

Dynamische Massenerzeugung und Symmetriebrechung durch die renormierungsgruppeninvariante Massenskala Λ

Als Diplomarbeit vorgelegt

von

Carsten Merten

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
November 1996

Theoretische Physik

**Dynamische Massenerzeugung und
Symmetriebrechung durch die
renormierungsgruppeninvariante
Massenskala Λ**

Als Diplomarbeit vorgelegt

von

Carsten Merten

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

November 1996

*Was du nicht kennst, das, meinst du, soll nicht gelten?
Du meinst, daß Phantasie nicht wirklich sei?
Aus ihr allein erwachsen künftige Welten:
In dem, was wir erschaffen, sind wir frei.*

Michael Ende, *Das Gauklermärchen*

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Das $SU(2)$-Modell	5
1.1 Lagrangedichte	5
1.2 Feynman-Regeln	7
1.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen	10
2 Ansätze für die Vertexfunktionen	24
2.1 Das Selbstkonsistenzproblem	24
2.2 Die Massenskala Λ	26
2.3 Systematik nichtperturbativer Modifikationen	27
2.4 Konstruktion der Ansätze	28
2.5 Der Selbstkonsistenzmechanismus	38
3 Divergente Anteile der Einschleifenintegrale	41
3.1 Berechnung der Integrale	41
3.2 Resultate der Integralberechnungen	48
4 Selbstkonsistenzgleichungen und Massenbildung	64
4.1 Selbstkonsistenzgleichungen für die Propagatoren	64
4.2 Selbstkonsistenzgleichungen für die Vertizes	69
4.3 Fermionmassen	73
4.4 Bosonmassen	77
4.5 Kompensierende Pole	84
Zusammenfassung und Ausblick	89
A Mathematischer Anhang	91
A.1 Euklidische γ -Algebra	91
A.2 Feynman-Parametrisierung	92
A.3 Symmetrische Integration	93
A.4 Euklidische Impulsintegration	93

B \mathcal{CP}-Invarianz	94
B.1 Propagatoren	94
B.2 Vertizes	94
Literaturverzeichnis	96
Schlußwort	98

Einleitung

Die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung der Elementarteilchen wird mit dem von Glashow, Salam und Weinberg entwickelten Standardmodell beschrieben, welches auf einer nichtabelschen, lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Eichsymmetrie beruht [1]. Es hat bis heute eine Vielzahl experimentell hervorragend bestätigter Vorhersagen geliefert, besitzt jedoch auch Schwächen.

Eine von ihnen ist die Beschreibung der Erzeugung von Teilchenmassen. Sie können nicht als Strommassen in die Lagrangedichte des Standardmodells geschrieben werden, da dies die Eichsymmetrie verletzen würde. Um den Eichbosonen und den Fermionen Massen geben zu können, wird der auf einer spontanen Brechung der Eichsymmetrie beruhende Higgs-Mechanismus verwendet. Dazu muß man zusätzliche skalare Felder in die Theorie einführen, von denen eines einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert besitzt. Das daraus resultierende physikalische Teilchenspektrum beinhaltet aber neben den in der Natur beobachteten Fermionen und Bosonen auch das experimentell bisher nicht gefundene Higgs-Teilchen. Zudem macht der Higgs-Mechanismus keine fundamentalen Aussagen darüber, wie die Massen erzeugt werden, denn für jede Teilchenmasse wird ein frei wählbarer Kopplungsparameter eingeführt. Dieser wird dann so angepaßt, daß die Masse mit dem experimentellen Wert übereinstimmt.

Es wurde in verschiedenen Modellen [2] der Versuch gemacht, diese Probleme zu umgehen; sie haben sich jedoch nicht durchsetzen können.

In dieser Arbeit soll am Beispiel einer paritätsverletzenden $SU(2)$ -Modelltheorie untersucht werden, ob sich Massen ohne Verwendung von Skalarfeldern erzeugen lassen. Der Grundgedanke besteht darin, daß sich die Teilchenmassen rein dynamisch in den Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen für die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen ausbilden. Weiterhin soll die Frage geklärt werden, ob das neutrale Eichbosonfeld zwei stabile Teilchen erzeugen kann, die sich nur durch ihre Massen unterscheiden und im Rahmen des Modells dem Photon und Z -Boson entsprechen. Die Verwendung einer reinen $SU(2)$ -Eichgruppe ohne abelschen $U(1)$ -Faktor bewirkt, daß die Theorie asymptotisch frei ist, was zu den Voraussetzungen des angewandten Selbstkonsistenzverfahrens zählt.

Das erste Kapitel befaßt sich mit den Eigenschaften des betrachteten $SU(2)$ -Modells. Ausgehend von der Lagrangedichte werden die Dyson-Schwinger-Gleichungen im euklidischen Impulsraum formuliert. Im zweiten Kapitel wird das Konzept der in dieser Ar-

beit verwendeten, ursprünglich für die QCD entwickelten, nichtperturbativ erweiterten Störungsreihe vorgestellt [3], in welchem die renormierungsgruppeninvariante Massenskala Λ von entscheidender Bedeutung ist. Anschließend werden auf dieser Grundlage Ansätze für die Propagatoren und Vertizes konstruiert, die neben den dynamischen Massen weitere zunächst unbestimmte Parameter enthalten. Die Forderung, daß diese Ansätze Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen sein sollen, liefert Selbstkonsistenzbedingungen für die Parameter. Es wird ausführlich auf das Problem der selbstkonsistenten Reproduktion nichtstörungstheoretischer Modifikationen in den Dyson-Schwinger-Gleichungen und auf dessen Lösung eingegangen. Das dritte Kapitel hat die Integralberechnungen zum Inhalt, mit deren Resultaten im vierten Kapitel die Selbstkonsistenzgleichungen für die nichtperturbativen Parameter aufgestellt werden. Die Auswertung dieser Gleichungen wird dann qualitative Aussagen darüber liefern, ob dynamische Massenbildung und damit spontane Symmetriebrechung im Rahmen unseres Modells möglich ist.

Kapitel 1

Das $SU(2)$ -Modell

1.1 Lagrangedichte

Gegenstand dieser Untersuchung ist eine paritätsverletzende nichtabelsche $SU(2)$ -Eichtheorie mit vier minimal angekoppelten Fermionfeldern. Hierfür werden die Mitglieder der schwersten Teilchengeneration des Standardmodells gewählt. Sie ordnen sich in zwei Dubletts der Symmetriegruppe an und werden durch die $SU(2)$ -Quantenzahlen T_f und T_{3f} des schwachen Isospins sowie ihre elektrische Ladung Q_f charakterisiert:

Fermionfeld Ψ_f	T_f	T_{3f}	Q_f/e
top-Quark t	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$
bottom-Quark b	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
ν_τ -Neutrino	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
τ -Lepton	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Außerdem tragen die beiden Quarkfelder t und b wie üblich eine drei Werte annehmende Farbquantenzahl, welche der starken Wechselwirkung zuzuordnen ist und für die Dynamik unserer Modelltheorie ebenso wie für die elektroschwache Dynamik keine Rolle spielt. Sie führt lediglich zu Multiplizitätsfaktoren 3 in bestimmten Amplituden.

Die Theorie wird für ein vierdimensionales euklidisches Kontinuum formuliert. Dabei wird die in der nichtperturbativen Quantenfeldtheorie verbreitete Annahme zugrunde gelegt, daß die Definition und Berechnung der Greenschen Funktionen im Euklidischen und die analytische Fortsetzung der Resultate in den Minkowski-Raum korrekte physikalische Ergebnisse liefern. Ein formaler Beweis hierfür steht für Eichtheorien im Kontinuum allerdings noch aus.

Die Lagrangedichte im Ortsraum in beliebiger kovarianter Eichung hat die Gestalt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & W_\mu^+ \left[-\delta_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] W_\nu^- + \frac{1}{2} W_\mu^0 \left[-\delta_{\mu\nu} \square - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] W_\nu^0 \\ & + i \sum_f \bar{\Psi}_f \not{\partial} \Psi_f - \bar{c}^+ \square c^- - \bar{c}^- \square c^+ - \bar{c}^0 \square c^0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

die Lagrangedichte der freien Theorie und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -i g_0 (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \left[(\partial_\mu W_\nu^+) W_\rho^- W_\sigma^0 + (\partial_\mu W_\nu^-) W_\rho^0 W_\sigma^+ + (\partial_\mu W_\nu^0) W_\rho^+ W_\sigma^- \right] \\ & + g_0 \bar{q} T_\pm \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) q W_\mu^\pm + g_0 \bar{l} T_\pm \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) l W_\mu^\pm \\ & + g_0 \bar{q} T_0 \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) q W_\mu^0 + g_0 \bar{l} T_0 \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) l W_\mu^0 \\ & + i g_0 W_\mu^+ \left[(\partial_\mu \bar{c}^-) c^0 - (\partial_\mu \bar{c}^0) c^- \right] + i g_0 W_\mu^- \left[(\partial_\mu \bar{c}^0) c^+ - (\partial_\mu \bar{c}^+) c^0 \right] \\ & + i g_0 W_\mu^0 \left[(\partial_\mu \bar{c}^+) c^- - (\partial_\mu \bar{c}^-) c^+ \right] \\ & - \frac{1}{2} g_0^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) W_\mu^+ W_\nu^+ W_\rho^- W_\sigma^- \\ & + g_0^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}) W_\mu^+ W_\nu^- W_\rho^0 W_\sigma^0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

der Wechselwirkungsanteil ist (ξ ist der Eichfixierungsparameter). Die Paritätsverletzung äußert sich im $(v_0 - a_0 \gamma_5)$ -Term in der Fermion-Boson-Wechselwirkung. Die Lagrangedichte \mathcal{L} enthält keine Bosonmassen, da sie die Eichinvarianz verletzen würden, und keine Fermionmassen, da diese im Rahmen des vorliegenden Modells rein dynamisch erzeugt werden sollen.

