{op}^i} - J^i \right] 1 = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{\Phi}_{op}^i = \frac{\delta W}{\delta J^i} + \frac{\delta}{\delta J^i}.$$

Auf demselben Weg erhält man die entsprechende Gleichung für das α -Feld:

$$\left[\left. \frac{\delta S[\vec{\Phi}, \alpha]}{\delta \alpha} \right|_{\tilde{\alpha}_{op}} - j \right] 1 = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha}_{op} = \frac{\delta W}{\delta j} + \frac{\delta}{\delta j}.$$

Hierbei beachte man, daß

$$\frac{\delta}{\delta J^i} 1 = \frac{\delta}{\delta j} 1 = 0$$

gilt. Man sieht, daß man die DS-Gleichungen für die verbundenen Greenschen Funktionen, die den statistischen Korrelationsfunktionen der Felder entsprechen, erhält, wenn die Erwartungswerte der Feldprodukte durch die ihnen entsprechenden Kombinationen von Korrelationsfunktionen und Erwartungswerten einzelner Felder ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \langle \Phi^i \rangle &\rightarrow \frac{\delta W}{\delta J^i}, \\ \langle \alpha \Phi^i \rangle &\rightarrow \frac{\delta^2 W}{\delta J^i \delta j} + \frac{\delta W}{\delta J^i} \frac{\delta W}{\delta j}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Gleichungen

$$D \left(-\square_x \frac{\delta W}{\delta J^i} + i f_0 \left(\frac{\delta W}{\delta j} \frac{\delta W}{\delta J^i} + \frac{\delta^2 W}{\delta j \delta J^i} \right) - J^i \right) 1 = 0, \quad (2.6)$$

$$D \left(\frac{i}{2} f_0 \sum_i \left(\frac{\delta W}{\delta J^i} \frac{\delta W}{\delta J^i} + \frac{\delta^2 W}{\delta J^i \delta J^i} \right) - \frac{i \Lambda'^4}{2 f_0} - j \right) 1 = 0. \quad (2.7)$$

Im Gegensatz zu den linearen DS-Gleichungen der vollen Greenschen Funktionen zeigen diese Gleichungen bereits eine nichtlineare Struktur.

Aus dem erzeugenden Funktional der verbundenen Greenschen Funktionen ergibt sich durch Legendre-Transformation das erzeugende Funktional der einteilchenirreduziblen (1PI-)Greenschen Funktionen (eigentlichen Vertexfunktionen):

$$\Gamma [\bar{\Phi}, \bar{\alpha}] = W [\vec{J}, j] - \int dx \left(\bar{\Phi}(x) \vec{J}(x) + \bar{\alpha}(x) j(x) \right),$$

wobei $\bar{\Phi}, \bar{\alpha}$ die Vakuumerwartungswerte von $\bar{\Phi}, \alpha$ in Anwesenheit der Quellen sind, also:

$$\bar{\Phi}^i = \frac{\delta W}{\delta J^i}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\delta W}{\delta j}.$$

Eine Eigenschaft der Legendre-Transformation ist

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}^i(x)} = -J^i(x), \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\alpha}(x)} = -j(x).$$

Weiterhin kann man nachrechnen, daß gilt:

$$\sum_{(\bar{\Phi}^i, J^i)} \int dz \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi}^k(x) \delta \bar{\Phi}^i(z)} \frac{\delta^2 W}{\delta J^i(z) \delta J^j(y)} = -\delta(x-y) \delta_{kj},$$

wobei über alle Paare $(\bar{\Phi}^i, J^i) \in \{(\bar{\Phi}^1, J^1), \dots, (\bar{\Phi}^n, J^n), (\bar{\alpha}, j)\}$ summiert wird. Damit folgt

$$- \sum_{(\bar{\Phi}^i, J^i)(\bar{\Phi}^j, J^j)} \int dz \int du \frac{\delta^2 W}{\delta j(x) \delta J^i(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi}^i(z) \delta \bar{\Phi}^j(u)} \frac{\delta^2 W}{\delta J^j(u) \delta j(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta j(x) \delta j(y)}.$$

Aus (2.6) und (2.7) erhält man nun die Gleichungen

$$D \left(-\square_x \bar{\Phi}^i(x) + i f_0 \bar{\alpha}(x) \bar{\Phi}^i(x) + i f_0 \frac{\delta^2 W}{\delta j(x) \delta J^i(x)} \right) = -D \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}^i(x)}, \quad (2.8)$$

$$D \left(\frac{i f_0}{2} \sum_i \left(\bar{\Phi}^i(x) \bar{\Phi}^i(x) + \frac{\delta^2 W}{\delta J^i(x) \delta J^i(x)} \right) - \frac{i \Lambda'^4}{2 f_0} \right) = -D \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\alpha}(x)}, \quad (2.9)$$

und hieraus ergeben sich die DS-Gleichungen für 1PI-Greensche Funktionen, wenn man für D verschiedene Funktionalableitungen nach den Feldern $\bar{\Phi}$ und $\bar{\alpha}$ einsetzt und diese Felder dann gleich Null setzt. Um dabei nichttriviale Gleichungen zu erhalten, muß D in Gleichung (2.8) eine ungerade und in Gleichung (2.9) eine gerade Anzahl von Ableitungen nach Komponenten des physikalischen Feldes $\bar{\Phi}$ enthalten. Wir benutzen die Schreibweise:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi}^i(x) \delta \bar{\Phi}^j(y)} = \Gamma_{2,0}^{ij}(x-y) \Big|_{\bar{\Phi}=\bar{\alpha}=0} = \delta^{ij} \Gamma'_{2,0}(x-y),$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J^i(x) \delta J^j(y)} \Big|_{\bar{J}=j=0} = G_{2,0}^{ij\text{conn}}(x-y) = \delta^{ij} G_{2,0}^{\text{conn}'}(x-y).$$

Man beachte zusätzlich, daß $G_{2,0}^{\text{conn}} = G_{2,0}$ gilt. Der inverse Feynman-Propagator des physikalischen Feldes hat die Form:

$$\Delta_F^{-1}(x-y) = (-\square_x + i f_0 \bar{\alpha}(x)) \delta^D(x-y).$$

Damit lauten die ersten **Gleichungen des ersten Systems im Ortsraum**

$$-\Gamma'_{2,0}(x-y_1) = \Delta_F^{-1}(x-y_1) - i f_0 \int ds \int dt G_{0,2}^{\text{conn}}(x-s) \Gamma'_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(t-x),$$

$$\Gamma'_{2,1}(x, y_1, z_1) = -i f_0 \delta^D(x-z_1) \delta^D(x-y_1)$$

$$-i f_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{\text{conn}}(x-q) \Gamma_{0,3}(q, z_1, r) G_{0,2}^{\text{conn}}(r-s) \\ \cdot \Gamma_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(t-x)$$

$$-i f_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{\text{conn}}(x-t) \Gamma_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(s-q) \\ \cdot \Gamma_{2,1}(q, r, z_1) G'_{2,0}(r-x)$$

$$+i f_0 \int ds \int dt G_{0,2}^{\text{conn}}(x-s) \Gamma'_{2,2}(y_1, t, z_1, s) G'_{2,0}(t-x),$$

$$\begin{aligned}
\Gamma'_{2,2}(x, y_1, z_1, z_2) = & +if_0 \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-s) \Gamma'_{2,3}(y_1, t, z_1, z_2, s) G'_{2,0}(t-x) \\
& -if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-q) \Gamma_{0,3}(q, z_2, r) G_{0,2}^{conn}(r-s) \\
& \quad \cdot \Gamma'_{2,2}(y_1, t, z_1, s) G'_{2,0}(t-x) \quad + (z_1 \longleftrightarrow z_2) \\
& -if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-s) \Gamma'_{2,2}(y_1, t, z_1, s) G'_{2,0}(t-q) \\
& \quad \cdot \Gamma'_{2,1}(q, r, z_2) G'_{2,0}(r-x) \quad + (z_1 \longleftrightarrow z_2) \\
& -if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-q) \Gamma_{0,4}(q, z_1, z_2, r) G_{0,2}^{conn}(r-s) \\
& \quad \cdot \Gamma'_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(t-x) \\
& -if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-t) \Gamma_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(s-q) \\
& \quad \cdot \Gamma'_{2,2}(q, r, z_1, z_2) G'_{2,0}(r-x) \\
& +if_0 \int do \int dp \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-o) \Gamma_{0,3}(o, z_2, p) G_{0,2}^{conn}(p-q) \Gamma_{0,3}(q, z_1, r) \\
& \quad \cdot G_{0,2}^{conn}(r-s) \Gamma'_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(t-x) \quad + (z_1 \longleftrightarrow z_2) \\
& +if_0 \int do \int dp \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-q) \Gamma_{0,3}(q, z_1, r) G_{0,2}^{conn}(r-s) \Gamma'_{2,1}(y_1, t, s) \\
& \quad \cdot G'_{2,0}(t-o) \Gamma'_{2,1}(o, p, z_2) G'_{2,0}(p-x) \quad + (z_1 \longleftrightarrow z_2) \\
& +if_0 \int do \int dp \int dq \int dr \int ds \int dt G_{0,2}^{conn}(x-t) \Gamma'_{2,1}(y_1, t, s) G'_{2,0}(s-o) \Gamma'_{2,1}(o, p, z_2) \\
& \quad \cdot G'_{2,0}(p-q) \Gamma'_{2,1}(q, r, z_1) G'_{2,0}(r-x) \quad + (z_1 \longleftrightarrow z_2).
\end{aligned}$$

Die ersten **Gleichungen des zweiten Systems im Ortsraum** haben die Gestalt:

$$G'_{2,0}(0) = \frac{\Lambda'^4}{N f_0^2},$$

$$\Gamma_{0,2}(x - z_1) = \frac{1}{2} i f_0 N \int ds \int dt G'_{2,0}(x-s) \Gamma'_{2,1}(s, t, z_1) G'_{2,0}(t-x),$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,3}(x, z_1, z_2) &= +\frac{1}{2}if_0N \int ds \int dt G'_{2,0}(x-s) \Gamma'_{2,2}(s, t, z_1, z_2) G'_{2,0}(t-x) \\ &-if_0N \int dq \int dr \int ds \int dt G'_{2,0}(x-q) \Gamma'_{2,1}(q, r, z_2) G'_{2,0}(r-s) \Gamma'_{2,1}(s, t, z_1) G'_{2,0}(t-x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_{2,1}(y_1, y_2, x) &= -if_0\delta^D(x-y_1)\delta^D(x-y_2) \\ &-if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G'_{2,0}(x-q) \Gamma'_{2,1}(q, y_1, r) G'_{0,2}{}^{conn}(r-s) \Gamma'_{2,1}(y_2, t, s) G'_{2,0}(t-x) \\ &+\frac{1}{2}if_0 \int ds \int dt G'_{2,0}(x-s) [\Gamma'_{4,0}(s, y_1, y_2, t) + \Gamma'_{4,0}(s, y_2, y_1, t) + N\Gamma'_{4,0}(s, t, y_1, y_2)] \\ &\quad \cdot G'_{2,0}(t-x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Gamma'_{2,2}(y_1, y_2, x, z_1) &= \\ &+\frac{1}{2}if_0 \int ds \int dt G'_{2,0}(x-s) G'_{2,0}(t-x) \\ &\quad \cdot [\Gamma'_{4,1}(s, y_1, y_2, t, z_1) + \Gamma'_{4,1}(s, y_2, y_1, t, z_1) + N\Gamma'_{4,1}(s, t, y_1, y_2, z_1)] \\ &-if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G'_{2,0}(x-q) \Gamma'_{2,1}(q, r, z_1) G'_{2,0}(r-s) G'_{2,0}(r-s) G'_{2,0}(t-x) \\ &\quad \cdot [\Gamma'_{4,0}(s, y_1, y_2, t) + \Gamma'_{4,0}(s, y_2, y_1, t) + N\Gamma'_{4,0}(s, t, y_1, y_2)] \\ &-if_0 \int dq \int dr \int ds \int dt G'_{2,0}(x-q) \Gamma'_{2,2}(q, y_1, r, z_1) G'_{0,2}{}^{conn}(r-s) \\ &\quad \cdot \Gamma'_{2,1}(y_2, t, s) G'_{2,0}(t-x) + (y_1 \longleftrightarrow y_2) \\ &+if_0 \int do \int dp \int dq \int dr \int ds \int dt G'_{2,0}(x-o) \Gamma'_{2,1}(o, p, z_1) G'_{2,0}(p-q) \\ &\quad \cdot \Gamma'_{2,1}(q, y_1, r) G'_{0,2}(r-s) \Gamma'_{2,1}(y_2, t, s) \\ &\quad \cdot G'_{2,0}(t-x) + (y_1 \longleftrightarrow y_2) \\ &+2if_0 \int do \int dp \int dq \int dr \int ds \int dt G'_{2,0}(x-q) \Gamma'_{2,1}(q, y_1, r) G'_{0,2}{}^{conn}(r-o) \\ &\quad \cdot \Gamma_{0,3}(o, p, z_1) G'_{0,2}{}^{conn}(p-s) \Gamma'_{2,1}(y_2, t, s) G'_{2,0}(t-x). \end{aligned}$$

Im Impulsraum ergeben sich die Gleichungen des ersten Systems:

$$-\tilde{\Gamma}'_{2,0}(p) = \tilde{\Delta}_F^{-1}(p) - if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p+Q, -p, -Q) \tilde{G}'_{2,0}(p+Q),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p_1+p_2, -p_1, -p_2) &= -if_0 \\ &+ if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1+p_2+Q) \tilde{\Gamma}'_{2,2}(-p_1, -Q, -p_2, p_1+p_2+Q) \tilde{G}'_{2,0}{}^{conn'}(Q) \\ &- if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{0,3}(Q, -p_2, p_2-Q) \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_2-Q) \\ &\quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, p_1+p_2-Q, -p_2+Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_1+p_2-Q) \\ &- if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, p_1-Q, Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_1-Q) \\ &\quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1+Q, p_1+p_2-Q, -p_2) \tilde{G}'_{2,0}(p_1+p_2-Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'_{2,2}(p_1+p_2+p_3, -p_1, -p_2, -p_3) &= \\ if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1+p_2+p_3+Q) \tilde{\Gamma}'_{2,3}(-Q, -p_1, -p_2, -p_3, p_1+p_2+p_3+Q) \tilde{G}'_{2,0}(Q) \\ &- if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1+p_2+p_3+Q) \tilde{\Gamma}'_{0,3}(p_1+p_2+p_3+Q, -p_1-p_2-Q, -p_3) \\ &\quad \cdot \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1+p_2+Q) \tilde{\Gamma}'_{2,2}(-Q, -p_1, -p_2, p_1+p_2+Q) \tilde{G}'_{2,0}(Q) \\ &\quad \quad \quad + (p_2 \longleftrightarrow p_3) \\ &- if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,2}(-p_1, p_1+p_2+Q, -Q, -p_2) \tilde{G}'_{2,0}(p_1+p_2+Q) \\ &\quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1-p_2-Q, p_1+p_2+p_3+Q, -p_3) \tilde{G}'_{2,0}(p_1+p_2+p_3+Q) \\ &\quad \quad \quad + (p_2 \longleftrightarrow p_3) \\ &- if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q+p_1+p_2+p_3) \tilde{\Gamma}'_{0,4}(p_1+p_2+p_3+Q, -p_3, -p_2, -p_1-Q) \\ &\quad \cdot \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1+Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, -Q, p_1+Q) \tilde{G}'_{2,0}(Q) \\ &- if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, p_1+Q, -Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_1+Q) \\ &\quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,2}(-p_1-Q, p_1+p_2+p_3+Q, -p_2, -p_3) \tilde{G}'_{2,0}(p_1+p_2+p_3+Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1 + p_2 + p_3 + Q) \tilde{\Gamma}_{0,3}(p_1 + p_2 + p_3 + Q, -p_3, -p_1 - p_2 - Q) \\
& \quad \cdot \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1 + p_2 + Q) \tilde{\Gamma}_{0,3}(p_1 + p_2 + Q, -p_2, -p_1 - Q) \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_1 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, -Q, p_1 + Q) \tilde{G}'_{2,0}(Q) + (p_2 \longleftrightarrow p_3) \\
& +if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}_{0,3}(-Q, -p_2, p_2 + Q) \tilde{G}_{0,2}^{conn}(p_2 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, p_1 + p_2 + Q, -p_2 - Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + p_2 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1 - p_2 - Q, p_1 + p_2 + p_3 + Q, -p_3) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + p_2 + p_3 + Q) \\
& \quad \quad \quad + (p_2 \longleftrightarrow p_3) \\
& +if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1, p_1 + Q, -Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1 - Q, p_1 + p_2 + Q, -p_2) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + p_2 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_1 - p_2 - Q, p_1 + p_2 + p_3 + Q, -p_3) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + p_2 + p_3 + Q) \\
& \quad \quad \quad + (p_2 \longleftrightarrow p_3).
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die ersten **Gleichungen des zweiten Systems im Impulsraum**:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(Q) = \frac{\Lambda'^4}{Nf_0^2}, \\
& -\tilde{\Gamma}_{0,2}(p) = -\frac{if_0 N}{2} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(Q + p) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(Q, p - Q, -p) \tilde{G}'_{2,0}(Q), \\
& -\tilde{\Gamma}_{0,3}(-p, -q, p + q) = if_0 N \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p + Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p + Q, -Q, -p) \tilde{G}'_{2,0}(Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(Q, q - Q, -q) \tilde{G}'_{2,0}(q - Q) \\
& \quad -\frac{1}{2} if_0 N \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p + q + Q) \tilde{\Gamma}'_{2,2}(p + q + Q, -Q, -p, -q) \tilde{G}'_{2,0}(Q), \\
& -\tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p, -q, p + q) = if_0 + if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p - Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p - Q, -p, Q) \tilde{G}_{0,2}^{conn}(Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(q + Q, -Q, -q) \tilde{G}'_{2,0}(q + Q) \\
& \quad -if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(q + Q) \tilde{G}'_{2,0}(p - Q) \left[\tilde{\Gamma}'_{4,0}(q + Q, -p, p - Q, -q) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \tilde{\Gamma}'_{4,0}(q + Q, -q, p - Q, -p) + N \tilde{\Gamma}'_{4,0}(q + Q, p - Q, -p, -q) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{\Gamma}_{2,2}(-p_1, -p_2, -q_1, p_1 + p_2 + q_1) = \\
& \frac{if_0}{2} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + q_1 + Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_2 - Q) [\Gamma_{4,1}(p_1 + q_1 + Q, -p_1, p_2 - Q, -p_2, -q_1) \\
& + \Gamma_{4,1}(p_1 + q_1 + Q, -p_2, p_2 - Q, -p_1, -q_1) + N\Gamma_{4,1}(p_1 + q_1 + Q, p_2 - Q, -p_1, -p_2, -q_1)] \\
& - if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + q_1 + Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p_1 + q_1 + Q, -p_1 - Q, -q_1) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{G}'_{2,0}(p_2 - Q) [\tilde{\Gamma}'_{4,0}(p_1 + Q, -p_1, p_2 - Q, -p_2) \\
& \quad + \tilde{\Gamma}'_{4,0}(p_1 + Q, -p_2, p_2 - Q, -p_1) + N\tilde{\Gamma}'_{4,0}(p_1 + Q, p_2 - Q, -p_1, -p_2)] \\
& - if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + q_1 + Q) \tilde{\Gamma}'_{2,2}(+p_1 + q_1 + Q, -p_1, -q_1, -Q) \tilde{G}'_{0,2}{}^{conn}(Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p_2 - Q, -p_2, Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_2 - Q) \quad + (p_1 \longleftrightarrow p_2) \\
& + if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(+q_1 + p_1 + Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(q_1 + p_1 + Q, -q_1, -p_1 - Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_1 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p_1 + Q, -p_1, -Q) \tilde{G}'_{0,2}{}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(-p_2, p_2 - Q, Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_2 - Q) + (p_1 \longleftrightarrow p_2) \\
& + 2if_0 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}(q_1 + p_1 + Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(q_1 + p_1 + Q, -p_1, -q_1 - Q) \tilde{G}'_{0,2}{}^{conn}(q_1 + Q) \\
& \quad \cdot \tilde{\Gamma}'_{0,3}(q_1 + Q, -q_1, -Q) \tilde{G}'_{0,2}{}^{conn}(Q) \tilde{\Gamma}'_{2,1}(p_2 - Q, -p_2, Q) \tilde{G}'_{2,0}(p_2 - Q).
\end{aligned}$$

Schließlich müssen wir noch kurz auf die Divergenzgrade der verschiedenen Funktionen eingehen. Dazu betrachten wir die Massendimensionen der Vertexfunktionen. Die verbundenen Greenschen Funktionen mit m Beinen im Ortsraum haben als Vakuumerwartungswerte von Produkten dimensionsloser Felder die Dimension Null. Diese Funktionen haben im Impulsraum die Dimension $(Masse)^{2-2m}$. Durch Amputation der äußeren Beine erhält man aus ihnen die zusammenhängenden, amputierten Greenschen Funktionen, die sich von den Vertexfunktionen nur durch die einteilchenreduziblen Anteile unterscheiden und deshalb dieselbe Dimension wie die Vertexfunktionen haben. Das Amputieren eines äußeren Beins erhöht die Massendimension der Funktion um zwei, daher haben *alle* Impulsraum-Vertexfunktionen die Massendimension zwei. Damit sind in $D = 2$ *alle* Vertexfunktionen oberflächlich quadratisch divergent — wiederum eine Besonderheit des σ -Modells. Daß eine solche Theorie, in der die Anzahl der oberflächlich divergenten Vertexfunktionen nicht endlich ist, überhaupt noch als renormierbar bezeichnet wird, liegt nur an der schon erwähnten, symmetriebedingten Einschränkung [14] der Renormierungskonstanten.

2.3 Abbruchkriterien

Die DS-Gleichungen sind ein System unendlich vieler nichtlinearer Integralgleichungen zwischen den Vertexfunktionen, die jeweils eine Vertexfunktion als Kombination aus Propagatoren und den nächsthöheren und niedrigeren Vertexfunktionen ausdrücken. Da man nicht unendlich viele Gleichungen auswerten kann, sucht man nach einem vernünftigen Abbruchkriterium, mit dessen Hilfe die Gleichungen der höheren Vertexfunktionen vernachlässigt werden können. Hierbei macht man sich die Tatsache zunutze, daß aus den Feynman-Regeln durch Iteration alle Vertexfunktionen in einer Störungsreihenentwicklung berechnet werden können. Bei jeder Iteration wird die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Kopplungskonstanten f_0 um Potenzen erhöht, so daß bei kleinem f_0 die höheren Vertexfunktionen, die man erst nach mehreren Iterationen erhält, vernachlässigbar klein werden. Wir werden sehen, daß sich beim Iterieren auch die Abhängigkeit der Vertexfunktionen von dem Parameter N , der Anzahl der physikalischen Feldkomponenten, ändert. Geht man davon aus, daß die vollen Vertexfunktionen mit ausnahmslos unphysikalischen Beinen sich für große N wie ihre aus der Sattelpunktsentwicklung erhaltenen semiklassischen Feynman-Regeln verhalten, kann man die N -Abhängigkeiten der übrigen Vertexfunktionen bestimmen. Entwicklungen für große N sind zwar bereits aus der Literatur bekannt, vgl. zum Beispiel [18, 19], dort wird aber immer vorausgesetzt, daß das Produkt Ng_0^2 konstant bleibt. Wir zeigen hier, daß man auch ohne diese Annahme zu einer $1/N$ -Klassifikation und -Entwicklung kommen kann.

Die DS-Gleichungen werden zunächst graphisch dargestellt. Anschließend diskutieren wir die Abhängigkeiten der einzelnen Terme von N , das Ergebnis vorwegnehmend schreiben wir bereits bei der graphischen Darstellung vor jede Schleife die Ordnung ihres höchsten Beitrags in N . Die Ergebnisse lassen sich schließlich mit den in [20] berechneten DS-Gleichungen vergleichen.

2.3.1 Graphen

Wir stellen hier die im letzten Kapitel berechneten Gleichungen dar, dabei verzichten wir auf Symmetriefaktoren und Vorzeichen. Topologisch gleiche Terme fassen wir in einem Diagramm zusammen. Die genaue Form der Gleichungen entnehme man dem letzten Kapitel. Die DS-Gleichungen aus dem ersten System bezeichnen wir mit A und den Anzahlen ihrer äußeren physikalischen und unphysikalischen Beine. Entsprechend bezeichnen wir die Gleichungen aus dem zweiten System mit B und den Anzahlen ihrer äußeren Beine.

Nackte Propagatoren des unphysikalischen Feldes werden durch gestrichelte Linien $-----$, nackte Propagatoren physikalischer Felder durch durchgezogene Linien $—————$ dargestellt. Volle Propagatoren deuten wir durch doppelte Linien an. Nackte Vertizes sind Punkte, volle Vertizes Kreise, in denen die Art des Vertex steht.

Die Diagramme der DS-Gleichungen enthalten höchstens eine Schleife, die immer einen nackten Vertex enthält.

Die Gleichungen des ersten Systems sind aus der Gleichung

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \vec{\Phi}} - \vec{J} \right\rangle = 0$$

entstanden. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie aus Gleichungen für Vertexfunktionen bestehen, in die mindestens zwei physikalische Beine laufen, und daß ein äußeres physikalisches Bein immer in einen nackten (2,1)-Vertex der Schleife einläuft. Die beiden anderen Beine dieses Vertex sind Bestandteile der Schleife, die daher sowohl aus physikalischen als auch aus unphysikalischen Propagatoren besteht.

Gleichung (A.2.0):

$$- \text{---} \Gamma_{2,0} \text{---} \equiv \left(\text{====} \right)^{-1} = \left(\text{---} \right)^{-1} + \frac{1}{N} \text{---} \bullet \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Gamma_{2,1} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Gleichung(A.2.1):

$$\begin{array}{l} \text{---} \Gamma_{2,1} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{l} \text{---} \bullet \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \frac{1}{N} \text{---} \bullet \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Gamma_{2,1} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Gamma_{0,3} \text{---} \\ + \frac{1}{N} \text{---} \bullet \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Gamma_{2,1} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Gamma_{2,1} \text{---} \\ + \frac{1}{N^2} \text{---} \bullet \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Gamma_{2,2} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Gleichung(A.2.2):

$$\begin{aligned}
 \text{---} \Gamma_{2,2} \text{---} &= \frac{1}{N} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{0,4} \text{---} \right) + \frac{1}{N^2} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{0,3} \text{---} \right) \\
 &+ \frac{1}{N^2} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{2,1} \text{---} \right) + \frac{1}{N^2} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{2,2} \text{---} \right) \\
 &+ \frac{1}{N} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{0,3} \text{---} \right) + \frac{1}{N} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{2,1} \text{---} \right) \\
 &+ \frac{1}{N} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{2,1} \text{---} \right) + \frac{1}{N^2} \text{---} \left(\text{---} \Gamma_{2,3} \text{---} \right)
 \end{aligned}$$

Gleichung (A.4.0):

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{4,0} &= \frac{1}{N^3} \text{ (loop with } \Gamma_{2,1}, \Gamma_{2,2} \text{)} + \frac{1}{N^3} \text{ (loop with } \Gamma_{4,0}, \Gamma_{2,1} \text{)} \\
 &+ \frac{1}{N^2} \text{ (loop with } \Gamma_{2,1} \text{)} + \frac{1}{N^3} \text{ (loop with } \Gamma_{4,1} \text{)}
 \end{aligned}$$

Da die Gleichungen des zweiten Systems aus

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \alpha} - j \right\rangle = 0$$

hergeleitet wurden, handelt es sich um Gleichungen für Vertexfunktionen mit mindestens einem unphysikalischen äußeren Bein.

Ein unphysikalisches äußeres Bein läuft bei ihnen immer in einen nackten (2,1)-Vertex, so daß die Schleife dort mit zwei physikalischen Propagatoren beginnt.

Schleifen, die nur aus physikalischen Propagatoren bestehen, liefern einen zusätzlichen Faktor N , da über alle Möglichkeiten der Schleifenbildung summiert wird. Dies ist beispielsweise bei allen Schleifen in Gleichungen für Vertexfunktionen mit lauter unphysikalischen Beinen der Fall, denn jeder Vertex in der Schleife muß eine gerade Anzahl physikalischer Beine haben, und alle äußeren Beine gehören zu unphysikalischen Feldern.

Gleichung (B.0.1):

$$N \quad \text{(double circle)} \quad = \quad \frac{\Lambda'^4}{f_0^2}$$

Gleichung (B.0.2):

$$\left(\text{=====} \right)^{-1} = N \text{---} \bullet \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \Gamma_{2,1}$$

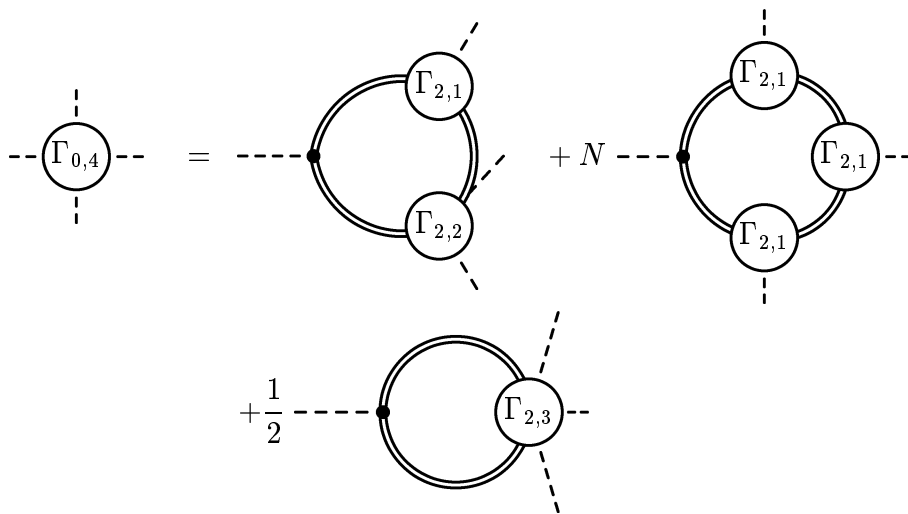
Gleichung (B.0.3):

$$\text{---} \Gamma_{0,3} \text{---} = N \text{---} \bullet \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \Gamma_{2,1} + \text{---} \bullet \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \Gamma_{2,2}$$

Gleichung(B.2.1):

$$\begin{aligned} \text{---} \Gamma_{2,1} \text{---} &= \text{---} \bullet \text{---} + \left(1 + \frac{N}{2} \right) \frac{1}{N^2} \text{---} \bullet \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \Gamma_{4,0} \\ &+ \frac{1}{N} \text{---} \bullet \text{---} \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) \text{---} \Gamma_{2,1} \end{aligned}$$

Gleichung(B.0.4):

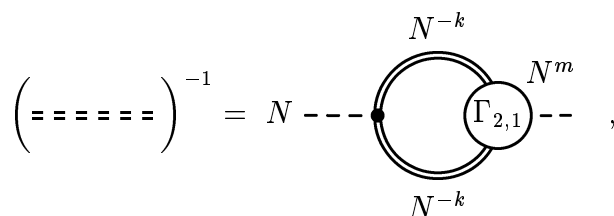


2.3.2 N-Abhängigkeiten

Um nun die Abhängigkeiten der einzelnen Terme von N diskutieren zu können, machen wir die Annahme, daß kein Propagator bzw. Vertex Beiträge aller Ordnungen in N enthält, d.h. wir setzen voraus, daß alle Vertexfunktionen einen Beitrag höchster Ordnung in N besitzen. Außerdem fordern wir, daß sich die Vertexfunktionen mit unphysikalischen Beinen für große N wie ihre semiklassischen Feynman-Regeln verhalten, also auch von der Ordnung N sind.

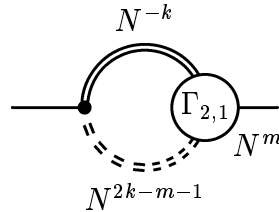
Aus den Gleichungen (A.2.0) und (A.2.1) entnimmt man, daß $\Gamma_{2,0}$ und $\Gamma_{2,1}$ mit dem nackten Propagator bzw. Vertex einen Beitrag der Ordnung Null besitzen. Also besitzt auch $G_{2,0} = -(\Gamma_{2,0})^{-1}$ für große N höchstens einen Beitrag der Ordnung Null. Wir wollen nun zeigen, daß die nullte Ordnung zugleich auch die höchste Ordnung von $\Gamma_{2,0}$ und $\Gamma_{2,1}$ ist. Zum Beweis nehmen wir an, daß $\Gamma_{2,1}$ einen höchsten Beitrag der Ordnung N^m und $\Gamma_{2,0}$ einen höchsten Beitrag der Ordnung N^k ($m, k \geq 0$) besitzt. Der Propagator $G_{2,0}$ liefert dann den Beitrag N^{-k} .

Aus Diagramm (B.0.2),



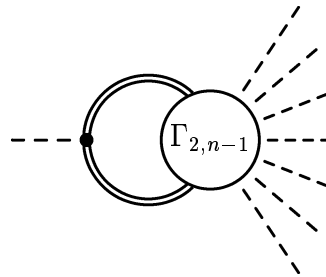
kann man nun ablesen, daß der höchste Beitrag zu $\Gamma_{0,2}$ die Ordnung $N^{-2k+m+1}$ besitzt; damit ist $G_{0,2} = -\Gamma_{0,2}^{-1}$ für große N von der Ordnung N^{2k-m-1} .

Um zu zeigen, daß $k = 0$ gilt, betrachte man Diagramm (A.2.0). Dieses Diagramm für $\Gamma_{2,0}$ besteht aus zwei Termen; einer von beiden muß von der Ordnung N^k sein. Der erste Term hat als nackter Propagator die Ordnung Null. Der zweite Term



liefert höchstens einen Beitrag der Ordnung $N^{-k}N^mN^{2k-m-1} = N^{k-1}$. Daher muß der erste Term die Ordnung N^k haben, und es gilt $k = 0$. Damit hat auch der Propagator des physikalischen Feldes die Ordnung Null, und für $\Gamma_{0,2}$ ergibt sich die Ordnung N^{m+1} . Nach Voraussetzung hat aber $\Gamma_{0,2}$ als Vertexfunktion mit ausnahmslos unphysikalischen Beinen die Ordnung N . Daher gilt auch $m = 0$.

Man kann sich leicht veranschaulichen, daß in jeder Gleichung des zweiten Systems für einen Vertex der Form $\Gamma_{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$, ohne äußere physikalische Beine eine Schleife vorkommt, die aus zwei physikalischen Propagatoren und einem $\Gamma_{2,n-1}$ -Vertex besteht:



Nach Voraussetzung darf die Schleife höchstens die Ordnung N haben. Da sie nur aus physikalischen Propagatoren besteht, ergibt das schon einen Faktor N . Die Propagatoren selbst sind unabhängig von N , daher kann der $\Gamma_{2,n-1}$ -Vertex höchstens die Ordnung Null haben. Vertizes mit zwei äußeren physikalischen Beinen haben also unabhängig von der Anzahl ihrer unphysikalischen Beine höchstens die Ordnung Null.

Man kann sogar noch mehr zeigen: nur $\Gamma_{2,0}$ und $\Gamma_{2,1}$ sind von der Ordnung Null, alle anderen Vertizes mit zwei physikalischen äußeren Beinen haben die Ordnung N^{-1} . Man weiß, daß sie mindestens die Ordnung N^{-1} haben, weil jeder Vertex $\Gamma_{2,n}$ in den Gleichungen des ersten Systems einen Beitrag hat, dessen Schleife nur aus einem unphysikalischen Propagator, physikalischen Propagatoren und $\Gamma_{2,1}$ -Vertizes besteht, der also die Ordnung N^{-1} liefert, wie zum Beispiel der dritte Beitrag in der Gleichung (A.2.1) und der vorletzte Beitrag in Gleichung (A.2.2).