W^+, W^- und W^0 sind die physikalischen, elektrisch geladenen Eichvektorfelder, die von den $SU(2)$ -Eichfeldern W^1, W^2 und W^3 in folgender Weise abhängen:

$$W_\mu^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}} [W_\mu^1 \mp i W_\mu^2], \quad (1.3)$$

$$W_\mu^0 := W_\mu^3. \quad (1.4)$$

T_+, T_- und T_0 sind die zugehörigen Generatormatrizen, die aus den ursprünglichen Generatoren $T_j = \frac{1}{2} \sigma_j$ ($j = 1, 2, 3$) hervorgehen:

$$T_+ := \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 + iT_2] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$T_- := \frac{1}{\sqrt{2}} [T_1 - iT_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$T_0 := T_3 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Weitere verwendete Bezeichnungen sind c^\pm und c^0 für die Faddeev-Popov-Geistfelder und

$$l = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \bar{l} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_\tau & \bar{\tau} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

sowie

$$q = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{t} & \bar{b} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

für das Quark- und das Lepton-dublett.

Die Wirkung im Ortsraum lautet dann:

$$\mathcal{S}[W, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}] = \int d^4x \mathcal{L}(W(x), \psi(x), \bar{\psi}(x), c(x), \bar{c}(x)), \quad (1.10)$$

und das erzeugende Funktional für die Greenschen Funktionen nimmt die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[j, \bar{\eta}, \eta, \bar{\omega}, \omega] &= \frac{1}{N} \int d\mu(W, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}) \left[\exp \{ -\mathcal{S}[W, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}] \} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left\{ \int d^4x (jW + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\omega}c + \bar{c}\omega) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

an, wobei $j, \bar{\eta}, \eta, \bar{\omega}$ und ω die zu den entsprechenden Feldern gehörenden Quellen sind. Aus $\mathcal{Z}[j, \bar{\eta}, \eta, \bar{\omega}, \omega]$ lassen sich mittels Funktionalableitungen nach diesen Quellen und deren Nullsetzen die Greenschen Funktionen der Theorie bestimmen, aus denen wiederum die physikalischen Observablen, wie z.B. S-Matrixelemente, gewonnen werden können [4].

1.2 Feynman-Regeln

Im folgenden werden die perturbativen Feynman-Regeln unseres $SU(2)$ -Modells zusammengestellt. Sie werden im euklidischen Impulsraum formuliert und können nach Fouriertransformation der Wirkung (1.10) direkt an dieser abgelesen werden.

Propagatoren

Transversalprojektor: $t_{\mu\nu}(q) = \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$

Longitudinalprojektor: $l_{\mu\nu}(q) = \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$

$$\nu \text{ --- } \overset{W^\pm}{\text{~~~~~}} \underset{q}{\text{~~~~~}} \mu \quad = \quad t_{\mu\nu}(q) \frac{1}{q^2} + l_{\mu\nu}(q) \frac{\xi}{q^2} \quad = \quad D_{\mu\nu}^{(0)\pm}(q)$$

$$\nu \text{ --- } \overset{W^0}{\text{~~~~~}} \underset{q}{\text{~~~~~}} \mu \quad = \quad t_{\mu\nu}(q) \frac{1}{q^2} + l_{\mu\nu}(q) \frac{\xi}{q^2} \quad = \quad D_{\mu\nu}^{(0)0}(q)$$

$$\text{---} \overset{c^\pm}{\text{---}} \underset{q}{\text{---}} \text{---} \quad = \quad \frac{1}{q^2} \quad = \quad \tilde{D}^{(0)\pm}(q^2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{---} \xrightarrow{c^0} \text{---} &= \frac{1}{q^2} = \tilde{D}^{(0)0}(q^2) \\
 \text{---} \xrightarrow{f} \text{---} &= \frac{1}{\not{p}} = S_f^{(0)}(p) \quad (f = \tau, \nu_\tau, b, t)
 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Propagatoren und den zugehörigen Vertexfunktionen in nullter Störungsordnung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}^{(0)+}(q) &= -[\Gamma_{2\mu\nu}^{(0)+}(q)]^{-1}, & D_{\mu\nu}^{(0)0}(q) &= -[\Gamma_{2\mu\nu}^{(0)0}(q)]^{-1}, \\
 \tilde{D}^{(0)+}(q^2) &= -[\tilde{\Gamma}_2^{(0)+}(q^2)]^{-1}, & \tilde{D}^{(0)0}(q^2) &= -[\tilde{\Gamma}_2^{(0)0}(q^2)]^{-1}, \\
 S_f^{(0)}(p) &= -[\bar{\Gamma}_{2f}^{(0)}(p)]^{-1}.
 \end{aligned}$$

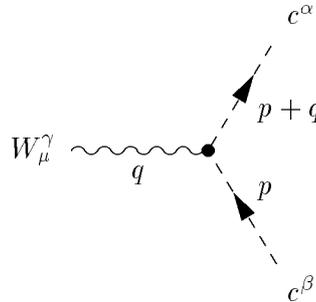
Fermion-Boson-Antifermion-Vertizes

$$\begin{aligned}
 W_\mu^+ \text{---} \xrightarrow{q} \bullet \begin{array}{l} \nearrow f' \\ \searrow f \end{array} \begin{array}{l} p+q \\ p \end{array} &= -\frac{g_0}{\sqrt{2}} \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) = g_0 \bar{\Gamma}_{3f'f\mu}^{(0)+} \\
 &((f, f') = (\tau, \nu_\tau), (b, t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_\mu^- \text{---} \xrightarrow{q} \bullet \begin{array}{l} \nearrow f \\ \searrow f' \end{array} \begin{array}{l} p+q \\ p \end{array} &= -\frac{g_0}{\sqrt{2}} \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) = g_0 \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^{(0)-} \\
 &((f, f') = (\tau, \nu_\tau), (b, t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_\mu^0 \text{---} \xrightarrow{q} \bullet \begin{array}{l} \nearrow f \\ \searrow f \end{array} \begin{array}{l} p+q \\ p \end{array} &= -g_0 T_{3f} \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) = g_0 \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} \\
 &(f = \tau, \nu_\tau, b, t)
 \end{aligned}$$

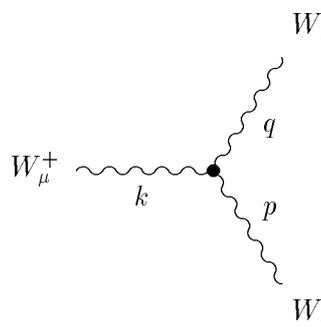
Geist-Boson-Antigeist-Vertizes



$$= \pm g_0 (p+q)_\mu = g_0 \tilde{\Gamma}_3^{(0)\alpha\beta\gamma}(p+q)$$

(+ für $(\alpha, \beta, \gamma) = (+, -, 0)$ und zyklisch, - für $(\alpha, \beta, \gamma) = (+, 0, -)$ und zyklisch)

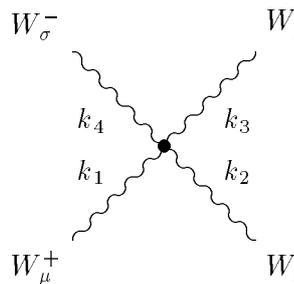
Drei-Bosonen-Vertex



$$= g_0 [\delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho + \delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu]$$

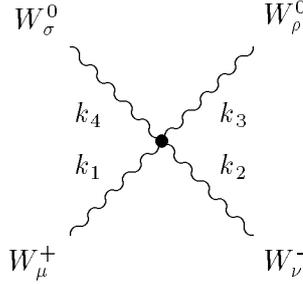
$$= g_0 \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{(0)+-0}(k,p,q) \quad (k+p+q=0)$$

Vier-Bosonen-Vertizes



$$= +g_0^2 [2\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}]$$

$$= g_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{(0)++--} \quad (k_1+k_2+k_3+k_4=0)$$



$$\begin{aligned}
 &= -g_0^2 [2\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}] \\
 &= g_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{(0)+-00} \quad (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0)
 \end{aligned}$$

In diesen Feynman-Regeln gibt die Pfeilrichtung bei Fermion- und Geistlinien sowohl die Richtung des Impulses als auch die Flußrichtung der Fermion- bzw. Geistzahl an. An Vertizes mit äußeren Bosonlinien sind die Bosonen und ihre Impulse als einlaufend zu betrachten. Ferner müssen folgende Vorschriften beachtet werden:

- Das Integrationsmaß für Schleifenintegrationen ist $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$.
- Fermion- und Geisterschleifen werden mit (-1) multipliziert.
- Diagramme mit Fermionlinien werden entgegen der Fermionflußrichtung ausgewertet.

1.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Im Impulsraum sind die Dyson-Schwinger-Gleichungen (DS-Gleichungen) ein hierarchisches System von unendlich vielen gekoppelten, nichtlinearen Integralgleichungen für die Greenschen Funktionen. Dieser Satz von Gleichungen bildet eine vollständige, zahlenwertige Formulierung der Theorie¹. Die Herleitung der DS-Gleichungen soll hier nur grob skizziert werden; Details hierzu findet man z. B. in [4, 5].

Es sei

$$Z[j] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\mathcal{S}[\phi] + \int d^4x j\phi \right\}$$

das erzeugende Funktional einer Feldtheorie mit Wirkung \mathcal{S} . Ausgangspunkt zur Herleitung der DS-Gleichungen ist die Tatsache, daß das Funktionalintegral über die Funktionalableitung nach dem Feld ϕ unter geeigneten Randbedingungen verschwindet:

$$\begin{aligned}
 &\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} \exp \left\{ -\mathcal{S}[\phi] + \int d^4x j\phi \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \left(-\frac{\delta\mathcal{S}[\phi]}{\delta\phi} + j \right) \exp \left\{ -\mathcal{S}[\phi] + \int d^4x j\phi \right\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

Ersetzt man im Faktor vor der Exponentialfunktion nun die Felder ϕ durch Funktional-

¹Allerdings ist damit zu rechnen, daß die DS-Gleichungen auch unphysikalische Lösungen besitzen.

ableitungen nach den Quellen j , so kann man ihn vor das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} & \left(- \frac{\delta \mathcal{S}[\phi]}{\delta \phi} \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta j}} + j \right) \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \mathcal{S}[\phi] + \int d^4x j\phi \right\} \\ &= \left(- \frac{\delta \mathcal{S}[\phi]}{\delta \phi} \Big|_{\phi=\frac{\delta}{\delta j}} + j \right) \mathcal{Z}[j] = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die Ausführung beliebig vieler weiterer Funktionalableitungen nach den Quellen und deren Nullsetzen liefert aus (1.13) Beziehungen für die verschiedenen Ableitungen von $\mathcal{Z}[j]$ nach j an der Stelle $j = 0$, d. h. für die Greenschen Funktionen. Diese Beziehungen sind die DS-Gleichungen der Theorie.

Wir werden uns in dieser Arbeit mit den einteilchenirreduziblen Anteilen der amputierten zusammenhängenden Greenschen Funktionen, den sogenannten Vertexfunktionen Γ , befassen. Diese charakterisieren eine Theorie ebenso vollständig wie die Greenschen Funktionen selbst. Den oberflächlich divergenten Vertexfunktionen oder Basisvertizes kommt in einer renormierbaren Quantenfeldtheorie eine besondere Bedeutung zu, da sie deren Divergenzstruktur und somit die perturbative Renormierung bestimmen. Die Basisvertizes sind diejenigen Vertexfunktionen Γ , zu denen in der Lagrangedichte perturbative nullte Ordnungen $\Gamma^{(0)}$ existieren. Sie bilden einen endlichen Satz von Basisfunktionen, aus denen im Prinzip jede oberflächlich konvergente Greensche Funktion mittels Entwicklung nach vollständig angezogenen Skelettdiagrammen dargestellt werden kann. Dies nutzt man aus, um die in den DS-Gleichungen für die Basisvertizes vorkommenden oberflächlich konvergenten Greenschen Funktionen durch ihre Skelettentwicklungen zu ersetzen und diese Reihen bei einer bestimmten Schleifenordnung abzubrechen. Auf diese Weise werden die endlich vielen DS-Gleichungen für die Basisvertizes von den unendlich vielen übrigen entkoppelt. Ferner wird sich zeigen, daß der nichtperturbative Mechanismus, auf dem die dynamische Massenbildung beruht, sehr eng mit der Divergenzstruktur der Theorie verbunden ist. Deshalb reicht es aus, die Gleichungen für die Basisvertizes zu untersuchen.

Die DS-Gleichungen lassen sich graphisch durch Feynman-Diagramme darstellen. Dazu benötigt man neben den perturbativen Feynman-Regeln auch Graphenelemente für die vollen oder angezogenen Propagatoren und Vertexfunktionen:

Propagatoren

$$\nu \text{ --- } \overset{W^\pm}{\text{~~~~~}} \underset{q}{\text{~~~~~}} \text{ --- } \mu = D_{\mu\nu}^+(q)$$

$$\nu \text{ --- } \overset{W^0}{\text{~~~~~}} \underset{q}{\text{~~~~~}} \text{ --- } \mu = D_{\mu\nu}^0(q)$$

$$\text{---} \overset{c^\pm}{\text{---}} \underset{q}{\text{---}} = \tilde{D}^+(q^2)$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} c^0 \\ \text{---} \\ \leftarrow q \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} f \\ \text{---} \\ \leftarrow p \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{l} \tilde{D}^0(q^2) \\ \\ S_f(p) \quad (f = \tau, \nu_\tau, b, t) \end{array}$$

Für den Zusammenhang zwischen Propagatoren und Vertexfunktionen gilt:

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}^+(q) &= -[\Gamma_{2\mu\nu}^+(q)]^{-1}, & D_{\mu\nu}^0(q) &= -[\Gamma_{2\mu\nu}^0(q)]^{-1}, \\
 \tilde{D}^+(q^2) &= -[\tilde{\Gamma}_2^+(q^2)]^{-1}, & \tilde{D}^0(q^2) &= -[\tilde{\Gamma}_2^0(q^2)]^{-1}, \\
 S_f(p) &= -[\bar{\Gamma}_{2f}(p)]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Fermion-Boson-Antifermion-Vertizes

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} f' \\ \nearrow p+q \\ \text{---} \\ \leftarrow q \\ W_\mu^+ \\ \text{---} \\ \leftarrow p \\ \searrow f \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow p+q \\ \text{---} \\ \leftarrow q \\ W_\mu^- \\ \text{---} \\ \leftarrow p \\ \searrow f' \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow p+q \\ \text{---} \\ \leftarrow q \\ W_\mu^0 \\ \text{---} \\ \leftarrow p \\ \searrow f \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{l} g_0 \bar{\Gamma}_{3f'f\mu}^+(p+q, p, q) \\ \\ g_0 \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^-(p+q, p, q) \\ \\ g_0 \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) \end{array}$$

((f, f') = (\tau, \nu_\tau), (b, t))

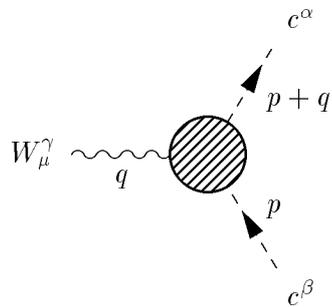
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow p+q \\ \text{---} \\ \leftarrow q \\ W_\mu^- \\ \text{---} \\ \leftarrow p \\ \searrow f' \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow p+q \\ \text{---} \\ \leftarrow q \\ W_\mu^0 \\ \text{---} \\ \leftarrow p \\ \searrow f \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{l} g_0 \bar{\Gamma}_{3ff'\mu}^-(p+q, p, q) \\ \\ g_0 \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) \end{array}$$

((f, f') = (\tau, \nu_\tau), (b, t))

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} f \\ \nearrow p+q \\ \text{---} \\ \leftarrow q \\ W_\mu^0 \\ \text{---} \\ \leftarrow p \\ \searrow f \end{array}
 \end{array}
 = g_0 \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q)$$

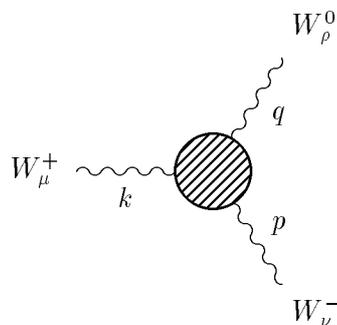
(f = \tau, \nu_\tau, b, t)

Geist-Boson-Antigeist-Vertizes



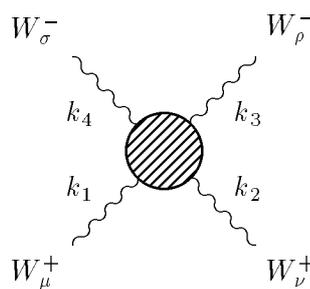
$$= g_0 \tilde{\Gamma}_3^{\alpha\beta\gamma}(p+q, p, q)$$

Drei-Bosonen-Vertex



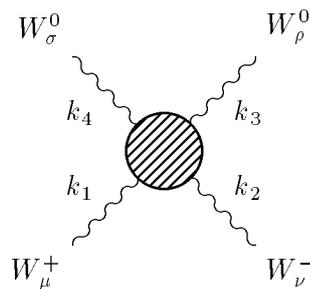
$$= g_0 \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) \quad (k + p + q = 0)$$

Vier-Bosonen-Vertizes



$$= g_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{++--}(k_1, k_2, k_3, k_4)$$

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0)$$



$$= g_0^2 \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}(k_1, k_2, k_3, k_4)$$

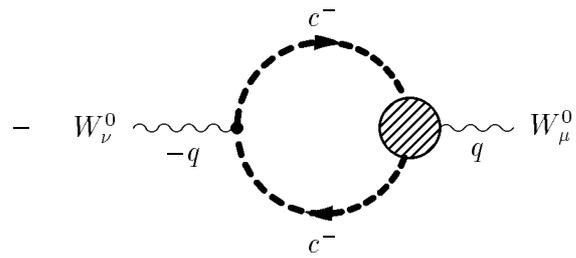
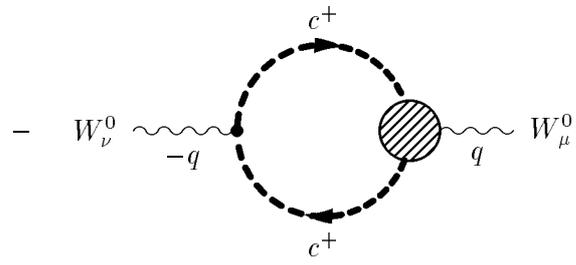
$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0)$$

Nachfolgend werden die in dieser Arbeit untersuchten DS-Gleichungen für die Basisvertizes formuliert; hierbei wird die Darstellung durch Feynman-Graphen gewählt. Die zu den Fermion- und Geisterschleifen gehörenden (-1) -Faktoren stehen bereits vor den entsprechenden Diagrammen. Ferner ist zu beachten, daß Diagramme mit Quarkschleifen aufgrund der Farbladung der Quarks in den entsprechenden DS-Gleichungen jeweils dreimal vorkommen. Da sich die für die dynamische Massenbildung entscheidenden Effekte schon in Einschleifenordnung zeigen sollten, werden Mehrschleifenbeiträge vernachlässigt²:

W^0 -Propagator

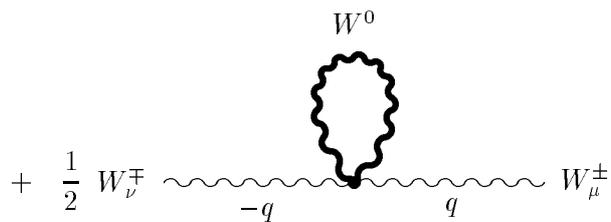
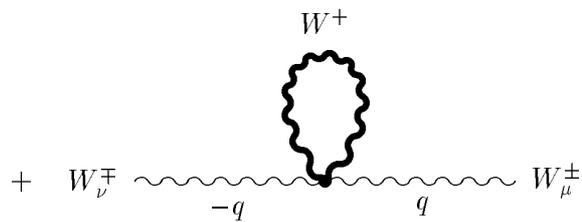
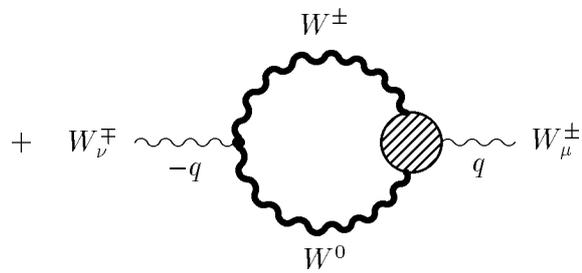
$$\begin{aligned}
 & - \left(\nu \text{---} \overset{W^0}{\text{~~~~~}} \underset{q}{\text{~~~~~}} \mu \right)^{-1} = - \left(\nu \text{---} \overset{W^0}{\text{~~~~~}} \underset{q}{\text{~~~~~}} \mu \right)^{-1} \\
 & + \begin{array}{c} W^+ \\ \text{~~~~~} \\ W^- \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} W^+ \\ \text{~~~~~} \\ W^0 \end{array} \\
 & - \sum_f \begin{array}{c} f \\ \text{~~~~~} \\ f \end{array}
 \end{aligned}$$

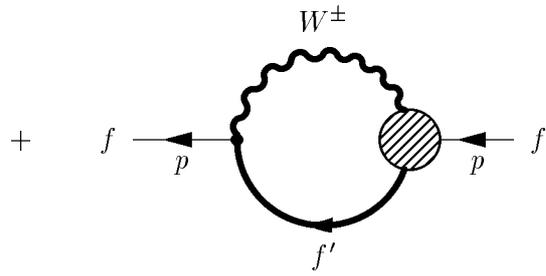
²Dies entspricht, wie wir noch sehen werden, einer systematischen Vernachlässigung von Termen der Ordnung $(1/\beta_0)^2$ (siehe (1.20)) und höher in den Selbstkonsistenzgleichungen.



W^\pm -Propagator

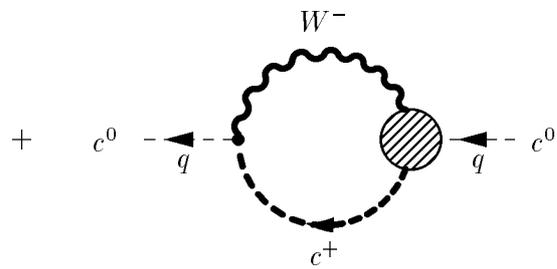
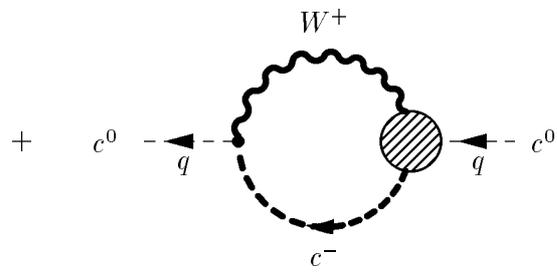
$$- \left(\begin{array}{c} W^\pm \\ \nu \text{---} \text{---} q \text{---} \mu \end{array} \right)^{-1} = - \left(\begin{array}{c} W^\pm \\ \nu \text{---} \text{---} q \text{---} \mu \end{array} \right)^{-1}$$



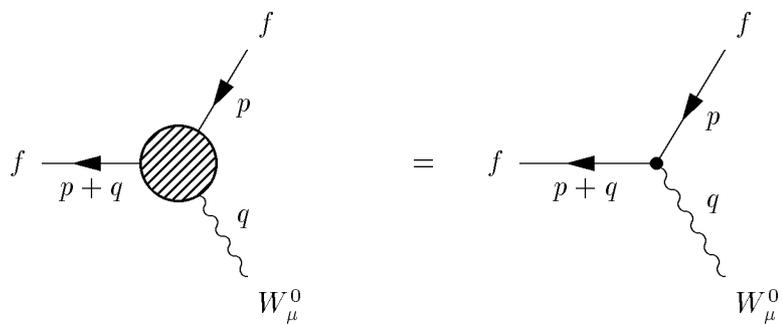


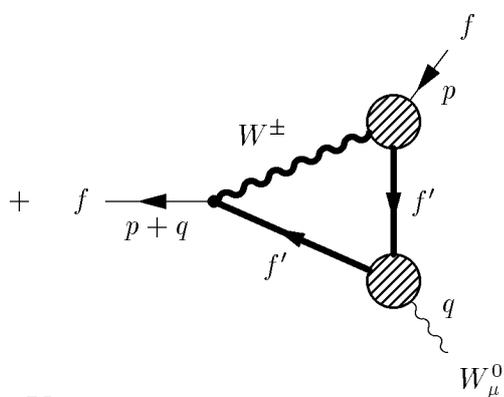
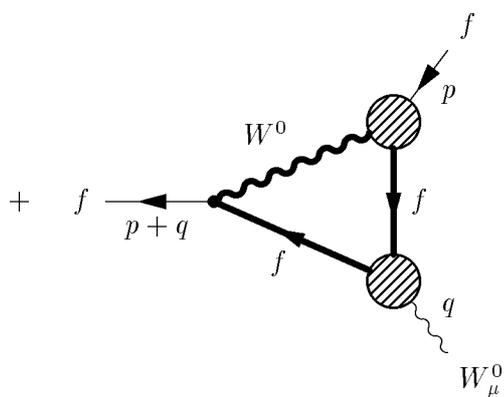
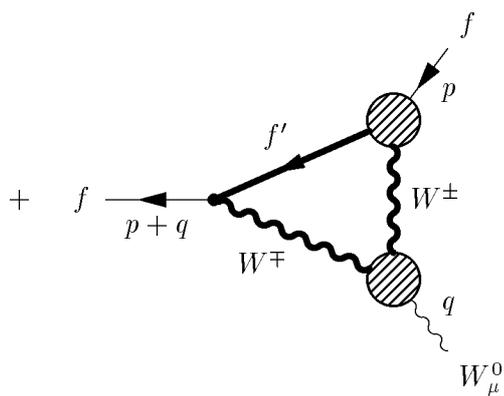
c^0 -Propagator

$$- \left(\text{---} \begin{array}{c} c^0 \\ \leftarrow q \end{array} \text{---} \right)^{-1} = - \left(\text{---} \begin{array}{c} c^0 \\ \leftarrow q \end{array} \text{---} \right)^{-1}$$

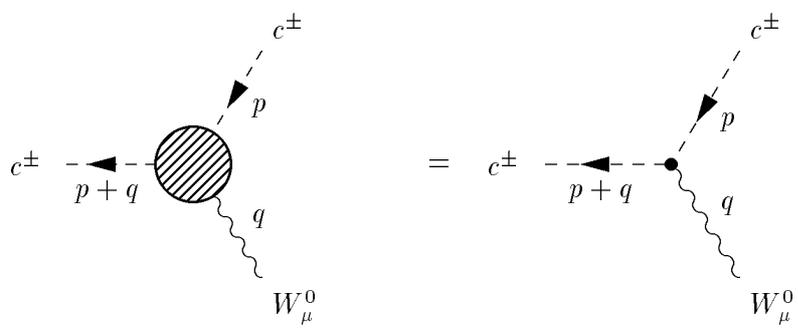


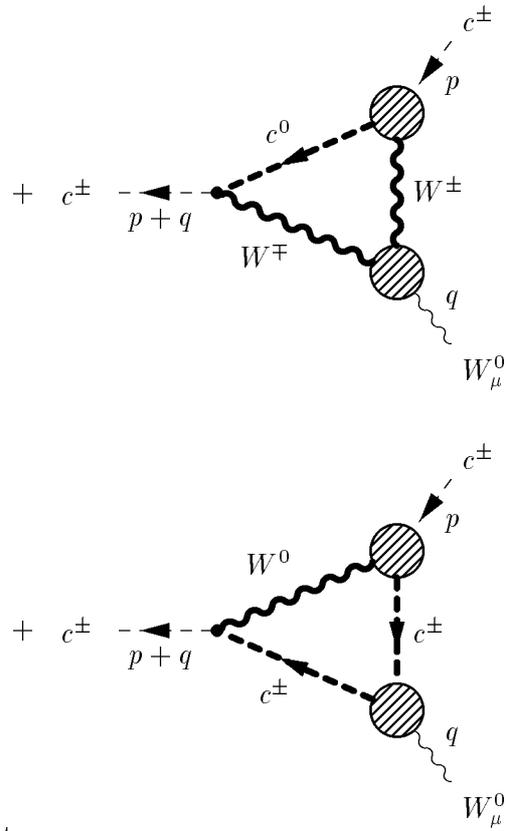
Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex



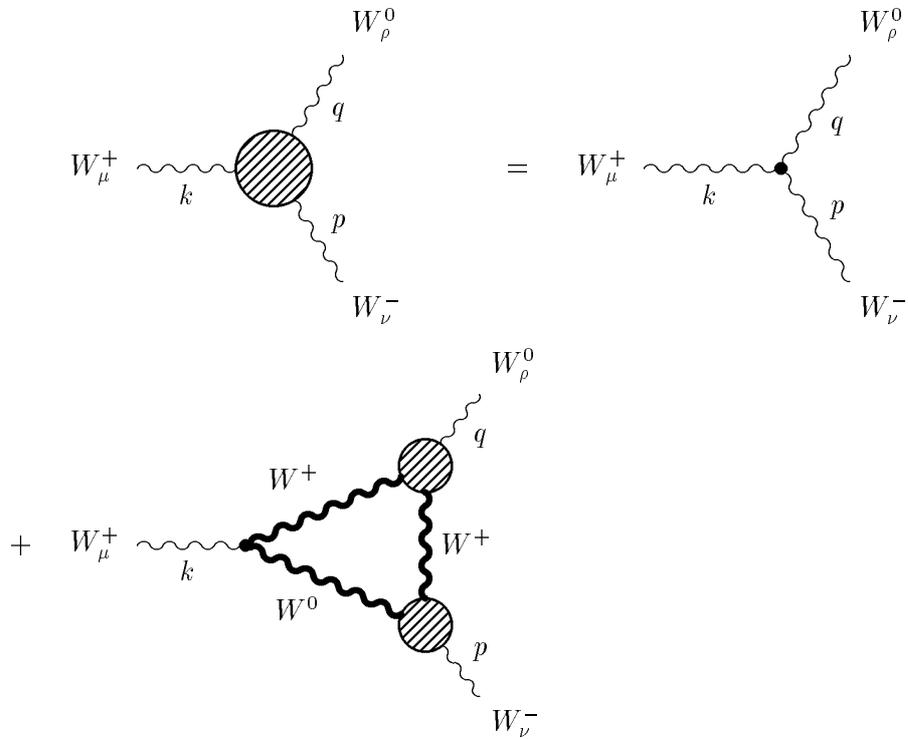


Geist- W^0 -Antigeist-Vertex

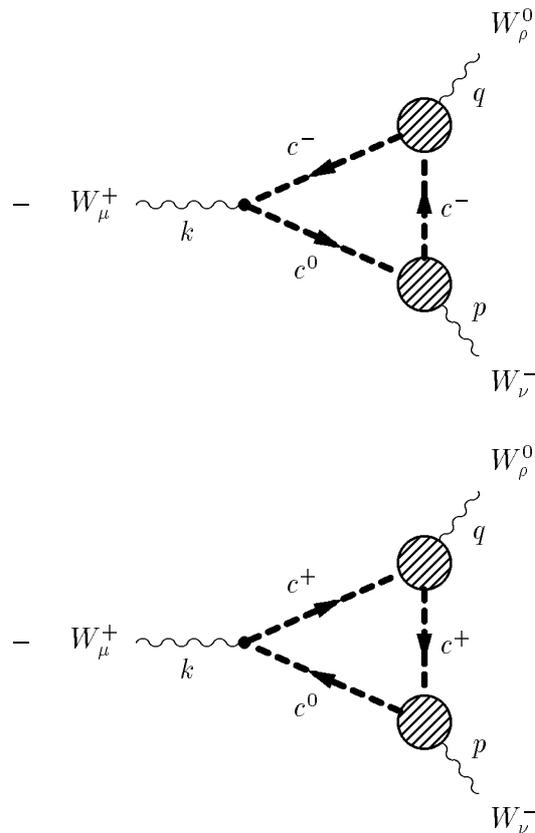




Drei-Bosonen-Vertex



$$\begin{aligned}
& + W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} W^0 \text{---} W^+ \text{---} W_\nu^- \text{---} p \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---} \\
& + W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} W^+ \text{---} W^- \text{---} W_\nu^- \text{---} p \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---} \\
& + W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} W^+ \text{---} W^0 \text{---} W_\nu^- \text{---} p \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---} \\
& - \sum_{f,f'} W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} f \text{---} f' \text{---} f \text{---} f' \text{---} W_\nu^- \text{---} p \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---} \\
& - \sum_{f,f'} W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} f' \text{---} f \text{---} f' \text{---} f \text{---} W_\nu^- \text{---} p \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---}
\end{aligned}$$



Die DS-Gleichungen für die übrigen Basisvertizes sind aus unterschiedlichen Gründen nicht aufgeführt:

- Die Gleichungen für den c^\pm -Propagator, die Fermion- W^\pm -Antifermionvertizes und den $W^+-W^+-W^-$ -Vertex sind aus Gründen, die im nächsten Kapitel klar werden, für unsere Untersuchung ohne Bedeutung.
- Die Gleichungen für die Geist- W^\pm -Antigeistvertizes haben dieselbe Struktur wie diejenige für den Geist- W^0 -Antigeistvertex. Aus diesem Grund lassen sich die Resultate, die man für den Geist- W^0 -Antigeistvertex erhält, ohne weiteres auf die anderen Geist-Boson-Antigeistvertizes übertragen.
- Die Gleichung für den W^+-W^- - W^0 - W^0 -Vertex wird im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt.

In allen DS-Gleichungen ist eine äußere Linie dadurch ausgezeichnet, daß sie stets in einen Vertex nullter Störungsordnung einläuft. Sie entspricht dem Feld, nach dem im Funktionalintegral abgeleitet wurde. Dadurch erhält man für Vertexfunktionen mit drei oder mehr äußeren Linien je nach Wahl der ausgezeichneten Linie unterschiedliche DS-Gleichungen. Diese können im Rahmen unserer Untersuchung jedoch nicht alle betrachtet werden; wir beschränken uns deshalb auf die oben aufgeführten Gleichungen.

Bezeichnet Γ_N einen Basisvertex mit N äußeren Linien und $\Gamma_N^{(0)}$ dessen perturbative nullte Ordnung, so hat seine DS-Gleichung die Struktur:

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i], \quad (1.14)$$

wobei Φ_N ein nichtlineares Funktional ist, das aus Schleifenintegralen über Kombinationen von Basisvertizes Γ_i besteht. Die Integrale enthalten, abhängig von der Anzahl der Schleifen, mindestens eine Potenz des Faktors $(g_0/4\pi)^2$, der formal vor das Funktional Φ_N geschrieben wurde.

Die störungstheoretische Lösung der DS-Gleichungen erhält man, indem man für die Vertizes Γ_i auf der rechten Seite von (1.14) deren nullte Störungsordnung $\Gamma_i^{(0)}$ ansetzt und dann um diese iteriert. Der erste Iterationsschritt ist dabei gegeben durch:

$$\Gamma_N^{(0)} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i^{(0)}] = \Gamma_N^{(0)} + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \Gamma_N^{(1)} + \mathcal{O}(g^4). \quad (1.15)$$

Als Folge der Renormierung der divergenten Integrale in Φ_N tritt statt der nackten Kopplung g_0 die von einer willkürlichen Massenskala ν abhängende renormierte Kopplung $g(\nu)$ auf. Die Fortsetzung der Iteration bei Anwendung des Renormierungsschemas nach jedem Schritt liefert die Störungsreihe für Γ_N :

$$\Gamma_N^{(pert)} = \Gamma_N^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^{2p} \Gamma_N^{(p)}. \quad (1.16)$$

Die Koeffizienten $\Gamma_N^{(i)}$ hängen dabei nicht von der Kopplung ab.

Ein Renormierungsschema besteht aus einem Regularisierungsverfahren und einer Subtraktionsvorschrift für die Divergenzen. Hier wird nachfolgend die Kombination aus dimensioneller Regularisierung und Minimalsubtraktion (MS -Schema) betrachtet. Wird ein divergentes Schleifenintegral dimensionell regularisiert, so geht die nackte Kopplungskonstante g_0 über in $g_0\nu_0^\varepsilon$, wobei ν_0 ein frei wählbarer Massenfaktor ist. Dies ist erforderlich, damit g_0 auch in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen eine dimensionslose Größe bleibt. Die anschließende Renormierung ersetzt die nackten durch die renormierten Größen $g(\nu)\nu^\varepsilon$; hierbei ist ν wieder eine willkürliche Massenskala. Diese Kopplungsrenormierung ist gegeben durch:

$$(g_0\nu_0^\varepsilon)^2 = Z_\alpha(g^2(\nu), \varepsilon) (g(\nu)\nu^\varepsilon)^2. \quad (1.17)$$

Die Renormierungskonstante Z_α hat im MS -Schema in Einschleifen-Ordnung die Form [6]:

$$Z_\alpha = 1 - \beta_0 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g^4), \quad (1.18)$$

wobei β_0 der führende Koeffizient der Renormierungsgruppen-Funktion

$$\beta(g(\nu)) = \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} \quad (1.19)$$

ist. Diese hat im Rahmen der Störungstheorie für $D = 4$ die Reihengestalt:

$$\beta(g(\nu), \varepsilon = 0) = -\beta_0 \frac{g^3(\nu)}{(4\pi)^2} - \beta_1 \frac{g^5(\nu)}{(4\pi)^4} + \mathcal{O}(g^7). \quad (1.20)$$

Löst man (1.17) nach $g(\nu)$ auf und setzt dies in (1.19) ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen der β -Funktion und Z_α in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen:

$$\beta(g(\nu), \varepsilon) = -\varepsilon g(\nu) - \frac{g(\nu)}{2} \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_\alpha. \quad (1.21)$$

In einer $SU(N_C)$ -Eichtheorie ergibt sich für den Koeffizienten β_0 :

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F. \quad (1.22)$$

N_F ist hierbei die Anzahl der Fundamentaldarstellungen der Symmetriegruppe, in denen sich die der Wechselwirkung unterliegenden Fermionen anordnen; für $N_F < 11/2 N_C$ ist $\beta_0 > 0$. Die β -Funktion bestimmt über ihr Vorzeichen das asymptotische Verhalten einer Theorie. Ist dieses Vorzeichen negativ, d. h. $\beta_0 > 0$, so besitzt die effektive Kopplung einen UV-Fixpunkt bei $g = 0$. Das bedeutet, daß bei großen Impulsen die Kopplungsstärke abnimmt und die Störungsrechnung immer bessere Resultate liefert. Dieses Verhalten wird als asymptotische Freiheit bezeichnet und ist aus der QCD bekannt [6]. Da in der hier untersuchten Modelltheorie $N_C = 2$ und $N_F = 4$ (ein Lepton-Dublett und ein aufgrund der Farbladung dreifach gezähltes Quark-Dublett) sind, ist $\beta_0 = 14/3$; die Theorie ist im Gegensatz zum Standardmodell asymptotisch frei. Diese Eigenschaft wird bei der Konstruktion der nichtperturbativ modifizierten Vertizes eine wichtige Rolle spielen.