Um zu zeigen, daß sie höchstens die Ordnung N^{-1} haben, muß man in Gedanken einen Schritt rückwärts in der funktionalen Ableitung gehen und vorübergehend allgemeinere Vertizes, das heißt Funktionalableitungen von Γ , betrachten, in denen die Felder $\bar{\Phi}$ und $\bar{\alpha}$ noch nicht auf Null gesetzt sind. Diese allgemeineren Vertizes gehen dann durch funktionales Ableiten nach den Feldern auseinander hervor. Wir wollen nun zeigen, daß man durch Ableiten nach dem Hilfsfeld $\bar{\alpha}$ die Ordnung eines Terms in N nicht erhöht, wenn dieser nur Vertizes mit höchstens zwei physikalischen Beinen enthält. Dazu untersuchen wir, wie sich die einzelnen Propagatoren und Vertizes beim Ableiten nach $\bar{\alpha}$ verhalten:

- Das Ableiten eines Hilfsfeldpropagators (mit der Ordnung N^{-1}) nach $\bar{\alpha}$ liefert den Term

$$==== \textcircled{\Gamma_{0,3}} ===== ,$$

|

der die Ordnung $\frac{1}{N}N\frac{1}{N}$ besitzt.

- Das Ableiten eines Φ -Feld-Propagators nach $\bar{\alpha}$ erzeugt analog einen zusätzlichen Φ -Feld-Propagator und einen $\Gamma_{2,1}$ -Vertex, beide von der Ordnung Null:

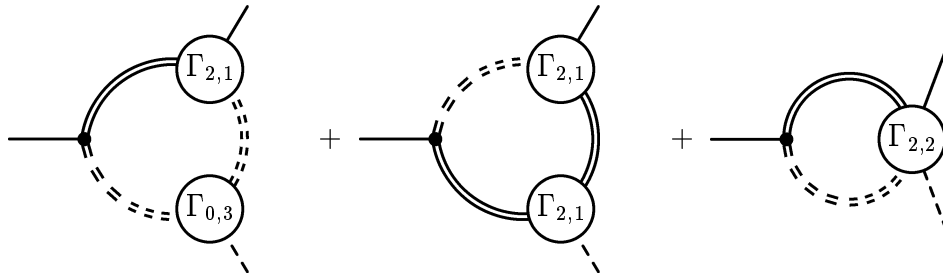
$$==== \textcircled{\Gamma_{2,1}} ===== .$$

|

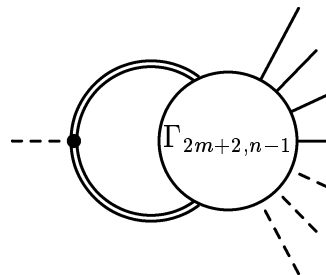
- Leitet man einen Vertex $\Gamma_{0,m}$ nach $\bar{\alpha}$ ab, erhält man den Vertex $\Gamma_{0,m+1}$; beide Vertizes sind nach Voraussetzung von der Ordnung N .
- Das Ableiten eines Vertex $\Gamma_{2,m}$ nach $\bar{\alpha}$ ergibt den Vertex $\Gamma_{2,m+1}$; beide Vertizes haben nach dem eben Gesagten höchstens die Ordnung Null und mindestens die Ordnung N^{-1} . Das Ergebnis dieses Beweises wird sein, daß $\Gamma_{2,m+1}$ auch für $m > 2$ keine höhere Ordnung als $\Gamma_{2,m}$ besitzt, so daß durch Ableiten nach $\bar{\alpha}$ die Ordnung in N auch nicht erhöht wird.

Nach diesen Überlegungen betrachte man Gleichung (A.2.1). Die ersten drei Terme dieser Gleichung enthalten nur Vertizes mit höchstens zwei physikalischen und einem unphysikalischen Bein oder rein unphysikalische Vertizes, ihre Ordnungen in N erhöhen sich also nicht beim Ableiten nach $\bar{\alpha}(x)$. Der vierte Term und seine Ableitung nach $\bar{\alpha}$ haben mindestens die Ordnung N^{-1} , daher kann die Ableitung nicht zu einer nullten Ordnung von $\Gamma_{2,2}$ beitragen.

Man sieht, daß der nackte Vertex der einzige Beitrag zu $\Gamma_{2,1}$ von der Ordnung Null ist, denn die anderen Beiträge

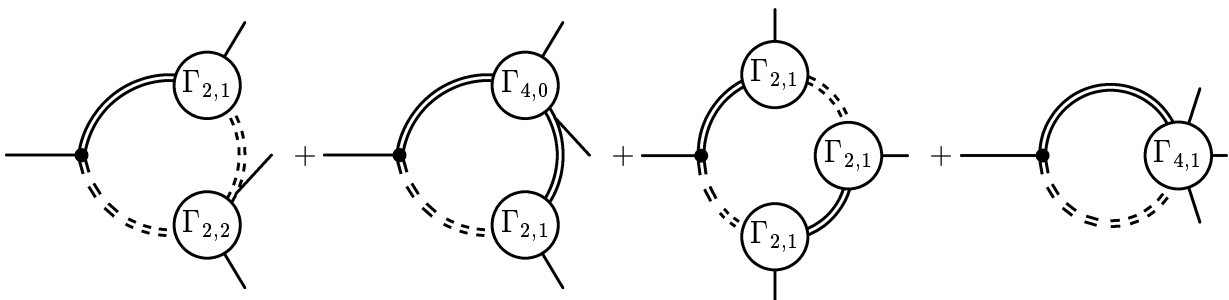


haben höchstens die Ordnungen N^{-1} . Die Gleichungen für $\Gamma_{2,n}$ mit $n \geq 2$ entstehen aus dieser Gleichung durch $(n - 1)$ -faches Ableiten nach dem Hilfsfeld $\bar{\alpha}$. Gleich beim ersten Ableiten verschwindet der nackte Vertex, und da sich beim Ableiten die Ordnungen der anderen Terme nicht erhöhen, bleiben höchstens Beiträge der Ordnung N^{-1} übrig. Damit weiß man, daß $\Gamma_{2,n}$ für $n \geq 2$ die Ordnung N^{-1} hat. Schließlich möchten wir zeigen, daß Vertizes der Art $\Gamma_{2m,n}$ mit $m \geq 1$ und $n > \max \{0, 2 - m\}$ höchstens die Ordnung N^{-m} haben können. Dies tun wir durch vollständige Induktion nach m . Als Induktionsanfang nehmen wir die Tatsache, daß $\Gamma_{2,n}$ mit $n \geq 2$ von der Ordnung N^{-1} ist. Die Behauptung gelte nun für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$, dann gilt sie auch für $m + 1$, denn die Gleichung für $\Gamma_{2m,n}$ aus dem zweiten System enthält den Beitrag



und daher weiß man, daß $\Gamma_{2(m+1),n-1}$ höchstens die Ordnung $\frac{1}{N}N^{-m} = N^{-(m+1)}$ haben kann. Q.e.d.

Nun möchten wir noch die Ordnung von $\Gamma_{4,0}$ bestimmen. Hierzu ermitteln wir aus den Termen der Gleichung (A.4.0) denjenigen Term, der den Beitrag höchster Ordnung in N liefert.



Falls $\Gamma_{4,0}$ die Ordnung N^{-s} hat, liefert der erste Term die Ordnung N^{-3} , der zweite die Ordnung $N^{-(s+1)}$, der dritte die Ordnung N^{-2} und der vierte die Ordnung N^{-3} ; daher muß $s = 2$ gelten.

Fassen wir das Ergebnis noch einmal zusammen: Ein Vertex $\Gamma_{2m,n}$ hat höchstens die Ordnung N^s mit

m	n	s
0	beliebig	1
1	0,1	0
1	≥ 2	-1
2	beliebig	-2
$t > 2$	beliebig	-t

(2.10)

Die Berechnung der DS-Gleichungen kann man leicht auf die in [21, 20] gemachten Gitterrechnungen übertragen. Bei diskreten Gittern ersetzen Differenzenquotienten der Funktionswerte an benachbarten Gitterpunkten die Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x+a)}{a} \quad \text{mit } a = \text{Gitterkonstante.}$$

Die zweite Ableitung einer Funktion gibt an, um welchen Betrag sich ihr lokaler Wert vom Mittelwert einer kleinen Umgebung unterscheidet [23]. Wenn man für die Länge dieser Umgebung den Abstand da wählt, erhält man auf dem eindimensionalen Gitter:

$$f'' = \sum_{l=\pm 1}^{\pm d} \frac{f(x) - f(x+la)}{2d}.$$

Bis auf Vorzeichen stimmen die DS-Gleichungen, soweit sie in [20] berechnet wurden, mit den Ergebnissen dieses Abschnitts überein. Die Autoren haben ihr Gleichungssystem allerdings schon bei der Ordnung N^{-1} abgebrochen; damit bleiben nur die Propagatorgleichungen übrig. In dieser Arbeit konstruieren wir nichtperturbative Ansätze für die Vertexfunktionen $\Gamma_{2,0}$ und $\Gamma_{2,1}$ und für die unphysikalischen Funktionen $\Gamma_{0,2}$ und $\Gamma_{0,3}$ und benutzen die Propagatorgleichung (A.2.0) und die Vertexgleichung (A.2.1) als Randbedingungen, die diese Ansätze erfüllen müssen.

Kapitel 3

Nichtperturbative Erweiterung der Störungsreihe

Die Renormierungsgruppengleichungen gelten auch außerhalb der Störungstheorie, sie gehören daher zu den Grundlagen nichtperturbativer Rechnungen. In diesem Kapitel leiten wir zunächst die für uns wichtige Renormierungsgruppengleichung her. Anschließend stellen wir kurz die in [4] ausführlich erläuterten Ansätze einer nichtperturbativen Erweiterung der Störungsreihe für eine asymptotisch freie Theorie vor. Schließlich beschreiben wir, welche nichtperturbativen Mechanismen beim Rechnen mit diesen Ansätzen auftreten.

3.1 Die Renormierungsgruppengleichungen

In der Lagrange-Dichte, die eine Theorie beschreibt, stehen zunächst nur nackte Größen, z.B. die nackte Kopplungskonstante g_0 . Nach der Renormierung treten an ihre Stellen die renormierten Größen, z.B. $g(\nu)$, die vom Renormierungsschema und von der Renormierungsskala ν abhängen. ν tritt bei der dimensionellen Regularisierung als Regulator der Massendimension der Kopplungskonstanten, die von der Dimension ($D = 2 - 2\epsilon$) abhängt, auf. Zwischen renormierter Kopplung und nackter Kopplung gilt die Beziehung:

$$g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} = g^2(\nu) \nu^{2\epsilon} Z_\alpha. \quad (3.1)$$

Da die ursprüngliche Lagrange-Dichte eindeutige Vorhersagen liefern soll, darf sich die ν -Abhängigkeit der renormierten Parameter nicht auf meßbare physikalische Größen übertragen; diese sind also invariant unter Renormierungsgruppentransformationen, bei denen nur die Renormierungsskala ν geändert wird.

Um auch massebehaftete physikalische Größen eindeutig beschreiben zu können, muß es mindestens einen renormierungsgruppenunabhängigen Massenparameter Λ_R ¹ geben:

¹Der Index R deutet an, daß Λ i.a. noch vom Renormierungsschema abhängt. Wir lassen ihn im folgenden weg.

$$\frac{d}{d\nu}\Lambda = 0. \quad (3.2)$$

Da in der Wirkung des nichtlinearen σ -Modells keine Massenterme auftreten, ist Λ die einzige Massenskala in diesem Modell.

Zusätzlich fordert man, daß die Natur nicht von einer Schar von Lagrange-Dichten richtig beschrieben wird, sondern nur von einer einzigen eindeutig bestimmbar. Daher sollen auch die in der Lagrange-Dichte vorkommenden nackten Parameter unabhängig von ν sein. Diese Tatsache wird durch die Renormierungsgruppengleichungen ausgedrückt. Wir wollen hier nur die Gleichung für die Kopplungskonstante g_0 betrachten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\nu}g_0 \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \frac{d}{d\nu} \left\{ \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^\epsilon \sqrt{Z_\alpha(\nu)} g(\nu) \right\} \\ &= \epsilon \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^\epsilon \frac{1}{\nu} \sqrt{Z_\alpha(\nu)} g(\nu) + \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^\epsilon g(\nu) \frac{1}{2\sqrt{Z_\alpha(\nu)}} \frac{dZ_\alpha(\nu)}{d\nu} + \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^\epsilon \sqrt{Z_\alpha(\nu)} \frac{dg(\nu)}{d\nu}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, falls

$$\beta(\nu, g, \epsilon) := \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} = -\epsilon g(\nu) - \frac{\nu g(\nu)}{2Z_\alpha} \frac{dZ_\alpha(\nu)}{d\nu} \quad (3.3)$$

gilt. Damit haben wir eine Differentialgleichung, die beschreibt, wie sich die Kopplungskonstante g in Abhängigkeit von der willkürlich gewählten Skala ν verhält.

Die Betafunktion des nichtlinearen σ -Modells wurde für $\epsilon = 0$ in [19, 1] berechnet:

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -(N-2) \frac{g^3}{4\pi} + O(g^5) \\ &= -\beta_0 \frac{g^3}{4\pi} + O(g^5). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Der Koeffizient β_0 ist für $N > 2$ positiv; in diesem Fall ist die Theorie asymptotisch frei (vgl. auch [24]).

Wir benutzen hier, daß die Betafunktion nicht explizit, sondern nur implizit über g von ν abhängt:

$$\beta(\nu, g, \epsilon) = \beta(g, \epsilon).$$

Im Sonderfall $\epsilon = 0$ gelten die einfacheren Gleichungen

$$g_0 = g\sqrt{Z_\alpha}$$

und

$$\beta(g) := \beta(g, \epsilon = 0) = -\frac{\nu g(\nu)}{2Z_\alpha} \frac{dZ_\alpha(\nu)}{d\nu},$$

es fällt also nur der Term proportional zu ϵ weg:

$$\beta(g, \epsilon) = -\epsilon g + \beta(g). \quad (3.5)$$

Um die Differentialgleichung

$$\beta(g, \epsilon) = \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu}$$

zu lösen, skalieren wir die willkürliche Massenskala ν mit der renormierungsgruppeninvarianten Skala Λ :

$$\nu = x\Lambda,$$

und erhalten für die dimensionslose Größe x die Differentialgleichung

$$x \frac{dg}{dx} = \beta(g, \epsilon),$$

wobei wir (3.2) benutzt haben. Mit Separation der Variablen erhält man

$$\int_1^{x_\nu} \frac{dx}{x} = \int_\gamma^{g(\nu)} \frac{dg_R}{\beta(g_R)},$$

und die Lösung hat die Form

$$x_\nu = \exp \left(\int_\gamma^{g(\nu)} \frac{dg}{\beta(g, \epsilon)} \right).$$

Die untere Integrationsgrenze γ entspricht dabei dem Wert der Kopplungskonstanten bei $\epsilon \geq 0$ und $\nu = \Lambda$. Sie hat die Form

$$\gamma = g(\Lambda) + O(\epsilon).$$

Multipliziert man beide Seiten mit Λ , so erhält man die Beziehung

$$\Lambda^2 = \nu^2 \exp \left(-2 \int_{\gamma}^{g(\nu)} \frac{dg}{\beta(g, \epsilon)} \right). \quad (3.6)$$

Für die später auftretende Größe $\nu^{2\epsilon} \Lambda^{-2\epsilon}$ erhält man damit den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu^2}{\Lambda^2} \right)^{\epsilon} &= \exp \left(2 \int_{\gamma}^{g(\nu)} dg' \frac{\epsilon}{-\epsilon g' + \beta(g')} \right) \\ &= \left(\frac{\gamma}{g(\nu)} \right)^2 \exp \left(2 \int_{\gamma}^{g(\nu)} dg' \left(\frac{\epsilon}{-\epsilon g' + \beta(g')} + \frac{1}{g'} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\gamma}{g(\nu)} \right)^2 \exp \left(2 \int_{\gamma}^{g(\nu)} \frac{dg'}{g' \beta(g) - \epsilon g} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Einsetzen der Betafunktion (3.4) in (3.6) liefert:

$$\Lambda^2 = \nu^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{\beta_0 g^2(\nu)} + O(g^0, \ln g^2) \right). \quad (3.8)$$

Für die Renormierungskonstante Z_{α} kann man eine ähnliche Gleichung herleiten. Dazu geht man vom zweiten Teil von Gleichung (3.3) aus,

$$\beta(g, \epsilon) = -\epsilon g(\nu) - \frac{\nu g(\nu)}{2Z_{\alpha}} \frac{dZ_{\alpha}(\nu)}{d\nu},$$

und benutzt, daß Z_{α} nur implizit über g von ν abhängt:

$$\begin{aligned} -\frac{\beta(g, \epsilon)}{g(\nu)} &= \epsilon + \frac{\nu}{2Z_{\alpha}} \frac{dg}{d\nu} \frac{d}{dg} \ln Z_{\alpha} \\ &= \epsilon + \frac{1}{2} \beta(g, \epsilon) \frac{d}{dg} \ln Z_{\alpha}. \end{aligned}$$

Separation der Variablen liefert:

$$\int_0^{\ln Z_{\alpha}(\nu)} d \ln Z_{\alpha} = - \int_0^{g(\nu)} dg \, 2 \frac{\beta(g, \epsilon) + \epsilon g}{g \beta(g, \epsilon)},$$

und mit (3.5) erhält man die explizite ϵ -Abhängigkeit des Integranden:

$$Z_{\alpha} = \exp \left(- \int_0^{g(\nu)} dg' \, 2 \frac{\beta(g')}{g'(\beta(g') - \epsilon g')} \right), \quad (3.9)$$

die schon 't Hooft [22] bekannt war.

3.2 Nichtperturbative Ansätze

Um eine Lösung der im letzten Kapitel berechneten DS-Gleichungen zu finden, macht man in der Störungstheorie den Ansatz, daß jede Greensche Funktion als Störungsreihe in dem Kopplungsparameter g darstellbar ist. Mit Hilfe der DS-Gleichungen kann man dann aus den Feynman-Regeln iterativ alle Ordnungen der Greenschen Funktionen berechnen. Es ist aber von der Operatorproduktentwicklung bekannt, daß die wahren Greenschen Funktionen in strikt renormierbaren Theorien Anteile enthalten, die sich wie $\exp(-g^{-2})$ verhalten und die, als Schwarzsche Funktionen, nicht in eine Potenzreihe um $g = 0$ entwickelbar sind, weil sie im Grenzfall $g \rightarrow 0$ schneller als jede Potenz von g abfallen. Durch die Störungsreihenentwicklung übersieht man also solche Terme, und dieser Mangel soll mit den nichtperturbativen Ansätzen behoben werden. Man stellt deswegen folgende Bedingungen an die neuen Ansätze:

1. Sie sollen in g nichtanalytische Terme proportional zu $\exp(-g^{-2})$ enthalten.
2. Nach „Abschalten“ dieser nichtanalytischen Terme sollen sie sich wie die perturbativen Lösungen der Störungsreihe verhalten.
3. Sie sollen weiterhin perturbativ renormierbar bleiben.

Das Quadrat der renormierungsgruppeninvarianten Massenskala Λ besitzt nach (3.8) die gewünschte Form eines in g nichtanalytischen Ausdrucks:

$$\begin{aligned} \Lambda^2(g^2(\nu), \nu) &= \nu^2 \exp\left(-2 \int^{g(\nu)} dg' \frac{1}{\beta(g')}\right) \\ &= \nu^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{\beta_0 g^2(\nu)} [1 + O(g^2)]\right). \end{aligned}$$

Um Punkt eins zu erfüllen, nähert man in den nichtperturbativen Ansätzen die Greenschen Funktionen nullter perturbativer Ordnung (die „verallgemeinerten Feynman-Regeln“) mit rationalen Ausdrücken in Λ^2 an. Wie bereits erwähnt, weiß man aus der Operatorproduktentwicklung, daß die Greenschen Funktionen neben ihrer Störungsreihe auch Anteile der Form

$$L_{10}\Lambda^2 + L_{20}\frac{\Lambda^4}{p^2} + L_{30}\frac{\Lambda^6}{p^4} + \dots$$

enthalten, wobei diese Reihe, die keine perturbativen Logarithmen enthält, für kleine Impulse p nicht abgebrochen werden darf. Statt dessen versucht man, die gesamte Reihe durch rationale Approximanten in Λ^2 anzunähern. Diese sind die einfachsten Funktionen, die das perturbative „power counting“ als Voraussetzung für Punkt drei

erhalten und zugleich global im Impuls, d. h. in DS-Schleifenintegralen anwendbar sind.

Jeder Term der Störungsreihe wird durch einen eigenen rationalen Ansatz erweitert, deshalb bezeichnet man diese Ansätze mit zwei Indizes:

$$\Gamma^{[r,p]}.$$

Der zweite Index p gibt die perturbative Ordnung des rational erweiterten Terms an, während der erste Index r den Grad der rationalen Approximation bezeichnet. Auch die neuen Ansätze sind (als Erweiterung der perturbativen Lösungen Term für Term) in der Störungsreihe entwickelbar:

$$\Gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^k \Gamma^p \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^p. \quad (3.10)$$

Dabei ist Γ^p die bestmögliche rationale Approximation (Grad unendlich) der p -ten perturbativen Ordnung:

$$\Gamma^p = \lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma^{[r,p]}.$$

Die Reihe (3.10) macht natürlich nur Sinn, wenn die laufende Kopplung bei allen Impulsskalen klein bleibt. Die Effekte, die man sonst einer mit abnehmendem Impuls wachsenden Kopplungskonstanten zuschreibt, z.B. Confinement, können mit Hilfe der Ansätze auf eine andere Weise begründet werden.

Nach Bedingung zwei sollen sich beim Bilden des perturbativen Grenzwertes aus den Ansätzen die perturbativen Greenschen Funktionen ergeben. In der QCD beschreibt man diesen Limes durch den Grenzübergang $\Lambda \rightarrow 0$, bei dem trotz (3.8) die Potenzen der Kopplungskonstanten g größer als Null bleiben. Da unsere Feynman-Regeln im Gegensatz zur QCD auch die Massenskala Λ enthalten, würden sie im so definierten perturbativen Limes auch verschwinden; vgl. (1.10). Daher haben wir die in den Feynman-Regeln enthaltene Massenskala mit Λ' bezeichnet. Den perturbativen Limes erhalten wir in diesem Modell, indem wir formal Λ gegen Null gehen lassen, aber Λ' konstant halten. Dabei muß gelten:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Gamma^{[r,k]} = \Gamma^{(k)pert}. \quad (3.11)$$

Diese Bedingung schränkt die Form der $\Gamma^{[r,k]}$ beträchtlich ein.

Um Bedingung drei zu erfüllen, stellt man an die rationalen Approximanten die etwas stärkere und damit hinreichende Forderung, daß sie für große Impulse dasselbe Verhalten zeigen sollen wie die perturbativen Lösungen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}^{[r,p]}(k^2) = \tilde{\Gamma}^{(p)pert}(k^2). \quad (3.12)$$

Diese Eigenschaft wird im wesentlichen durch die asymptotische Freiheit der Theorie sichergestellt. Sie wird hier allerdings in einer geringfügig verschärften Form benötigt: das perturbative Verhalten bei großen Impulsen soll auch dann gewahrt bleiben, wenn nur einige der Impulse einer Vertexfunktion in einer Schleife laufen und die übrigen, als äußere Impulse, konstant bleiben.

Wir konstruieren nun die Ansätze für die aus den Feynman-Regeln bekannten perturbativen nullten Ordnungen des Φ -Feld-Propagators und des $\Gamma_{2,1}$ -Vertex.

Nach (1.9) gilt:

$$\tilde{G}_{2,0}'^{(0)pert}(p^2) = \frac{1}{p^2}.$$

Die rationale Approximante sollte die Massendimension -2 haben und sich (wegen Bedingung drei) für große Impulse wie p^{-2} verhalten. Damit ergibt sich der Ansatz:

$$\tilde{G}_{2,0}'^{[r,0]}(p^2) = \frac{\prod_{k=1}^r (p^2 + \tau_{r,k} \Lambda^2)}{\prod_{k=1}^{r+1} (p^2 + \sigma_{r,k} \Lambda^2)}. \quad (3.13)$$

Dabei sollen $\sigma_{r,k}$ und $\tau_{r,k}$ für alle Werte von r und k reell sein, da der Verzweigungsschnitt, der durch die Folge von Nullstellen und Polstellen (außer dem isolierten Teilchenpol) des Propagators gegeben ist, auf der reellen Achse liegen muß.

Der perturbative nackte (2,1)-Vertex hat nach (1.10) die Form

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}'^{(0)pert}(p^2, q^2, k^2) = -if_0 = -ig_0 \Lambda'^2.$$

Für unsere Berechnungen ist es sinnvoll, im nichtperturbativen Ansatz nicht die allgemeine Form einer rationalen Approximanten dieses Ausdrucks in den drei Impulsen anzunehmen. Wir machen stattdessen den Ansatz

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}'^{[r,0]}(p^2, q^2, k^2) = -ig_0 \Lambda'^2 \frac{M(p^2, q^2, k^2)}{\left[\prod_{s=1}^r (p^2 + \tau'_{r,s} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (q^2 + \tau'_{r,s} \Lambda^2) \right] \left[\prod_{s=1}^r (k^2 + \mu'_{r,s} \Lambda^2) \right]}, \quad (3.14)$$

wobei $M(p^2, q^2, k^2)$ ein Polynom in p^2, q^2 und k^2 der Form

$$M(p^2, q^2, k^2) = (p^2 q^2 k^2)^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0} C_{m_1 m_2 m_3} (p^2)^{m_1} (q^2)^{m_2} (k^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r - (m_1 + m_2 + m_3)}$$

ist. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, daß sein Nennerpolynom vollständig in Polynome mit konstanten Nullstellen in den drei Impulsen faktorisiert. Durch diese Einschränkung verlangsamt man zwar die Konvergenz des Verfahrens, vermindert aber nicht die Menge der mit diesem Ansatz approximierbaren Funktionen. Die

faktorisierende Nennerstruktur läßt sich auch daraus begründen, daß sie eine diskrete Approximation der Verzweigungsschnittstruktur der Vertexfunktion in ihren drei Variablen vermitteln soll: stellt man diese Schnittstruktur durch ein Dreifach-Cauchy-Integral dar, so faktorisiert dessen Cauchy-Nenner bekanntlich in den drei Variablen.

Speziell im Fall $r = 1$ nehmen wir als Ansatz:

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}^{[1,0]}(p, q, r) = -ig_0\Lambda'^2 \frac{M(p^2, q^2, r^2)}{(p^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)(q^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)(r^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)}, \quad (3.15)$$

mit

$$\begin{aligned} M(p^2, q^2, r^2) = & p^2q^2r^2 + c_1\Lambda^2(p^4 + q^4) + c_2\Lambda^2p^2q^2 + c_3\Lambda^2r^2(p^2 + q^2) \\ & + c_4\Lambda^2r^4 + c_5\Lambda^4(p^2 + q^2) + c_6\Lambda^4r^2 + c_7\Lambda^6. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Form der höheren *perturbativen* Ordnungen wird im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt. Sie ergeben sich aus diesen Ansätzen mit Hilfe der DS-Gleichungen durch Iteration, wie von der Störungstheorie her gewohnt.

Alle physikalisch sinnvollen Ansätze müssen so beschaffen sein, daß sie die DS-Gleichungen erfüllen, insbesondere müssen die eben konstruierten Ansätze die DS-Gleichungen in nullter Ordnung in g erfüllen. Diese zusätzliche Bedingung findet in den Selbstkonsistenzgleichungen für die Koeffizienten der Ansätze ihren Ausdruck.

3.3 Die Selbstkonsistenzgleichungen

Die DS-Gleichungen haben die allgemeine Form

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + \frac{g_0^2}{4\pi} \Phi_N(\Gamma_2, \dots, \Gamma_{N+1}),$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite die Feynman-Regeln darstellt und das Funktional Φ eine nichtlineare Verknüpfung von Vertexfunktionen durch ein Schleifenintegral ausdrückt.

Wir verlangen von den rationalen Ansätzen, daß sie eine Lösung dieser Gleichungen beschreiben. Beim Einsetzen der Ansätze in die Gleichungen erhält man beim Vergleich der nullten perturbativen Ordnungen

$$\Gamma_N^{[r,0]} - \Gamma_N^{(0)pert} + O(g^2(\nu), e(r+1)) = \frac{g_0^2}{4\pi} \Phi_N(\Gamma^{[r,0]}),$$

wobei $O(g^2(\nu), e(r+1))$ die Fehler der nächsthöheren Ordnung — sowohl in der Störungsreihe als auch bezüglich der rationalen Approximation — zusammenfaßt.

Da auf beiden Seiten der Gleichung rationale Approximanten stehen, kann Selbstkonsistenz der Ansätze nur heißen, daß beide Seiten der Gleichung an $n(r)$ Stützstellen, die im folgenden noch sinnvoll zu wählen sind, übereinstimmen. Durch die Werte an den Stützstellen sind die Approximanten dann bereits eindeutig bestimmt, und die Fehler, die sich beim Vergleich beider Seiten an den anderen Stellen ergeben, sind im Term $O(e(r+1))$ enthalten. Diese Fehler sind höchstens von der Ordnung g^2 ; eine Erklärung hierfür geben wir im nächsten Abschnitt.

Da sich $\Gamma_N^{[r,0]}$ und $\Gamma_N^{(0)pert}$ durch die nichtperturbativen Modifikationen unterscheiden, muß das Funktional Φ_N einen $1/g^2$ -Faktor ausbilden, um auf der rechten Seite Terme nullter Ordnung in g zu produzieren. Die Tatsache, daß dies auch wirklich geschieht, ist eine erste Bestätigung der Ansätze. Je nachdem, ob es sich bei Φ um ein konvergentes oder divergentes Schleifenintegral handelt, wird im nichtlinearen σ -Modell der $1/g^2$ -Faktor auf unterschiedliche Weisen ausgebildet.

3.4 $1/g^2$ -Mechanismus bei divergenten Schleifenintegralen

Dieser $1/g^2$ -Mechanismus ist schon aus QCD-Rechnungen bekannt. Er beruht auf der Tatsache, daß man divergente Schleifenintegrale auf die Form

$$I^{div} = \frac{g_0^2}{4\pi} \left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} R$$

bringen kann (R bezeichnet die nach der Impulsintegration bleibenden Feynman-Integrale), wenn sich aus den äußeren Impulsen einen Faktor Λ^2 abspalten läßt. Indem man die Wahl hat, ob man die Impulse als Vielfache von Λ^2 interpretiert oder nicht, kann man den $1/g^2$ -Mechanismus beliebig ein- und ausschalten. Man hat also die Wahl, ob man perturbativ oder nichtperturbativ rechnet, und es erscheint zunächst als reine Willkür, wenn wir festsetzen, daß nur die Impulswerte an den Stützstellen der Approximante Vielfache von Λ^2 sind. Dies hat den Vorteil, daß die Approximationsfehler an allen Stellen außerhalb der Stützstellen automatisch von der Ordnung g^2 sind. Man kann aber zeigen, daß diese Wahl auch die einzig mögliche ist, die mit der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit in Einklang zu bringen ist. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir den Extremfall, bei dem man alle Impulse an allen Stellen als Vielfache von Λ^2 interpretiert. Unsere Approximanten, deren Selbstkonsistenzgleichungen wir in diesem Fall berechneten, wären dann für sich bereits eine Lösung der DS-Gleichungen, aber durch den bei allen divergenten Integralen auftretenden $1/g^2$ -Effekt hätten sie keine divergenten Terme höherer Ordnung in g^2 . Damit wäre die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit nicht erfüllt. Außerdem würde diese rein nichtperturbative Lösung im Grenzfall $\Lambda^2 \rightarrow 0$ nicht mehr gegen die Störungsreihe konvergieren. Die Erhaltung des perturbativen Limes und der perturbativen Renormierbarkeit fungieren also als sehr wesentliche *Randbedingungen* für die Lösung des DS-Systems.

Es bleibt zu zeigen, daß die Größe

$$\Pi(g^2(\nu), \epsilon) := \frac{g_0^2}{4\pi} \left(\frac{\nu_0^2}{\Lambda^2} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\nu^2}{\Lambda^2} \right)^\epsilon Z_g(\nu) g^2(\nu) \epsilon \quad (3.17)$$

unabhängig von g^2 ist. Mit den Integraldarstellungen (3.7) und (3.9) erhält man

$$\begin{aligned} \Pi(g^2(\nu), \epsilon) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{g(\Lambda) + O(\epsilon)}{g(\nu)} \right)^2 \exp \left(\int_{g(\Lambda)}^{g(\nu)} \frac{2\beta(g')}{g'(\beta(g') - \epsilon g')} dg' \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(- \int_0^{g(\nu)} \frac{2\beta(g')}{g'(\beta(g') - \epsilon g')} dg' \right) g^2(\nu) \frac{1}{\epsilon} \\ &= \frac{g^2(\Lambda)}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \exp \left(- \int_0^{g(\Lambda)} \frac{2\beta(g')}{g'(\beta(g') - \epsilon g')} dg' \right) + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{\beta_0} (1 + O(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon)). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Zum letzten Schritt gehört eine längere Nebenrechnung, bei der man das Integral im Exponenten über die Terme ausführt, die für $\epsilon \rightarrow 0$ bei $g' = 0$ singularär werden. Diese Singularität liefert im Exponenten einen Term proportional zu $\ln \epsilon$, der sich mit dem Vorfaktor der e-Funktion bis auf $1/\beta_0$ weghebt. Eine ausführliche Beschreibung dieser Rechnung findet man in [6].

Bei der Herleitung dieses „divergenten“ $1/g^2$ -Mechanismus haben wir vorausgesetzt, daß β_0 unabhängig von g_0 ist. In Gleichung (3.18) erkennt man, daß der Mechanismus für den Fall $\beta_0 \sim 1/g_0^2$ nicht funktioniert. Bei einer Entwicklung für große N , bei der β_0 sich wie N verhält, wird aber in der Literatur die Annahme gemacht, daß $N \sim 1/g_0^2$ gilt. In dieser viel untersuchten Näherung, in der das Modell exakt lösbar ist, werden also diejenigen nichtperturbativen Effekte, die mit unserer erweiterten Störungstheorie erfaßt werden können, gerade unterdrückt.

3.5 $1/g^2$ -Mechanismus konvergenter Schleifenintegrale

Da wir nur in zwei Dimensionen rechnen, sind alle Schleifen, die nur aus physikalischen Propagatoren bestehen, konvergent. Insbesondere gilt dies für Schleifen von Funktionen, die nur unphysikalische äußere Beine haben. Wir berechnen in dieser Arbeit die endlichen Integrale für $\tilde{\Gamma}_{0,2}$ und $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ und beobachten dabei, daß Faktoren der Art

$$\ln \left(\frac{p^2 + m\Lambda^2}{n\Lambda^2} \right) \quad (3.19)$$

ausgebildet werden. *Dies ist ungewöhnlich und eine Besonderheit des σ -Modells*, da die Logarithmen, die man normalerweise als Ergebnis bei Schleifenrechnungen erhält, niemals das Argument

$$\frac{p^2 + m\Lambda^2}{n\Lambda^2},$$

sondern stets Argumente des Typs

$$\frac{p^2 + c\Lambda^2}{\nu^2} \quad (3.20)$$

mit der *willkürlichen* Skala ν aufweisen und daher völlig andere Eigenschaften besitzen.