Kapitel 2

Ansätze für die Vertexfunktionen

2.1 Das Selbstkonsistenzproblem

Im vorigen Kapitel wurde erwähnt, daß die Störungsreihe

$$\Gamma_N^{(pert)} = \Gamma_N^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p} \Gamma_N^{(p)} \quad (2.1)$$

eine iterative Näherungslösung der DS-Gleichung für einen Basisvertex Γ_N darstellt. Es ist jedoch bekannt, daß eine Störungsentwicklung um $g^2 = 0$ im allgemeinen eine divergente asymptotische Reihe liefert, die es nicht gestattet, die Vertexfunktion eindeutig zu rekonstruieren, sondern nur eine endliche Abschätzung des Approximationsfehlers möglich macht.

In dieser Arbeit soll eine ebenfalls iterative Lösung der DS-Gleichungen untersucht werden. Die verwendeten Ansätze $\Gamma_N^{(0)np}$ werden dabei jedoch nichtperturbative Modifikationen gegenüber den störungstheoretischen nullten Ordnungen $\Gamma_N^{(0)}$, welche den Feynman-Regeln aus Abschnitt 1.2 entsprechen, enthalten und sollen für die Basisvertizes auf eine Reihe der Form

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)np} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p} \Gamma_N^{(p)np} \quad (2.2)$$

führen. Man kann die $\Gamma_i^{(0)np}$ deshalb auch als „erweiterte Feynman-Regeln“ betrachten. Der entscheidende Unterschied zur Störungsreihe (2.1) besteht darin, daß bereits die nullte Ordnung $\Gamma_N^{(0)np}$ und von daher alle Koeffizienten $\Gamma_N^{(i)np}$ eine Kopplungsabhängigkeit besitzen, die an der Stelle $g^2 = 0$ nichtanalytisch ist, also eine Abhängigkeit, die durch die Störungsentwicklung nicht erfaßt werden kann. Setzt man in den DS-Gleichungen

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)} + \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_N[\Gamma_i] \quad (2.3)$$

in das Funktional Φ_N anstelle der zu bestimmenden Γ_i die nichtperturbativ modifizierten Ansätze $\Gamma_i^{(0)np}$ ein, so muß sich auf der rechten Seite von (2.3) nicht nur der Term

erster Ordnung in $g^2(\nu)$ ergeben, sondern es muß sich vor allem auch der Ansatz selbst reproduzieren:

$$\Gamma_N^{(0)} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i^{(0)np}] = \Gamma_N^{(0)np} + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \Gamma_N^{(1)np} + \mathcal{O}(g^4). \quad (2.4)$$

Wir werden uns im folgenden auf das Problem der selbstkonsistenten Reproduktion der $\Gamma_N^{(0)np}$ beschränken und die Berechnung höherer Ordnungen nicht weiter verfolgen. Die grundlegenden Verschiebungen des Spektrums der Elementaranregungen gegenüber der perturbativen Lösung (Massenerzeugung und Symmetriebrechung), die in dieser Arbeit im Vordergrund stehen, können durch Störungskorrekturen endlicher Ordnung nicht erzeugt werden und müssen sich daher, wenn überhaupt, bereits in der modifizierten nullten Ordnung zeigen.

Ausgehend von (2.4) kann man das Selbstkonsistenzproblem formulieren als:

$$\Gamma_N^{(0)np} - \Gamma_N^{(0)} + \mathcal{O}(g^2) = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i^{(0)np}]. \quad (2.5)$$

Da $\Gamma_N^{(0)np}$ sich von $\Gamma_N^{(0)}$ durch die nichtperturbativen Modifikationen unterscheidet, ist eine selbstkonsistente Reproduktion des Ansatzes nur dann möglich, wenn das Funktional Φ_N in der Lage ist, eine inverse Potenz von $g^2(\nu)$ auszubilden, d. h. wenn gilt:

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i^{(0)np}] = \frac{g_0^2}{g^2(\nu)} \Phi_N^{(0)}[\Gamma_i^{(0)np}] + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N^{(1)}[\Gamma_i^{(0)np}]. \quad (2.6)$$

Unter der Voraussetzung, daß die perturbative Kopplungsrenormierung in der Form

$$\frac{g_0^2}{g^2(\nu)} = 1 + \mathcal{O}(g^2(\nu)) \quad (2.7)$$

auch in unserer erweiterten Störungsrechnung gültig bleibt, folgt aus (2.4) mit (2.6) die Selbstkonsistenzbedingung für die Reproduktion von $\Gamma_N^{(0)np}$:

$$\Gamma_N^{(0)np} = \Gamma_N^{(0)} + \Phi_N^{(0)}[\Gamma_i^{(0)np}]. \quad (2.8)$$

Sie liefert Selbstkonsistenzgleichungen für die in den Ansätzen $\Gamma_i^{(0)np}$ vorkommenden dimensionslosen Parameter, zu denen auch die der dynamisch erzeugten Massen gehören. Die Aufstellung dieser Gleichungen und ihre Interpretation wird unser eigentliches Ziel sein. Daß tatsächlich ein Mechanismus existiert, der innerhalb von Φ_N Faktoren $1/g^2(\nu)$ erzeugt, wird später noch ausführlich behandelt.

Wir werden Ansätze für die nichtperturbativ modifizierten Basisvertizes konstruieren, die im Gegensatz zu den störungstheoretischen Vertexfunktionen auch Massenterme enthalten. Die an der Stelle $g^2 = 0$ nichtanalytische Kopplungsabhängigkeit wird dabei über die renormierungsgruppeninvariante Massenskala Λ , die im nächsten Abschnitt diskutiert wird, in die Ansätze eingebaut.

2.2 Die Massenskala Λ

Eine observable Größe \mathcal{G} hängt von der renormierten Kopplung $g(\nu)$, von der willkürlich gewählten Massenskala ν und von weiteren Parametern, wie z. B. äußeren Impulsen p_i , ab. Bei Verwendung einer anderen Skala ν' und der entsprechenden Kopplung $g(\nu')$ muß \mathcal{G} invariant bleiben, da physikalische Größen nicht von der Wahl der Massenskala abhängen dürfen:

$$\nu \frac{d}{d\nu} \mathcal{G} = \left\{ \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} \frac{\partial}{\partial g(\nu)} \right\} \mathcal{G} = \left\{ \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta(g(\nu)) \frac{\partial}{\partial g(\nu)} \right\} \mathcal{G} = 0. \quad (2.9)$$

\mathcal{G} kann also nur von einer geeigneten Kombination aus ν und $g(\nu)$ abhängen; \mathcal{G} ist konstant entlang der Integralkurven $g = g(\nu)$.

Integriert man (1.19), so erhält man für zwei beliebige Werte ν und ν' der Massenskala und die dazugehörigen Kopplungen g und g' die Gleichung:

$$\ln \frac{\nu}{\nu'} = \int_{g'}^g \frac{1}{\beta(u)} du \equiv f(g) - f(g'), \quad (2.10)$$

woraus folgt, daß für alle ν und g auf einer solchen Integralkurve gilt:

$$\begin{aligned} \ln \nu - f(g) &= \text{const} =: \ln \Lambda \\ \Rightarrow \Lambda(g^2(\nu), \nu) &= \nu \exp \left\{ - \int^g \frac{du}{\beta(u)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die so definierte Größe Λ hat wie ν die Dimension einer Masse und ist eine Renormierungsgruppeninvariante. Sie charakterisiert die verschiedenen Integralkurven und ist vom verwendeten Renormierungsschema abhängig¹. Setzt man für $\beta(u)$ die störungstheoretische Form (1.20) ein, so ergibt sich:

$$\Lambda(g^2(\nu), \nu) = \nu \exp \left\{ - \frac{1}{2\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(g^2, g^2 \ln g^2)) \right\}. \quad (2.12)$$

An (2.12) erkennt man, daß Λ im Limes $g^2 \rightarrow 0$ schneller als jede Potenz von g^2 gegen Null geht. Daher existiert der formale Grenzfall, in dem Λ verschwindet, aber alle Potenzen g^{2p} endlich bleiben. Dies wird im weiteren als „Abschalten der Massenskala Λ “ oder „perturbativer Limes“ bezeichnet.

Λ ist also schon auf Einschleifenniveau nicht in eine Reihe um $g^2 = 0$ entwickelbar. Die Störungstheorie kann eventuell vorhandene Λ -Abhängigkeiten physikalischer Größen nicht erfassen, soweit sie über die bloße Reparametrisierung der Störungsreihe

$$\left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{g(t)}{4\pi} \right)^2 = \frac{1}{\beta_0 \ln t} \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\ln t} \right) \right\}, \quad t := \frac{q^2}{\Lambda^2} \gg 1 \quad (2.13)$$

¹Die Schemaabhängigkeit äußert sich in einer Umskalierung von Λ mit einem Faktor, der durch Rechnungen in Zweischleifenordnung bestimmbar ist.

hinausgehen; dies gilt insbesondere für rationale Λ -Abhängigkeiten. Ferner ist Λ in einer masselosen Theorie in vier Dimensionen der einzige fundamentale dimensionsbehaftete Parameter. Daher kann man mit guten Gründen die Ansicht vertreten, daß die Ausbildung der Massenskala Λ , die ein reines Produkt der Renormierung ist, in strikt renormierbaren Feldtheorien den wichtigsten nichtstörungstheoretischen Effekt überhaupt darstellt.

Deshalb werden wir Λ benutzen, um die nichtanalytische Kopplungsabhängigkeit der nichtperturbativen Modifikationen zu realisieren.