Der Logarithmus (3.19) erinnert an die Form einer laufenden Kopplung, die man in der Störungstheorie durch Aufsummation führender Terme unendlich vieler Graphen erhält. Wir scheinen mit der Einführung des α -Feldes in die Lagrange-Dichte, durch die wir unendlich viele Wechselwirkungsterme zusammengefaßt haben, eine ähnliche Summation erzeugt zu haben. Mit [25],

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{p^2 + m\Lambda^2}{n\Lambda^2}\right) &= \ln\left(\frac{\nu^2}{\Lambda^2}\right) + \ln\left(\frac{p^2 + m\Lambda^2}{n\nu^2}\right) \\ &= \frac{4\pi}{\beta_0 g^2(\nu)} + O(g^2) + \ln\frac{p^2 + m\Lambda^2}{n\nu^2} \\ &= \frac{4\pi}{\beta_0 g^2(\nu)} + O(0), \end{aligned} \quad (3.21)$$

und (3.1),

$$\frac{1}{g^2} = \frac{Z_g}{g_0^2} = \left(1 - O\left(\frac{g^2}{\epsilon}\right)\right) \frac{1}{g_0^2}$$

sieht man, daß auch die konvergenten Integrale Anteile enthalten, die einen $1/g^2$ -Faktor ausbilden. Im Vergleich zu dem lokalen Mechanismus bei divergenten Integralen, der nur an den Stützstellen auftritt, ist dieser Mechanismus ein globaler Effekt; er tritt auf, wenn p kein Vielfaches von Λ^2 ist. Bei den folgenden Rechnungen setzen wir voraus, daß dieser Mechanismus nur bei rein konvergenten Schleifenintegralen für die Hilfsfeldfunktionen $\Gamma_{0,m}$ und nicht auch bei den konvergenten Anteilen der divergenten Schleifen mit physikalischen äußeren Beinen auftritt. Dies erscheint insofern zulässig, als bei letzteren, soweit sie bisher untersucht wurden, stets die „üblichen“ Logarithmen vom Typ (3.20) beobachtet wurden.

Wir den Mechanismus im folgenden als den „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus bezeichnen.

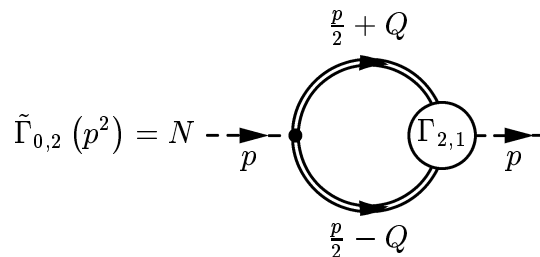
Kapitel 4

Der Hilfsfeldpropagator

In diesem Kapitel berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (B.0.2) die Form des α -Feld-Propagators $\tilde{G}_{0,2}$, um für ihn eine geeignete rationale Approximante konstruieren zu können.

4.1 Rechnung in der Ordnung $r = 0$

Die DS-Gleichung für den Propagator des unphysikalischen Hilfsfeldes lautet:



$$\tilde{\Gamma}_{0,2}(p^2) = -\frac{ig_0\Lambda^2 N}{2} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}\left(\frac{p}{2} + Q\right) \tilde{\Gamma}'_{2,1}\left(\frac{p}{2} + Q, -p, \frac{p}{2} - Q\right) \tilde{G}'_{2,0}\left(\frac{p}{2} - Q\right) \quad (4.1)$$

Das Schleifenintegral ist als zweidimensionales Impulsintegral über einen Ausdruck, der proportional zu Q^{-4} ist, endlich. Mit den Ansätzen nullter Ordnung,

$$\tilde{G}'_{2,0}{}^{[0,0]}(p^2) = \frac{1}{p^2 + \sigma_{01}\Lambda^2},$$

$$\tilde{\Gamma}'_{2,1}{}^{[0,0]}(p^2, k^2, q^2) = -ig_0\Lambda'^2,$$

kann man das Integral, das in dieser Ordnung der semiklassischen Feynman-Regel (1.13) entspricht, schnell berechnen (siehe Anhang B.1) und erhält:

$$\tilde{\Gamma}_{0,2}(p^2) = -\frac{N(g_0\Lambda'^2)^2}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2(p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2)}} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2} - \sqrt{p^2}}. \quad (4.2)$$

Man erkennt, daß $\tilde{\Gamma}_{0,2}$ logarithmisch singulär für $\sigma_{01}\Lambda^2 = 0$ ist; diese Eigenschaft spiegelt sich in dem „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus wider. Sie ist typisch für die unphysikalischen Funktionen, die in diesem Modell aus endlichen Integralen zu berechnen sind, und tritt z. B. in Rechnungen der QCD nicht auf.

Wir benötigen den α -Feld-Propagator, um ihn in die divergenten Schleifenintegrale der physikalischen Vertexfunktionen einsetzen zu können. Bei diesen Integralen interessieren wir uns nur für die divergenten Anteile, die von den Beiträgen großer Impulse dominiert werden. Daher entwickeln wir unser Ergebnis nach großen Impulsen.

In Anhang B.2 nähern wir $\tilde{\Gamma}_{0,2}(p^2)$ für große Impulse p^2 und erhalten:

$$\tilde{\Gamma}_{0,2}(p^2) = -\frac{Ng_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2}\right) \frac{\Lambda'^4}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} + O\left(\frac{1}{p^6}, \frac{\ln p^2}{p^6}\right).$$

Für den zugehörigen Propagator ergibt sich die Form:

$$\tilde{G}_{0,2}^{conn}(p^2) = -\frac{4\pi}{Ng_0^2} \left(\ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2}\right)^{-1} \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\Lambda'^4}.$$

Nach (3.18) gilt:

$$\left(\ln \frac{p^2 + m}{\sigma_{01}\Lambda^2}\right)^{-1} = \frac{(N-2)g_0^2}{4\pi} + O(g^0),$$

und man erhält damit für die niedrigste Ordnung von $\tilde{G}_{0,2}^{conn}(p^2)$ in g^2 für große N folgenden Ausdruck:

$$\tilde{G}_{0,2}^{conn}(p^2) \approx \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\Lambda'^4}.$$

An der Form erkennt man, daß dieser Propagator keinem realen Teilchen entspricht, weil er keine Pole hat. Durch den „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus besitzt der Propagator wider Erwarten einen Beitrag nullter Ordnung in g und N . Im folgenden machen wir für den α -Propagator den dieser Form entsprechenden rationalen Ansatz:

$$\tilde{G}_{0,2}^{[1,0]conn}(p^2) = \frac{p^2 + \mu_{01}\Lambda^2}{\Lambda'^4}, \quad (4.3)$$

und dieser Ansatz ist von der Ordnung $r = 1$ der rationalen Approximation, da das ihm entsprechende $\tilde{\Gamma}_{0,2}$ bereits einen Nennerpol besitzt. Im Vergleich zu den QCD-Rechnungen mit den rationalen Ansätzen ist es ein neuer Effekt, daß ein Schleifenintegral, das nur mit Ansätzen der Ordnung $r = 0$ berechnet wurde, einen Term der Ordnung $r = 1$ produziert. Wir nehmen an, daß dieser Effekt in allen Ordnungen der rationalen Approximation auftritt. Das bedeutet unter anderem, daß die rationalen Approximanten einer Ordnung r kein abgeschlossenes System von Lösungen für die DS-Gleichungen bilden. Man muß vielmehr, um die Gleichungen für physikalische Vertizes der Stufe $r = n$ zu berechnen, die dazu benötigten unphysikalischen Vertizes mit den Ergebnissen der Ordnung $n - 1$ berechnen, und für diese Rechnung benötigt man die Ergebnisse der Ordnung $n - 2$, usw..

Die allgemeine Form der rationalen Approximanten für $\tilde{G}_{0,2}$ ergibt sich zu:

$$\tilde{G}_{0,2}^{[r,0]conn}(p^2) = \frac{\prod_{j=1}^r (p^2 + \mu_{rj}\Lambda^2)}{\Lambda'^4 \prod_{k=1}^{r-1} (p^2 + \phi_{rk}\Lambda^2)}. \quad (4.4)$$

Der Ansatz für $r = 1$ ist konsistent mit den Ergebnissen der vorherigen Rechnung, falls

$$\mu_{11} = 2\sigma_{01} \quad (4.5)$$

gilt.

4.2 Rechnung in der Ordnung $r = 1$

Wir stellen hier das Ergebnis der Rechnung mit den Ansätzen für $r = 1$ vor. Die Ansätze lauten:

$$\tilde{G}_{2,0}'^{[1,0]}(p^2) = \frac{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2}{(p^2 + \sigma_{11}\Lambda^2)(p^2 + \sigma_{12}\Lambda^2)},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}'^{[1,0]}\left(\frac{p}{2} - q, \frac{p}{2} + q, -p\right) = \frac{-ig_0\Lambda'^2 M\left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2, \left(\frac{p}{2} + q\right)^2, p^2\right)}{\left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2 + \tau'_{11}\Lambda^2\right)\left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2 + \tau'_{11}\Lambda^2\right)(p^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)},$$

wobei M durch (3.16) gegeben ist. Das Ergebnis der Rechnung vergleichen wir mit dem Ansatz

$$\tilde{G}_{0,2}^{[2,0]conn}(p^2) = \frac{1}{\Lambda'^4} \frac{(p^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(p^2 + \mu_{12}\Lambda^2)}{p^2 + \phi_{11}\Lambda^2}.$$

Das Schleifenintegral für $\tilde{\Gamma}_{0,2}$ wird in Anhang C.1 berechnet, man erhält (C.24):

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{0,2}(p^2) &= -\frac{N}{2} i g_0 \Lambda'^2 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}'_{2,0}{}^{[r,0]} \left(\frac{p}{2} + Q \right) \tilde{\Gamma}'_{2,1}{}^{[1,0]} \left(\frac{p}{2} - Q, \frac{p}{2} + Q, -p \right) \tilde{G}'_{2,0}{}^{[r,0]} \left(\frac{p}{2} - Q \right) \\ &= -\frac{N (g_0 \Lambda'^2)^2}{8\pi} \frac{1}{(\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4 p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} A\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}A &= 2c_1 \Lambda^2 (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 \ln \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \\ &+ B_1 \frac{1}{\sqrt{p^2 (4\sigma_{11} \Lambda^2 + p^2)}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^2 (4\sigma_{11} \Lambda^2 + p^2)}}{-p^2 + \sqrt{p^2 (4\sigma_{11} \Lambda^2 + p^2)}} \\ &+ B_2 \frac{1}{\sqrt{p^2 (4\sigma_{12} \Lambda^2 + p^2)}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^2 (4\sigma_{12} \Lambda^2 + p^2)}}{-p^2 + \sqrt{p^2 (4\sigma_{12} \Lambda^2 + p^2)}} \\ &+ B_{12} \frac{1}{\sqrt{p^4 + 2p^2 (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4}} \\ &\cdot \ln \frac{(\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4 - \left(p^2 + \sqrt{p^4 + 2p^2 (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4} \right)^2}{(\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4 - \left(p^2 - \sqrt{p^4 + 2p^2 (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4} \right)^2},\end{aligned}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned}B_1 &= (2p^2 + 4c_1 \Lambda^2 + 2c_2 \Lambda^2) \sigma_{11}^2 \Lambda^4 \\ &- (4c_3 \Lambda^2 p^2 + 4c_5 \Lambda^4) \sigma_{11} \Lambda^2 \\ &+ 2c_4 \Lambda^2 p^4 + 2c_6 \Lambda^4 p^2 + 2c_7 \Lambda^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2 &= (2p^2 + 4c_1 \Lambda^2 + 2c_2 \Lambda^2) \sigma_{12}^2 \Lambda^4 \\ &- (4c_3 \Lambda^2 p^2 + 4c_5 \Lambda^4) \sigma_{12} \Lambda^2 \\ &+ 2c_4 \Lambda^2 p^4 + 2c_6 \Lambda^4 p^2 + 2c_7 \Lambda^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{12} &= -(2p^2 + 2c_2 \Lambda^2) \sigma_{11} \sigma_{12} \Lambda^2 \\ &+ (-2c_1 \Lambda^4 + 2c_3 \Lambda^2 p^2 + 2c_5 \Lambda^4) (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2 \\ &- 2c_4 \Lambda^2 p^4 - 2c_6 \Lambda^4 p^2 - 2c_7 \Lambda^6.\end{aligned}$$

Die Logarithmen sind — bis auf den ersten — im perturbativen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ singular, d.h. sie können einen „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus hervorrufen.

In Anhang C.2 wird dieser Term für große Impulse genähert und seine führenden Beiträge in g^2 werden berechnet. Wir erhalten damit das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,2}^{[1,0]}(p^2) &= -\frac{Ng_0}{4\pi} \frac{\Lambda'^4}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \left(1 + (\sigma_{11} + \sigma_{12} + 2c_1 + c_2 + 2c_3) \frac{\Lambda^2}{p^2} \right) \ln \frac{p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{12}} \Lambda^2} \\ &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{\Lambda'^4}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \left(1 + (\sigma_{11} + \sigma_{12} + 2c_1 + c_2 + 2c_3) \frac{\Lambda^2}{p^2} \right) + O(p^{-4}, g^2 N). \end{aligned}$$

Obwohl mit Ansätzen erster Ordnung gerechnet wurde, ist das Ergebnis von der Ordnung $r = 2$. Der Ansatz für $\tilde{\Gamma}_{0,2}^{[2,0]}(p^2)$ lautet nach (4.5):

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,2}^{[2,0]}(p^2) &= \frac{\Lambda'^4 (p^2 + \Phi_{21}\Lambda^2)}{(p^2 + \mu_{21}\Lambda^2)(p^2 + \mu_{22}\Lambda^2)} \\ &= \frac{\Lambda'^4}{p^2 + \mu_{21}\Lambda^2} \left(1 + \frac{(\Phi_{21} - \mu_{22}) \Lambda^2}{p^2} + O(p^{-4}) \right). \end{aligned}$$

Damit er möglichst gut mit dem berechneten Ergebnis übereinstimmt, fordert man:

1. Gleiche Polstellen der beiden Ausdrücke:

$$\tau_{12} = \mu_{21}.$$

2. Übereinstimmung der Residuen der Polstellen bis zur Ordnung p^{-4} :

$$\Phi_{21} - \mu_{22} = \sigma_{11} + \sigma_{12} + 2c_1 + c_2 + 2c_3$$

Diese Gleichungen werden für die folgenden Rechnungen nicht mehr benötigt. Sie bestätigen aber die Vermutung, daß das Ergebnis eines Schleifenintegrals für unphysikalische Vertexfunktionen von höherer Ordnung in r ist als die zu seiner Berechnung benutzten Ansätze.

Da es sich um endliche Integrale handelt, wird der Rechenaufwand mit größerem r um ein Vielfaches erhöht. Für allgemeine r scheint es undenkbar, diese Schleifenintegrale lösen zu können.

Kapitel 5

Der unphysikalische Dreipunktvertex

Um eine rationale Approximante für $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ konstruieren zu können, berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (B.0.3) die Form des Beitrags höchster Ordnung von $\tilde{\Gamma}_{0,3}$. Die Gleichung (B.0.3) für den Dreipunktvertex mit drei unphysikalischen Beinen hat die Form:

$$\text{---} \circ \Gamma_{0,3} \text{---} = N \text{---} \circ \left(\text{---} \circ \Gamma_{2,1} \text{---} \right) \text{---} + \text{---} \circ \Gamma_{2,2} \text{---} \quad (5.1)$$

Auf der rechten Seite vernachlässigen wir den Term mit dem Vierpunktvertex, da dieser nur aus nichtführenden Ordnungen von g_0 und N besteht. Das übrigbleibende Schleifenintegral ist endlich, und in Anlehnung an die Ergebnisse für den α -Feld-Propagator erwarten wir auch bei dieser Rechnung, daß das Ergebnis des Schleifenintegrals einer rationalen Approximante der Stufe $r = 1$ entspricht. Diese Approximante sollte symmetrisch in den äußeren Impulsen sein und die Massendimension zwei haben. Als zweidimensionales Impulsintegral über einen Integranden der Form $((Q + R)^2)^{-3}$ sollte das Ergebnis für große Impulse ein asymptotisches Verhalten wie $(Impuls)^{-4}$ haben. Damit erhält man für den Ansatz die Form

$$\tilde{\Gamma}_{0,3}^{[1,0]}(p^2, q^2, k^2) = -ig_0 \Lambda'^6 \frac{a(p^2 + q^2 + k^2) + b\Lambda^2}{(p^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)}, \quad (5.2)$$

die dem Ergebnis der folgenden Rechnung anzugleichen ist. Berechnet man mit den Ansätzen

$$\tilde{G}_{2,0}^{[0,0]'} = \frac{1}{p^2 + \sigma_{01}\Lambda^2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}^{[0,0]'} = -ig_0\Lambda'^2$$

das erste Schleifenintegral in (5.1),

$$I = -ig_0\Lambda'^2 N \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{2,0} \left(\frac{p+q}{2} + Q \right) \tilde{\Gamma}_{2,1} \left(\frac{p+q}{2} + Q, -p, \frac{p-q}{2} - Q \right) \\ \tilde{G}_{2,0} \left(\frac{p-q}{2} - Q \right) \tilde{\Gamma}_{2,1} \left(-\frac{p-q}{2} + Q, -q, \frac{p+q}{2} - Q \right) \tilde{G}_{2,0} \left(\frac{p+q}{2} - Q \right),$$

dann erhält man nach einer längeren, in Anhang D skizzierten Rechnung für I den Ausdruck

$$I = \frac{1}{4\pi} \frac{Nig_0\Lambda'^2 (g_0\Lambda'^2)^2}{p^2 q^2 (p+q)^2 - \Delta(p^2, q^2, (p+q)^2) \sigma_{01}\Lambda^2} \\ \left\{ \frac{p^2 (p^2 - (p+q)^2 - q^2)}{\sqrt{p^4 + 4p^2\sigma_{01}\Lambda^2}} \ln \frac{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2\sigma_{01}\Lambda^2}}{p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2\sigma_{01}\Lambda^2}} \right. \\ \left. + (\text{in } p, q \text{ und } p+q \text{ zyklische Terme}) \right\},$$

mit der symmetrischen Dreiecksfunktion

$$\Delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

(vgl. (D.1, D.50)). Nach einer ebenfalls in Anhang D beschriebenen Näherung für große Impulse ergibt sich für die führenden Terme von $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ der Ausdruck:

$$\tilde{\Gamma}_{0,3}(p^2, q^2, (p+q)^2) = ig_0\Lambda'^2 \frac{\Lambda'^4}{p^2 q^2 (p+q)^2 - \Delta(p^2, q^2, (p+q)^2) \sigma_{01}\Lambda^2} \\ \left\{ \frac{p^2 (p^2 - (p+q)^2 - q^2)}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} + \frac{q^2 (q^2 - (p+q)^2 - p^2)}{q^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} \right. \\ \left. + \frac{(p+q)^2 ((p+q)^2 - q^2 - p^2)}{(p+q)^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} \right\} \\ = ig_0\Lambda'^2 \frac{\Lambda'^4}{(p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2) (q^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2) ((p+q)^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)} \\ \frac{-p^2 q^2 (p+q)^2 (p^2 + q^2 + (p+q)^2 + 12\sigma_{01}\Lambda^2) + \Delta(p^2, q^2, (p+q)^2) 4\sigma_{01}^2 \Lambda^4}{p^2 q^2 (p+q)^2 - \Delta(p^2, q^2, (p+q)^2) \sigma_{01}\Lambda^2}, \quad (5.3)$$

dessen führende Ordnung zwar mit der führenden Ordnung des Ansatzes (5.2) für $a = 1$ und $\mu'_{11} = 2\sigma_{01}$ übereinstimmt, dessen zweitführende Ordnung aber mit Ansatz (5.2) nicht zu erfassen ist, weil in ihm längst nicht alle Terme einer Taylor-Entwicklung in den drei Impulsen enthalten sind. Neben der Konstanten b sollte man im Ansatz zusätzliche Zählersummanden der Form

$$\frac{(p^6 + q^6 + (p+q)^6)}{p^2 q^2 (p+q)^2}, \frac{p^2}{q^2}, \frac{(p+q)^2}{p^2}, \dots$$

zulassen, um das Ergebnis der Rechnung auch in der zweitführenden Ordnung exakt widergeben zu können. Wir brauchen diesen Vertex zur Berechnung der Gleichung für den $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ -Vertex. In dieser Rechnung tritt er in einem divergenten Schleifenintegral auf, daher interessieren wir uns nur für sein Verhalten bei großen Impulsen. Zwei seiner Beine gehören bei jener Rechnung zur Schleife und tragen die Impulse $Q - \frac{p+q}{2}$ und $Q + \frac{q-p}{2}$, für große Schleifenimpulse Q zeigen diese beiden Impulse dasselbe asymptotische Verhalten. In Anhang D nähern wir das Ergebnis (5.3) für große Impulse. Dort zeigt sich, daß man $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ durch einen Ansatz der Art (5.2) mit $a = 1$ und $b = 4\sigma_{01} \stackrel{(4.5)}{=} 2\mu_{11}$ für große Impulse annähern kann, falls zwei seiner Impulse dasselbe asymptotische Verhalten zeigen. In der folgenden Rechnung für $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ machen wir also für $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ den Ansatz

$$\tilde{\Gamma}_{0,3}^{[1,0]}(p^2, q^2, k^2) = \left(-ig_0\Lambda'^6\right) \frac{p^2 + q^2 + k^2 + 2\mu_{11}\Lambda^2}{(p^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)}. \quad (5.4)$$

Wir möchten außerdem eine später benötigte Zerlegung dieses Ansatzes für $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,3}^{[1,0]}(p^2, q^2, k^2) &= -ig_0\Lambda'^6 \frac{p^2 + q^2 + k^2 + 2\mu_{11}\Lambda^2}{(p^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \\ &= C_0(q^2, k^2) + \frac{1}{p^2 + \mu_{11}\Lambda^2} C_1(q^2, k^2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit

$$C_0(q^2, k^2) = -\frac{ig_0\Lambda^6}{(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)}, \quad (5.6)$$

$$C_1(q^2, k^2) = -\frac{ig_0\Lambda^6}{(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} (q^2 + k^2 + \mu_{11}\Lambda^2). \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}'_{2,1}{}^{[1,0]}(p^2, q^2, r^2) &= -ig_0\Lambda^2 \frac{1}{(p^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)(q^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)(r^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)} \\
&\quad \cdot \left(p^2 q^2 r^2 + c_1 \Lambda^2 (p^4 + q^4) + c_2 \Lambda^2 p^2 q^2 + c_3 \Lambda^2 r^2 (p^2 + q^2) \right. \\
&\quad \left. + c_4 \Lambda^2 r^4 + c_5 \Lambda^4 (p^2 + q^2) + c_6 \Lambda^4 r^2 + c_7 \Lambda^6 \right) \\
&= B_0(p^2, q^2, r^2) + B_1(q^2, r^2) \frac{1}{p^2 + \tau'_{11}\Lambda^2}, \tag{6.2}
\end{aligned}$$

mit

$$B_0(p^2, q^2, r^2) = -\frac{ig_0\Lambda'^2}{(q^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)(r^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)} (q^2 r^2 + c_2 \Lambda^2 q^2 + c_3 \Lambda^2 r^2 + c_1 \Lambda^2 p^2 + c_5 \Lambda^4 - c_1 \tau'_{11} \Lambda^4), \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
B_1(q^2, r^2) &= -\frac{ig_0\Lambda'^2\Lambda^2}{(q^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)(r^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)} \left(c_1 q^4 + c_4 r^4 + q^2 r^2 (c_3 - \tau'_{11}) \right. \\
&\quad \left. + q^2 (c_5 - \tau'_{11} c_2) \Lambda^2 + r^2 (c_6 - \tau'_{11} c_3) \Lambda^2 + (c_7 + c_1 \tau'_{11}{}^2 - c_5 \tau'_{11}) \Lambda^4 \right). \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Der erste Term ist regulär in dem äußeren Impuls p^2 , während im zweiten Term die Anteile zusammengefaßt sind, die für $p^2 = -\tau'_{11}\Lambda^2$ singular sind. Der Koeffizient B_1 des zweiten Terms hängt nicht mehr von p^2 ab. Graphisch deuten wir diese Zerlegung folgendermaßen an:

Beim Einsetzen in die DS-Gleichung wählen wir die Impulsverteilung so, daß p den äußeren Impuls der Schleife darstellt. Dann ist der Polfaktor $(p^2 + \tau'_{11}\Lambda^2)^{-1}$ unabhängig vom Schleifenimpuls, und man kann ihn vor das Integral ziehen. Auch der Ansatz für $\tilde{\Gamma}'_{2,0}$ auf der rechten Seite der Gleichung besitzt einen regulären Anteil in p^2 und einen Polterm:

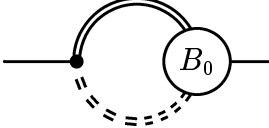
$$\frac{(p^2 + \sigma_{11}\Lambda^2)(p^2 + \sigma_{12}\Lambda^2)}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2} = p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^2 + \frac{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2}. \tag{6.5}$$

Eine Selbstkonsistenzforderung an die Ansätze ist, daß die Polstellen beider Seiten der Gleichung übereinstimmen, da man sonst an beiden Polstellen unendlich große Approximationsfehler macht. Es soll also

$$\tau_{11} = \tau'_{11} \quad (6.6)$$

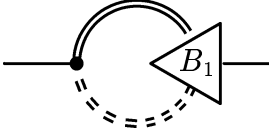
gelten, das heißt die Nullstelle des Propagators $\tilde{G}'_{2,0}$ soll mit den Polstellen von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ in den physikalischen Impulsen übereinstimmen.

Setzt man nun die Ansätze für $r = 1$ in die DS-Gleichung (6.1) ein, so erhält man mit der Zerlegung des $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ -Vertex zwei Anteile des Schleifenintegrals, deren Beiträge nullter Ordnung in g^2 wir in Anhang E berechnen:



The diagram shows a horizontal line entering from the left, which then splits into two arcs forming a loop. The upper arc is solid, and the lower arc is dashed. A circular vertex labeled B_0 is attached to the right side of the loop.

$$= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ (c_2 + c_3 + s) \Lambda^2 + p'^2 \right\}, \quad (6.7)$$



The diagram shows a horizontal line entering from the left, which then splits into two arcs forming a loop. The upper arc is solid, and the lower arc is dashed. A triangular vertex labeled B_1 is attached to the right side of the loop.

$$= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ p'^2 (c_3 + 4c_4 - \tau_{11}) \Lambda^2 + s (c_1 + c_3 + c_4 - \tau_{11}) \Lambda^4 \right. \\ \left. + (c_5 + c_6 - c_2 \tau_{11} - c_3 \tau_{11}) \Lambda^4 \right\}, \quad (6.8)$$

wobei für p' die festen Werte an den Anpassungsstellen der Gleichung einzusetzen sind. Man kann allgemein zeigen, daß die Größe s , die Differenz aus der Summe der Zählermassen und der Summe der Nennermassen des Integranden,

$$s = 2\sigma_{01} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}, \quad (6.9)$$

bei quadratisch divergenten Integralen den einzigen impulsunabhängigen Beitrag niedrigster Ordnung in g liefert (Anhang H).

Mit (6.5), (6.7) und (6.8) fordert man für die Selbstkonsistenz der Ansätze eine möglichst gute Erfüllung der Gleichung

$$p'^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12} - \tau_{11}) \Lambda^2 + \frac{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11}) \Lambda^4}{p'^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \stackrel{!}{=} \\ p'^2 + ig_0 \bar{\alpha}(x) - \frac{1}{\beta_0} \left\{ (c_2 + c_3 + s) \Lambda^2 + p'^2 + \frac{1}{p'^2 + \tau_{11} \Lambda^2} [p'^2 (c_3 + 4c_4 - \tau_{11}) \Lambda^2 \right. \\ \left. + s (c_1 + c_3 + c_4 - \tau_{11}) \Lambda^4 - \tau_{11} (c_2 + c_3) \Lambda^4 + c_5 \Lambda^4 + c_6 \Lambda^4] \right\},$$

die man durch eine geeignete Wahl der drei Anpassungsstellen erreicht. Mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen wir den Vakuumerwartungswert des α -Feldes in Anwesenheit der Quellen, also

$$\bar{\alpha} = \frac{\delta W}{\delta j}.$$

Die Anpassung der Polstellen beider Gleichungsseiten haben wir schon vorweggenommen. Da das Verhalten einer Funktion in der Nähe einer Polstelle empfindlich von dem Residuum der Polstelle abhängt, fordert man außerdem die Gleichheit der Residuen beider Seiten:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4 &= I_{B_1}(p'^2 = -\tau_{11}\Lambda^2) = \\ &= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ c_1 s \Lambda^4 - c_2 \Lambda^2 \tau_{11} \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2 (s \Lambda^2 - 2\tau_{11} \Lambda^2) + c_5 \Lambda^4 \right. \\ &\quad \left. + 4c_4 \Lambda^2 (s \Lambda^2 - 4\tau_{11} \Lambda^2) + c_6 \Lambda^4 - \tau_{11} \Lambda^2 (s \Lambda^2 - \tau_{11} \Lambda^2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Schließlich sollen auch die in p'^2 regulären Anteile beider Seiten möglichst gut übereinstimmen:

$$\begin{aligned} p'^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^2 &\stackrel{!}{=} p'^2 + ig_0 \bar{\alpha}(x) + I_{B_0}(p'^2) + \frac{I_{B_1}(p'^2) - I_{B_1}(p'^2 = -\tau_{11}\Lambda^2)}{p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \\ &= p'^2 + ig_0 \bar{\alpha}(x) - \frac{1}{\beta_0} \left((c_2 + 2c_3 + 4c_4 + s - \tau_{11})\Lambda^2 + p'^2 \right). \end{aligned}$$

Damit der nach dieser Anpassung übrigbleibende perturbativ zu behandelnde Rest nur perturbative Divergenzen enthält, passen wir die Gleichung an der Stützstelle $p'^2 = 0$ an und erhalten die dritte Selbstkonsistenzgleichung

$$\sigma_{11} + \sigma_{12} - \tau_{11} = ig_0 \bar{\alpha}(x) - \frac{1}{\beta_0} (c_2 + 2c_3 + 4c_4 + s - \tau_{11}). \quad (6.11)$$

Kapitel 7

Die (2,1)-Vertexgleichung (A.2.1)

Um die SK-Gleichungen für die Koeffizienten des Vertex $\tilde{\Gamma}_{2,1}^{[1,0]}$ aufzustellen, betrachten wir Gleichung (A.2.1) aus dem ersten System. Sie hat die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 (p+q) \rightarrow \Gamma_{2,1} \begin{matrix} \nearrow p \\ \searrow q \end{matrix} &= (p+q) \rightarrow \bullet \begin{matrix} \nearrow p \\ \searrow q \end{matrix} + \frac{1}{N} (p+q) \rightarrow \begin{matrix} \nearrow p \\ \searrow q \end{matrix} \\
 &+ \frac{1}{N} (p+q) \rightarrow \begin{matrix} \nearrow p \\ \searrow q \end{matrix} + \frac{1}{N^2} (p+q) \rightarrow \begin{matrix} \nearrow p \\ \searrow q \end{matrix} .
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Bei einer perturbativen Rechnung würde man nun einfach den letzten Term vernachlässigen, da er von höherer Ordnung in N^{-1} und g^2 ist als die anderen Terme. Beim Rechnen mit den rationalen Ansätzen stellt sich heraus, daß es sinnvoller ist, Anteile des letzten Terms mit dem vorletzten Term zu einem sogenannten „entschärften“ Graphen zusammenzufassen, bevor man die DS-Gleichung berechnet und die Selbstkonsistenzgleichungen aufstellt.

7.1 Die „entschärften“ Diagramme

Anhand der Struktur der rationalen Approximanten wollen wir zeigen, daß es günstiger ist, in Gleichung (7.1) Anteile des letzten Diagramms mit dem vorletzten Diagramm zusammenzufassen. Dazu nehmen wir uns die Terme in dieser Gleichung einzeln vor, wobei wir besonders auf die Polstellen achten.

- Auf der linken Seite der Gleichung steht der $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ -Vertex; der Ansatz für ihn für $r = 1$ lautet

$$\tilde{\Gamma}'_{2,1}{}^{[1,0]}(p, q, r) = -ig_0\Lambda'^2 \frac{M(p^2, q^2, r^2)}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(r^2 + \mu'_{11}\Lambda^2)}, \quad (7.2)$$

mit

$$\begin{aligned} M(p^2, q^2, r^2) = & p^2q^2r^2 + c_1\Lambda^2(p^4 + q^4) + c_2\Lambda^2p^2q^2 + c_3\Lambda^2r^2(p^2 + q^2) \\ & + c_4\Lambda^2r^4 + c_5\Lambda^4(p^2 + q^2) + c_6\Lambda^4r^2 + c_7\Lambda^6. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Er ist symmetrisch in den beiden ersten Impulsen, die zu den physikalischen Beinen gehören. In jedem äußeren Impuls hat er einen Polterm. Wir wissen bereits, daß in $r = 1$ seine Polstellen in den physikalischen Impulsen mit den Nullstellen der Ansätze für die physikalischen Propagatoren übereinstimmen (6.6). Wie in Kapitel 6 zerlegen wir diesen Ansatz gemäß

$$\tilde{\Gamma}'_{2,1}{}^{[1,0]}(p + q, -p, -q) = \left(B_0(p + q, p, q) + \frac{B_1(p, q)}{(p + q)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \right), \quad (7.4)$$

mit

$$B_0(p + q, p, q) = \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} (p^2q^2 + c_1\Lambda^2((p + q)^2 - \tau_{11}\Lambda^2) + c_2\Lambda^2p^2 + c_3\Lambda^2q^2 + c_5\Lambda^4), \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} B_1(p, q) = & \frac{-ig_0\Lambda'^2\Lambda^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left(c_1p^4 + c_4q^4 + p^2q^2(c_3 - \tau_{11}) \right. \\ & \left. + p^2(c_5 - c_2\tau_{11})\Lambda^2 + q^2(c_6 - \tau_{11}c_3)\Lambda^2 + (c_1\tau_{11}^2 - c_5\tau_{11} + c_7)\Lambda^4 \right), \end{aligned} \quad (7.6)$$

wobei wir den Polterm in dem äußeren Impuls $(p + q)$ separieren, der auf der rechten Seite der DS-Gleichung (7.1) dadurch ausgezeichnet ist, daß das dazugehörige Bein in den nackten Vertex der Schleifen einläuft.

Betrachten wir die Ordnung der Terme in N : In der DS-Gleichung ist der einzige Term nullter Ordnung in N der nackte Vertex ohne Pol. Dieser ist wegen (7.4) im Term B_0 enthalten, und man weiß damit, daß der Term B_1 höchstens Anteile der Ordnung N^{-1} besitzt. Die Polstellenstruktur der Approximanten wird also nicht von den Beiträgen höchster Ordnung in N bestimmt. Unter diesem Gesichtspunkt scheint es plausibel, daß wir beim Vernachlässigen des letzten Terms vorsichtig sein müssen.

- Auf der rechten Seite der Gleichung steht zunächst der nackte Vertex $-ig_0\Lambda'^2$ ohne Pol.
- Das erste Schleifenintegral auf der rechten Gleichungsseite liefert einen Polfaktor von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(-p, Q + \frac{p+q}{2}, -Q - \frac{q-p}{2})$ im physikalischen Impuls p^2 und einen Polfaktor von $\tilde{\Gamma}'_{0,3}^{[1,0]}(Q + \frac{q-p}{2}, \frac{p+q}{2} - Q, -q)$ im unphysikalischen Impuls q^2 . Die erste Selbstkonsistenzbedingung, die Gleichheit der Polstellen von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(p+q, -p, -q)$ und $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(-p, Q + \frac{p+q}{2}, -Q - \frac{q-p}{2})$ im Impuls p^2 , ist trivial. Als zweite Selbstkonsistenzbedingung fordern wir die Gleichheit der Polstellen von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(p+q, -p, -q)$ und $\tilde{\Gamma}'_{0,3}^{[1,0]}(Q + \frac{q-p}{2}, \frac{p+q}{2} - Q, -q)$ in q^2 . Die in Kapitel 5 berechneten Polstellen von $\tilde{\Gamma}'_{0,3}^{[1,0]}$ stimmen mit der in Kapitel 4 (4.1) berechneten Polstelle von $\tilde{\Gamma}'_{0,2}^{[1,0]}$ überein. Daher lautet unsere Selbstkonsistenzgleichung

$$2\sigma_{01}\Lambda^2 = \mu_{11}\Lambda^2 = \mu'_{11}\Lambda^2. \quad (7.7)$$

Für die Größe s aus (6.9) folgt damit $s = -\sigma_{11} - \sigma_{12}$. Die Polstelle von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}$ im unphysikalischen Impuls ist also gerade die Nullstelle des Ansatzes für den unphysikalischen Propagator $\tilde{G}_{0,2}^{[1,0]conn}$.

- Das zweite Schleifenintegral der rechten Seite von (7.1) liefert einen Polfaktor von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(Q + \frac{p+q}{2}, -Q - \frac{p-q}{2}, -q)$ in q^2 und einen Polfaktor von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(-p, Q + \frac{p-q}{2}, \frac{p+q}{2} - Q)$ in p^2 . Die Übereinstimmung dieser Polstellen mit den Polstellen von $\tilde{\Gamma}'_{2,1}^{[1,0]}(p+q, -p, -q)$ in p^2 und q^2 ist wieder auf triviale Weise erfüllt.
- Die Eigenschaften von $\tilde{\Gamma}'_{2,2}^{[1,0]}$ sind nicht bekannt, so daß über den letzten Schleifenterm in (7.1) kaum Aussagen gemacht werden können.

Die rechte Seite der Gleichung (7.1) sollte allerdings auch einen Polterm in dem äußeren Impuls $(p+q)^2$ liefern. Dieser kann nur im Beitrag des letzten Terms enthalten sein, den man daher nicht vollständig vernachlässigen sollte.

Um Selbstkonsistenz der Ansätze zu erreichen, muß die letzte Schleife Terme der Art

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1: } (p+q) \text{ entering a vertex } \Gamma_{2,2} \text{ with two outgoing lines } p \text{ and } q. \\
& = \text{Diagram 2: } (p+q) \text{ entering a vertex } B_1 \text{ with two outgoing lines } p \text{ and } q. \quad \frac{c}{(p+q)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \quad \text{Diagram 3: } B_1 \text{ vertex with } p \text{ and } q. \\
& + \text{Diagram 4: } (p+q) \text{ entering a vertex with two outgoing lines } p \text{ and } q. \quad \frac{c}{\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \quad \text{Diagram 5: } B_1 \text{ vertex with } p \text{ and } q. \\
& + \text{Diagram 6: } (p+q) \text{ entering a vertex with two outgoing lines } p \text{ and } q. \quad \frac{d}{\left(\frac{q-p}{2} + Q\right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \quad \text{Diagram 7: } C_1 \text{ vertex with } p \text{ and } q. \\
& + \text{Diagram 8: } (p+q) \text{ entering a vertex } V_{2,2} \text{ with two outgoing lines } p \text{ and } q. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

enthalten. Der erste Term der rechten Seite von (7.8) liefert den fehlenden Pol, die Existenz des zweiten Terms folgt unmittelbar aus Symmetriegründen. Diese Art von Termen nennt man auch kompensierende Pole. Eine Gleichung für die Größe der Konstanten c liefert die Selbstkonsistenzforderung, daß die Polstellen in $(p+q)^2$ auf beiden Seiten der Vertexgleichung (7.1) übereinstimmen. Der zweite Term in (7.8) wird mit der vorletzten Schleife der Vertexgleichung (7.1) zu einem sogenannten „entschärften“ Graphen zusammengefaßt:

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} \quad (7.9)$$

Der erste Term in Gleichung (7.9) besitzt einen „überzähligen“ Pol in dem Schleifenimpuls k , der aus der Überkompensation der Propagatornullstelle durch zwei Vertexpole bei $k^2 = -\tau_{11}\Lambda^2$ entsteht. Der zweite Term hat, wie z. B. in [6] gezeigt wird, die Eigenschaft, diesen Pol gerade zu kompensieren; dies wird durch die Bezeichnung „kompensierender Pol“ ausgedrückt. Zuerst wurde dieses Phänomen von Jackiw und Johnson [26] sowie von Cornwall und Norton [27] beobachtet.

Es bleibt die Frage, ob $\tilde{\Gamma}'_{2,2}$ auch einen kompensierenden Pol für den ersten Schleifenterm in der Vertexgleichung (7.1) enthält, also einen Term der Form des dritten Beitrags in Gleichung (7.8). Um diese Frage zu klären, betrachte man Gleichung (B.0.3):

$$\Gamma_{0,3}(p+q, p, q) = N \left[\text{Loop with } \Gamma_{2,1} \right] + \text{Loop with } \Gamma_{2,2} \quad (7.10)$$

In dieser Gleichung sollte der letzte Term einen Pol in dem Impuls $(p+q)$ enthalten. Da wir aus der Berechnung von $\tilde{\Gamma}_{0,2}$ wissen, daß eine (dort allerdings konvergente) Schleife aus zwei physikalischen Beinen durchaus in der Lage ist, einen solchen Polfaktor in diesem Impuls auszubilden, muß der fehlende Pol, vom Standpunkt der Gleichung (7.10) aus, nicht unbedingt in dem Ansatz für $\tilde{\Gamma}'_{2,2}$ enthalten sein. Da aber in der DS-Gleichung (7.1) aus physikalischen Gründen alle eventuell auf inneren Linien auftretenden „überzähligen“ Pole kompensiert werden müssen und hierfür keine andere Quelle als das $\tilde{\Gamma}'_{2,2}$ des letzten Terms von (7.1) in Frage kommt, nehmen wir dennoch an, daß $\tilde{\Gamma}'_{2,2}$ auch für die vertikale unphysikalische Linie des ersten Terms dieser Gleichung einen kompensierenden Pol besitzt. Beide Terme werden analog zu (7.9) zu einem „entschärften“ Graphen zusammengefasst.

Nach der Zerlegung (7.8) des letzten Terms von (7.1) kann man schließlich die letzte Schleife in (7.8) mit dem Vertex $V_{2,2}$ für die Bestimmung der nullten Ordnung weglassen. Er enthält keine Polstellen mehr in $(p+q)^2$ und $(\frac{p-q}{2} + Q)^2$, denn die

Polstellen von $\tilde{\Gamma}'_{2,2}$ in diesen Impulsen faktorisieren, und wir haben bereits die faktorisierten Pole in den ersten beiden Termen zusammengefaßt, und ist von höherer Ordnung in N und g^2 als die übrigen Terme.

7.2 Die „entschärfte“ DS-Gleichung

Mit den im letzten Abschnitt beschriebenen Umformungen erhalten wir für unsere DS-Gleichung (A.2.1) die Form

$$\begin{aligned}
 (p+q) \rightarrow \Gamma_{2,1} &= (p+q) \rightarrow \text{dot} + (p+q) \rightarrow \text{two circles} \\
 &+ (p+q) \rightarrow \text{triangle } B_1 \frac{c}{(p+q)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} + (p+q) \rightarrow \text{triangle } B_1 \\
 &+ (p+q) \rightarrow \text{circle } V_{2,2}
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

wobei der letzte Term nicht zur nullten Ordnung in g beiträgt.

7.2.1 Der dritte Beitrag

Der dritte Beitrag in (7.11),

$$I_3(p+q, -p, -q) = (p+q) \rightarrow \text{Diagram} \frac{c}{(p+q)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \text{Diagram}$$

liefert uns einen Polterm in $(p+q)^2$ und einen in diesem Impuls regulären Anteil. Die Schleife haben wir bereits in Anhang E für den physikalischen Propagator berechnet, daher können wir das Ergebnis sofort übernehmen. Für die Impulse p' und q' , bei denen man den „divergenten“ $1/g^2$ -Mechanismus anwendet, erhält man:

$$I_3 = -I_{B_1}(p'+q') \frac{c}{(p'+q')^2 + \tau_{11}\Lambda^2} B_1(p'^2, q'^2, (p'+q')^2),$$

man beachte dabei, daß sich I_{B_1} und die Schleife in I_3 um ein Vorzeichen unterscheiden. Wir passen zunächst das Residuum des Polterms an das Residuum von $\tilde{\Gamma}_{2,1}^{[1,0]}$ in $(p+q)^2 = -\tau_{11}\Lambda^2$ an; damit können wir den Koeffizienten c bestimmen:

$$B_1(p'^2, q'^2) \stackrel{!}{=} -I_{B_1}((p'+q')^2 = -\tau_{11}\Lambda^2) c B_1(p'^2, q'^2)$$

$$\begin{aligned} \implies c &= - (I_{B_1}((p+q)^2 = -\tau_{11}\Lambda^2))^{-1} \\ &\stackrel{(6.10)}{=} \frac{-1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11}) \Lambda^4} \end{aligned}$$

Der in $(p'+q')^2$ reguläre Anteil von I_3 ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I_3^R(p'+q', p', q') &= - \frac{I_{B_1}(p'+q') - I_{B_1}((p'+q')^2 = -\tau_{11}\Lambda^2)}{(p'+q')^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \frac{B_1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11}) \Lambda^4} \\ &= \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left(\frac{1}{\beta_0} \right) \frac{c_3 + 4c_4 - \tau_{11}}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \\ &\quad \cdot \left\{ c_1 p'^4 + p'^2 q'^2 (c_3 - \tau_{11}) + p'^2 (c_5 - c_2 \tau_{11}) \Lambda^2 + q'^2 (c_6 - c_3 \tau_{11}) \Lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + (c_1 \tau_{11}^2 - c_5 \tau_{11} + c_7) \Lambda^4 \right\}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

7.2.2 Die „entschärfte“ zweite Schleife

Die entschärfte zweite Schleife in (7.11) besteht aus den Beiträgen

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\
 & + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \quad (7.13)
 \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die Beiträge der Terme

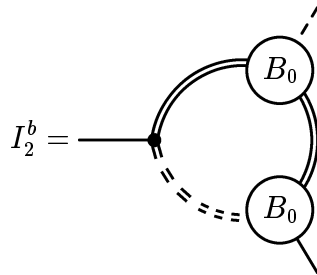
$$I_2^a = \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8}$$

in Anhang F.1. In perturbativen Rechnungen ist das zugehörige Schleifenintegral logarithmisch divergent. Daher sollte, damit die perturbative Renormierbarkeit gewahrt wird, das Integral auch beim Rechnen mit den rationalen Ansätzen höchstens logarithmisch divergent sein. Bei der Rechnung in Anhang F.1 erkennt man, daß man mit dem allgemeinen Ansatz (3.15) für $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ bei der Berechnung von I_2^a auch quadratische und quartische Divergenzen erhält. Die quartischen Divergenzen verschwinden für $c_1 = 0$ oder $c_4 = 0$, während die quadratischen nur für $c_1 = c_4 = 0$ verschwinden. Wir führen die Rechnung mit $c_4 = 0, c_1 \neq 0$ durch, wollen aber an dieser Stelle ausdrücklich betonen, daß das Ergebnis nur dann die Forderung nach genauer Erhaltung des perturbativen Divergenzgrades der einzelnen Graphen erfüllt, wenn $c_1 = 0$ gilt. Für $c_1 \neq 0$ könnte man die quadratische Divergenz eliminieren, indem man die entsprechenden Integrale vollständig, d. h. ohne Definition eines quasiperturbativen Restes, dem $1/g^2$ -Mechanismus unterwirft (vgl. Kapitel 3.4). Das hätte allerdings den Nachteil, daß die Fehler, die bei der Approximation außerhalb der Stützstellen gemacht werden, von nullter Ordnung in g sind. Damit würde die Qualität der rationalen Approximation erheblich vermindert werden.

Mit p' und q' bezeichnen wir die Impulsstellen, bei denen wir den divergenten $1/g^2$ -Mechanismus angewandt haben. Nach einer in Anhang F.1 skizzierten Rechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 I_2^a = & \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left(-\frac{1}{\beta_0}\right) \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \\
 & \left\{ -p'^4 (c_1^2 + c_1c_3 - c_1\tau_{11}) - p'^2q'^2 (c_3 - \tau_{11})^2 - q'^2 (c_3 - \tau_{11})(c_6 - \tau_{11}c_3) \Lambda^2 \right. \\
 & + p'^2 \left[-\tau_{11}^2 (c_1 + c_2) + \tau_{11} (c_1c_2 + 2c_1c_3 + c_2c_3 - c_1(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + c_5) \right. \\
 & \quad \left. - c_1c_5 + c_1c_3(\sigma_{11} + \sigma_{12}) - c_3c_5 - c_1c_6 \right] \Lambda^2 \\
 & + \left[\tau_{11}^2 (-c_1^2 - c_1c_3 + c_2c_3) + \tau_{11} (c_1c_5 + c_1c_6 - c_1c_3(\sigma_{11} + \sigma_{12}) - c_3c_5 - c_2c_6) \right. \\
 & \quad \left. + c_1c_6(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + c_5c_6 - c_1c_7 \right] \Lambda^4 \left. \right\} \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

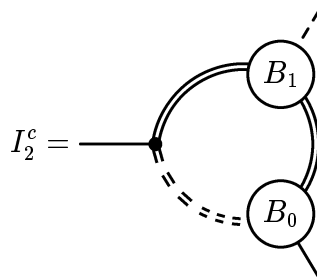
Der erste Term in (7.13) besteht aus einem logarithmisch divergenten Integral:



dessen führenden Beiträge

$$\begin{aligned}
 I_2^b = & -\frac{1}{\beta_0} \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left\{ p'^2q'^2 + q'^2 (c_1 + c_3) \Lambda^2 + p'^2 (c_1 + c_2) \Lambda^2 \right. \\
 & \left. + (c_1 + c_2)(c_1 + c_3) \Lambda^4 \right\} \quad (7.15)
 \end{aligned}$$

wir in Anhang F.3 berechnen. Schließlich liefert der Beitrag



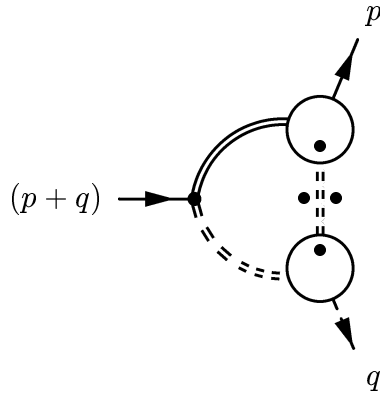
in (7.13) nur im Fall $c_1 \neq 0$ eine logarithmische Divergenz. Ihr Beitrag lautet (Anhang F.2):

$$I_2^c = -\frac{1}{\beta_0} \frac{-ig_0 \Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11} \Lambda^2)(q'^2 + \tau_{11} \Lambda^2)} c_1 \Lambda^2 (p'^2 + c_1 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2). \quad (7.16)$$

Der letzte Term in (7.13) ist für $c_4 = 0$ konvergent und liefert daher keine Beiträge zur nullten Ordnung in g .

7.2.3 Die „entschärfte“ erste Schleife

Die Berechnung der ersten Schleife der Vertexgleichung (7.11),



führen wir in Anhang G durch. Es handelt sich um ein quadratisch divergentes Integral. Im Gegensatz zu den DS-Gleichungen der QCD nimmt der Divergenzgrad der Gleichungen also mit höheren Gleichungen nicht ab, wie nach unserer allgemeinen Abschätzung zu erwarten. Wir erhalten den Term

$$I_1 = \frac{-ig_0 \Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11} \Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11} \Lambda^2)} \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \left\{ p'^4 + p'^2 (p' + q')^2 + p'^2 q'^2 + q'^2 c_3 \Lambda^2 + p'^2 (\mu_{11} + 3c_3 + c_2 - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12}) \Lambda^2 + (p' + q')^2 c_3 \Lambda^2 + (c_3 \mu_{11} + 2c_6 + c_5 - (2c_3 + c_1)(\sigma_{11} + \sigma_{12})) \Lambda^4 \right\}. \quad (7.17)$$

Auffällig sind die Anteile

$$\frac{-ig_0 \Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11} \Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11} \Lambda^2)} \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) (p'^4 + p'^2 (p' + q')^2) \quad (7.18)$$

der ersten Zeile, die keinem Term im Ansatz für $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ auf der linken Seite der Gleichung (7.1) entsprechen. Da sie im perturbativen Limes $\Lambda \rightarrow 0$, $\Lambda' > 0$ nicht verschwinden, kann man sie nicht durch Nullsetzen von Koeffizienten aus den nicht-perturbativen Ansätzen eliminieren. Bei der Rechnung im Anhang G erkennt man,

daß sie von Termen niedrigster Ordnung in N stammen, also von der Ordnung N^{-1} sind. Deswegen können sie auch von dem in (7.11) vernachlässigten Term, der von der Ordnung N^{-2} ist, nicht kompensiert werden. Wir wollen zwei Möglichkeiten diskutieren, wie man mit diesen Termen umgehen kann:

1. Die rationalen Ansätze stellen eine Erweiterung der Störungstheorie dar. Mit den Ansätzen für die Vertexfunktionen $\tilde{\Gamma}_{0,2}$ und $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ haben wir nicht die Funktionen der ursprünglichen Störungstheorie, sondern die für große Impulse genäherten und mit dem „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus umgeformten störungstheoretischen Einschleifenterme erweitert. Für unsere Rechnungen definieren diese umgeformten perturbativen Terme — anders als zum Beispiel bei den Anwendungen der Methode auf die QCD — die „neue“ Störungstheorie mit. Beim Rechnen mit dieser neuen Störungstheorie ergeben sich bereits die Terme (7.18), daher liegt das Problem nicht in den nichtperturbativen Ansätzen, sondern in der neuen Störungstheorie, die wir mit diesen Ansätzen erweitert haben. Wir rechnen daher mit den störenden Termen weiter und behandeln sie wie alle störungstheoretischen Beiträge.
2. Da in der Vertexgleichung mit der ersten Schleife auch ein quadratisch divergenter Anteil vorkommt, liegt die Vermutung nahe, daß auch die entschärfte zweite Schleife quadratisch divergente Anteile enthalten darf. Die perturbative Renormierbarkeit dieser Schleife für sich wäre dann verletzt. Wir rechnen jedoch, wie in Punkt eins gesehen, wenn überhaupt, dann nur mit einer modifizierten „neuen“ Störungsreihe, und es besteht die Möglichkeit, daß wir durch diese Näherung die Divergenzen der Schleifen umverteilt haben. Wir lassen also bei unserer Rechnung zu, daß $c_1 \neq 0$ gilt. Damit treten auf der rechten Seite der Vertexgleichung auch noch andere Terme der Form (7.18) auf, und eine SK-Bedingung an c_1 ist, daß alle diese Terme sich gegenseitig wegheben. Man fragt sich natürlich, ob man dann nicht auch mit $c_4 \neq 0$ rechnen kann. Für $c_4 \neq 0$ würden jedoch *quartisch* divergente Integrale (Divergenzgrad +4) auftreten. Nach dem am Ende von Abschnitt 2.2 zu den Divergenzgraden Gesagten sollten die Vertexfunktionen jedoch höchstens quadratisch divergent sein. Auch für $c_1 \neq 0$ muß deshalb $c_4 = 0$ gelten.

Wir werden im nächsten Abschnitt die SK-Gleichungen in beiden Fällen aufstellen.

7.3 Selbstkonsistenzgleichungen

In der Vertexgleichung haben wir bereits die Polstellen und das Residuum der Polstelle in dem Impuls $(p+q)^2$ angepaßt. Damit haben wir eine SK-Gleichung, $\mu_{11} = \mu'_{11}$, und eine Gleichung für die Unbekannte c des kompensierenden Polterms erhalten. In den folgenden beiden Abschnitten werden wir in der verbleibenden Vertexgleichung

$$\begin{aligned}
B_0(p' + q', p', q') &\stackrel{!}{=} -ig_0\Lambda'^2 + I_3^R(p' + q', p', q') + I_2^a(p', q') + I_2^b(p', q') \\
&\quad + I_2^c(p', q') + I_1(p' + q', p', q')
\end{aligned} \tag{7.19}$$

die Residuen der übrigen Polstellen anpassen und drei weitere SK-Gleichungen erhalten. Die Zerlegung

$$\begin{aligned}
B_0(p + q, p, q) &= \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left(p^2 q^2 + c_1(p + q)^2 \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. + c_2\Lambda^2 p^2 + c_3\Lambda^2 q^2 + c_5\Lambda^4 \right) \\
&= -ig_0\Lambda'^2 - ig_0\Lambda'^2 \frac{(c_3 - \tau_{11})\Lambda^2}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2} - ig_0\Lambda'^2 \frac{(c_2 - \mu_{11})\Lambda^2}{q^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \\
&\quad - ig_0\Lambda^2 \frac{(p + q)^2 c_1 \Lambda^2 + (\tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 - \mu_{11}c_3 + c_5)\Lambda^4}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

nehmen wir den nächsten Abschnitten vorweg.

7.3.1 SK-Gleichungen im ersten Fall

Wir setzen $c_1 = c_4 = 0$ und behandeln die störenden Terme in I_1 als störungstheoretische Beiträge. Für $c_1 = 0$ verschwindet der Beitrag I_2^c und man sieht in Gleichung (7.20), daß B_0 keinen Term in $(p + q)^2$ enthält. Von den Beiträgen der rechten Seite der Gleichung (7.19) enthält nur I_1 Anteile, die abhängig vom Impuls $(p' + q')^2$ sind:

$$I_1 = \frac{ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{\beta_0} \left(p'^2 (p' + q')^2 + c_3\Lambda^2 (p' + q')^2 + R \right),$$

wobei R die restlichen Terme von I_1 bezeichnet. Den ersten Term behandeln wir, da er mit dem festen, von den Vertexparametern unabhängigen Zahlenkoeffizienten 1 auftritt, als störungstheoretischen Beitrag, wir wenden den divergenten $1/g^2$ -Mechanismus daher an der Stelle $p' = 0$ an. Der zweite Beitrag sollte als einziger nichtstörungstheoretischer Beitrag in diesem Impuls verschwinden. Also erhalten wir die SK-Gleichung

$$c_3 = 0.$$

Die Beiträge der rechten Seite von Gleichung (7.19) lauten nach Abzug des nackten Vertex:

$$G := I_3^R + I_2^a + I_2^b + I_1 = \frac{ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{\beta_0} \left\{ p'^4 + p'^2(p' + q')^2 + 2p'^2q'^2 + p'^2(\mu_{11} + 2c_2 - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12})\Lambda^2 + (2c_6 + c_5)\Lambda^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left[-2\tau_{11}^2 p'^2 q'^2 + 2p'^2(c_5 - \tau_{11}c_2)\tau_{11}\Lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2q'^2\tau_{11}c_6\Lambda^2 + (c_6c_5 - c_2c_6\tau_{11} - \tau_{11}^2c_5 + \tau_{11}c_7)\Lambda^4 \right] \right\}.$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$G = -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \left\{ A + B \frac{1}{p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2} + C \frac{1}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} + D \frac{1}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \right\} \quad (7.21)$$

mit

$$A = 2 - \frac{2\tau_{11}^2}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})}, \quad (7.22)$$

$$B = -2\tau_{11}\Lambda^2 + \frac{2(\tau_{11}^3 + \tau_{11}c_6)\Lambda^2}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})}, \quad (7.23)$$

$$C = p'^2 + (p' + q')^2 - \tau_{11}\Lambda^2 - \mu_{11}\Lambda^2 + 2c_2\Lambda^2 - 2\sigma_{11}\Lambda^2 - 2\sigma_{12}\Lambda^2 \\ + \frac{2\tau_{11}^2\mu_{11} + 2\tau_{11}c_5 - 2\tau_{11}^2c_2}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})}, \quad (7.24)$$

$$D = -(p' + q')^2\tau_{11}\Lambda^2 + \tau_{11}^2\Lambda^4 + \tau_{11}\mu_{11}\Lambda^4 \\ - \tau_{11}\Lambda^2(2c_2 - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12})\Lambda^2 + (2c_6 + c_5)\Lambda^4 \\ + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left[-2\tau_{11}^3\mu_{11}\Lambda^4 - 2\tau_{11}(\tau_{11}c_5 - \tau_{11}^2c_2)\Lambda^4 \right. \\ \left. - 2\tau_{11}\mu_{11}c_6\Lambda^4 + c_6c_5\Lambda^4 - c_6\tau_{11}c_2\Lambda^4 - \tau_{11}^2c_5\Lambda^4 + \tau_{11}c_7\Lambda^4 \right]. \quad (7.25)$$

Die SK-Gleichungen ergeben sich durch Gleichsetzen der Residuen an den verschiedenen Polstellen. Wir betrachten zunächst die Residuen der doppelten Polstelle bei $(p' + q')^2 = 0$ und erhalten die SK-Gleichung:

$$\tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 + c_5 = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ \tau_{11}^2 + \tau_{11}\mu_{11} - 2\tau_{11}c_2 + 2\tau_{11}(\sigma_{11} + \sigma_{12}) \right. \\ \left. + 2c_6 + c_5 + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left[-2\tau_{11}^3\mu_{11} - 2\tau_{11}^2(c_5 - \tau_{11}c_2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2\tau_{11}\mu_{11}c_6 + c_6c_5 - c_2c_6\tau_{11} - c_5\tau_{11}^2 + c_7\tau_{11} \right] \right\}. \quad (7.26)$$

Der Vergleich der Residuen an der Polstelle $q'^2 = -\mu_{11}\Lambda^2$ ergibt bei $p'^2 = (p' + q')^2 = 0$ die Beziehung

$$c_2 - \mu_{11} = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ -\tau_{11} - \mu_{11} + 2c_2 - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} (2\tau_{11}^2\mu_{11} + 2\tau_{11}c_5 - 2\tau_{11}^2c_2) \right\}, \quad (7.27)$$

und schließlich folgt aus dem Vergleich der Residuen an der Polstelle $p'^2 = -\tau_{11}\Lambda^2$ die SK-Gleichung

$$\begin{aligned} -\tau_{11} &= -\frac{1}{\beta_0} \left(-2\tau_{11} + \frac{2\tau_{11}^3 + 2\tau_{11}c_6}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= -\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{12} - \tau_{11}(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + 2c_6}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \right). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Übrig bleiben auf der rechten Seite von (7.19) die bisher unangepaßten Terme

$$2 - \frac{2\tau_{11}^2}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} + \frac{p'^2 + (p' + q')^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} - \frac{\tau_{11}\Lambda^2 (p' + q')^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)}.$$

Sie stammen alle aus unserer „neuen“ Störungstheorie.

Behandeln wir sie als störungstheoretische Divergenzen, das heißt ohne Anwendung des $1/g^2$ -Mechanismus, so haben wir zu fordern, daß sie nach der perturbativen Renormierung verschwinden:

$$\frac{g_0^2}{4\pi \epsilon} \left[2 - \frac{2\tau_{11}^2}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} + \frac{p^2 + (p + q)^2}{q^2 + \mu_{11}\Lambda^2} - \frac{\tau_{11}\Lambda^2 (p + q)^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \right] \rightarrow 0.$$

Man sieht, daß wir auf diese Weise das Problem nicht geklärt, sondern nur auf die Störungstheorie geschoben haben, denn die Divergenzen der „neuen“ Störungstheorie sind nichtlokal. Um sie zu kompensieren braucht man also nichtlokale Gegenterme.

7.3.2 SK-Gleichungen im zweiten Fall

Im zweiten Fall rechnen wir mit $c_1 \neq 0$ und erhalten eine zusätzliche DS-Gleichung für c_1 . Die linke Seite der Gleichung (7.19) haben wir schon in (7.20) in Terme mit verschiedenen Polstellen zerlegt. Dasselbe tun wir nun mit den einzelnen Beiträgen der rechten Seite von Gleichung (7.19).

Der Beitrag I_1 ergibt den Ausdruck

$$I_1 = -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \left\{ \frac{p'^2 + (p' + q')^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} - \frac{(c_3 - \mu_{11})\Lambda^2 (p' + q')^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} + 1 \right. \\ \left. + \frac{(c_3 - \tau_{11})\Lambda^2}{p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2} + \frac{(3c_3 + c_2 - \tau_{11} - 2(\sigma_{11} + \sigma_{12}))}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \right. \\ \left. + \frac{(\tau_{11}^2 - 3\tau_{11}c_3 - \tau_{11}c_2 + 2c_6 + c_5 - (2c_3 + c_1 - 2\tau_{11})(\sigma_{11} + \sigma_{12}))\Lambda^4}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \right\}.$$

Den Beitrag I_2^a kann man umformen zu

$$I_2^a = -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left\{ - (c_3 - \tau_{11})^2 + \frac{p'^2 (c_1\tau_{11} - c_1^2 - c_1c_3)}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2} [2\tau_{11}c_3^2 - 3\tau_{11}^2c_3 + \tau_{11}^3 - c_6(c_3 - \tau_{11})] \right. \\ \left. + \frac{\Lambda^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \left[\tau_{11}(c_1^2 + 3c_1c_3 - 2c_1\tau_{11}) + \mu_{11}(c_3 - \tau_{11})^2 + c_1c_2\tau_{11} - c_1c_5 \right. \right. \\ \left. \left. + c_1(c_3 - \tau_{11})(\sigma_{11} + \sigma_{12}) - c_3c_5 + c_2c_3\tau_{11} + c_5\tau_{11} - \tau_{11}^2c_2 - c_1c_6 \right] \right. \\ \left. + \frac{\Lambda^4}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left[-c_1(2c_3\tau_{11} - \tau_{11}^2 - c_6)(\sigma_{11} + \sigma_{12}) \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{11}^3(1 - \mu_{11} + c_1 + c_2) + \tau_{11}^2(-2c_1^2 - 4c_1c_3 + 3c_3\mu_{11} - c_1c_2 - c_5) \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{11}(-2\mu_{11}c_3^2 + 2c_1c_6 - \mu_{11}c_6 + 2c_1c_5 - c_2c_6) + \mu_{11}c_3c_6 - c_1c_7 + c_5c_6 \right] \right\}.$$

Der Beitrag I_2^b liefert

$$I_2^b = -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \left\{ 1 + \frac{(c_1 + c_3 - \tau_{11})\Lambda^2}{p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2} + \frac{(c_1 + c_2 - \mu_{11})\Lambda^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \right. \\ \left. + \frac{(\tau_{11}\mu_{11} - \mu_{11}(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)(c_1 + c_3 - \tau_{11}))\Lambda^4}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \right\}.$$

Für den Beitrag I_2^c erhält man den Ausdruck

$$I_2^c = -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \left\{ \frac{c_1\Lambda^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} + \frac{c_1(c_1 + c_3 - \tau_{11})\Lambda^4}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \right\}.$$

Schließlich ergibt I_3^R den Beitrag

$$I_3^R = -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \frac{-(c_3 - \tau_{11})}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left\{ \frac{c_1 p'^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} + c_3 - \tau_{11} \right. \\ \left. + \frac{(c_6 - 2c_3\tau_{11} + \tau_{11}^2)\Lambda^2}{p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2} + \frac{(c_5 - c_2\tau_{11} - \mu_{11}(c_3 - \tau_{11}) - \tau_{11}c_1)\Lambda^2}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \right. \\ \left. + \frac{\tau_{11}^2(2c_1 - \mu_{11} + c_2) + \tau_{11}(2c_3\mu_{11} - 2c_5) - \mu_{11}c_6 + c_7}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \right\}.$$

Für die folgenden Beiträge der rechten Seite von (7.19) gibt es keinen entsprechenden Term in B_0 auf der linken Seite:

$$-ig_0\Lambda^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \frac{1}{q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2} \left\{ p'^2 + (p' + q')^2 - \frac{c_1^2 + 2c_1c_3 - 2c_1\tau_{11}}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} p'^2 \right\}.$$

Die Vertexfunktion $\tilde{\Gamma}'_{2,1}$ sollte eigentlich Bose-symmetrisch in den beiden physikalischen Impulsen sein. Die DS-Gleichung (A.2.1), mit der wir hier arbeiten, besitzt diese Symmetrie offensichtlich nicht. Daher ist es durchaus möglich, daß in einem niedrigen Approximationsgrad wie $r = 1$ auf der rechten Seite der Gleichung un-symmetrische Terme auftreten, die beim Rechnen mit den exakten Funktionen verschwinden würden. Um auch auf einer niedrigen Approximationsstufe ein symmetrisches Ergebnis zu erhalten, kann man die rechte Seite symmetrisieren. Dabei addiert man zu den Termen dieser Seite noch einmal dieselben Ausdrücke, nachdem man die beiden physikalischen Impulse vertauscht hat. Die Hälfte dieser Summe ist dann das symmetrisierte Ergebnis. Wir sehen, daß unsere störenden Terme nicht symmetrisch in den beiden physikalischen Impulsen p'^2 und $(p' + q')^2$ sind und verlangen, daß sie vollständig antisymmetrisch in diesen Impulsen sind und nach einer Symmetrisierung der Gleichung verschwinden. Daraus ergibt sich unsere erste SK-Gleichung:

$$1 - \frac{c_1^2 + 2c_1c_3 - 2c_1\tau_{11}}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} = -1 \\ \Leftrightarrow \frac{c_1^2 + 2c_1c_3 - 2c_1\tau_{11}}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} = 2. \quad (7.29)$$

Unsere zweite SK-Gleichung ergibt sich aus der Forderung, daß auf beiden Seiten der Gleichung (7.19) die Beiträge in $(p' + q')^2$ übereinstimmen:

$$-ig_0\Lambda'^2 \frac{c_1\Lambda^2(p' + q')^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \stackrel{!}{=} -ig_0\Lambda'^2 \left(-\frac{1}{\beta_0} \right) \frac{(c_3 - \mu_{11})\Lambda^2(p' + q')^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \\ \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{\beta_0}(c_3 - \mu_{11}) \quad (7.30)$$

Aus dem Vergleich der Residuen der doppelten Polstelle folgt die dritte SK-Gleichung

$$\begin{aligned}
& \tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 - \mu_{11}c_3 + c_5 = \\
& -\frac{1}{\beta_0} \left\{ (2\tau_{11} - 2c_3 - c_1)(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + \tau_{11}^2 + \tau_{11}(-2c_1 - 2c_2 - 3c_3 + \mu_{11}) + 2c_6 + c_5 \right. \\
& \quad \left. + (c_1 + c_3)(2c_1 + c_2 - \mu_{11}) \right. \\
& + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left[-c_1(2c_3\tau_{11} - \tau_{11}^2 + c_6)(\sigma_{11} + \sigma_{12}) \right. \\
& + \tau_{11}^3(4c_1 + 2c_2 - 2\mu_{11}) + \tau_{11}^2(-6c_1c_3 + 6\mu_{11}c_3 - c_1c_2 - 3c_5 - 2c_1^2 - c_2c_3) \\
& + \tau_{11}(-4\mu_{11}c_3^2 - 2\mu_{11}c_6 + 2c_1c_6 + 2c_1c_5 - c_2c_6 + 2c_3c_5 + c_7) + 2\mu_{11}c_3c_6 \\
& \left. \left. - c_1c_7 + c_5c_6 - c_3c_7 \right] \right\}. \tag{7.31}
\end{aligned}$$

Als vierte SK-Gleichung erhalten wir beim Vergleich der Residuen der einfachen Polstelle in $q'^2 = -\mu_{11}\Lambda^2$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
c_2 - \mu_{11} = & -\frac{1}{\beta_0} \left\{ 3c_3 + 2c_2 + 2c_1 - \tau_{11} - \mu_{11} - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12} \right. \\
& + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left[c_1(c_3 - \tau_{11})(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + \tau_{11}^2(2\mu_{11} - 3c_1 - 2c_2) \right. \\
& \left. \left. + \tau_{11}(c_1^2 - 4\mu_{11}c_3 + c_1c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2c_3 + 2c_5) + 2\mu_{11}c_3^2 - c_1c_5 - 2c_3c_5 - c_1c_6 \right] \right\}. \tag{7.32}
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich beim Vergleich der Residuen der einfachen Polstelle in $p'^2 = -\tau_{11}\Lambda^2$ die SK-Gleichung

$$c_3 - \tau_{11} = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ 2c_3 - 2\tau_{11} + c_1 + \frac{2\tau_{11}^3 - 6c_3\tau_{11}^2 + \tau_{11}(4c_3^2 + 2c_6) - 2c_3c_6}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \right\}. \tag{7.33}$$

Die noch unangepaßten Terme hängen nicht mehr von den Impulsen ab. Da es sich um störungstheoretische Divergenzen handelt, wenden wir bei ihnen den $1/g^2$ -Mechanismus nicht an. Sie sollten nach der perturbativen Renormierung verschwinden:

$$\frac{g_0^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left[2 - \frac{2(c_3 - \tau_{11})^2}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \right] \rightarrow 0.$$

Dies legt wie üblich den lokalen Gegenterm für $\tilde{\Gamma}_{2,1}$ auf Einschleifen-Niveau fest.