2.3 Systematik nichtperturbativer Modifikationen

Die Systematik der in dieser Arbeit verwendeten nichtperturbativ erweiterten Störungsrechnung wird am Beispiel der QCD in [3] sehr detailliert dargestellt und soll hier nur kurz zusammengefaßt werden, da die wesentlichen Überlegungen ohne weiteres auf unser $SU(2)$ -Modell übertragbar sind.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß nichtperturbative renormierungsgruppeninvariante Größen typischerweise eine rationale Abhängigkeit von der Massenskala Λ aufweisen. Eine solche Abhängigkeit wird auch in die Ansätze für die Basisvertizes eingebaut. Da man zu einer systematischen Erweiterung der Störungsreihe gelangen möchte, liegt es nahe, eine Doppelsequenz der Form

$$\Gamma_N(g^2(\nu), \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r,p]}(g^2(\nu), \nu), \quad (2.14)$$

$$\Gamma_N^{[r,p]}(g^2(\nu), \nu) = \Gamma_N^{[r,0]}(\Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{[r,p']}(\Lambda, \nu) \quad (2.15)$$

zu betrachten. Mit dieser Doppelsequenz sollen mit Hilfe der rationalen Λ -Abhängigkeit der Basisvertizes charakteristische nichtperturbative Effekte wie z.B. das Confinement in der QCD oder die dynamische Massenbildung in unserer Modelltheorie beschrieben werden. Dabei bezeichnet der Index r die Stufe der globalen Approximation in einer bestimmten Nennerordnung bezüglich Λ , während der Index p weiterhin die Potenzen von $g^2(\nu)$ in der lokalen Approximation um $g^2(\nu) = 0$ zählt. $\Gamma_N^{[r,0]}$ bezeichnet man als die nichtperturbativ modifizierte Vertexfunktion nullter perturbativer Ordnung oder „erweiterte Feynman-Regel“. Man behandelt auf diese Weise Λ und $g(\nu)$ formal wie zwei unabhängige Parameter, wird allerdings in den Endresultaten versuchen, die explizite Kopplungsabhängigkeit mittels Resummationstechniken durch Λ zu ersetzen.

Mit (2.14) erhält man eine Lösung in Form einer Potenzreihe in $g^2(\nu)$, die nur dann sinnvoll ist, wenn $g(\nu)$ für alle Werte der Massenskala ν klein genug bleibt; man betrachtet ebenso wie in der Störungsrechnung eine Schwachkopplungslösung. Dies steht in keinem Widerspruch zum heutigen Kenntnisstand über das funktionale Verhalten der Kopplung in Abhängigkeit von ν .

Die einfachste Möglichkeit, die globale rationale Λ -Abhängigkeit in die Ansätze so einzubauen, daß man den oberflächlichen Divergenzgrad weiterhin durch „power counting“

der Impulspotenzen bestimmen kann, ist die Darstellung der $\Gamma_N^{[r,0]}$ durch rationale Approximanten der Ordnung r in Λ^2 . Diese Approximanten werden durch ihren Nennergrad r charakterisiert; die Zählerstruktur wird durch Randbedingungen festgelegt, die wir noch diskutieren werden.

2.4 Konstruktion der Ansätze

In diesem Abschnitt werden wir Ansätze für die nichtperturbativ modifizierten Basisvertizes nullter perturbativer Ordnung $\Gamma_N^{[r,0]}$ unseres Modells konstruieren. Sie sollen dabei die folgenden einschränkenden, physikalisch plausiblen Randbedingungen erfüllen:

- Bei formalem Abschalten der Massenskala Λ soll der Lösungsansatz (2.15) in die Störungsreihe übergehen:

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\Lambda = 0) = \Gamma_N^{(p)} \quad \forall p. \quad (2.16)$$

Dieser Grenzfall wird als „perturbativer Limes“ bezeichnet.

- Aus der Störungstheorie ist bekannt, daß die logarithmischen Korrekturen zur asymptotischen Freiheit einer Theorie eine Folge der partiellen Aufsummation der g^2 -Potenzreihe sind. Da unser $SU(2)$ -Modell asymptotisch frei ist, liegt es nahe, für die nullten Ordnungen $\Gamma_N^{[r,0]}$ naive asymptotische Freiheit zu fordern, d.h. bei Hochskalieren aller äußeren Impulse p_i soll gelten:

$$\Gamma_N^{[r,0]}(\lambda p_i) \rightarrow \Gamma_N^{(0)}(\lambda p_i) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Wir werden im folgenden an Stelle von (2.17) eine etwas strengere Bedingung verwenden:

- Die nichtperturbativ erweiterten Basisvertizes sollen perturbativ renormierbar bleiben. (2.18)

Diese Forderung ist in asymptotisch freien Theorien plausibel, denn dort entspricht das Verhalten der Vertizes in Schleifenintegralen für große Impulse, abgesehen von den oben erwähnten logarithmischen Korrekturen, dem störungstheoretischen Verhalten. (2.18) ist eine stärkere Einschränkung als (2.17), da perturbative Renormierbarkeit für Vertexfunktionen mit $N \geq 3$ äußeren Linien bedeutet, daß das Divergenzverhalten auch dann das der störungstheoretischen Vertizes bleibt, wenn nur die in der Schleife laufenden Impulse hochskaliert werden, während die anderen endlich bleiben.

Ein weiteres Kriterium bei der Konstruktion der Ansätze wird im Fermion- und Bosonsektor der Theorie das Verhalten unter der \mathcal{CP} -Transformation sein. Die Lagrangedichte ist aufgrund des $(v_0 - a_0 \gamma_5)$ -Terms in der Fermion-Boson-Wechselwirkung paritätsverletzend, aber \mathcal{CP} -invariant. Wir werden in die nichtperturbativ erweiterten Ansätze für den Drei-Bosonen-Vertex und den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex zunächst \mathcal{CP} -verletzende

Teile einbauen und dann untersuchen, ob sie sich in den DS-Gleichungen selbstkonsistent reproduzieren können. Wenn das der Fall ist, erhält man auf diese Weise einen Mechanismus, der \mathcal{CP} -verletzende Effekte verursachen kann. Dies ist angesichts der Tatsache, daß im Rahmen des Standardmodells die Frage nach der Ursache der \mathcal{CP} -Verletzung noch nicht endgültig geklärt ist [7], ein interessanter Aspekt. Die Ansätze für die Propagatoren und die übrigen Vertizes werden \mathcal{CP} -invariant gewählt.

Die Konstruktion der Ansätze für die Basisvertizes wird nach folgendem Muster ablaufen:

- Zunächst wird die Stufe r der rationalen Approximation festgelegt.
- Dann wird eine Basis für die Lorentztensor- und Diracmatrixstruktur der perturbativen Vertexfunktion gebildet. Aus dieser Basis und geeigneten invarianten rationalen Impulsfunktionen wird der allgemeinste mögliche Ansatz konstruiert [8].
- Schließlich werden an die so erhaltenen Ansätze die oben diskutierten einschränkenden Randbedingungen gestellt.

In dieser Untersuchung wird die zweckmäßigste Wahl von r durch die physikalische Zielsetzung vorgegeben werden, d. h. es wird die niedrigste Approximationsstufe gewählt, welche die Massenbildung bewirken kann.

Für die Ansätze der nichtperturbativ modifizierten Vertexfunktionen nullter perturbativer Ordnung werden im weiteren Verlauf statt $\Gamma_N^{[r,0]}$ dieselben Bezeichnungen Γ_N verwendet, mit denen im vorigen Kapitel die vollen Vertizes versehen wurden, da nur noch diese Ansätze in Erscheinung treten.

W^0 -Propagator

Der W^0 -Propagator ist ein Lorentztensor zweiter Stufe, der von einem Impuls q abhängt. Eine geeignete Lorentztensorbasis kann aus dem Transversalprojektor $t_{\mu\nu}(q) = \delta_{\mu\nu} - (q_\mu q_\nu / q^2)$ und dem Longitudinalprojektor $l_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu / q^2)$ gebildet werden:

$$D_{\mu\nu}^0(q) = t_{\mu\nu}(q)D_T^0(q^2) + l_{\mu\nu}(q)D_L^0(q^2). \quad (2.19)$$

Im Rahmen der Störungstheorie wird der longitudinale Anteil des vollen Propagators durch die Slavnov-Taylor-Identität

$$q_\mu D_{\mu\nu}^0(q) = q_\nu \frac{\xi}{q^2} \quad (2.20)$$

auf seine perturbative Gestalt festlegt [9]. Die Frage, ob die Slavnov-Taylor-Identitäten in der hier verwendeten nichtperturbativ erweiterten Störungsrechnung gültig sind, ist bisher kaum untersucht. Da die physikalischen Freiheitsgrade der Eichfelder jedoch im Transversalbereich liegen, ist zu erwarten, daß sich nichtperturbative Strukturen vorzugsweise dort

zeigen werden. Wir werden uns deshalb nicht weiter mit dem Longitudinalteil befassen und $D_L^0(q^2)$ auf 0 setzen.

Es soll untersucht werden, ob das W^0 -Feld zwei stabile Teilchen hervorbringen kann, von denen eines masselos ist und das andere eine von 0 verschiedene Masse M hat. Auf diese Weise sollen im Rahmen unseres Modells das Photon und das Z -Boson „simuliert“ werden, ohne ein abelsches $U(1)$ -Eichfeld einführen zu müssen. Daher muß der Ansatz für $D_T^0(q^2)$ zwei Nennerfaktoren q^2 und $q^2 + M^2$ besitzen. Die Existenz stabiler Teilchen ist gemäß der Spektraldarstellung direkt mit der Polstruktur der Propagatoren verknüpft [10]. Reelle Pole im Propagator beschreiben dabei stabile Teilchen, komplexe Pole stehen für Elementaranregungen, die nicht asymptotisch detektierbar sind. Deshalb verwenden wir in unseren Ansätzen ausschließlich reelle Parameter, während in den Arbeiten [11, 12, 13] zur Beschreibung des Confinement in der QCD komplexe Pole für die Quark- und Gluonpropagatoren angesetzt werden. Weil die Massenskala Λ den einzigen dimensionsbehafteten invarianten Parameter der Theorie darstellt, sind alle dynamisch erzeugten Teilchenmassen proportional zu Λ ; man kann M^2 durch $u_0^{(1)}\Lambda^2$ ersetzen.