Kapitel 8

Diskussion der Selbstkonsistenzgleichungen

Entsprechend den zwei Fällen des letzten Kapitels haben wir zwei Systeme von SK-Gleichungen zwischen den Koeffizienten der Ansätze erhalten, die wir in diesem Kapitel zusammenstellen. Aus der Propagatorgleichung (A.2.0) haben wir zwei nichttriviale Selbstkonsistenzgleichungen und aus der Vertexgleichung drei bzw. fünf Selbstkonsistenzgleichungen erhalten. Wir haben insgesamt acht bzw. zehn unbekannte Koeffizienten, daher ist das System der Selbstkonsistenzgleichungen unterbestimmt. Dies liegt an der besonderen Form der DS-Gleichung (A.2.1), in der ein äußeres Bein auf der rechten Seite immer in einen nackten Vertex mündet. Ein Vergleich der Polstelle in dem zu diesem Bein gehörenden Impuls liefert immer nur eine Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten der kompensierenden Pole, nicht aber für die Koeffizienten des $\tilde{\Gamma}_{2,1}^{[1,0]}$ -Vertex. Diese Unterbestimmung der Vertexkoeffizienten, die einstweilen die Ermittlung konkreter Zahlenwerte für die nichtperturbativen Parameter verhindert, erinnert an die Situation beim $q\bar{q}g$ -Vertex der QCD: auch dort ergibt Auswertung der „im fermionischen Kanal“ aufgestellten DS-Gleichung, entsprechend unserer Gleichung (A.2.1) bzw. (7.11), nicht genügend SK-Gleichungen. Wertet man jedoch *zusätzlich* die (für den exakten Vertex äquivalente) DS-Gleichung „im gluonischen Kanal“ aus, so lassen sich alle Parameter bestimmen. In unserem Modell entspräche dies der zusätzlichen Auswertung der Gleichung (B.2.1), die im Zeitrahmen dieser Arbeit nicht mehr in Angriff genommen werden konnte.

8.1 SK-Gleichungen im ersten Fall

In diesem Fall haben wir die unbekannt Koeffizienten

$$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \tau_{11}, \mu_{11}, c_2, c_5, c_6, c_7.$$

Die Selbstkonsistenzgleichungen (6.10),(6.11), die wir aus der Propagatorgleichung erhalten haben, lauten:

$$(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11}) = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ -c_2\tau_{11} + c_5 + c_6 + \tau_{11}\sigma_{11} + \tau_{11}\sigma_{12} + \tau_{11}^2 \right\} \quad (8.1)$$

und

$$\sigma_{11} + \sigma_{12} - \tau_{11} = ig_0\bar{\alpha} - \frac{1}{\beta_0} (c_2 - \sigma_{11} - \sigma_{12} - \tau_{11}). \quad (8.2)$$

Aus der Vertexgleichung haben wir zusätzlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 + c_5 = & -\frac{1}{\beta_0} \left\{ \tau_{11}^2 + \tau_{11}\mu_{11} - 2\tau_{11}c_2 + 2\tau_{11}(\sigma_{11} + \sigma_{12}) \right. \\ & + 2c_6 + c_5 + \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} (2\tau_{11}^3(c_2 - \mu_{11}) - 3c_5\tau_{11}^2 \\ & \left. + \tau_{11}(-2\mu_{11}c_6 - c_2c_6 + c_7) + c_5c_6) \right\}, \quad (8.3) \end{aligned}$$

$$c_2 - \mu_{11} = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ -\tau_{11} - \mu_{11} + 2c_2 - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \frac{(2\tau_{11}^2\mu_{11} + 2\tau_{11}c_5 - 2\tau_{11}^2c_2)}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \right\} \quad (8.4)$$

und

$$(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11}) = -\frac{1}{\beta_0} (\sigma_{11}\sigma_{12} - \tau_{11}(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + 2c_6) \quad (8.5)$$

erhalten. An diesem Gleichungssystem erkennt man, daß nur die Störungstheorie übrigbleibt, wenn man bei einer Entwicklung für große N bereits Terme der Ordnung $1/N$ vernachlässigt, wie es in [20] geschehen ist. In unseren Rechnungen haben wir dagegen erst Terme der Ordnung $1/N^2$ vernachlässigt, die in den Schleifenintegralen auf der rechten Seite der DS-Gleichungen auftreten würden, wenn wir bei der Anwendung des „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus $N - 2$ statt N für β_0 eingesetzt hätten.

Wir nehmen die Koeffizienten c_2 , c_5 und c_6 und den Vakuumerwartungswert $\bar{\alpha}$ als freie Parameter und bestimmen die Form der Koeffizienten σ_{11} , σ_{12} , τ_{11} , μ_{11} und c_7 in Abhängigkeit von diesen Parametern.

Zunächst nehmen wir die Gleichungen (8.1), (8.2) und (8.5) und formen sie um, so daß sie die gesuchten Gleichungen für die Koeffizienten σ_{11} , σ_{12} und τ_{11} ergeben. Dabei substituieren wir zuerst die Koeffizienten σ_{11} und σ_{12} durch die Kombinationen x und y aus ihnen:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{12} &= x \\ \sigma_{11}\sigma_{12} &= y. \end{aligned}$$

Formt man mit diesen Ausdrücken die Gleichung (8.1) um, so erhält man

$$z - \tau_{11} \left(1 - \frac{1}{\beta_0}\right) x + \tau_{11}^2 + \frac{1}{\beta_0} (-c_2 \tau_{11} + c_5 + c_6 + \tau_{11}^2) = 0. \quad (8.6)$$

Nach Umformung Gleichung (8.2) erhalten wir

$$\left(1 - \frac{1}{\beta_0}\right) x = \left(1 + \frac{1}{\beta_0}\right) \tau_{11} + ig_0 \bar{\alpha} - \frac{1}{\beta_0} c_2 \quad (8.7)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\beta_0 + 1}{\beta_0 - 1} \tau_{11} + \frac{\beta_0 ig_0 \bar{\alpha} - c_2}{\beta_0 - 1}. \quad (8.8)$$

Umformen von Gleichung (8.5) unter Benutzung von Gleichung (8.8) ergibt

$$z = \tau_{11}^2 \frac{\beta_0 + 1}{\beta_0 - 1} + \tau_{11} \frac{\beta_0 ig_0 \bar{\alpha} - c_2}{\beta_0 - 1} - \frac{\beta_0 \tau_{11}^2 + 2c_6}{\beta_0 + 1}. \quad (8.9)$$

Nun ergibt Gleichung (8.6) zusammen mit (8.7) und (8.9) eine quadratische Gleichung für τ_{11} , die nur noch von unseren freien Parametern abhängt:

$$\tau_{11}^2 + \tau_{11} \frac{\beta_0 + 1}{3\beta_0 + 1} (ig_0 \bar{\alpha} - c_2) + \frac{\beta_0^2 - 1}{3\beta_0 + 1} \left(\frac{c_5}{\beta_0} + \frac{c_6 (1 - \beta_0)}{\beta_0 (1 + \beta_0)} \right) = 0. \quad (8.10)$$

Es ergeben sich also zwei mögliche Lösungen für den Koeffizienten τ_{11} und die Bedingung, daß τ_{11} reell sein muß, schränkt den Wertebereich der freien Parameter ein. Mit den Gleichungen (8.8) und (8.9) hat man damit auch die Variablen x und z in Abhängigkeit der freien Parameter dargestellt.

Aus x und z erhält man σ_{11} und σ_{12} durch die Rücktransformation

$$\sigma_{11\pm} = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - z} = \sigma_{12\pm}.$$

Für σ_{11} und σ_{12} ergeben sich dieselben Lösungen, da die Gleichungen symmetrisch in σ_{11} und σ_{12} sind. Die Lösung muß die Nebenbedingung $x^2 > 4z$ erfüllen, damit sich für σ_{11} und σ_{12} reelle Werte ergeben.

Mit Gleichung (8.4) kann man nun μ_{11} in Abhängigkeit der freien Parameter darstellen:

$$\mu_{11} = \frac{(z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2)(\beta_0 c_2 - \tau_{11} + 2c_2 - 2x) + 2\tau_{11}c_5 - 2\tau_{11}^2 c_2}{(\beta_0 + 1)(z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2) - 2\tau_{11}^2}$$

Schließlich liefert uns (8.3) eine Gleichung für c_7 :

$$c_7 = -\frac{\beta_0 C}{\tau_{11}} (z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2) - \left(D \frac{(z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2)}{\tau_{11}} + \frac{E}{\tau_{11}} \right)$$

mit

$$C = \tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 + c_5$$

$$D = \tau_{11}^2 + \tau_{11}\mu_{11} - 2\tau_{11}c_2 + 2\tau_{11}x + 2c_6 + c_5$$

$$E = 2\tau_{11}^3(c_2 - \mu_{11}) - 3\tau_{11}^2c_5 - 2\tau_{11}\mu_{11}c_6 + c_5c_6 - c_2c_6\tau_{11}.$$

8.2 SK-Gleichungen im zweiten Fall

In diesem Fall haben wir die zwei unbekanntenen Koeffizienten c_1 und c_3 und zwei Selbstkonsistenzgleichungen mehr. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{12} &= x, \\ \sigma_{11}\sigma_{12} &= y \end{aligned}$$

lauten die in diesem Fall aus der Propagatorgleichung gewonnenen Selbstkonsistenzgleichungen

$$z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2 = -\frac{1}{\beta_0} ((\tau_{11} - c_1 - c_3)x - c_2\tau_{11} - 2c_3\tau_{11} + \tau_{11}^2 + c_5 + c_6) \quad (8.11)$$

und

$$x - \tau_{11} = ig_0\bar{\alpha} - \frac{1}{\beta_0} (c_2 + 2c_3 - x - \tau_{11}). \quad (8.12)$$

Die Vertexgleichung liefert uns in diesem Fall fünf Selbstkonsistenzgleichungen, die ersten beiden lauten:

$$2 = \frac{c_1^2 + 2c_1c_3 - 2c_1\tau_{11}}{z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2}, \quad (8.13)$$

$$c_1 = -\frac{1}{\beta_0} (c_3 - \mu_{11}). \quad (8.14)$$

Die dritte Selbstkonsistenzgleichung der Vertexgleichung, Gleichung (7.31), kann man mit Hilfe der Beziehung (8.13) vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 - \mu_{11}c_3 + c_5 &= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ -3\tau_{11}^2 + \tau_{11}(2x + \mu_{11} - 2c_1 - 2c_2 - 3c_3) \right. \\
&+ c_5 + 2c_6 - x(2c_3 + c_1) + (c_1 + c_3)(2c_1 + c_2 - \mu_{11}) \\
&+ \frac{1}{z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2} \left[2\tau_{11}^3(c_2 - \mu_{11}) + \tau_{11}^2(-3c_5 - c_1c_2 - c_2c_3 + 6\mu_{11}c_3 + c_1x - 2c_1c_3) \right. \\
&\quad + \tau_{11}(-4\mu_{11}c_3^2 - 2\mu_{11}c_6 - 2c_1c_3x + 2c_1c_6 + 2c_1c_5 - c_2c_6 + 2c_3c_5) \\
&\quad \left. \left. + 2\mu_{11}c_3c_6 + c_1c_6x + c_5c_6 - c_7(c_1 + c_3 - \tau_{11}) \right] \right\} \quad (8.15)
\end{aligned}$$

Auch bei der Gleichung (7.31) kann man die Beziehung (8.13) zur Vereinfachung ausnutzen:

$$\begin{aligned}
c_2 - \mu_{11} &= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ 3c_3 + 2c_2 + 2c_1 + \tau_{11} - \mu_{11} - 2x \right. \\
&+ \frac{1}{z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2} \left[\tau_{11}^2(2\mu_{11} - c_1 - 2c_2) + \tau_{11}(-4\mu_{11}c_3 + c_1c_2 - c_1x + 2c_2c_3 + 2c_5 + 2c_1c_3) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\mu_{11}c_3^2 - c_1c_5 + c_1c_3x - 2c_3c_5 - c_1c_6 \right] \right\}. \quad (8.16)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung (7.33) lautet schließlich

$$c_3 - \tau_{11} = -\frac{1}{\beta_0} \left\{ 2c_3 - 2\tau_{11} + c_1 + \frac{2\tau_{11}^3 - 6c_3\tau_{11}^2 + \tau_{11}(4c_3^2 + 2c_6) - 2c_3c_6}{z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2} \right\}. \quad (8.17)$$

Auch in diesem Fall erkennt man, daß die nichtperturbativen Effekte, die wir untersuchen, Modifikationen der Störungsreihe bewirken, die von höherer Ordnung in $1/N$ sind als die Störungsreihe selber.

Wir nehmen in diesem Fall die Größen x , z und τ_{11} zusammen mit $\bar{\alpha}$ als freie Parameter. Um die übrigen Koeffizienten in Abhängigkeit der freien Parameter darzustellen, formen wir zunächst die Gleichungen (8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.17) so um, daß sie die Koeffizienten c_1 , c_2 , c_5 , c_6 und μ_{11} in Abhängigkeit von den freien Parametern und c_3 darstellen:

Gleichung (8.13) liefert uns

$$c_{1,\pm} = -(c_3 - \tau_{11}) \pm \sqrt{(c_3 - \tau_{11})^2 + 2(z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2)}. \quad (8.18)$$

Damit und mit (8.14) kann man μ_{11} in Abhängigkeit von x , z , τ_{11} und c_3 darstellen:

$$\mu_{11} = c_3 + \beta_0 \left(-(c_3 - \tau_{11}) \pm \sqrt{(c_3 - \tau_{11})^2 + 2(z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2)} \right). \quad (8.19)$$

Eine Gleichung für c_2 liefert uns (8.12):

$$c_2 = \beta_0 (-x + \tau_{11} + ig_0\bar{\alpha}) - 2c_3 + x + \tau_{11}. \quad (8.20)$$

Mit Gleichung (8.17) erhält man

$$c_6 = \frac{2 + \beta_0}{2} (z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2) - \frac{c_1 (z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2)}{2(\tau_{11} - c_3)} + \frac{-\tau_{11}^3 + 3c_3\tau_{11}^2 - 2c_3^2\tau_{11}}{\tau_{11} - c_3}, \quad (8.21)$$

wobei für c_1 die rechte Seite von (8.18) einzusetzen ist.

Schließlich ergibt Gleichung (8.11)

$$c_5 = -\beta_0 (z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2) - (\tau_{11} - c_1 - c_3)x + c_2\tau_{11} + 2c_3\tau_{11} - \tau_{11}^2 - c_6, \quad (8.22)$$

wobei wir die Größen c_1 und c_6 schon in Abhängigkeit der freien Parameter und c_3 kennen.

Substituiert man in Gleichung (8.16) die Koeffizienten c_1 , c_2 , c_5 , c_6 und μ_{11} durch ihre Ausdrücke in x , z , τ_{11} und c_3 , so erhält man eine Gleichung für c_3 , deren Koeffizienten nur noch von den freien Parametern abhängen. Mit den Lösungen dieser Gleichungen kann man mit (8.18) c_1 und mit (8.19) auch μ_{11} in Abhängigkeit der freien Parameter darstellen. Mit (8.20, 8.21, 8.22) folgen die Ausdrücke für c_2 , c_6 und c_5 .

Schließlich erhält man c_7 aus der bisher unbeachteten Gleichung (8.15):

$$c_7 = \frac{1}{D} (z - \tau_{11}x + \tau_{11}^2) (\beta_0 A + B) + \frac{C}{D} \quad (8.23)$$

mit

$$A = \tau_{11}\mu_{11} - \tau_{11}c_2 - \mu_{11}c_3 + c_5,$$

$$B = -3\tau_{11}^2 + \tau_{11} (2x + \mu_{11} - 2c_1 - 2c_2 - 3c_3) + c_5 + 2c_6 - x (2c_3 + c_1) + (c_1 + c_3) (2c_1 + c_2 - \mu_{11}),$$

$$C = 2\tau_{11}^3 (c_2 - \mu_{11}) + \tau_{11}^2 (-3c_5 - c_1c_2 - c_2c_3 + 6\mu_{11}c_3 + c_1x - 2c_1c_3) + \tau_{11} (-4\mu_{11}c_3^2 - 2\mu_{11}c_6 - 2c_1c_3x + 2c_1c_6 + 2c_1c_5 - c_2c_6 + 2c_3c_5) + 2\mu_{11}c_3c_6 + c_1c_6x + c_5c_6,$$

$$D = (c_1 + c_3 - \tau_{11}).$$

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die Methode einer nichtperturbativ erweiterten Störungstheorie auf das nichtlineare σ -Modell in zwei Dimensionen angewandt. Man untersucht das σ -Modell, weil es grundlegende Eigenschaften der QCD wie asymptotische Freiheit, spontane Brechung der chiralen Symmetrie und Renormierbarkeit besitzt und in einer Näherung für große N exakt lösbar ist. Bei unseren Rechnungen hat sich herausgestellt, daß es sich in anderen Gesichtspunkten wesentlich von der QCD unterscheidet. Das nichtlineare σ -Modell hat, im Gegensatz zur QCD, eine nicht-polynomiale Wirkung. Man kann sie zwar durch die Einführung eines Hilfsfeldes auf Polynomgestalt bringen, es erweist sich aber, daß dieses Hilfsfeld viele unphysikalische Eigenschaften besitzt. Der Propagator dieses Feldes hat beispielsweise die Form $p^2 + m^2$. Mit dieser Eigenschaft verbunden ist die Tatsache, daß der Divergenzgrad der Schleifenintegrale in den DS-Gleichungen mit den Gleichungen für höhere Vertexfunktionen nicht abnimmt. Die nichtperturbativen Effekte, die wir mit unserer Methode untersuchen, treten nur bei divergenten Schleifenintegralen auf. Daher muß man in der QCD für die Etablierung der „erweiterten Feynman-Regeln“ $\Gamma^{[r,0]}$ nur die Gleichungen für die sieben oberflächlich divergenten Vertizes behandeln und hat damit ein natürliches Abbruchkriterium für die unendliche Hierarchie von DS-Gleichungen. Im Gegensatz dazu muß man beim nichtlinearen σ -Modell alle Gleichungen des DS-Systems auswerten; die Zahl der erweiterten Feynman-Regeln „proliferiert“.

Desweiteren benötigt man zur Berechnung der Gleichungen der Vertexfunktionen mit physikalischen Beinen die Form der Vertexfunktionen mit ausnahmslos unphysikalischen Beinen. Für letztere gibt es zunächst keine Feynman-Regeln. Mit Hilfe einer semiklassischen Sattelpunktentwicklung des erzeugenden Funktionals der Greenschen Funktionen kann man Ausdrücke für die niedrigsten Ordnungen dieser Vertexfunktionen gewinnen. Sie bestehen aus konvergenten Schleifenintegralen, deren Ergebnisse für die weiteren Rechnungen zu komplex sind. Deshalb haben wir die Funktionen für große Impulse genähert und interpretieren die in ihnen vorkommenden Logarithmen, die sich in ihrer Form von den Logarithmen der Schleifenintegrale der QCD unterscheiden, als laufende Kopplung. Dies bezeichnen wir als „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus. Mit den genäherten Ausdrücken läßt sich zwar weiterrechnen; bei der (2,1)-Vertexgleichung ergeben sich aber Schwierigkeiten, die darin bestehen, daß bereits ohne die Erweiterung der Funktionen durch rationale Ansätze entweder nichtlokale Divergenzen entstehen, obwohl das Modell renormierbar ist, oder eine ungewohnte Anhebung des perturbativen Divergenzgrades gewisser Einzelschleifen auf den (allgemein zu erwartenden) Wert $+2$ in Kauf genommen werden muß. Die

letztere Möglichkeit betrachten wir hier als die plausiblere, da sie wenigstens im Rahmen der generellen Divergenzgradabschätzung bleibt und mit lokalen perturbativen Divergenzen auskommt. In der uns bekannten Literatur wurde nur die Propagatorgleichung behandelt, daher wurden diese Probleme nicht aufgedeckt.

Zusätzlich zeigt sich, daß der divergente $1/g^2$ -Mechanismus bei der Entwicklung für große N , die in der Literatur angewandt wird, nicht funktioniert. Gerade in der Näherung, in der das Modell exakt lösbar ist, werden die nichtperturbativen Effekte, die wir in dieser Arbeit untersuchen, unterdrückt. Selbst wenn man den Limes $N \rightarrow \infty$ unabhängig von der Kopplungskonstanten bildet, so daß der $1/g^2$ -Mechanismus nicht gestört wird, erkennt man an den Selbstkonsistenzgleichungen, daß beim Vernachlässigen der Terme von der Ordnung $1/N$ nur die triviale Lösung, das heißt die Störungstheorie, bleibt.

Die nach Auswertung aller SK-Bedingungen zu den beiden Vertexgleichungen (A.2.0) und (A.2.1) verbleibende Unterbestimmung der nichtperturbativen Koeffizienten ist etwas unbefriedigend, aber wahrscheinlich kein prinzipielles Problem: die Erfahrung mit der QCD läßt vermuten, daß sie sich durch Hinzunahme der Information aus Gleichung (B.2.1) beheben lassen wird.

Das σ -Modell mag zwar bei vielen Methoden einfacher zu handhaben sein als die QCD, beim Rechnen mit der erweiterten Störungsreihe ergeben sich jedoch die oben genannten Probleme, die bei den Anwendungen der Methode in der QCD nicht auftreten. Insofern ist das σ -Modell in gewissem Sinne schwieriger als „realistische“ vierdimensionale Theorien.

Anhang A

Formeln

Hier wollen wir einige Formeln zusammenstellen, die wir in den folgenden Rechnungen gebrauchen werden.

1. Feynman-Parametrisierung:

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}}. \quad (\text{A.1})$$

2. Impulsintegration:

$$\int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{(k_E^2)^r}{(k_E^2 + R^2)^m} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(r + \frac{D}{2}) \Gamma(m - r - \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(m) (R^2)^{m-r-\frac{D}{2}}}. \quad (\text{A.2})$$

3. Symmetrische Integration:

$$\int d^D k_E f(k_E^2) k_E^{\mu_1} \dots k_E^{\mu_n} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ S^{\mu_1 \dots \mu_n} \int d^D k_E f(k_E^2) (k_E^2)^{\frac{n}{2}} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

mit

$$S^{\mu_1 \mu_2} = \frac{\delta^{\mu_1 \mu_2}}{D},$$

$$S^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \frac{\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3}}{D(D+2)}.$$

4. Mit

$$\int_0^c \ln(a + by) dy = \frac{a + cb}{b} \ln(a + bc) - \frac{a}{b} \ln a - c \quad (\text{A.4})$$

kann man leicht nachrechnen, daß gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{Y_1} dy_1 \int_0^{Y_2} dy_2 \left(\frac{A^{(3)}}{(K + y_1 + y_2)^3} + \frac{A^{(2)}}{(K + y_1 + y_2)^2} + \frac{A^{(1)}}{K + y_1 + y_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{K + Y_1 + Y_2} + \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{K} - \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{K + Y_1} - \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{K + Y_2} \\
&\quad + \ln(K + Y_1 + Y_2) \{-A^{(2)} + A^{(1)}(K + Y_1 + Y_2)\} + \ln(K) \{-A^{(2)} + A^{(1)}(K)\} \\
&\quad + \ln(K + Y_1) \{A^{(2)} - A^{(1)}(K + Y_1)\} + \ln(K + Y_2) \{A^{(2)} - A^{(1)}(K + Y_2)\}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

5. Nach Formel (3.10.1), (3.10.2) und (3.10.3) in [28] gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx (U_1 + U_2 x + U_3 x^2) \ln(ax + b) &= U_1 \left(\frac{c+d}{c} \ln(c+d) - \frac{d}{c} \ln d - 1 \right) \\
&\quad + U_2 \left(\frac{a^2 - b^2}{2a^2} \ln(a+b) + \frac{b^2}{2a^2} \ln b - \frac{1}{4} + \frac{b}{2a} \right) \\
&\quad + U_3 \left(\frac{a^3 + b^3}{3a^3} \ln(a+b) - \frac{b^3}{3a^3} \ln b - \frac{1}{9} + \frac{b}{6a} - \frac{b^2}{3a^2} \right).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

6. In [29] findet man, daß mit

$$X = ax^2 + bx + c, \quad \diamond = 4ac - b^2$$

$$\text{gilt: } \int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}, \tag{A.7}$$

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax + b - \sqrt{-\Delta}}{2ax + b + \sqrt{-\Delta}} \quad \text{für } \Delta < 0. \tag{A.8}$$

7. Formel 3.13.1 aus [28] lautet:

$$\int_0^1 \frac{\ln(c + ey)}{a + by} dy = \frac{1}{b} \left[\ln \frac{bc - ae}{b} \ln \frac{a+b}{a} - Li_2 \left(e \frac{a+b}{ae - bc} \right) + Li_2 \left(\frac{ae}{ae - bc} \right) \right]. \tag{A.9}$$

8. Bei der Feynman-Parametrisierung beliebig vieler Nennerfaktoren benutzt man die Formel

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \frac{u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2}}{[a_1 u_1 \dots u_{n-1} + a_2 u_1 \dots u_{n-2} (1 - u_{n-1}) + \dots + a_{n-1} u_1 (1 - u_2) + a_n (1 - u_1)]^n}. \tag{A.10}$$

Anhang B

Der Hilfsfeldpropagator in $r = 0$

B.1 Rechnung

Wir berechnen hier das folgende Integral:

$$I = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2 + \sigma_{01}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p}{2} - q\right)^2 + \sigma_{01}\Lambda^2\right)}.$$

Mit einer Feynman-Parametrisierung nach (A.1) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \frac{1}{\left(\left(\frac{p}{2} + q\right)^2 + \sigma_{01}\Lambda^2 - 2pqz\right)^2} \\ &= \int_0^1 dz \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(\left(q + \frac{p}{2} - pz\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - pz\right)^2 + \frac{p^2}{4} + \sigma_{01}\Lambda^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Nach der Substitution $Q = q + \frac{p}{2} - pz$ erhält man

$$I = \int_0^1 dz \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(Q^2 + p^2z - p^2z^2 + \sigma_{01}\Lambda^2)^2}.$$

Nun kann man die Impulsintegration nach (A.2) ausführen und erhält

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(-p^2z^2 + p^2z + \sigma_{01}\Lambda^2)} \\ &= -\frac{1}{4\pi p^2} \int_0^1 dz \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}} - \frac{1}{z - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{p^4 + 4p^2\sigma_{01}\Lambda^2}} \ln \left(\frac{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}\right) \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}\right)}{\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}\right) \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}}\right)} \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{p^2(p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2)}} \ln \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sigma_{01}\Lambda^2}{p^2}} + \frac{1}{2}} \\
&= +\frac{1}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{p^2(p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2)}} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2} - \sqrt{p^2}}, \tag{B.1}
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Vorzeichen so gewählt wurden, daß die Argumente der Logarithmusfunktion beim Rechnen mit euklidischen Impulsen positiv sind, die Logarithmusfunktion also reell ist.

B.2 Näherung

Bei der Entwicklung des Terms (B.1) für große Impulse erhält man für den Wurzelterm

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{p^2(p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2)}} &= \frac{1}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma_{01}^2\Lambda^4}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}}} \\
&= \frac{1}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} \left(1 + \frac{2\sigma_{01}^2\Lambda^4}{(p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)^2} + O(p^{-6}) \right).
\end{aligned}$$

Den Logarithmustrm formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\sqrt{p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2} - \sqrt{p^2}} &= \ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2 + \sqrt{p^2(p^2 + 4\sigma_{01}\Lambda^2)}}{2\sigma_{01}\Lambda^2} \\
&= \ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2} + \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\sigma_{01}^2\Lambda^4}{(p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)^2}} \right) \\
&= \ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2} + \ln \left(1 + \frac{\sigma_{01}^2\Lambda^4}{(p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)^2} + O(p^{-6}) \right) \\
&= \ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2} + \frac{\sigma_{01}^2\Lambda^4}{(p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)^2} + O(p^{-6}).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$I = \frac{1}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} \ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2} + O\left(p^{-6}, \frac{\ln p^2}{p^6}\right).$$

$$\begin{aligned} y_1 (1 - z) (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 &\longrightarrow y_1, \\ y_2 z (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 &\longrightarrow y_2 \end{aligned}$$

folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right)} \\ &= \frac{6}{((\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2)^2} \int_0^1 dz \int_0^{(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 (1-z)} dy_1 \int_0^{(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 z} dy_2 \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left[\left(Q + \frac{p}{2} - pz \right)^2 + p^2 z (1 - z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + y_1 + y_2 \right]^4}. \end{aligned}$$

Nach der Substitution $Q + \frac{p}{2} - pz \rightarrow Q$ ergibt sich damit für das Integral:

$$I = \frac{6}{((\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2)^2} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int_0^{(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 (1-z)} dy_1 \int_0^{(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 z} dy_2 \cdot \frac{M}{\left[Q^2 + p^2 z (1 - z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + y_1 + y_2 \right]^4},$$

mit

$$\begin{aligned} M = &\left\{ p^2 (Q + pz - p)^2 (Q + pz)^2 + c_1 \Lambda^2 \left((Q + pz)^4 + (Q + pz - p)^4 \right) \right. \\ &+ c_2 \Lambda^2 (Q + pz)^2 (Q + pz)^2 + c_3 \Lambda^2 p^2 \left((Q + pz)^2 + (Q + pz - p)^2 \right) \\ &\left. + c_4 \Lambda^2 p^4 + c_5 \Lambda^4 \left((Q + pz - p)^2 + (Q + pz)^2 \right) + c_6 \Lambda^4 p^2 + c_7 \Lambda^6 \right\}. \end{aligned}$$

Die Gesetze der symmetrischen Integration (A.3) ausnutzend kann man M , ohne dadurch das Ergebnis der Rechnung zu ändern, durch

$$M' = \frac{A^{(1)}}{2} Q^4 + A^{(2)} Q^2 + \frac{A^{(3)}}{2}$$

mit

$$A^{(1)} = 2p^2 + 4c_1 \Lambda^2 + 2c_2 \Lambda^2, \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} = &4p^4 z^2 - 4p^4 z + p^4 + c_1 \Lambda^2 (8p^2 z^2 - 8p^2 z + 4p^2) \\ &+ c_2 \Lambda^2 (4p^2 z^2 - 4p^2 z + p^2) + 2c_3 \Lambda^2 p^2 + 2c_5 \Lambda^4, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} A^{(3)} = &2p^6 (z - 1)^2 z^2 + 2c_1 \Lambda^2 p^4 (z^4 + (z - 1)^4) \\ &+ 2c_2 \Lambda^2 p^4 (z - 1)^2 z^2 + 2c_3 \Lambda^2 p^4 (z^2 + (z - 1)^2) + 2c_4 \Lambda^2 p^4 \\ &+ 2c_5 \Lambda^4 p^2 (z^2 + (z - 1)^2) + 2c_6 p^2 \Lambda^4 + 2c_7 \Lambda^6 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ersetzen. Nach Durchführung der Q -Integration nach (A.2) ergibt sich

$$I = \frac{1}{((\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2)^2} \int_0^1 dz \int_0^{(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 (1-z)} dy_1 \int_0^{(\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 z} dy_2$$

$$\cdot \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{A^{(1)}}{p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + y_1 + y_2} + \frac{A^{(2)}}{(p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + y_1 + y_2)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{A^{(3)}}{(p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + y_1 + y_2)^3} \right\}.$$

Die Integration über die ersten zwei Feynman-Parameter nach Formel (A.5) liefert

$$I = \frac{1}{4\pi ((\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2)^2} \int_0^1 dz \left\{ \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{p^2 z (1-z) + \sigma_{12} \Lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2} \right.$$

$$- \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 z} - \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{p^2 z (1-z) + \sigma_{12} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 z}$$

$$+ \ln(p^2 z (1-z) + \sigma_{12} \Lambda^2) \{-A^{(2)} + A^{(1)} (p^2 z (1-z) + \sigma_{12} \Lambda^2)\}$$

$$+ \ln(p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2) \{-A^{(2)} + A^{(1)} (p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2)\}$$

$$+ \ln(p^2 z (1-z) + \sigma_{12} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 z)$$

$$\cdot \{A^{(2)} - A^{(1)} (p^2 z (1-z) + \sigma_{12} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 z)\}$$

$$+ \ln(p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 z)$$

$$\cdot \{A^{(2)} - A^{(1)} (p^2 z (1-z) + \sigma_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 z)\} \left. \right\}. \quad (\text{C.4})$$

Bei der Durchführung der letzten Integration betrachten wir die rationalen Ausdrücke getrennt von den Logarithmistermen.

Die rationalen Terme haben die Form:

$$R = \sum_{(K,D) \in M} \int_0^1 dz \left(\frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{p^2 z (1-z) + K \Lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{A^{(3)}}{p^2 z (1-z) + K \Lambda^2 + D \Lambda^2 z} \right)$$

$$\text{mit } M = \{(\sigma_{11}, \sigma_{12} - \sigma_{11}), (\sigma_{12}, \sigma_{11} - \sigma_{12})\}.$$

Die Zerlegung von $A^{(3)}$ lautet:

$$A^{(3)} = 2(p^2 z (1-z) + K \Lambda^2) \left(F' + G' \frac{1}{p^2 z (1-z) + K \Lambda^2} \right),$$

mit

$$\begin{aligned}
F' &= p^4 z (1 - z) - p^2 K \Lambda^2 + c_1 \Lambda^2 p^2 \left(-2z^2 + 2z - 4 - 2 \frac{K \Lambda^2}{p^2} \right) \\
&\quad + c_2 \Lambda^2 (p^2 z (1 - z) - K \Lambda^2) - 2c_3 \Lambda^2 p^2 - 2c_5 \Lambda^4, \\
G' &= K^2 \Lambda^4 p^2 + c_1 \Lambda^2 p^2 \left(2 \frac{K^2}{p^2} + 4K + p^2 \right) \\
&\quad + c_2 \Lambda^2 K^2 \Lambda^4 + c_3 \Lambda^2 p^2 (2K \Lambda^2 + p^2) + c_4 \Lambda^2 p^4 \\
&\quad + c_5 \Lambda^4 (2K \Lambda^2 + p^2) + c_6 p^2 \Lambda^4 + c_7 \Lambda^6
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A^{(3)} &= 2(p^2 z (1 - z) + D \Lambda^2 z + K \Lambda^2) \\
&\quad \left(F + G \frac{1}{p^2 z (1 - z) + D \Lambda^2 z + K \Lambda^2} + H \frac{z}{p^2 z (1 - z) + D \Lambda^2 z + K \Lambda^2} \right),
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F &= p^4 z (1 - z) - (Dz + K) \Lambda^2 p^2 - D^2 \Lambda^4 \\
&\quad + c_1 \Lambda^2 \left(-2p^2 z^2 - 2(Dz + K) \Lambda^2 - 2 \frac{D^2 \Lambda^4}{p^2} + 2p^2 z - 4p^2 \right) \\
&\quad + c_2 \Lambda^2 \left(p^2 z (1 - z) - (Dz + K) \Lambda^2 - \frac{D^2 \Lambda^4}{p^2} \right) - 2p^2 c_3 \Lambda^2 - 2c_5 \Lambda^4, \\
G &= D^2 K \Lambda^6 + p^2 K^2 \Lambda^4 + c_1 \Lambda^2 \left(2K \frac{D^2 \Lambda^6}{p^2} + 2K^2 \Lambda^4 + 4p^2 K \Lambda^2 + p^4 \right) \\
&\quad + c_2 \Lambda^2 \left(K \frac{D^2 \Lambda^6}{p^2} + K^2 \Lambda^4 \right) + c_3 \Lambda^2 (p^4 + 2p^2 K \Lambda^2) + c_4 \Lambda^2 p^4 \\
&\quad + c_5 \Lambda^4 (2K \Lambda^2 + p^2) + c_6 \Lambda^4 p^2 + c_7 \Lambda^6, \\
H &= D^2 \Lambda^4 \left(p^2 + D \Lambda^2 + 2 \frac{K}{D} p^2 \right) + c_1 \Lambda^2 \left(4D \Lambda^2 p^2 + 2D^2 \Lambda^4 + 4KD \Lambda^4 + 2 \frac{D^3 \Lambda^6}{p^2} \right) \\
&\quad + c_2 \Lambda^2 \left(D^2 \Lambda^4 + \frac{D^3 \Lambda^6}{p^2} + 2DK \Lambda^4 \right) + 2c_3 \Lambda^2 p^2 D \Lambda^2 + 2c_5 \Lambda^4 D \Lambda^2,
\end{aligned}$$

wobei man F' und G' aus F und G erhält, wenn man $D = 0$ setzt. Bei der Partialbruchzerlegung von $A^{(3)}$ sind also wegen der ähnlichen Nennerstruktur die linearen Terme, die nicht von D abhängen, in beiden Termen gleich und heben sich wegen der verschiedenen Vorzeichen im Integranden weg. Ebenso fallen alle Terme weg, die nicht von K abhängen und linear in D sind, weil die zwei Werte von D , über die summiert wird, sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Übrig bleiben in D quadratische Terme, die unabhängig von z sind, und rationale Ausdrücke in z :

$$R = \sum_{(K,D) \in M} \int_0^1 dz \left[\left(D^2 \Lambda^4 + c_1 \Lambda^2 \frac{2D^2 \Lambda^4}{p^2} + c_2 \Lambda^2 \frac{D^2 \Lambda^4}{p^2} \right) + G' \frac{1}{p^2 z (1-z) + K \Lambda^2} \right. \\ \left. - G \frac{1}{p^2 z (1-z) + D \Lambda^2 z + K \Lambda^2} - H \frac{z}{p^2 z (1-z) + D \Lambda^2 z + K \Lambda^2} \right].$$

Die z -Integration führt man nach den Formeln (A.7, A.8) durch und erhält:

$$R = \sum_{(K,D) \in M} \left(D^2 \Lambda^4 + c_1 \Lambda^2 \frac{2D^2 \Lambda^4}{p^2} + c_2 \Lambda^2 \frac{D^2 \Lambda^4}{p^2} \right) + \frac{1}{2p^2} H'' \ln \frac{D+K}{K} \\ + 2G' \frac{1}{\sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}}{p^2 - \sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}} \\ - \frac{\left(G + \frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2} H \right)}{\sqrt{4p^2 K \Lambda^2 + (p^2 + D\Lambda^2)^2}} \ln \frac{\left(p^2 + \sqrt{4p^2 K \Lambda^2 + (p^2 + D\Lambda^2)^2} \right)^2 - D^2 \Lambda^4}{\left(p^2 + \sqrt{4p^2 K \Lambda^2 + (p^2 - D\Lambda^2)^2} \right)^2 - D^2 \Lambda^4}, \quad (C.5)$$

wobei H'' aus H hervorgeht, wenn man die geraden Potenzen von D wegläßt. Diese verschwinden infolge der Summation über K und D , da der Logarithmus $\ln \frac{D+K}{K}$ bei den zwei Kombinationen, über die summiert wird, das Vorzeichen wechselt.

Wir schreiben die Koeffizienten vor den Logarithmusermen noch einmal ausführlich aus. Die Argumente des letzten Logarithmus ändern sich nicht bei der Summation, daher kann man unter den Vorfaktoren Terme mit ungeraden Potenzen von D , die unabhängig von K sind, weglassen.

$$\frac{1}{2p^2} H'' = \frac{D^3 \Lambda^6}{2p^2} + DK \Lambda^4 + c_1 \Lambda^2 \left(2D \Lambda^2 + 2 \frac{KD \Lambda^4}{p^2} + \frac{D^3 \Lambda^6}{p^4} \right) \\ + c_2 \Lambda^2 \left(\frac{D^3 \Lambda^6}{2p^4} + \frac{DK \Lambda^4}{p^2} \right) + c_3 \Lambda^2 D \Lambda^2 + c_5 \Lambda^4 \frac{D \Lambda^2}{p^2}, \quad (C.6)$$

$$2G' = 2K^2 \Lambda^4 p^2 + 2c_1 \Lambda^2 (2K^2 \Lambda^4 + 4K \Lambda^2 p^2 + p^4) + 2c_2 \Lambda^2 K^2 \Lambda^4 \\ + 2c_3 \Lambda^2 p^2 (2K \Lambda^2 + p^2) + 2c_4 \Lambda^2 p^4 + 2c_5 \Lambda^4 (2K \Lambda^2 + p^2) \\ + c_6 p^2 \Lambda^4 + c_7 \Lambda^6, \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned}
G + \frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2}H &= 2D^2K\Lambda^6 + \frac{D^4\Lambda^8}{2p^2} + \frac{p^2D^2\Lambda^4}{2} + p^2(K^2 + DK)\Lambda^4 \\
&+ c_1\Lambda^2 \left(4K\frac{D^2\Lambda^6}{p^2} + \frac{D^4\Lambda^8}{p^4} + p^4 + 3D^2\Lambda^4 + 2K(K + D)\Lambda^4 + 2p^2(D + 2K)\Lambda^2 \right) \\
&+ c_2\Lambda^2 \left(\frac{D^4\Lambda^8}{2p^4} + \frac{D^2\Lambda^4}{2} + 2\frac{D^2K\Lambda^6}{p^2} + K(D + K)\Lambda^4 \right) \\
&+ c_3\Lambda^2 (D^2\Lambda^4 + 2p^2K\Lambda^2 + p^4) + c_4\Lambda^2 p^4 \\
&+ c_5\Lambda^4 \left(p^2 + \frac{D^2\Lambda^4}{p^2} + 2K\Lambda^2 \right) + c_6\Lambda^4 p^2 + c_7\Lambda^6. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

Die Form der Logarithmusterme in (C.4) kann man auch durch eine Summation zusammenfassen,

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{(K,D) \in M} \int_0^1 dz \left[\left\{ -A^{(2)} + A^{(1)}(p^2z(1-z) + K\Lambda^2) \right\} \ln(p^2z(1-z) + K\Lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ A^{(2)} - A^{(1)}(p^2z(1-z) + D\Lambda^2z + K\Lambda^2) \right\} \ln(p^2z(1-z) + D\Lambda^2z + K\Lambda^2) \right],
\end{aligned}$$

und wenn man die Koeffizienten der Logarithmusterme nach Potenzen von z ordnet, ergibt sich mit (C.1, C.2, C.3):

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{(K,D) \in M} \int_0^1 dz \left\{ (U_1 + U_2z + U_3z^2) \ln(p^2z(1-z) + K\Lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + (V_1 + V_2z + V_3z^2) \ln(p^2z(1-z) + D\Lambda^2z + K\Lambda^2) \right\} \tag{C.9}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
U_1 = -V_1 &= -p^2 \left(p^2 + 4c_1\Lambda^2 + c_2\Lambda^2 + 2c_3\Lambda^2 + \frac{2c_5\Lambda^4}{p^2} \right) \\
&\quad + K(2p^2 + 4c_1\Lambda^2 + 2c_2\Lambda^2) \\
&= -\frac{1}{6}U_2 - 2p^2c_3\Lambda^2 - 2c_5\Lambda^4 + \frac{K\Lambda^2}{3p^2}U_2, \tag{C.10}
\end{aligned}$$

$$U_2 = -U_3 = V_3 = 6p^4 + 12c_1\Lambda^2p^2 + 6c_2\Lambda^2p^2, \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= -U_2 - D(2p^2 + 4c_1\Lambda^2 + 2c_2\Lambda^2)\Lambda^2 \\
&= -U_2 \left(1 + \frac{D}{3p^2} \right). \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Die Logarithmenargumente faktorisieren:

$$p^2 z (1 - z) + K\Lambda^2 = p^2 (z_1 - z) (z - z_2),$$

$$p^2 z (1 - z) + D\Lambda^2 z + K\Lambda^2 = p^2 (w_1 - z) (z - w_2).$$

Die Wurzeln z_1 und z_2 haben die Eigenschaften:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K\Lambda^2}{p^2}}, \quad (\text{C.13})$$

$$z_{1,2}^2 = \frac{1}{2} + \frac{K\Lambda^2}{p^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K\Lambda^2}{p^2}}, \quad (\text{C.14})$$

$$z_{1,2}^3 = \frac{1}{2} + \frac{3K\Lambda^2}{2p^2} \pm \left(1 + \frac{K\Lambda^2}{p^2}\right) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K\Lambda^2}{p^2}}, \quad (\text{C.15})$$

$$1 = z_1 + z_2, \quad (\text{C.16})$$

$$2z_2 = 1 - z_1^2 + z_2^2, \quad (\text{C.17})$$

$$2z_1 = 1 + z_1^2 - z_2^2, \quad (\text{C.18})$$

$$1 + z_1^3 - z_2^3 = 2z_1 + \frac{2K}{p^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K}{p^2}}, \quad (\text{C.19})$$

$$1 - z_1^3 + z_2^3 = 2z_2 - \frac{2K}{p^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K}{p^2}}, \quad (\text{C.20})$$

und die Wurzeln w_1 und w_2 haben die Eigenschaften:

$$w_{1,2} = \frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2}\right)^2 + \frac{K\Lambda^2}{p^2}}, \quad (\text{C.21})$$

$$w_{1,2}^2 = 2 \left(\frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2}\right)^2 + \frac{K\Lambda^2}{p^2} \pm \frac{p^2 + D\Lambda^2}{p^2} \sqrt{\left(\frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2}\right)^2 + \frac{K\Lambda^2}{p^2}}, \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} w_{1,2}^3 &= 4 \left(\frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2}\right)^3 + 3 \frac{(p^2 + D\Lambda^2) K\Lambda^2}{2p^4} \\ &\pm \left(\left(\frac{p^2 + D\Lambda^2}{p^2}\right)^2 + \frac{K\Lambda^2}{p^2}\right) \sqrt{\left(\frac{p^2 + D\Lambda^2}{2p^2}\right)^2 + \frac{K\Lambda^2}{p^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Nach Formel (A.6) erhält man bei der letzten Integration aus (C.9):

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{(K,D)} \ln(p^2) \left(U_1 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{1}{3}U_3 + V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{3}V_3 \right) \\
& + U_1 [(1 - z_1) \ln(z_1 - 1) + z_1 \ln z_1 + (1 - z_2) \ln(1 - z_2) + z_2 \ln(-z_2) - 2] \\
& + V_1 [(1 - w_1) \ln(w_1 - 1) + w_1 \ln w_1 + (1 - w_2) \ln(1 - w_2) + w_2 \ln(-w_2) - 2] \\
& + U_2 \left[\frac{1 - z_1^2}{2} \ln(z_1 - 1) + \frac{z_1^2}{2} \ln z_1 + \frac{1 - z_2^2}{2} \ln(1 - z_2) + \frac{z_2^2}{2} \ln(-z_2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right] \\
& + V_2 \left[\frac{1 - w_1^2}{2} \ln(w_1 - 1) + \frac{w_1^2}{2} \ln w_1 + \frac{1 - w_2^2}{2} \ln(1 - w_2) + \frac{w_2^2}{2} \ln(-w_2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} - \frac{w_1 + w_2}{2} \right] \\
& + U_3 \left[\frac{1 - z_1^3}{3} \ln(z_1 - 1) + \frac{z_1^3}{3} \ln z_1 + \frac{1 - z_2^3}{3} \ln(1 - z_2) + \frac{z_2^3}{3} \ln(-z_2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{9} - \frac{z_1 + z_2}{6} - \frac{z_1^2 + z_2^2}{3} \right] \\
& + V_3 \left[\frac{1 - w_1^3}{3} \ln(w_1 - 1) + \frac{w_1^3}{3} \ln w_1 + \frac{1 - w_2^3}{3} \ln(1 - w_2) + \frac{w_2^3}{3} \ln(-w_2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{9} - \frac{w_1 + w_2}{6} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{3} \right].
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile bleibt wegen (C.10,C.11, C.12) nur noch ein in D linearer Term übrig. Da er unabhängig von K ist, liefert er bei der Summation über alle D keinen Beitrag. Mit (C.16) faßt man die Logarithmen, die z_1 oder z_2 in ihren Argumenten haben, zusammen. Außerdem kann man mit (C.10,C.11,C.12) alle Vorfaktoren $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ durch U_2 ausdrücken und erhält:

$$\begin{aligned}
L = & \sum_{(K,D)} \left(-\frac{1}{6}U_2 - 2p^2c_3\Lambda^2 - 2c_5\Lambda^4 + \frac{K\Lambda^2}{3p^2}U_2 \right) \left(2z_1 \ln z_1 + 2z_2 \ln(-z_2) \right. \\
& \left. - (1 - w_1) \ln(w_1 - 1) - w_1 \ln w_1 - (1 - w_2) \ln(1 - w_2) - w_2 \ln(-w_2) \right) \\
& + U_2 (z_2 \ln(-z_2) + z_1 \ln z_1 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-U_2 - U_2 \frac{D\Lambda^2}{3p^2} \right) \left(\frac{w_1^2}{2} \ln w_1 + \frac{w_2^2}{2} \ln(-w_2) + \frac{1-w_1^2}{2} \ln(w_1-1) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1-w_2^2}{2} \ln(1-w_2) - 1 - \frac{D\Lambda^2}{2p^2} \right) \\
& + U_2 \left\{ -\frac{1}{3} \left(2z_2 - \frac{2K\Lambda^2}{p^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K\Lambda^2}{p^2}} \right) \ln(-z_2) - \frac{1}{3} \left(2z_1 + \frac{2K\Lambda^2}{p^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K\Lambda^2}{p^2}} \right) \ln z_1 \right. \\
& \quad + \frac{1-w_1^3}{3} \ln(w_1-1) + \frac{w_1^3}{3} \ln w_1 + \frac{1-w_2^3}{3} \ln(1-w_2) + \frac{w_2^3}{3} \ln(-w_2) \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} \frac{D\Lambda^2}{p^2} - \frac{2}{3} \frac{D\Lambda^2}{p^2} - \frac{1}{3} \frac{D^2\Lambda^4}{p^4} \right\}.
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt läßt man wieder alle in D linearen Terme, die unabhängig von K sind, weg und ordnet die Terme nach den verschiedenen Logarithmen:

$$\begin{aligned}
L & = \sum_{(K,D)} -\frac{1}{2} \frac{U_2 D^2}{3p^4} \\
& + (z_1 \ln z_1 + z_2 \ln(-z_2)) \left(\frac{1}{3} U_2 + \frac{2K\Lambda^2}{3p^2} U_2 - 4p^2 c_3 \Lambda^2 - 4c_5 \Lambda^4 \right) \\
& - U_2 \frac{2}{3} \frac{K\Lambda^2}{p^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{K}{p^2}} \ln \frac{z_1}{-z_2} \\
& + \ln(w_1-1) \left[2p^2 c_3 \Lambda^2 + 2c_5 \Lambda^4 - U_2 \left(\frac{(2K+D)\Lambda^2}{6p^2} \right) - \frac{1}{3} w_1^3 U_2 \right. \\
& \quad \left. - w_1 \left(\frac{1}{6} U_2 + 2p^2 c_3 + 2c_5 \Lambda^4 - \frac{K\Lambda^2}{3p^2} U_2 \right) + w_1^2 \left(\frac{1}{2} U_2 + U_2 \frac{D\Lambda^2}{6p^2} \right) \right] \\
& + \ln(1-w_2) \left[2p^2 c_3 \Lambda^2 + 2c_5 \Lambda^4 - U_2 \left(\frac{(2K+D)\Lambda^2}{6p^2} \right) - \frac{1}{3} w_2^3 U_2 \right. \\
& \quad \left. - w_2 \left(\frac{1}{6} U_2 + 2p^2 c_3 + 2c_5 \Lambda^4 - \frac{K\Lambda^2}{3p^2} U_2 \right) + w_2^2 \left(\frac{1}{2} U_2 + U_2 \frac{D\Lambda^2}{6p^2} \right) \right] \\
& + \ln w_1 \left[w_1 \left(\frac{1}{6} U_2 + 2p^2 c_3 \Lambda^2 + 2c_5 \Lambda^4 - \frac{K\Lambda^2}{3p^2} U_2 \right) - \frac{w_1^2}{2} \left(U_2 + U_2 \frac{D\Lambda^2}{3p^2} \right) + \frac{w_1^3}{3} U_2 \right] \\
& + \ln(-w_2) \left[w_2 \left(\frac{1}{6} U_2 + 2p^2 c_3 \Lambda^2 + 2c_5 \Lambda^4 - \frac{K\Lambda^2}{3p^2} U_2 \right) - \frac{w_2^2}{2} \left(U_2 + U_2 \frac{D\Lambda^2}{3p^2} \right) + \frac{w_2^3}{3} U_2 \right].
\end{aligned}$$

Nach weiteren Umformungen unter Beachtung von

$$\sum_{(K,D) \in M} -D \ln(K+D) = \sum_{(K,D) \in M} K \ln \frac{K+D}{K}$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{(K,D) \in M} \left(-\frac{D^2 \Lambda^4}{2p^2} \right) (2p^2 + 4c_1 \Lambda^2 + 2c_2 \Lambda^2) \\
&+ M \ln \left(\frac{K+D}{K} \right) \\
&+ N \frac{1}{\sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}}{p^2 - \sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}} \\
&+ O \frac{1}{\sqrt{4p^2 K \Lambda^2 + (p^2 + D\Lambda^2)^2}} \ln \frac{\left(p^2 + \sqrt{4p^2 K \Lambda^2 + (p^2 + D\Lambda^2)^2} \right)^2 - D^2 \Lambda^4}{\left(p^2 + \sqrt{4p^2 K \Lambda^2 + (p^2 - D\Lambda^2)^2} \right)^2 - D^2 \Lambda^4}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
M &= -Dc_1 \Lambda^4 - Dc_3 \Lambda^4 - \frac{D}{p^2} c_5 \Lambda^6 - DK \Lambda^4 - 2KD \Lambda^4 \frac{c_1 \Lambda^2}{p^2} - \frac{DKc_2 \Lambda^6}{p^2} \\
&\quad - \frac{D^3 \Lambda^6}{2p^4} (p^2 + 2c_1 \Lambda^2 + c_2 \Lambda^2), \\
N &= \frac{1}{2} (p^2 + 4K\Lambda^2) (-4p^2 c_3 \Lambda^2 - 4c_5 \Lambda^4 - 4p^2 c_1 \Lambda^2), \\
O &= \left(\frac{p^2}{2} + D\Lambda^2 + \frac{D^2 \Lambda^4}{2p^2} + 2K\Lambda^2 \right) \left(2p^2 c_1 \Lambda^2 + 2p^2 c_3 \Lambda^2 + 2c_5 \Lambda^4 + D^2 \Lambda^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2D^2 c_1 \Lambda^6 + D^2 c_2 \Lambda^6}{p^2} \right).
\end{aligned}$$

Faßt man diese Terme mit den Termen aus (C.5) zusammen, so ergibt sich das Gesamtergebnis

$$\begin{aligned}
A &= 2c_1 \Lambda^2 (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 \ln \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} + B_1 \frac{1}{\sqrt{p^2(4\sigma_{11}\Lambda^2 + p^2)}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^2(4\sigma_{11}\Lambda^2 + p^2)}}{-p^2 + \sqrt{p^2(4\sigma_{11}\Lambda^2 + p^2)}} \\
&+ B_2 \frac{1}{\sqrt{p^2(4\sigma_{12}\Lambda^2 + p^2)}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^2(4\sigma_{12}\Lambda^2 + p^2)}}{-p^2 + \sqrt{p^2(4\sigma_{12}\Lambda^2 + p^2)}} \\
&+ B_{12} \frac{1}{\sqrt{p^4 + 2p^2(\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4}} \\
&\quad \cdot \ln \frac{(\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4 - \left(p^2 + \sqrt{p^4 + 2p^2(\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4} \right)^2}{(\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4 - \left(p^2 - \sqrt{p^4 + 2p^2(\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2 \Lambda^4} \right)^2}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

mit

$$\begin{aligned}
B_1 &= (2p^2 + 4c_1\Lambda^2 + 2c_2\Lambda^2) \sigma_{11}^2 \Lambda^4 \\
&\quad - (4c_3\Lambda^2 p^2 + 4c_5\Lambda^4) \sigma_{11} \Lambda^2 \\
&\quad + 2c_4\Lambda^2 p^4 + 2c_6\Lambda^4 p^2 + 2c_7\Lambda^6, \\
B_2 &= (2p^2 + 4c_1\Lambda^2 + 2c_2\Lambda^2) \sigma_{12}^2 \Lambda^4 \\
&\quad - (4c_3\Lambda^2 p^2 + 4c_5\Lambda^4) \sigma_{12} \Lambda^2 \\
&\quad + 2c_4\Lambda^2 p^4 + 2c_6\Lambda^4 p^2 + 2c_7\Lambda^6, \\
B_{12} &= -(2p^2 + 2c_2\Lambda^2) \sigma_{11} \sigma_{12} \Lambda^2 \\
&\quad + (-2c_1\Lambda^4 + 2c_3\Lambda^2 p^2 + 2c_5\Lambda^4) (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2 \\
&\quad - 2c_4\Lambda^2 p^4 - 2c_6\Lambda^4 p^2 - 2c_7\Lambda^6.
\end{aligned}$$

C.2 Näherung

Wir nähern zunächst das Ergebnis (C.24) für große Impulse. Dabei benutzen wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)}} &= \frac{1}{p^2 + 2K\Lambda^2} \left(1 + 2 \left(\frac{K\Lambda^2}{p^2 + 2K\Lambda^2} \right)^2 + O(p^{-8}) \right), \\
\ln \frac{\sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)} + p^2}{\sqrt{p^2(p^2 + 4K\Lambda^2)} - p^2} &= \ln \frac{p^2 + 2K\Lambda^2}{K\Lambda^2} - \left(\frac{K\Lambda^2}{p^2 + 2K\Lambda^2} \right)^2 + O(p^{-8}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{p^4 + 2p^2(\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2\Lambda^4}} \\
&= \frac{1}{p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2} \left(1 + 2 \frac{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2} + O(p^{-8}) \right), \\
&\ln \frac{(\sigma_{12} - \sigma_{11})\Lambda^4 + \left(p^2 + \sqrt{p^4 + 2p^2(\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2\Lambda^4} \right)^2}{(\sigma_{12} - \sigma_{11})\Lambda^4 - \left(p^2 + \sqrt{p^4 + 2p^2(\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2\Lambda^4} \right)^2} \\
&= \ln \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2}{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4} - \frac{2\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2} + O(p^{-8}),
\end{aligned}$$

und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A &= 2c_1\Lambda^2(\sigma_{11} - \sigma_{12})\Lambda^2 \ln \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \\
&+ B_1 \left(\frac{1}{p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2} \ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2}{\sigma_{11}\Lambda^2} \right) \right) \\
&+ B_2 \left(\frac{1}{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2} \ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2}{\sigma_{12}\Lambda^2} \right) \right) \\
&+ B_{12} \left(\frac{1}{p^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{11})\Lambda^2} \ln \left(\frac{p^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{11})\Lambda^2}{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4} \right) \right) \\
&+ 2c_4\Lambda^2 p^4 \left[\frac{2(\sigma_{11}\Lambda^2)^2}{(p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2)^3} \ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2}{\sigma_{11}\Lambda^2} \right) - \frac{(\sigma_{11}\Lambda^2)^2}{(p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2)^3} \right] \\
&+ 2c_4\Lambda^2 p^4 \left[\frac{2(\sigma_{12}\Lambda^2)^2}{(p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2)^3} \ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2}{\sigma_{12}\Lambda^2} \right) - \frac{(\sigma_{12}\Lambda^2)^2}{(p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2)^3} \right] \\
&- 2c_4\Lambda^2 p^4 \left[\frac{2\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^3} \ln \left(\frac{p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2}{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^3} \right] + O(p^{-4}).
\end{aligned}$$

Die erste Zeile und die Terme ohne Logarithmen können wir im folgenden vernachlässigen, weil sie keinen „endlichen“ $1/g^2$ -Mechanismus ausbilden und daher von niedrigerer Ordnung in g^2 sind als die übrigen Terme.

Die Vorfaktoren der Logarithmen zerlegt man nun gemäß

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= u + v, \\
\sigma_{12} &= u - v
\end{aligned}$$

und benutzt die Näherung

$$\frac{1}{p^2 + 2\sigma\Lambda^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{2\sigma\Lambda^2}{p^4} + O(p^{-6}).$$

Dann erhält man mit den folgenden Näherungen der Logarithmen,

$$\ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2}{\sigma_{11}\Lambda^2} \frac{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2}{\sigma_{12}\Lambda^2} \frac{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2} \right) = -\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{12})^2 \Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2} + O(p^{-8}),$$

$$\ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2}{\sigma_{11}\Lambda^2} \frac{\sigma_{12}\Lambda^2}{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2} \right) = \ln \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} + \frac{2(\sigma_{11} - \sigma_{12})\Lambda^2}{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2} + O(p^{-4})$$

und

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{p^2 + 2\sigma_{11}\Lambda^2}{\sigma_{11}\Lambda^2} \frac{p^2 + 2\sigma_{12}\Lambda^2}{\sigma_{12}\Lambda^2} \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2}{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4} \right) \\ &= 2 \ln \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2}{\sigma_{11}\sigma_{12}\Lambda^4} - \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{12})^2 \Lambda^4}{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2)^2} + O(p^{-8}) \end{aligned}$$

für die höchsten Anteile von $\tilde{\Gamma}_{0,2}^{[1,0]}$ in g^2 den Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,2}^{[1,0]}(p^2) &= -\frac{N}{2} \frac{g_0^2 \Lambda'^4}{4\pi (\sigma_{12} - \sigma_{11})^2} \left\{ \frac{c_1 \Lambda^2}{p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \frac{8}{p^2} v^2 \ln \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2)^2}{\sigma_{11} \sigma_{12} \Lambda^4} \right. \\ &\quad + \frac{1}{p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \left(4v^2 + \frac{8\Lambda^2 u v^2}{p^2} \right) \ln \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2)^2}{\sigma_{11} \sigma_{12} \Lambda^4} \\ &\quad + \frac{c_2 \Lambda^2}{p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \frac{4v^2}{p^2} \ln \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2)^2}{\sigma_{11} \sigma_{12} \Lambda^4} \\ &\quad \left. + \frac{c_3 \Lambda^2}{p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \frac{8v^2}{p^2} \ln \frac{(p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \Lambda^2)^2}{\sigma_{11} \sigma_{12} \Lambda^4} \right\} + O(p^{-4}). \end{aligned}$$

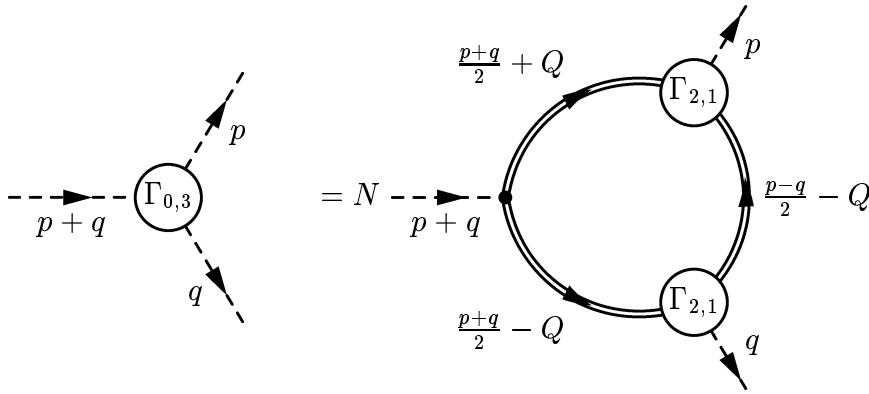
Mit $v^2 = \frac{1}{4}(\sigma_{12} - \sigma_{11})$ erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,2}^{[1,0]}(p^2) &= -N \frac{g_0^2 \Lambda'^4}{4\pi} \frac{1}{p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \ln \frac{p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})}{\sqrt{\sigma_{11} \sigma_{12}} \Lambda^2} \left[1 + \frac{(2u + 2c_1 + c_2 + 2c_3) \Lambda^2}{p^2} \right] \\ &= -N \frac{g_0^2 \Lambda'^4}{4\pi} \frac{1}{p^2 + \tau_{11} \Lambda^2} \ln \frac{p^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{12})}{\sqrt{\sigma_{11} \sigma_{12}} \Lambda^2} \left[1 + (\sigma_{11} + \sigma_{12} + 2c_1 + c_2 + 2c_3) \frac{\Lambda^2}{p^2} \right] \\ &\quad + O(p^{-4}). \end{aligned}$$

Anhang D

Der unphysikalische Dreipunktvertex

Berechnung von $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ in niedrigster Ordnung $r = 0$ aus



$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{0,3}(p+q, p, q) &= \\
 &= -ig_0 \Lambda'^2 N \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{2,0}^{[0,0]'} \left(\frac{p+q}{2} + Q \right) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{[0,0]'} \left(\frac{p+q}{2} + Q, \frac{p-q}{2} - Q, -p \right) \\
 &\quad \tilde{G}_{2,0}^{[0,0]'} \left(\frac{p-q}{2} - Q \right) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{[0,0]'} \left(\frac{q-p}{2} + Q, \frac{p+q}{2} - Q, -q \right) \tilde{G}_{2,0}^{[0,0]'} \left(\frac{p+q}{2} - Q \right) \\
 &= N i g_0 \Lambda'^2 \left(g_0 \Lambda'^2 \right)^2 K, \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

mit dem zu lösenden Integral

$$K = \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(\left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{01} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p-q}{2} - Q \right)^2 + \sigma_{01} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 + \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}.$$

Wir fassen in K nun zuerst die äußeren beiden Faktoren durch eine Feynman-Parametrisierung mit y und dann die verbleibenden zwei Faktoren durch eine Feynman-Parametrisierung mit z zusammen:

$$K = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{2z}{\left[\left(\frac{p-q}{2} - Q \right)^2 + \sigma_{01} \Lambda^2 - 2(p+q) Qyz + 2p \left(\frac{q}{2} + Q \right) z \right]^3}.$$

Nach einer Verschiebung des Integrationsimpulses

$$\left(Q - \frac{p-q}{2} - (p+q)yz + pz \right)^2 \longrightarrow Q^2$$

kann man die Q -Integration nach (A.2) durchführen und erhält

$$K = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{z}{4\pi} \frac{1}{\left[-(pz(y-1) + qyz)^2 - (p-q)(pz(y-1) + qyz) + \sigma_{01} \Lambda^2 + pqz \right]^2}.$$

Das störende Nennerquadrat verschwindet, wenn man den Integranden als Ableitung nach $\sigma_{01} \Lambda^2$ schreibt. Nach der Substitution von y durch $x = yz$ erhält man

$$K = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} \right) \int_0^1 dz \int_0^z dx \frac{1}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{D.2})$$

mit

$$a = -(p+q)^2, \quad (\text{D.3})$$

$$b = (p+q)^2 z + (p^2 - q^2)(z-1), \quad (\text{D.4})$$

$$c = p^2 z(1-z) + \sigma_{01} \Lambda^2. \quad (\text{D.5})$$

Die Integration über x führt man nach (A.8) durch; mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} -\diamond &= -4ac + b^2 \\ &= 4(p+q)^2 (-p^2 z^2 + p^2 z + \sigma_{01} \Lambda^2) + (p+q)^4 z^2 + 2(p+q)^2 (p^2 - q^2) z^2 \\ &\quad - 2(p+q)^2 (p^2 - q^2) z + (p^2 - q^2)^2 (z^2 - 2z + 1) \\ &= \Delta z^2 + ez + f, \end{aligned}$$

mit

$$\Delta = (p+q)^4 + p^4 + q^4 - 2(p+q)^2 p^2 - 2(p+q)^2 q^2 - 2p^2 q^2, \quad (\text{D.6})$$

$$e = 2(p+q)^2 (p^2 + q^2) - 2(p^2 - q^2)^2, \quad (\text{D.7})$$

$$f = 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2 + (p^2 - q^2)^2 \quad (\text{D.8})$$

erhält man

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} \right) \int_0^1 dz \frac{1}{\sqrt{\Delta z^2 + ez + f}} \\
&\cdot \left\{ \ln \left(-(p+q)^2 z + (p^2 - q^2)(z-1) - \sqrt{\Delta z^2 + ez + f} \right) \right. \\
&\quad + \ln \left((p+q)^2 z + (p^2 - q^2)(z-1) + \sqrt{\Delta z^2 + ez + f} \right) \\
&\quad - \ln \left(-(p+q)^2 z + (p^2 - q^2)(z-1) + \sqrt{\Delta z^2 + ez + f} \right) \\
&\quad \left. - \ln \left((p+q)^2 z + (p^2 - q^2)(z-1) - \sqrt{\Delta z^2 + ez + f} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Für den Fall $\Delta \neq 0$ löst man das verbleibende Integral mit Hilfe der Euler-Substitution [25]. Dabei wird z durch

$$t = \pm \sqrt{\Delta z^2 + ez + f} + \sqrt{\Delta} z + \frac{e}{2\sqrt{\Delta}}$$

substituiert. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2t\sqrt{\Delta}} \left(\left(t - \frac{e}{2\sqrt{\Delta}} \right)^2 - f \right), \\
\pm \sqrt{\Delta z^2 + ez + f} &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \left(f - \frac{e^2}{4\Delta} \right) \right), \\
\frac{dz}{\sqrt{\Delta z^2 + ez + f}} &= \pm \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}}.
\end{aligned}$$

Die neuen Integrationsgrenzen hängen vom Vorzeichen vor der Wurzel ab, man erhält für sie:

$$+ : \quad \tilde{t}_0 = -\sqrt{f} + \frac{e}{2\sqrt{\Delta}}, \quad (\text{D.9})$$

$$\tilde{t}_1 = -\sqrt{\Delta + e + f} + \sqrt{\Delta} + \frac{e}{2\sqrt{\Delta}}, \quad (\text{D.10})$$

$$- : \quad \tilde{t}'_0 = \sqrt{f} + \frac{e}{2\sqrt{\Delta}}, \quad (\text{D.11})$$

$$\tilde{t}'_1 = \sqrt{\Delta + e + f} + \sqrt{\Delta} + \frac{e}{2\sqrt{\Delta}}. \quad (\text{D.12})$$

Die Argumente der Logarithmen lauten

$$g_i z + h \pm \sqrt{\Delta z^2 + ez + f}, \quad i = 1, 2$$

$$\text{mit } g_1 = (p+q)^2 + (p^2 - q^2), \quad (\text{D.13})$$

$$g_2 = -(p+q)^2 + (p^2 - q^2), \quad (\text{D.14})$$

$$h = (q^2 - p^2), \quad (\text{D.15})$$

sie faktorisieren zu

$$g_i z + h \pm \sqrt{\Delta z^2 + e z + f} = \frac{1}{t} \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} (t - t_1^i) (t - t_2^i) \quad (\text{D.16})$$

mit

$$t_{1,2}^i = \frac{g_i e - 2\Delta h}{2\sqrt{\Delta} (g_i + \sqrt{\Delta})} \pm \sqrt{\left(\frac{g_i e - 2\Delta h}{2\sqrt{\Delta} (g_i + \sqrt{\Delta})} \right)^2 + \frac{\sqrt{\Delta} - g_i}{\sqrt{\Delta} + g_i} \left(\frac{e^2}{4\Delta} - f \right)}. \quad (\text{D.17})$$

Insgesamt ergibt sich mit der Euler-Substitution

$$K = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} \right) \left\{ -\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} \ln \left[\frac{1}{t} \frac{g_2 + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} (t - t_1^2) (t - t_2^2) \right] \right. \\ + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} \ln \left[\frac{1}{t} \frac{g_1 + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} (t - t_1^1) (t - t_2^1) \right] \\ - \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} \ln \left[\frac{1}{t} \frac{g_2 + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} (t - t_1^2) (t - t_2^2) \right] \\ \left. + \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} \ln \left[\frac{1}{t} \frac{g_1 + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} (t - t_1^1) (t - t_2^1) \right] \right\}.$$

Wie man leicht mit (D.9) bis (D.12) nachrechnen kann, gilt:

$$\tilde{t}_1 \tilde{t}_1^i = \tilde{t}_0 \tilde{t}_0^i = \frac{e^2}{4\Delta} - f. \quad (\text{D.18})$$

Die Integrationen über die Terme

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} \ln \left(\frac{1}{t} \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right)$$

ergeben damit keinen Beitrag und für den Rest des Integrals erhält man

$$K = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} \right) \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} [\ln(t - t_1^1) + \ln(t - t_2^1) - \ln(t - t_1^2) - \ln(t - t_2^2)] \\ + \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} \right) \int_{\tilde{t}'_0}^{\tilde{t}'_1} \frac{dt}{t\sqrt{\Delta}} [\ln(t - t_1^1) + \ln(t - t_2^1) - \ln(t - t_1^2) - \ln(t - t_2^2)].$$

Die folgende Substitution führt man durch, um die Integralgrenzen 0 und 1 zu erhalten, dann kann man Formel (A.9) anwenden:

$$s = \frac{t - \tilde{t}_0}{\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{t - \tilde{t}'_0}{\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0}.$$

Damit ergibt sich für K der Ausdruck:

$$K = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} \right) \int_0^1 ds \\ \left[\frac{\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0}{(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0)s + \tilde{t}_0} \left\{ \ln((\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0)s + \tilde{t}_0 - t_1^1) + \ln((\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0)s + \tilde{t}_0 - t_2^1) \right. \right. \\ \left. \left. - \ln((\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0)s + \tilde{t}_0 - t_1^2) - \ln((\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0)s + \tilde{t}_0 - t_2^2) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0}{(\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0)s + \tilde{t}'_0} \left\{ \ln((\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0)s + \tilde{t}'_0 - t_1^1) + \ln((\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0)s + \tilde{t}'_0 - t_2^1) \right. \right. \\ \left. \left. - \ln((\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0)s + \tilde{t}'_0 - t_1^2) - \ln((\tilde{t}'_1 - \tilde{t}'_0)s + \tilde{t}'_0 - t_2^2) \right\} \right].$$

Bei der verbleibenden Integration über s benutzt man Formel (A.9). Wegen (D.18) kompensieren sich die Logarithmusterme:

$$K = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} \right) \left\{ -Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_1}{t_1^1} \right) + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_0}{t_1^1} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_1}{t_2^1} \right) + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_0}{t_2^1} \right) \right. \\ + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_1}{t_1^2} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_0}{t_1^2} \right) + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_1}{t_2^2} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}_0}{t_2^2} \right) \\ - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_1}{t_1^1} \right) + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_0}{t_1^1} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_1}{t_2^1} \right) + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_0}{t_2^1} \right) \\ \left. + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_1}{t_1^2} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_0}{t_1^2} \right) + Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_1}{t_2^2} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{t}'_0}{t_2^2} \right) \right\}.$$

Es bleibt die Differentiation nach $\sigma_{01}\Lambda^2$ durchzuführen. Mit

$$\left(-\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\right) Li_2\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(1 - \frac{a}{b}\right) \left\{ \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}a\right) \frac{1}{a} - \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}b\right) \frac{1}{b} \right\}$$

erhält man

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} & \left\{ \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}_1\right) \frac{1}{\tilde{t}_1} \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_2^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_2^3}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_1^1}\right)} + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}_0\right) \frac{1}{\tilde{t}_0} \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_1^2}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_2^3}\right)} \right. \\ & + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}'_1\right) \frac{1}{\tilde{t}'_1} \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_2^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_2^3}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_1^1}\right)} + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}'_0\right) \frac{1}{\tilde{t}'_0} \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_1^2}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_2^3}\right)} \\ & + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}t_1^1\right) \frac{1}{t_1^1} \ln \frac{\left(1 - \frac{t_1^1}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{t_1^1}{t_1^1}\right)}{\left(1 - \frac{t_1^1}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{t_1^1}{t_1^1}\right)} + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}t_2^1\right) \frac{1}{t_2^1} \ln \frac{\left(1 - \frac{t_2^1}{t_2^2}\right) \left(1 - \frac{t_2^1}{t_2^3}\right)}{\left(1 - \frac{t_2^1}{t_2^2}\right) \left(1 - \frac{t_2^1}{t_2^3}\right)} \\ & \left. + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}t_1^2\right) \frac{1}{t_1^2} \ln \frac{\left(1 - \frac{t_1^2}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{t_1^2}{t_1^1}\right)}{\left(1 - \frac{t_1^2}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{t_1^2}{t_1^1}\right)} + \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}t_2^2\right) \frac{1}{t_2^2} \ln \frac{\left(1 - \frac{t_2^2}{t_2^2}\right) \left(1 - \frac{t_2^2}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{t_2^2}{t_2^2}\right) \left(1 - \frac{t_2^2}{t_2^2}\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Betrachten wir die ersten vier Summanden dieses Ausdrucks. Mit (D.6, D.7, D.8, D.9, D.10, D.11, D.12) ergibt sich

$$A_1 := \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}'_1\right) \frac{1}{\tilde{t}'_1} = \frac{4\sqrt{\Delta}(p+q)^2}{(\Delta+e+f)2\sqrt{\Delta} + (2\Delta+e)\sqrt{\Delta+e+f}}, \quad (\text{D.20})$$

$$A_2 := \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}_1\right) \frac{1}{\tilde{t}_1} = \frac{4\sqrt{\Delta}(p+q)^2}{(\Delta+e+f)2\sqrt{\Delta} - (2\Delta+e)\sqrt{\Delta+e+f}}, \quad (\text{D.21})$$

$$A_3 := \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}_0\right) \frac{1}{\tilde{t}_0} = \frac{4\sqrt{\Delta}(p+q)^2}{2f\sqrt{\Delta} - e\sqrt{f}}, \quad (\text{D.22})$$

$$A_4 := \left(\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2}\tilde{t}'_0\right) \frac{1}{\tilde{t}'_0} = \frac{4\sqrt{\Delta}(p+q)^2}{2f\sqrt{\Delta} + e\sqrt{f}}, \quad (\text{D.23})$$

und die Logarithmusterme liefern:

$$\begin{aligned}
A_2 \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_1^2}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_2^2}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_1}{t_1^2}\right)} &= A_2 \ln \frac{(t_1^2 - \tilde{t}_1) (t_2^2 - \tilde{t}_1) t_1^1 t_2^1}{(t_1^1 - \tilde{t}_1) (t_2^1 - \tilde{t}_1) t_1^2 t_2^2}, \\
A_1 \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_1^2}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_2^2}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_1}{t_1^2}\right)} &= A_1 \ln \frac{(t_1^2 - \tilde{t}'_1) (t_2^2 - \tilde{t}'_1) t_1^1 t_2^1}{(t_1^1 - \tilde{t}'_1) (t_2^1 - \tilde{t}'_1) t_1^2 t_2^2}, \\
A_3 \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_2^1}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_2^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}_0}{t_1^1}\right)} &= A_3 \ln \frac{(t_1^1 - \tilde{t}_0) (t_2^1 - \tilde{t}_0) t_1^2 t_2^2}{(t_1^2 - \tilde{t}_0) (t_2^2 - \tilde{t}_0) t_1^1 t_2^1}, \\
A_4 \ln \frac{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_1^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_2^1}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_2^1}\right) \left(1 - \frac{\tilde{t}'_0}{t_1^1}\right)} &= A_4 \ln \frac{(t_1^1 - \tilde{t}'_0) (t_2^1 - \tilde{t}'_0) t_1^2 t_2^2}{(t_1^2 - \tilde{t}'_0) (t_2^2 - \tilde{t}'_0) t_1^1 t_2^1}.
\end{aligned}$$

Die gemeinsamen Faktoren $\frac{t_1^2 t_2^2}{t_1^1 t_2^1}$ kompensieren sich bei der Summation dieser Terme gerade, weil für die Vorfaktoren nach (D.20, D.21, D.22, D.23) gilt:

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 = \frac{16\Delta (p+q)^2}{4\Delta f - e^2}. \quad (\text{D.24})$$

Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}
t_1^i t_2^i &= \frac{g_i - \sqrt{\Delta}}{g_i + \sqrt{\Delta}} \left(\frac{e^2}{4\Delta} - f \right) = \frac{g_i - \sqrt{\Delta}}{g_i + \sqrt{\Delta}} \tilde{t}_0 \tilde{t}'_0 \\
&= \frac{g_i - \sqrt{\Delta}}{g_i + \sqrt{\Delta}} \tilde{t}_1 \tilde{t}'_1,
\end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$t_1^i + t_2^i = \frac{g_i e - 2\Delta h}{\sqrt{\Delta} (g_i + \sqrt{\Delta})}, \quad (\text{D.26})$$

die man leicht mit (D.9, D.10, D.11, D.12, D.17) nachrechnen kann, ergeben sich für die verbleibenden Logarithmusargumente die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\ln \frac{(t_1^1 - \tilde{t}_0) (t_2^1 - \tilde{t}_0)}{(t_1^2 - \tilde{t}_0) (t_2^2 - \tilde{t}_0)} &= \ln \frac{(t_1^1 - \tilde{t}'_0) (t_2^1 - \tilde{t}'_0)}{(t_1^2 - \tilde{t}'_0) (t_2^2 - \tilde{t}'_0)} = \ln \frac{g_2 + \sqrt{\Delta}}{g_1 + \sqrt{\Delta}}, \\
\ln \frac{(t_1^2 - \tilde{t}_1) (t_2^2 - \tilde{t}_1)}{(t_1^1 - \tilde{t}_1) (t_2^1 - \tilde{t}_1)} &= \ln \left(\frac{g_1 + \sqrt{\Delta} g_2 - \sqrt{\Delta + e + f + h}}{g_2 + \sqrt{\Delta} g_1 - \sqrt{\Delta + e + f + h}} \right), \\
\ln \frac{(t_1^2 - \tilde{t}'_1) (t_2^2 - \tilde{t}'_1)}{(t_1^1 - \tilde{t}'_1) (t_2^1 - \tilde{t}'_1)} &= \ln \left(\frac{g_1 + \sqrt{\Delta} g_2 + \sqrt{\Delta + e + f + h}}{g_2 + \sqrt{\Delta} g_1 + \sqrt{\Delta + e + f + h}} \right).
\end{aligned}$$

Mit demselben Argument wie oben, der Beziehung (D.25) zwischen den Vorfaktoren, kann man begründen, daß sich die Faktoren $\frac{g_2 + \sqrt{d}}{g_1 + \sqrt{d}}$ aller Logarithmusterme kompensieren.

Mit

$$\sqrt{\Delta + e + f} = \sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}, \quad (\text{D.27})$$

$$g_2 + h = -(g_1 + h) = -(p+q)^2 \quad (\text{D.28})$$

ergibt sich für den übrigbleibenden Term

$$K = (A_2 - A_1) \ln \frac{(p+q)^2 + \sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-(p+q)^2 + \sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}. \quad (\text{D.29})$$

Mit

$$A_2 - A_1 = 4\sqrt{\Delta} (p+q)^2 \frac{1}{\sqrt{\Delta + e + f}} \frac{2(2\Delta + e)}{4\Delta f - e^2}$$

(nach (D.22, D.21)) und

$$2\Delta + e = 2(p+q)^2 ((p+q)^2 - p^2 - q^2)$$

folgt

$$A_2 - A_1 = \frac{\sqrt{\Delta} (p+q)^2 ((p+q)^2 - p^2 - q^2)}{((p+q)^2 p^2 q^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2) \sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}. \quad (\text{D.30})$$

Im folgenden bringen wir die letzten vier Summanden von (D.19) auf eine ähnliche Form. Sie lauten:

$$\begin{aligned} K_2 = & \left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_1^1 \right) \frac{1}{t_1^1} \ln \frac{(t_1^1 - \tilde{t}_1) (t_1^1 - \tilde{t}'_1)}{(t_1^1 - \tilde{t}_0) (t_1^1 - \tilde{t}'_0)} + \left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_2^1 \right) \frac{1}{t_2^1} \ln \frac{(t_2^1 - \tilde{t}_1) (t_2^1 - \tilde{t}'_1)}{(t_2^1 - \tilde{t}_0) (t_2^1 - \tilde{t}'_0)} \\ & - \left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_1^2 \right) \frac{1}{t_1^2} \ln \frac{(t_1^2 - \tilde{t}_1) (t_1^2 - \tilde{t}'_1)}{(t_1^2 - \tilde{t}_0) (t_1^2 - \tilde{t}'_0)} - \left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_2^2 \right) \frac{1}{t_2^2} \ln \frac{(t_2^2 - \tilde{t}_1) (t_2^2 - \tilde{t}'_1)}{(t_2^2 - \tilde{t}_0) (t_2^2 - \tilde{t}'_0)}. \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Mit

$$\tilde{t}_0 \tilde{t}'_0 = \tilde{t}_1 \tilde{t}'_1 = \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{g_i - \sqrt{\Delta}} t_1^i t_2^i, \quad (\text{D.32})$$

$$\tilde{t}_0 + \tilde{t}'_0 = \frac{e}{\sqrt{\Delta}}, \quad (\text{D.33})$$

$$\tilde{t}_1 + \tilde{t}'_1 = 2\sqrt{\Delta} + \frac{e}{\sqrt{\Delta}} \quad (\text{D.34})$$

(vgl. (D.25, D.9, D.10, D.11, D.12)) ergeben sich für die Argumente der Logarithmen aus (D.31) die Ausdrücke

$$\ln \frac{(t_1^i - \tilde{t}_1)(t_1^i - \tilde{t}'_1)}{(t_1^i - \tilde{t}_0)(t_1^i - \tilde{t}'_0)} = \ln \frac{t_1^i + \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{g_i - \sqrt{\Delta}} t_2^i - \frac{e}{\sqrt{\Delta}} - 2\sqrt{\Delta}}{t_1^i + \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{g_i - \sqrt{\Delta}} t_2^i - \frac{e}{\sqrt{\Delta}}}, \quad (\text{D.35})$$

$$\ln \frac{(t_2^i - \tilde{t}_1)(t_2^i - \tilde{t}'_1)}{(t_2^i - \tilde{t}_0)(t_2^i - \tilde{t}'_0)} = \ln \frac{t_2^i + \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{g_i - \sqrt{\Delta}} t_1^i - \frac{e}{\sqrt{\Delta}} - 2\sqrt{\Delta}}{t_2^i + \frac{g_i + \sqrt{\Delta}}{g_i - \sqrt{\Delta}} t_1^i - \frac{e}{\sqrt{\Delta}}}. \quad (\text{D.36})$$

Mit (D.17) gilt

$$t_1^1 + \frac{g_1 + \sqrt{\Delta}}{g_1 - \sqrt{\Delta}} t_2^1 = \frac{g_1}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{g_1 e - 2\Delta h}{g_1^2 - \Delta} \right) - \sqrt{\left(\frac{g_1 e - 2\Delta h}{g_1^2 - \Delta} \right)^2 - \frac{1}{g_1^2 - \Delta} (e^2 - 4\Delta f)},$$

und mit den Beziehungen

$$g_1^2 - \Delta = 4p^2 (p + q)^2, \quad (\text{D.37})$$

$$g_2^2 - \Delta = 4q^2 (p + q)^2, \quad (\text{D.38})$$

$$g_1 e - 2\Delta h = 4p^2 (p + q)^2 (-p^2 + q^2 + (p + q)^2), \quad (\text{D.39})$$

$$g_2 e - 2\Delta h = 4q^2 (p + q)^2 (-p^2 + q^2 - (p + q)^2), \quad (\text{D.40})$$

$$e^2 - 4\Delta f = 16 (p + q)^2 ((p + q)^2 p^2 q^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2), \quad (\text{D.41})$$

$$-g_2 = -p^2 + q^2 + (p + q)^2, \quad (\text{D.42})$$

die man direkt mit (D.6, D.7, D.8) aus (D.13, D.14, D.15) berechnen kann, ergibt sich

$$t_1^1 + \frac{g_1 + \sqrt{\Delta}}{g_1 - \sqrt{\Delta}} t_2^1 = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{\Delta}} - \sqrt{g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}. \quad (\text{D.43})$$

Hierzu analog kann man nachrechnen, daß gilt:

$$t_2^1 + \frac{g_1 + \sqrt{\Delta}}{g_1 - \sqrt{\Delta}} t_1^1 = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}, \quad (\text{D.44})$$

$$t_1^2 + \frac{g_2 + \sqrt{\Delta}}{g_2 - \sqrt{\Delta}} t_2^2 = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{\Delta}} - \sqrt{g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}, \quad (\text{D.45})$$

$$t_2^2 + \frac{g_2 + \sqrt{\Delta}}{g_2 - \sqrt{\Delta}} t_1^2 = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{\Delta}} - \sqrt{g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}. \quad (\text{D.46})$$

Mit

$$\Delta + e = -g_1 g_2 \quad (\text{D.47})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\Delta + e}{\sqrt{\Delta}} - \frac{e}{\sqrt{\Delta}} &= \sqrt{\Delta}, \\ \frac{\Delta + e}{\sqrt{\Delta}} - \frac{e}{\sqrt{\Delta}} - 2\sqrt{\Delta} &= -\sqrt{\Delta} \end{aligned}$$

kann man die Terme aus (D.31) schreiben als:

$$\begin{aligned} K_2 &= \left(\left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_1^1 \right) \frac{1}{t_1^1} - \left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_2^1 \right) \frac{1}{t_2^1} \right) \ln \frac{\sqrt{g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)} - \sqrt{\Delta}} \\ &\quad - \left(\left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_2^2 \right) \frac{1}{t_2^2} - \left(\frac{d}{d\sigma_{01} \Lambda^2} t_1^2 \right) \frac{1}{t_1^2} \right) \ln \frac{\sqrt{g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)} - \sqrt{\Delta}}. \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

Es gilt (man beachte wieder (D.17)):

$$\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} t_{1,2}^1 = \pm \frac{4\sqrt{\Delta} (p+q)^2}{(g_1 + \sqrt{\Delta}) \sqrt{g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}},$$

$$\frac{d}{d\sigma_{01}\Lambda^2} t_{1,2}^2 = \pm \frac{4\sqrt{\Delta} (p+q)^2}{(g_2 + \sqrt{\Delta}) \sqrt{g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right)}},$$

und mit

$$\frac{1}{t_1^1} + \frac{1}{t_2^1} = \frac{g_1 e - 2\Delta h}{\sqrt{\Delta} (\sqrt{\Delta} - g_1) \left(\frac{e^2}{4\Delta} - f \right)},$$

$$\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} \right) = -\frac{g_2 e - 2\Delta h}{\sqrt{\Delta} (\sqrt{\Delta} - g_2) \left(\frac{e^2}{4\Delta} - f \right)}$$

ergibt sich mit (D.48) für K_2 :

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{4(p+q)^2}{(g_1 + \sqrt{\Delta}) \sqrt{G_2}} \frac{g_1 e - 2\Delta h}{(\sqrt{\Delta} - g_1) \left(\frac{e^2}{4\Delta} - f \right)} \ln \frac{\sqrt{G_2} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{\Delta}} \\ &\quad - \frac{4(p+q)^2}{(g_2 + \sqrt{\Delta}) \sqrt{G_1}} \frac{g_2 e - 2\Delta h}{(\sqrt{\Delta} - g_2) \left(\frac{e^2}{4\Delta} - f \right)} \ln \frac{\sqrt{G_1} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{\Delta}} \\ &= \frac{\Delta (p^2 - q^2 - (p+q)^2)}{\left((p+q)^2 p^2 q^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2 \right) \sqrt{G_2}} \ln \frac{\sqrt{G_2} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{\Delta}} \\ &\quad + \frac{\Delta (q^2 - p^2 - (p+q)^2)}{\left((p+q)^2 p^2 q^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2 \right) \sqrt{G_1}} \ln \frac{\sqrt{G_1} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{\Delta}} \end{aligned} \tag{D.49}$$

$$\text{mit } G_1 = g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right),$$

$$G_2 = g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right).$$

Mit

$$g_1^2 - 4(p+q)^2 p^2 = g_2^2 - 4(p+q)^2 q^2 = \Delta$$

erhält man

$$G_1 = g_1^2 - 4 \left((p+q)^2 p^2 - \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right) = \Delta + 4 \frac{\Delta}{q^2} \sigma_{01} \Lambda^2,$$

$$G_2 = g_2^2 - 4 \left((p+q)^2 q^2 - \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2 \right) = \Delta + 4 \frac{\Delta}{p^2} \sigma_{01} \Lambda^2,$$

und damit kann man (D.49) schreiben als

$$K = \frac{\sqrt{\Delta} q^2 (q^2 - p^2 - (p+q)^2)}{((p+q)^2 p^2 q^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2) \sqrt{q^4 + 4q^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \ln \frac{q^2 + \sqrt{q^4 + 4q^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-q^2 + \sqrt{q^4 + 4q^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}$$

$$+ \frac{\sqrt{\Delta} p^2 (p^2 - q^2 - (p+q)^2)}{((p+q)^2 p^2 q^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2) \sqrt{p^4 + 4p^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}.$$

Zusammen mit (D.29) und (D.30) erhält man für den gesamten Ausdruck K die in allen drei Impulsen p, q und $p+q$ symmetrische Form

$$K = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p^2 q^2 (p+q)^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2}$$

$$\left\{ \frac{(p+q)^2 ((p+q)^2 - p^2 - q^2)}{\sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \ln \frac{(p+q)^2 + \sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-(p+q)^2 + \sqrt{(p+q)^4 + 4(p+q)^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \right.$$

$$+ \frac{p^2 (p^2 - q^2 - (p+q)^2)}{\sqrt{p^4 + 4p^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-p^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}$$

$$\left. + \frac{q^2 (q^2 - p^2 - (p+q)^2)}{\sqrt{q^4 + 4q^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \ln \frac{q^2 + \sqrt{q^4 + 4q^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-q^2 + \sqrt{q^4 + 4q^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \right\}, \quad (\text{D.50})$$

wobei Δ nach (D.6) die in allen drei Argumenten symmetrische Dreiecksfunktion ist.

Mit der uns schon aus Anhang B.2 bekannten Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{k^4 + 4k^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \ln \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + 4k^2 \sigma_{01} \Lambda^2}}{-k^2 + \sqrt{k^4 + 4k^2 \sigma_{01} \Lambda^2}} \approx \frac{1}{k^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2} \ln \frac{k^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2}{\sigma_{01} \Lambda^2} + O\left(\frac{1, \ln p^2}{p^6}\right)$$

erhält man für den Vertex die Form

$$\tilde{\Gamma}_{0,3}(p+q, p, q) = \frac{N i g_0 \Lambda'^2 (g_0 \Lambda')^2}{p^2 q^2 (p+q)^2 - \Delta \sigma_{01} \Lambda^2} \frac{1}{4\pi}$$

$$\cdot \left\{ \frac{p^2 (p^2 - q^2 - (p+q)^2)}{p^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2} \ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2}{\sigma_{01} \Lambda^2} + \text{in } p, q \text{ und } p+q \text{ zyklische Terme} \right\}.$$

(D.51)

Mit dem endlichen $1/g^2$ -Mechanismus für große N ,

$$\ln \frac{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\sigma_{01}\Lambda^2} \sim \left(\frac{N g_0^2}{4\pi} \right)^{-1} + O(g_0^0),$$

erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,3}(p+q, p, q) &= \frac{ig_0\Lambda'^6}{p^2q^2(p+q)^2 - \Delta\sigma_{01}\Lambda^2} \\ &\cdot \left\{ \frac{p^2(p^2 - q^2 - (p+q)^2)}{p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2} + \text{in } p, q \text{ und } p+q \text{ zyklische Terme} \right\} \\ &= \frac{ig_0\Lambda'^6}{(p^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)(q^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)((p+q)^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2)} \\ &\cdot \frac{-p^2q^2(p+q)^2(p^2 + q^2 + (p+q)^2 + 12\sigma_{01}\Lambda^2) + \Delta 4(\sigma_{01}\Lambda^2)^2}{(p^2q^2(p+q)^2 - \Delta\sigma_{01}\Lambda^2)}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Residuum dieses Terms an der Stelle $q^2 = -2\sigma_{01}\Lambda^2$. In der folgenden Rechnung benutzen wir die Abkürzungen $p+q = k$ und $\sigma_{01}\Lambda^2 = \mu$. Das Residuum lautet

$$R = \frac{-ig_0\Lambda'^6}{(p^2 + 2\mu)(k^2 + 2\mu)} K$$

$$\begin{aligned} \text{mit } K &= \frac{2\mu p^2 k^2 (p^2 + k^2 + 10\mu) + 4\mu^2 \left((p^2 - k^2)^2 + 4\mu^2 + 4\mu(p^2 + k^2) \right)}{2\mu p^2 k^2 + \mu \left((p^2 - k^2)^2 + 4\mu^2 + 4\mu(p^2 + k^2) \right)} \\ &= \frac{2p^2 k^2 (p^2 + k^2 + 10\mu) + 4\mu (p^2 - k^2)^2}{2p^2 k^2 + (p^2 - k^2)^2 + 4\mu^2 + 4\mu(p^2 + k^2)}. \end{aligned}$$

Den Ausdruck für K formen wir um, damit man sein asymptotisches Verhalten für große Impulse p und k erkennt. Dabei vernachlässigen wir Terme der Ordnung $(Impuls)^{-4}$. Mit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2p^2 k^2 + (p^2 - k^2)^2 + 4\mu^2 + 4\mu(p^2 + k^2)} = \\ &= \frac{1}{2p^2 k^2 + (p^2 - k^2)^2} \left(1 - \frac{4\mu^2 + 4\mu(p^2 + k^2)}{2p^2 k^2 + (p^2 - k^2)^2 + 4\mu^2 + 4\mu(p^2 + k^2)} \right) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2p^2k^2(p^2+k^2+10\mu)+4\mu(p^2-k^2)^2}{2p^2k^2+(p^2-k^2)^2} \\
&\quad - \frac{4\mu(p^2+k^2)^2 2p^2k^2}{(2p^2k^2+(p^2-k^2)^2)(2p^2k^2+(p^2-k^2)^2+4\mu^2+4\mu(p^2+k^2))} \\
&= \frac{2p^2k^2(p^2+k^2)+12\mu p^2k^2+4\mu(p^4+k^4)}{2p^2k^2+(p^2-k^2)^2} \\
&\quad - 4\mu(p^2+k^2)^2 \left(1 - \frac{(p^2-k^2)^2}{2p^2k^2+(p^2-k^2)^2} \right) \frac{1}{2p^2k^2+(p^2-k^2)^2} \\
&= \frac{2p^2k^2(p^2+k^2)+4\mu p^2k^2+4\mu \frac{(p^2+k^2)^2(p^2-k^2)^2}{2p^2k^2+(p^2-k^2)^2}}{2p^2k^2+(p^2-k^2)^2}.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß man im Grenzfall $p \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ mit $\frac{p}{k} \rightarrow 1$ für K die Größe $p^2+k^2+2\mu = p^2+(p+q)^2+2\sigma_{01}\Lambda^2$ erhält.

Der Ansatz

$$\frac{-ig_0\Lambda'^6(p^2+k^2+q^2+4\sigma_{01}\Lambda^2)}{(p^2+\mu_{11}\Lambda^2)(q^2+\mu_{11}\Lambda^2)(k^2+\mu_{11}\Lambda^2)} = \frac{-ig_0\Lambda'^6(p^2+k^2+q^2+2\mu_{11}\Lambda^2)}{(p^2+\mu_{11}\Lambda^2)(q^2+\mu_{11}\Lambda^2)(k^2+\mu_{11}\Lambda^2)}$$

hat dasselbe Residuum ($2\sigma_{01} = \mu_{11}$) und ist daher für unsere Zwecke geeignet.

Anhang E

Rechnungen zum Φ -Feld-Propagator

E.1 Divergente Anteile von B_0

Wir berechnen die divergenten Anteile des Schleifenintegrals

$$\begin{aligned}
 I_{B_0}(p^2) &= p \rightarrow \text{---} \left(\begin{array}{c} \frac{p}{2} + Q \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \frac{p}{2} - Q \end{array} \right) \text{---} p \\
 &= -ig_0 \Lambda'^2 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{\text{conn}[1,0]} \left(\frac{p}{2} - Q \right) \tilde{G}'_{2,0}{}^{[1,0]} \left(\frac{p}{2} + Q \right) (-ig_0 \Lambda^2) \\
 &\quad \cdot \frac{B_0 \left(p^2, \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2, \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 \right)}{\left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \tau_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + \mu_{11} \Lambda^2 \right)},
 \end{aligned}$$

die einen $1/g^2$ -Faktor ausbilden. Mit

$$\begin{aligned}
 B_0 \left(p^2, \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2, \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 \right) &= \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + c_1 \Lambda^2 (p^2 - \tau_{11} \Lambda^2) \\
 &\quad + c_2 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + c_3 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + c_5 \Lambda^4,
 \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{0,2}^{\text{conn}[1,0]} \left(\frac{p}{2} - Q \right) = \frac{\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2}{\Lambda'^4},$$

$$\tilde{G}'_{2,0}{}^{[1,0]} \left(\frac{p}{2} + Q \right) = \frac{\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \tau_{11} \Lambda^2}{\left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right)}$$

erkennt man, daß die divergenten Anteile des Integrals in folgendem Ausdruck enthalten sind:

$$\begin{aligned}
I_{B_0}^{div}(p^2) &= -g_0^2 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{p}{2} - Q\right)^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2}{\left(\left(\frac{p}{2} - Q\right)^2 + \mu_{11}\Lambda^2\right)} \\
&\quad \cdot \frac{\left(\frac{p}{2} + Q\right)^2 \left(\frac{p}{2} - Q\right)^2 + c_2\Lambda^2 Q^2 + c_3\Lambda^2 Q^2}{\left(\left(\frac{p}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2\right)} \\
&= -g_0^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \\
&\quad \cdot \frac{[(Q - py)^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2] [(Q - py)^2 (Q - py + p)^2 + c_2\Lambda^2 Q^2 + c_3\Lambda^2 Q^2]}{[Q^2 + p^2 y(1 - y) + \mu_{11}\Lambda^2 + (\sigma_{11} - \mu_{11})\Lambda^2 y + (\sigma_{12} - \sigma_{11})\Lambda^2 xy]^3},
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt eine Feynman-Parametrisierung nach (A.1) und eine Verschiebung des Integrationsimpulses durchgeführt haben. Mit Hilfe der Regeln der symmetrischen Integration (A.3) schreiben wir die divergenten Anteile um:

$$\begin{aligned}
I_{B_0}^{div}(p^2) &= -g_0^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \\
&\quad \cdot \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{Q^6 + Q^4 (c_2\Lambda^2 + c_3\Lambda^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2 + 9p^2 y^2 - 6p^2 y + p^2)}{[Q^2 + R^2]^3},
\end{aligned}$$

mit

$$R^2 = P^2 y(1 - y) + \mu_{11}\Lambda^2 + (\sigma_{11} - \mu_{11})\Lambda^2 y + (\sigma_{12} - \sigma_{11})\Lambda^2 xy.$$

Nun führen wir die Impulsintegration in $D = 2 - 2\epsilon$ Dimensionen durch und erhalten:

$$\begin{aligned}
I_{B_0}^{div}(p^2) &= -g_0^2 \nu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \frac{1}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(3)} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\Gamma(4-\epsilon)\Gamma(-1+\epsilon)}{(R^2)^{\epsilon-1}} + (c_2\Lambda^2 + c_3\Lambda^2 + 2\sigma_{01}\Lambda^2 + 9p^2 y^2 - 6p^2 y + p^2) \frac{\Gamma(3-\epsilon)\Gamma(\epsilon)}{(R^2)^\epsilon} \right\}.
\end{aligned}$$

Setzt man den Impuls p^2 auf einen festen Wert $p'^2 = x\Lambda^2$ fest, so kann man R^2 schreiben als $R^2 = K(x, y)\Lambda^2$. Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erhält man dann:

$$\begin{aligned}
I_{B_0}^{div}(p'^2) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-g_0^2 \frac{\nu^{2\epsilon}}{\Lambda^{2\epsilon}} \frac{1}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \right) \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \frac{1}{(K)^\epsilon} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\Gamma(4-\epsilon)}{(-1+\epsilon)} R^2 + (c_2 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2 + 9p^2 y^2 - 6p^2 y + p^2) \Gamma(3-\epsilon) \right\} \\
&= \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -g_0^2 \left(\frac{\nu^2}{\Lambda^2} \right)^\epsilon \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \left(\frac{4\pi}{K} \right)^\epsilon \\
&\quad \left\{ \frac{\Gamma(4-\epsilon)}{(-1+\epsilon)} \left(p'^2 y(1-y) + \mu_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \mu_{11}) \Lambda^2 y + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 xy \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \Gamma(3-\epsilon) \left(c_2 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2 + 9p'^2 y^2 - 6p'^2 y + p'^2 \right) \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi(g^2(\nu), \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \\
&\quad \cdot \left\{ 2 \left(c_2 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2 + 9p'^2 y^2 - 6p'^2 y + p'^2 \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - 6 \left(p'^2 y(1-y) + \mu_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \mu_{11}) \Lambda^2 y + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 xy \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ c_2 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2 - \mu_{11} \Lambda^2 + p'^2 - \sigma_{11} \Lambda^2 - \sigma_{12} \Lambda^2 \right\}.
\end{aligned}$$

E.2 Divergente Anteile von B_1

Hier berechnen wir die divergenten Anteile des Schleifenintegrals

$$\begin{aligned}
I_{B_1}(p^2) &= p \rightarrow \begin{array}{c} \frac{p}{2} + Q \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \\ \frac{p}{2} - Q \\ \leftarrow B_1 \rightarrow \\ p \end{array} \\
&= -ig_0 \Lambda'^2 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{0,2}^{conn[1,0]} \left(\frac{p}{2} - Q \right) \tilde{G}'_{2,0}{}^{[1,0]} \left(\frac{p}{2} + Q \right) (-ig_0 \Lambda^2) \\
&\quad \cdot \frac{B_1 \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2, \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 \right)}{\left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \tau_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + \mu_{11} \Lambda^2 \right)},
\end{aligned}$$

die einen $1/g^2$ -Faktor ausbilden.

Mit

$$\begin{aligned}
B_1 \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2, \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 \right) = & \\
& -\tau_{11} \Lambda^2 \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + c_2 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + c_3 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + c_5 \Lambda^4 \right) \\
& + c_1 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^4 + c_1 \Lambda^2 \tau_{11}'^2 \Lambda^4 + c_4 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^4 + c_3 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 \\
& + c_5 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + c_6 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + c_7 \Lambda^4,
\end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{0,2}^{conn[1,0]} \left(\frac{p}{2} - Q \right) = \frac{\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2}{\Lambda'^4},$$

$$\tilde{G}_{2,0}'^{[1,0]} \left(\frac{p}{2} + Q \right) = \frac{\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \tau_{11} \Lambda^2}{\left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right)}$$

erkennt man, daß die divergenten Anteile des Integrals in folgendem Ausdruck enthalten sind:

$$\begin{aligned}
I_{B_1}^{div} (p^2) = & -g_0^2 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2}{\left(\left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + \mu_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right)} \\
& \cdot \left[-\tau_{11} \Lambda^2 \left(\left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 + c_2 \Lambda^2 Q^2 + c_3 \Lambda^2 Q^2 \right) + c_1 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^4 \right. \\
& \left. + c_4 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^4 + c_3 \Lambda^2 \left(\frac{p}{2} - Q \right)^2 \left(\frac{p}{2} + Q \right)^2 + c_5 \Lambda^2 Q^2 + c_6 \Lambda^2 Q^2 \right].
\end{aligned}$$

Den ersten Teil des Integrals können wir aus der Berechnung des B_0 -Anteils übernehmen:

$$I_{B_1}^{div} = (-\tau_{11} \Lambda^2) I_{B_0}^{div} (p'^2) - K \tag{E.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
K = & -g_0^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{(Q - py)^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2}{(Q^2 + R^2)^3} \\
& \left(c_1 \Lambda^2 (Q - py + p)^4 + c_4 \Lambda^2 (Q - py)^4 + c_3 \Lambda^2 (Q - py + p)^2 (Q - py)^2 \right. \\
& \left. + c_5 \Lambda^2 Q^2 + c_6 \Lambda^2 Q^2 \right),
\end{aligned}$$

$$R^2 = p^2 y (1 - y) + \mu_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \mu_{11}) \Lambda^2 y + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 xy,$$

wobei wir im Ausdruck für K eine Feynman-Parametrisierung und eine Verschiebung des Integrationsimpulses durchgeführt haben. Mit Hilfe der Regeln der symmetrischen Integration (A.3) schreiben wir die divergenten Anteile des Integrals um:

$$K = -g_0^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{Q^6 (c_1 \Lambda^2 + c_4 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2) + Q^4 B}{(Q^2 + R^2)^3}$$

mit

$$B = c_1 \Lambda^2 (9p^2 y^2 - 12p^2 y + 4p^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2) + c_3 \Lambda^2 (9p^2 y^2 - 6p^2 y + p^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2) + c_4 \Lambda^2 (9p^2 y^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2) + c_5 \Lambda^2 + c_6 \Lambda^2.$$

Die Impulsintegration führen wir in $D = 2 - 2\epsilon$ Dimensionen nach (A.2) durch und erhalten:

$$K = -g_0^2 \nu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \frac{1}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon) \Gamma(3)} \cdot \left\{ (c_1 \Lambda^2 + c_4 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2) \frac{\Gamma(4-\epsilon) \Gamma(-1+\epsilon)}{(R^2)^{\epsilon-1}} + B \frac{\Gamma(3-\epsilon) \Gamma(\epsilon)}{(R^2)^\epsilon} \right\}.$$

Setzt man den Impuls p^2 auf einen festen Wert $p'^2 = x\Lambda^2$ fest, so kann man R^2 schreiben als $R^2 = K(x, y) \Lambda^2$. Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -g_0^2 \frac{\nu^{2\epsilon}}{\Lambda^{2\epsilon}} \frac{1}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, y \frac{1}{(K)^\epsilon} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\Gamma(4-\epsilon)}{(-1+\epsilon)} R^2 (c_1 \Lambda^2 + c_4 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2) + B \Gamma(3-\epsilon) \right) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi(g^2(\nu), \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, y \\ &\quad \left\{ -6(c_1 + c_4 + c_3) \Lambda^2 (p'^2 y(1-y) + \mu_{11} \Lambda^2 + (\sigma_{11} - \mu_{11}) \Lambda^2 y + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \Lambda^2 xy) \right. \\ &\quad + 2c_1 \Lambda^2 (9p'^2 y^2 - 12p'^2 y + 4p'^2 + 2\sigma_{01} \Lambda^2) + 2c_4 \Lambda^2 (9p'^2 y + 2\sigma_{01} \Lambda^2) \\ &\quad \left. + 2c_3 \Lambda^2 (9p'^2 y^2 + p'^2 - 6p'^2 y + 2\sigma_{01} \Lambda^2) + 2c_5 \Lambda^2 + 2c_6 \Lambda^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{\beta_0} \left\{ c_1 \Lambda^4 (-\mu_{11} + 2\sigma_{01} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) + c_3 \Lambda^2 (p'^2 + (2\sigma_{01} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + c_4 \Lambda^2 (4p'^2 + (2\sigma_{01} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2) + c_5 \Lambda^2 + c_6 \Lambda^2 \right\}. \end{aligned}$$

Mit (E.1) ergibt sich insgesamt für das zu berechnende Integral der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 I_{B_1}^{div} \left(p'^2 \right) = & -\frac{1}{\beta_0} \left[c_1 \Lambda^4 (2\sigma_{01} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) - c_2 \tau_{11} \Lambda^4 \right. \\
 & + c_3 \Lambda^2 \left(p'^2 + (2\sigma_{01} - \tau_{11} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 \right) \\
 & + c_4 \Lambda^2 \left(4p'^2 + (2\sigma_{01} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 \right) \\
 & \left. + c_5 \Lambda^2 + c_6 \Lambda^2 - \tau_{11} \Lambda^2 \left(p'^2 + (2\sigma_{01} - \mu_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12}) \Lambda^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Anhang F

Berechnung der „entschärften“ zweiten Schleife

F.1 Berechnung der Terme mit Pol und kompensierendem Pol

Wir wollen zunächst den Term

$$I_2^a = (p+q) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{p+q}{2} - Q} B_1 \xrightarrow{\frac{p-q}{2} + Q} \\ \xrightarrow{\frac{p+q}{2} + Q} B_1 \xrightarrow{\frac{p-q}{2} + Q} \end{array} \right] + (p+q) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{p+q}{2} - Q} B_1 \xrightarrow{\frac{p-q}{2} + Q} \\ \xrightarrow{\frac{p+q}{2} + Q} B_1 \xrightarrow{\frac{p-q}{2} + Q} \end{array} \right] \frac{c}{\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2} \quad (\text{F.1})$$

berechnen. Wegen der ähnlichen Struktur kann man beide Terme in einem Schleifenintegral berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2}{\left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2\right)^2} \\ & - \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4} \frac{1}{\left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2\right)} \\ & = \frac{\tau_{11}\Lambda^2 - \left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{12})\Lambda^2}{\left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2\right) (\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4}. \end{aligned}$$

Setzt man die Ansätze

$$\tilde{G}_{0,2}^{[1,0]conn}(p^2) = \frac{p^2 + \mu_{11}\Lambda^2}{\Lambda^4} \quad (\text{F.2})$$

$$\tilde{G}'_{2,0}{}^{[1,0]}(p^2) = \frac{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)}{(p^2 + \sigma_{11}\Lambda^2)(p^2 + \sigma_{12}\Lambda^2)} \quad (\text{F.3})$$

$$\tilde{\Gamma}'_{2,1}{}^{[1,0]}(p^2, q^2, k^2) = B_0(p^2, q^2, k^2) + \frac{1}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2} B_1(q^2, k^2) \quad (\text{F.4})$$

mit

$$B_0(p^2, q^2, k^2) = \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(q^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \cdot (q^2k^2 + c_1\Lambda^2p^2 + c_2\Lambda^2q^2 + c_3\Lambda^2k^2 + c_5\Lambda^4 - c_1\tau_{11}\Lambda^4), \quad (\text{F.5})$$

$$B_1(q^2, k^2) = \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(q^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \cdot \left\{ c_1\Lambda^2q^4 + q^2k^2(c_3 - \tau_{11})\Lambda^2 + q^2(c_5 - \tau_{11}c_2)\Lambda^4 \right. \\ \left. + k^2(c_6 - \tau_{11}c_3)\Lambda^4 + (c_1\tau_{11}^2 - \tau_{11}c_5 + c_7)\Lambda^6 \right\} \quad (\text{F.6})$$

in die Schleifenintegrale (F.1) ein, so erhält man:

$$I = \frac{ig_0\Lambda'^2g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(\left(\frac{p+q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2\right)} \\ \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{p+q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2\right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2\right)} \\ \cdot \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \left\{ -\left(\frac{p-q}{2} + Q\right)^2 + (\tau_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12})\Lambda^2 \right\} \\ \cdot \left\{ c_1\Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q\right)^4 + \left(\frac{p+q}{2} + Q\right)^2 (-\tau_{11}\Lambda^2q^2 - \tau_{11}c_2\Lambda^4 + c_3\Lambda^2q^2 + c_5\Lambda^4) \right. \\ \left. + (c_1\tau_{11}^2\Lambda^2 - \tau_{11}c_3q^2 - \tau_{11}c_5\Lambda^2 + c_6q^2 + c_7\Lambda^2)\Lambda^4 \right\} \\ \cdot \left\{ \left(\frac{p+q}{2} - Q\right)^2 (-\tau_{11}\Lambda^2p^2 - \tau_{11}c_3\Lambda^4 + c_3\Lambda^2p^2 + c_6\Lambda^4) \right. \\ \left. + c_1\Lambda^2p^4 + c_1\tau_{11}^2\Lambda^6 - c_2\tau_{11}\Lambda^4p^2 - \tau_{11}c_5\Lambda^6 + c_5\Lambda^4p^2 + c_7\Lambda^6 \right\}.$$

Nach einer Feynman-Parametrisierung, bei der wir die ersten beiden Nennerfaktoren mit dem Parameter x_1 , die zweiten beiden Nennerfaktoren mit dem Parameter x_2 und die zwei sich dabei ergebenden Nennerfaktoren mit dem Feynman-Parameter z zusammenfassen, und einer Verschiebung des Integrationsimpulses gemäß $Q + \frac{p+q}{2} - qz \rightarrow Q$ ergibt sich für das Integral die folgende Form:

$$\begin{aligned}
I = & \frac{ig_0\Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4} \frac{1}{\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dz 3!z(1-z) \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[Q^2 + R^2]^4}} \\
& \cdot \left\{ -(Q + qz - q)^2 + (\tau_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12})\Lambda^2 \right\} \\
& \cdot \left\{ c_1\Lambda^2(Q + qz)^4 + (Q + qz)^2(-\tau_{11}\Lambda^2 q^2 - \tau_{11}c_2\Lambda^4 + c_3\Lambda^2 q^2 + c_5\Lambda^4) \right. \\
& \quad \left. + (c_1\tau_{11}^2\Lambda^2 - \tau_{11}c_3q^2 - \tau_{11}c_5\Lambda^2 + c_6q^2 + c_7\Lambda^2)\Lambda^4 \right\} \\
& \cdot \left\{ (Q + qz - q - p)^2(-\tau_{11}\Lambda^2 p^2 - \tau_{11}c_3\Lambda^4 + c_3\Lambda^2 p^2 + c_6\Lambda^4) \right. \\
& \quad \left. + c_1\Lambda^2 p^4 + c_1\tau_{11}^2\Lambda^6 - c_2\tau_{11}\Lambda^4 p^2 - \tau_{11}c_5\Lambda^6 + c_5\Lambda^4 p^2 + c_7\Lambda^6 \right\}.
\end{aligned}$$

Mit den Gesetzen (A.3) der symmetrischen Integration kann man die divergenten Anteile dieses Integrals schreiben als:

$$\begin{aligned}
I^{div} = & \frac{ig_0\Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4} \frac{1}{\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dz 3!z(1-z) \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{A(Q^2)^4 + B(Q^2)^3}{[Q^2 + R^2]^4}},
\end{aligned}$$

mit

$$A = -c_1\Lambda^2(c_3\Lambda^2 p^2 + c_6\Lambda^4 - \tau_{11}\Lambda^2 p^2 - \tau_{11}c_3\Lambda^4),$$

$$\begin{aligned}
B = & -c_1\Lambda^2(c_1\Lambda^2 p^4 + c_1\tau_{11}^2\Lambda^6 - c_2\tau_{11}\Lambda^4 p^2 - \tau_{11}c_5\Lambda^6 + c_5\Lambda^4 p^2 + c_7\Lambda^6) \\
& + c_1(\tau_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12})\Lambda^4(c_3\Lambda^2 p^2 + c_6\Lambda^4 - \tau_{11}c_3\Lambda^4 - \tau_{11}\Lambda^2 p^2) \\
& - (-\tau_{11}\Lambda^2 q^2 - \tau_{11}c_2\Lambda^4 + c_3\Lambda^2 q^2 + c_5\Lambda^4)(-\tau_{11}\Lambda^2 p^2 - \tau_{11}c_3\Lambda^4 + c_3\Lambda^2 p^2 + c_6\Lambda^4) \\
& - c_1\Lambda^2(c_3\Lambda^2 p^2 + c_6\Lambda^4 - \tau_{11}\Lambda^2 p^2 - \tau_{11}c_3\Lambda^4)(16q^2 z^2 - 16q^2 z + 4q^2 + p^2 - 8pqz + 4pq).
\end{aligned}$$

Mit

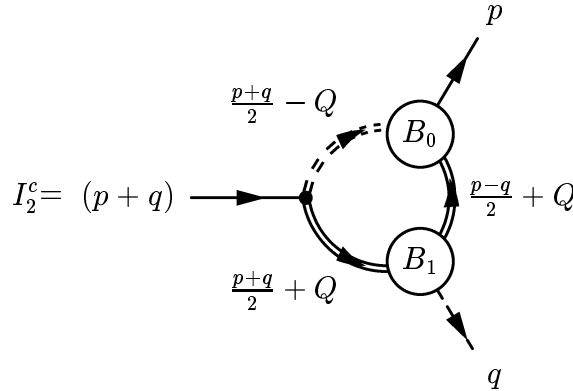
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu^{2\epsilon} \int \frac{d^{2-2\epsilon} Q}{(2\pi)^{2-2\epsilon}} \frac{AQ^8 + BQ^6}{[Q^2 + R^2]^4} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\nu^2}{\Lambda^2} \right)^\epsilon \frac{1}{4\pi} \Gamma(\epsilon) \right) [B - 4AR^2],$$

vgl. (A.2), erhält man schließlich an den Stellen p' und q' , an denen man den „divergenten“ $1/g^2$ -Mechanismus anwendet:

$$\begin{aligned}
I^{div} &= \frac{ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})\Lambda^4} \frac{1}{\beta_0} \\
&\quad \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dz \left(3! z(1-z)B - 4! z(1-z)AR^2 \right) \\
&= \frac{ig_0\Lambda^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{(\sigma_{11} - \tau_{11})(\sigma_{12} - \tau_{11})} \frac{1}{\beta_0} \\
&\quad \cdot \left\{ p'^4 (-c_1^2 - c_1c_3 + c_1\tau_{11}) - p'^2 q'^2 (c_3 - \tau_{11})^2 - q'^2 (c_3 - \tau_{11})(c_6 - \tau_{11}c_3)\Lambda^2 \right. \\
&\quad \quad + p'^2 \Lambda^2 \left(c_1c_2\tau_{11} - c_1c_5 + c_1(\tau_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12})(c_3 - \tau_{11}) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - (c_3 - \tau_{11})(c_5 - \tau_{11}c_2) + 2c_1(c_3 - \tau_{11})(\sigma_{11} + \sigma_{12}) - c_1(c_6 - \tau_{11}c_3) \right) \\
&\quad \quad \left. + \left(-c_1^2\tau_{11}^2 + \tau_{11}c_1c_5 - c_1c_7 + c_1(\tau_{11} - \sigma_{11} - \sigma_{12})(c_6 - \tau_{11}c_3) \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. (c_5 - \tau_{11}c_2)(c_6 - \tau_{11}c_3) + 2c_1(c_6 - \tau_{11}c_3)(\sigma_{11} + \sigma_{12}) \right) \Lambda^4 \right\} + O(g_0^3).
\end{aligned}$$

F.2 Berechnung des B_0 - B_1 -Terms

Die Schleife



enthält nach Einsetzen der Ansätze (F.2) bis (F.6) nur logarithmisch divergente Beiträge:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{i g_0 \Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11} \Lambda^2)(q^2 + \mu_{11} \Lambda^2)} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \\
&\cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11} \Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12} \Lambda^2 \right)} \\
&\cdot \left\{ -\tau_{11} \Lambda^2 q^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_1 \Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^4 + c_1 \tau_{11}^2 \Lambda^6 + c_3 \Lambda^2 q^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 \right. \\
&\quad \left. -\tau_{11} \Lambda^2 \left(c_2 \Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_3 \Lambda^2 q^2 + c_5 \Lambda^4 \right) + c_5 \Lambda^4 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_6 \Lambda^2 q^2 + c_7 \Lambda^6 \right\} \\
&\cdot \left\{ p^2 \left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 + c_1 \Lambda^2 \left(\left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 - \tau_{11} \Lambda^2 \right) + c_2 \Lambda^2 p^2 + c_3 \Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 + c_5 \Lambda^4 \right\}.
\end{aligned}$$

Nach einer Feynman-Parametrisierung erhält man für die divergenten Beiträge die Form

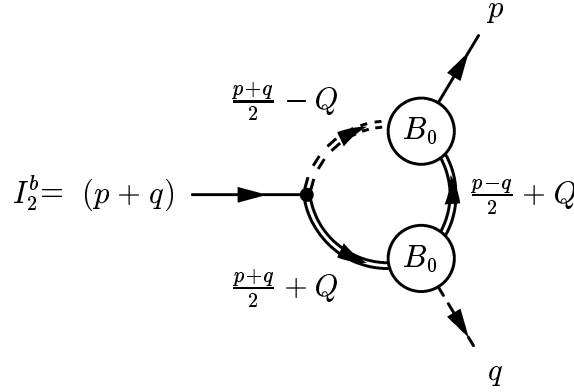
$$\begin{aligned}
I_2^{div} &= \frac{-i g_0 \Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11} \Lambda^2)(q^2 + \mu_{11} \Lambda^2)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz 3! z(1-z) \\
&\cdot \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{(Q^2)^3}{[Q^2 + R^2]^4} c_1 \Lambda^2 (p^2 + c_1 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2).
\end{aligned}$$

Die Form von R^2 ist bei logarithmisch divergenten Integralen unwesentlich, wenn man nur weiß, daß $R^2 = R'^2 \Lambda^2$ gilt, daß man also einen Faktor Λ^2 aus R^2 abspalten kann. Nach Durchführung der Impulsintegration nach (A.2) und Anwendung des divergenten $1/g^2$ -Mechanismus an den Stellen p' und q' erhält man die folgenden Beiträge nullter Ordnung:

$$I_2^{div} = \frac{-i g_0 \Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11} \Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11} \Lambda^2)} \frac{1}{\beta_0} c_1 \Lambda^2 (p'^2 + c_1 \Lambda^2 + c_3 \Lambda^2).$$

F.3 Berechnung des B_0 - B_0 -Terms

Schließlich liefert die Schleife



nach Einsetzen der Ansätze (F.2) bis (F.6) auch nur logarithmisch divergente Anteile:

$$I_3 = \frac{-ig_0\Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(\left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{11}\Lambda^2 \right) \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q \right)^2 + \sigma_{12}\Lambda^2 \right)}$$

$$\cdot \left\{ q^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_1\Lambda^2 \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q \right)^2 - \tau_{11}\Lambda^2 \right) + c_2\Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_3\Lambda^2 q^2 + c_5\Lambda^4 \right\}$$

$$\cdot \left\{ p^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_1\Lambda^2 \left(\left(\frac{p-q}{2} + Q \right)^2 - \tau_{11}\Lambda^2 \right) + c_2\Lambda^2 p^2 + c_3\Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 + c_5\Lambda^4 \right\}.$$

Die logarithmisch divergenten Beiträge

$$I_3^{div} = \frac{-ig_0\Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz 3! z(1-z)$$

$$\cdot \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{(Q^2)^3}{[Q^2 + R^2]^4} (q^2 + c_1\Lambda^2 + c_2\Lambda^2) (p^2 + c_1\Lambda^2 + c_3\Lambda^2)$$

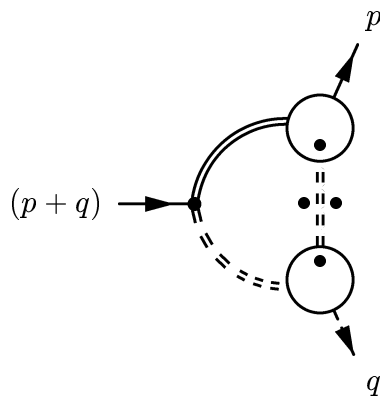
haben nach Durchführung der Impulsintegration und Anwendung des divergenten $1/g^2$ -Mechanismus an den Stellen p' und q' die Form:

$$I_3^{div} = \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{\beta_0} \left(q'^2 + c_1\Lambda^2 + c_2\Lambda^2 \right) \left(p'^2 + c_1\Lambda^2 + c_3\Lambda^2 \right).$$

Anhang G

Berechnung der „entschärften“ ersten Schleife

Wir führen hier die Berechnung der Schleife



vor. Dabei benutzen wir die Ansätze:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{0,2}^{[1,0]conn}(p^2) &= \frac{p^2 + \mu_{11}\Lambda^2}{\Lambda'^4}, \\ \tilde{G}_{2,0}'^{[1,0]}(p^2) &= \frac{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)}{(p^2 + \sigma_{11}\Lambda^2)(p^2 + \sigma_{12}\Lambda^2)}, \\ \tilde{\Gamma}_{2,1}'^{[1,0]}(p^2, q^2, k^2) &= B_0(p^2, q^2, k^2) + \frac{1}{p^2 + \tau_{11}\Lambda^2} B_1(q^2, k^2)\end{aligned}$$

mit

$$B_0(p^2, q^2, k^2) = \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(q^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \cdot (q^2k^2 + c_1\Lambda^2p^2 + c_2\Lambda^2q^2 + c_3\Lambda^2k^2 + c_5\Lambda^4 - c_1\tau_{11}\Lambda^4),$$

$$B_1(q^2, k^2) = \frac{-ig_0\Lambda'^2}{(q^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \left\{ c_1\Lambda^2q^4 + q^2k^2(c_3 - \tau_{11})\Lambda^2 + q^2(c_5 - \tau_{11}c_2)\Lambda^4 + k^2(c_6 - \tau_{11}c_3)\Lambda^4 + (c_1\tau_{11}^2 - \tau_{11}c_5 + c_7)\Lambda^6 \right\}$$

und

$$\tilde{\Gamma}_{0,3}(p^2, q^2, k^2) = C_0 + C_1 \frac{1}{p^2 + \mu_{11}\Lambda^2}$$

mit

$$C_0 = \frac{-ig_0\Lambda'^6}{(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)},$$

$$C_1 = \frac{-ig_0\Lambda'^6}{(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)(k^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} (q^2 + k^2 + \mu_{11}\Lambda^2).$$

Zuerst betrachten wir die Anteile mit Pol und kompensierendem Pol:

The diagram shows the decomposition of a loop integral. On the left, a loop with two vertices, $\Gamma_{2,1}$ and $\Gamma_{0,3}$, is shown. The external momenta are p and q . The internal momenta are $\frac{p+q}{2} + Q$, $\frac{q-p}{2} + Q$, and $\frac{q+p}{2} - Q$. On the right, the same loop is shown with vertices B'_1 and C_1 , and a compensating pole term $\frac{d}{(\frac{q-p}{2} + Q)^2 + \mu_{11}\Lambda^2}$. The equation is labeled (G.1).

Die genaue Form des kompensierenden Pols ist uns zunächst nicht bekannt, denn wir kennen den Wert der Konstanten d nicht. Wir fordern, daß der Term

$$\tilde{G}_{0,2}\left(\frac{q-p}{2} + Q\right) \frac{1}{\left(\left(\frac{q-p}{2} + Q\right)^2 + \mu_{11}\Lambda^2\right)^2} - \frac{d}{\left(\frac{q-p}{2} + Q\right)^2 + \mu_{11}\Lambda^2} = \frac{\Lambda'^{-4} - d}{\left(\frac{q-p}{2} + Q\right)^2 + \mu_{11}\Lambda^2}$$

keinen Pol mehr in $\left(\frac{q-p}{2} + Q\right)^2 = -\mu_{11}\Lambda^2$ besitzt. Dann folgt sofort

$$d = \frac{1}{\Lambda^4},$$

und die beiden Terme in (G.1) kompensieren sich damit vollständig, liefern also keinen Beitrag zu dem entschärften Graphen.

Die restlichen Anteile ergeben den Beitrag

$$\begin{aligned}
I_1 = & -ig_0\Lambda'^2 \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \tilde{G}_{2,0} \left(\frac{p+q}{2} + Q \right) \tilde{G}_{0,2} \left(\frac{p+q}{2} - Q \right) \\
& \cdot \frac{-g_0^2 \Lambda^8}{\left(\left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + \tau_{11}\Lambda^2 \right) (p^2 + \tau_{11}\Lambda^2) \left(\left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 + \mu_{11}\Lambda^2 \right) (q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \\
& \cdot \left\{ \left(p^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_3 \left(p^2 + \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 \right) + c_6\Lambda^4 \right) \left(\left(\frac{q-p}{2} + Q \right)^2 + \mu_{11}\Lambda^2 \right) \frac{1}{\Lambda^4} \right. \\
& + \left(p^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + c_3 \left(p^2 + \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 \right) + c_6\Lambda^4 \right) \left(\left(\frac{p+q}{2} - Q \right)^2 + q^2 + \mu_{11}\Lambda^2 \right) \frac{1}{\Lambda^4} \\
& + \left(c_1\Lambda^2 p^4 + c_1\Lambda^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 + p^2 \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 (c_2 - \mu_{11}\Lambda^2) \right. \\
& \left. + \left(p^2 + \left(\frac{p+q}{2} + Q \right)^2 \right) (c_5 - \mu_{11}c_3)\Lambda^4 + c_7\Lambda^6 - \mu_{11}c_6\Lambda^6 \right) \frac{1}{\Lambda^4} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Mit einer Feynman-Parametrisierung nach (A.1) und einer Verschiebung des Integrationsimpulses um

$$\frac{p+q}{2} + Q \rightarrow Q$$

ergibt sich für die divergenten Anteile des Integrals der Ausdruck

$$\begin{aligned}
I_1^{div} = & \frac{ig_0\Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \int_0^1 dx \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[Q^2 + \sigma_{11}\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})\Lambda^2 x]^2} \\
& \cdot \left\{ (p^2 Q^2 + c_3\Lambda^2(p^2 + Q^2) + c_6\Lambda^4) ((Q-p)^2 + \mu_{11}\Lambda^2) \right. \\
& \quad (p^2 Q^2 + c_3\Lambda^2(p^2 + Q^2) + c_6\Lambda^4) ((Q-p-q)^2 + q^2 + \mu_{11}\Lambda^2) \\
& \quad \left. + c_1\Lambda^2 Q^4 + p^2 Q^2 (c_2 - \mu_{11})\Lambda^2 + Q^2 (c_5 - \mu_{11}c_3)\Lambda^4 \right\},
\end{aligned}$$

und mit Hilfe der Regeln der symmetrischen Integration (A.3) kann man diese Anteile schreiben als

$$I_1^{div} = \frac{ig_0\Lambda'^2 g_0^2}{(p^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \int_0^1 dx \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{AQ^4 + BQ^2}{[Q^2 + R^2]^2},$$

mit

$$R^2 = \sigma_{11}\Lambda^2 + (\sigma_{12} - \sigma_{11})\Lambda^2 x,$$

$$A = 2p^2 + 2c_3\Lambda^2 + c_1\Lambda^2,$$

$$B = (p^2 + c_3\Lambda^2)(p^2 + q^2 + (p+q)^2 + 2\mu_{11}\Lambda^2) + 2c_3\Lambda^2 p^2 \\ + 2c_6\Lambda^4 + p^2(c_2 - \mu_{11})\Lambda^2 + (c_5 - \mu_{11}c_3)\Lambda^4.$$

Bei Durchführung der Impulsintegration und Anwendung des divergenten $1/q^2$ -Mechanismus an den Stellen p' und q' ergibt sich für die führenden Beiträge des Integrals die Form

$$I_1^{div} = \frac{ig_0\Lambda'^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{\beta_0} \int_0^1 dx (B - 2AR^2) \\ = \frac{ig_0\Lambda^2}{(p'^2 + \tau_{11}\Lambda^2)(q'^2 + \mu_{11}\Lambda^2)} \frac{1}{\beta_0} \left\{ p'^4 + p'^2(p' + q')^2 + p'^2 q'^2 \right. \\ \left. + q'^2 c_3 \Lambda^2 + p'^2 (\mu_{11} + 3c_3 + c_2 - 2\sigma_{11} - 2\sigma_{12}) \Lambda^2 \right. \\ \left. + (p' + q')^2 c_3 \Lambda^2 + (c_3 \mu_{11} + 2c_6 + c_5 - (2c_3 + c_1)(\sigma_{11} + \sigma_{12})) \Lambda^4 \right\}.$$

Anhang H

Quadratisch divergente Integrale

In diesem Anhang berechnen wir die impulsunabhängigen Anteile niedrigster Ordnung eines quadratisch divergenten Integrals der Form

$$I = \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{((p' + q_1)^2 + m_1) ((p' + q_2)^2 + m_2) \dots ((p' + q_n)^2 + m_n)}{((p' + p_1)^2 + r_1) ((p' + p_2)^2 + r_2) \dots ((p' + p_n)^2 + r_n)}.$$

Die divergenten Anteile des Integrals haben, benutzt man (A.3), die Form

$$I^{div} = \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{(p'^2)^n + A (p'^2)^{n-1}}{((p' + p_1)^2 + r_1) ((p' + p_2)^2 + r_2) \dots ((p' + p_n)^2 + r_n)}$$

mit

$$A = \sum_{i=1}^n (q_i^2 + m_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2q_i q_j.$$

Eine Feynman-Parametrisierung nach (A.10) liefert

$$I^{div} = (n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \left((p'^2)^n + A (p'^2)^{n-1} \right) \frac{u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2}}{\left[((p' + p_1)^2 + r_1) U_{n-1} + ((p' + p_2)^2 + r_2) (U_{n-2} - U_{n-1}) + \dots + ((p' + p_n)^2 + r_n) (1 - u_1) \right]^n}$$

$$\text{mit} \quad U_n = \prod_{i=1}^n u_i.$$

Nach einer Verschiebung des Integrationsimpulses

$$\left(p' + p_n + \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) U_{n-i} \right)^2 \rightarrow Q$$

erhalt man

$$I^{div} = (n-1)! \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_{n-1} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2} \\ \cdot \left[\left(Q - p_n - \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) U_{n-i} \right)^{2n} + A \left(\left(Q - p_n - \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) U_{n-i} \right)^2 \right)^{n-1} \right] \\ \cdot \left[r_n + \sum_{i=1}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) U_{n-i} + \sum_{j=1}^{n-1} (p_j^2 - p_{j+1}^2) U_{n-j} + p_n^2 + Q^2 - \left(p_n + \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) U_{n-i} \right)^2 \right]^{-n}.$$

Mit

$$R^2 = r_n + \sum_{i=1}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) U_{n-i} + p_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (p_j^2 - p_{j+1}^2) U_{n-j} - \left(p_n + \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) U_{n-i} \right)^2, \\ B = p_n + \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - p_{i+1}) U_{n-i},$$

und mit

$$(Q - B)^{2n} = Q^{2n} + (Q^2)^{n-1} B^2 (n + 2(n-1)!)$$

(symmetrische Integration (A.3)) folgt:

$$I^{div} = (n-1)! \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_{n-1} \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \\ \cdot \left[Q^{2n} + (B(n + 2(n-1)!)) + A \right] (Q^2)^{n-1} \frac{u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2}}{[Q^2 + R^2]^n}.$$

Nach Durchführung der Q -Integration, bei der man den divergenten $1/g^2$ -Mechanismus anwendet, erhält man

$$I^{div} = \frac{1}{\beta_0 g_0^2} (n-1)! \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_{n-1} (B^2 (n + 2(n-1)!)) + A - nR^2 (u_1^{n-2} \dots u_{n-2}).$$

Die impulsunabhängigen Anteile dieses Ausdrucks lauten:

$$s = \frac{1}{\beta_0 g_0^2} (n-1)! \int_0^1 du_1 \dots \int_0^1 du_{n-1} (u_1^{n-2} \dots u_{n-2}) \left(\sum_{i=1}^n m_i - nr_n - n \sum_{i=1}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) U_{n-i} \right) \\ = \frac{1}{\beta_0 g_0^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n r_i \right).$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. M. Polyakov, *Interaction of Goldstone Particles in Two Dimensions. Applications to Ferromagnets and Massive Yang-Mills Fields*, Phys. Lett. **59B** (1975) 79
- [2] U. Häbel, R. Könnig, H.-G. Reusch, M. Stingl and S. Wigard, *A Nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger Equations of QCD. I. Nonperturbative Vertices and a Mechanism for their Self Consistency*, Z. Physik **A 336** (1990) 423
- [3] U. Häbel, R. Könnig, H.-G. Reusch, M. Stingl and S. Wigard, *A Nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger Equations of QCD. II. Self Consistency and Physical Properties*, Z. Physik **A 336** (1990) 435
- [4] M. Stingl, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Z. Physik **A353** (1996) 423
- [5] M. Spratte, *Nichtperturbative Berechnung der Gluonselfenergie in Einschleifen-Näherung*, Diplomarbeit WWU Münster (1995)
- [6] J. Fromm, *Dyson-Schwinger-Gleichung des Dreigluonvertex und Bestimmung des effektiven Gluonpropagators einer erweiterten Störungstheorie der QCD*, Diplomarbeit WWU Münster (1996)
- [7] J. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsrechnung für die QCD*, Dissertation WWU Münster (in Vorbereitung)
- [8] L. Driesen, *Der Vier-Gluonen-Vertex und sein Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation WWU Münster (in Vorbereitung)
- [9] A. F.-J. Streibl, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1996)
- [10] M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cimento **16** (1960) 53
- [11] D. Bessis, J. Zinn-Justin, *One-Loop Renormalization of the Nonlinear σ -Modell* Phys. Rev. **D5** (1972) 1313
- [12] V. Koch, *Introduction to Chiral Symmetry*, e-Print Archive: nucl-th/9512029, 1995

- [13] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984
- [14] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications, 1990
- [15] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Two-Dimensional Sigma-Models: Modelling Non-Perturbative Effects in Quantum Chromodynamics*, Phys.Rep. **116** (1984) 103
- [16] R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
- [17] H.-G. Reusch, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [18] S. Coleman, $1/N$, *Aspects of Symmetry, Selected Erice Lectures of Sidney Coleman*, Cambridge University Press, 1985
- [19] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- [20] J. M. Drouffe, H. Flyvbjerg, *Dyson-Schwinger Equations for the Non-Linear σ -Model*, Nuc. Phys. **B332** (1990) 687
- [21] J. M. Drouffe, H. Flyvbjerg, *Resummation of the $\frac{1}{N}$ Expansion of the Non-Linear σ -Model by Dyson-Schwinger Equations*, Phys.Let.**B206** (1988) 285
- [22] G. 't Hooft, *Dimensional Regularization and the Renormalization Group*, Nuc. Phys. **B61** (1973) 455
- [23] M. Päsler, *Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung*, de Gruyter, 1977
- [24] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore, 1987
- [25] M. Stingl, Persönliche Mitteilungen
- [26] R. Jackiw and K. Johnson, *Dynamical Model of Spontaneously Broken Gauge Symmetries*, Phys. Rev. **D8** (1973)2386
- [27] J. Cornwall and R. Norton, *Spontaneous Symmetry Breaking Without Scalar Mesons*, Phys. Rev. **D8** (1973) 3338
- [28] A. Devoto, D. W. Duke, *Table of Integrals and Formulae for Feynman Diagram Calculations*, Nuov. Cim. **7** (1984) 1
- [29] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, 1993

Danksagung

Ganz herzlich möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl für das interessante Thema und die gute Betreuung bedanken, die Arbeit hat viel Spaß gemacht.

Jürgen Kuhrs hat mir in vielen Diskussionen mit seinen Vorschlägen geholfen. Neben dem Korrekturlesen war er immer bereit, mir bei Computerproblemen zu helfen, danke!

Auch bei Andreas Streibl, Kosta Siantidis und Constanze Hippel bedanke ich mich, daß sie immer zu Diskussionen bereit waren, letztere haben auch als Zimmernachbarn durch ein angenehmes Arbeitsklima zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Herrn Dr. C. Wiczerkowski und Herrn Prof. Dr. G. Münster verdanke ich einige Hinweise zu weiterbringender Literatur.

Für das Korrekturlesen bedanke ich mich bei Carsten Merten, Lutz Driesen, Constanze Hippel, Stefanie Thiel, Annemarie Hawix, Juliane Jänich, Martin Engel und Johannes Woestmann.

Schließlich danke ich meinen Eltern und Freunden für jede Unterstützung.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, März 1997