Hiermit ist der Nenner bereits festgelegt. Berücksichtigt man die Randbedingungen (2.16) und (2.17), so erhält man die Zählerstruktur und den Ansatz für $D_T^0(q^2)$:

$$D_T^0(q^2) = \frac{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}{q^2(q^2 + u_0^{(1)}\Lambda^2)}; \quad (2.21)$$

der Ansatz für den W^0 -Propagator in Landau-Eichung lautet dann:

$$D_{\mu\nu}^0(q) = t_{\mu\nu}(q) \frac{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}{q^2(q^2 + u_0^{(1)}\Lambda^2)}. \quad (2.22)$$

Damit ist die Stufe r der rationalen Approximation im W^0 -Sektor der Theorie bestimmt; es ist $r = 1$, denn die W^0 -Vertexfunktion

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\mu\nu}^0(q) &= t_{\mu\nu}(q) \Gamma_{2T}^0(q^2) \\ &= -t_{\mu\nu}(q) \frac{q^2(q^2 + u_0^{(1)}\Lambda^2)}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2} \\ &= -t_{\mu\nu}(q) \left[q^2 + (u_0^{(1)} - u_0^{(2)})\Lambda^2 + \frac{u_0^{(2)}(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})\Lambda^4}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

ist das negative Inverse des W^0 -Propagators und r bezeichnet den Nennergrad bezüglich q^2 der Vertexfunktion.

Daß (2.22) tatsächlich zwei Teilchen unterschiedlicher Massen beschreibt, sieht man deutlich an der partialbruchzerlegten Form:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^0(q) &= t_{\mu\nu}(q) \left[\frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)}} \frac{1}{q^2} + \left(1 - \frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)}}\right) \frac{1}{q^2 + u_0^{(1)}\Lambda^2} \right] \\ &= t_{\mu\nu}(q) \left[\cos^2\phi \frac{1}{q^2} + \sin^2\phi \frac{1}{q^2 + u_0^{(1)}\Lambda^2} \right] \quad \text{mit } \cos^2\phi := \frac{u_0^{(2)}}{u_0^{(1)}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Abgesehen von den Massen sind die beiden Eichbosonen völlig identisch und besitzen dieselben Quantenzahlen. Der Winkel ϕ parametrisiert das Residuenverhältnis des Propagators und die relative Kopplungsstärke der Teilchen.

Wenn sich der Propagatoransatz (2.22) als selbstkonsistenzfähig erweist, dann kann man die Fermion- W^0 -Kopplung in zwei effektive Kopplungen an die beiden Eichbosonen zerlegen. Damit das masselose Boson in unserem Modell ein realistisches Photon darstellt, muß sich die zugehörige effektive Kopplung als proportional zur elektrischen Ladung der Fermionen erweisen.

W^\pm -Propagator

Die Lorentztensorstruktur des W^\pm -Propagators ist dieselbe wie beim W^0 -Propagator. Der wesentliche Unterschied zu diesem besteht darin, daß zu den geladenen Eichvektorfeldern jeweils nur ein massives Boson gehören soll, weshalb der Nenner die Form $q^2 + u_+ \Lambda^2$ hat. Mit (2.16) und (2.17) erhält man die Ansätze:

$$D_{\mu\nu}^+(q) = t_{\mu\nu}(q) D_T^+(q^2) = t_{\mu\nu}(q) \frac{1}{q^2 + u_+ \Lambda^2}, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{2\mu\nu}^+(q) = t_{\mu\nu}(q) \Gamma_{2T}^+(q^2) = -t_{\mu\nu}(q) (q^2 + u_+ \Lambda^2). \quad (2.26)$$

Die \mathcal{CP} -Invarianz der Ansätze ist gegeben, wenn W^+ und W^- durch den gleichen Propagator beschrieben werden; dies ist hier der Fall, da für beide Teilchen dieselbe Masse angesetzt wird. Die Stufe r der rationalen Approximation beträgt im W^\pm -Sektor $r = 0$.

Die spontane Brechung der Eichsymmetrie drückt sich also darin aus, daß die beiden Bosonpropagatoren in derselben Rechnung durch erweiterte Feynman-Regeln verschiedener Approximationsstufen r beschrieben werden müssen. Wegen des schon erwähnten strukturellen Unterschieds der beiden Selbstenergiegleichungen ist dies prinzipiell dynamisch möglich.

Fermion-Propagator

Der Fermion-Propagator ist ein Diracmatrixwertiger Lorentzskalar und hängt von einem Impuls p ab. Eine mögliche Basis hierfür besteht aus \not{p} , $\not{p}\gamma_5$, γ_5 und der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$. Zu jedem Fermionfeld soll ein massives² Teilchen gehören, weshalb der Ansatz für die Fermion-Propagatoren einen reellen Massenpol besitzen muß. Wenn die beiden Mitglieder eines Fermiondoublets verschiedene dynamische Massen ausbilden, so bedeutet dies zugleich eine spontane Brechung der Eichsymmetrie.

Im Fermionsektor ist die Stufe der rationalen Approximation demnach $r = 0$. Der allgemeinste Ansatz ergibt sich hieraus als:

$$S_f(p) = \frac{F_1(p^2) \not{p} + F_2(p^2) \not{p}\gamma_5 + F_3(p^2) \mathbf{1} + F_4(p^2) \gamma_5}{p^2 + (u_f \Lambda)^2}. \quad (2.27)$$

²Allen Fermionen wird zunächst eine Masse $u_f \Lambda$ zugeordnet, die aber nicht zwangsläufig von 0 verschieden sein muß.

Die invarianten Funktionen F_i sind Polynome in p^2 und werden durch die Randbedingungen (2.16) und (2.17) bzw. (2.18) und die Forderung nach \mathcal{CP} -Invarianz der Propagatoren stark eingeschränkt.

Die \mathcal{CP} -Invarianz des Fermion-Propagators ist gemäß (B.1) gegeben, wenn

$$S_f(p) \stackrel{!}{=} \frac{F_1(p^2) \not{p} + F_2(p^2) \not{p} \gamma_5 + F_3(p^2) \mathbf{1} - F_4(p^2) \gamma_5}{p^2 + (u_f \Lambda)^2} \quad (2.28)$$

gilt, woraus $F_4(p^2) = 0$ folgt.

Nach (2.17) muß der Ansatz für große Impulse p in den störungstheoretischen Propagator nullter Ordnung übergehen:

$$\frac{F_1(p^2) \not{p} + F_2(p^2) \not{p} \gamma_5 + F_3(p^2) \mathbf{1}}{p^2 + (u_f \Lambda)^2} \rightarrow -\frac{\not{p}}{p^2} \quad \text{für große } p. \quad (2.29)$$

Demnach müssen $F_1(p^2) = -1$ und $F_2(p^2) = 0$ sein, während F_3 eine konstante Funktion der Dimension Masse ist. Da die Approximationsstufe $r = 0$ ist, muß man den Propagator als Matrixpol schreiben können, was nur mit der Wahl $F_3(p^2) = u_f \Lambda$ möglich ist. Der Ansatz hat in Matrixpol- und in gewöhnlicher Schreibweise dann die Form:

$$S_f(p) = \frac{1}{\not{p} + u_f \Lambda} = -\frac{\not{p} - u_f \Lambda}{p^2 + (u_f \Lambda)^2}, \quad (2.30)$$

$$\bar{\Gamma}_{2f}(p) = \frac{p^2 + (u_f \Lambda)^2}{\not{p} - u_f \Lambda} = -(\not{p} + u_f \Lambda). \quad (2.31)$$

Geist-Propagatoren

Die Geist-Propagatoren sind lorentzskalarwertige Funktionen eines äußeren Impulses q . Die Stufe der rationalen Approximation im Geistsektor wird der entsprechenden im Bosonsektor angepaßt, d. h. es ist $r = 0$ für die geladenen Geister und $r = 1$ für das c^0 . Weiterhin haben die Geist-Propagatoren die Eigenschaft, auch für beliebige r stets einen masselosen Pol zu besitzen. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß jedes Feynman-Diagramm mit äußeren Geistlinien eine Potenz q_i^2 eines äußeren Impulses pro Geist-Antigeist-Paar abfaktoriert. Dadurch nimmt die DS-Gleichung für den negativen inversen Geist-Propagator die spezielle Form

$$\tilde{\Gamma}_2(q^2) = -q^2 \left[1 + \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \mathcal{I}(q^2) \right] \quad (2.32)$$

an, wobei $\mathcal{I}(q^2)$ für die zur DS-Gleichung gehörenden dimensionslosen, divergenten Schleifenintegrale steht. Demnach behält der c^\pm -Propagator seine perturbative Gestalt:

$$\tilde{D}^+(q^2) = \frac{1}{q^2} = -[\tilde{\Gamma}_2^+(q^2)]^{-1}, \quad (2.33)$$

während der Ansatz für den c^0 -Propagator die Form

$$\tilde{D}^0(q^2) = \frac{q^2 + u_G^{(2)} \Lambda^2}{q^2(q^2 + u_G^{(1)} \Lambda^2)} \quad (2.34)$$

besitzt. Für die Vertexfunktion gilt:

$$\tilde{\Gamma}_2^0(q^2) = -\frac{q^2(q^2 + u_G^{(1)}\Lambda^2)}{q^2 + u_G^{(2)}\Lambda^2} \quad (2.35)$$

$$= -\left[q^2 + (u_G^{(1)} - u_G^{(2)})\Lambda^2 + \frac{u_G^{(2)}(u_G^{(2)} - u_G^{(1)})\Lambda^4}{q^2 + u_G^{(2)}\Lambda^2} \right]. \quad (2.36)$$

Alle gestellten Randbedingungen werden durch diese Ansätze erfüllt.

Fermion- W^\pm -Antifermion-Vertizes

Sowohl im Fermion- als auch im W^\pm -Sektor gilt $r = 0$, weshalb die beiden Vertizes keine nichtperturbative Nennerstruktur erhalten. Damit sind aus Dimensionsgründen keine Modifikationen möglich, die (2.16) und (2.18) erfüllen; die Fermion- W^\pm -Antifermion-Vertizes behalten ihre perturbative Form bei:

$$\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^\pm(p+q, p, q) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_\mu(v_0 - a_0\gamma_5). \quad (2.37)$$

Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex

Da im W^0 -Sektor der Theorie $r = 1$ und im Fermionsektor $r = 0$ ist, erhält der Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex $\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q)$ einen Nennerfaktor $q^2 + z_0\Lambda^2$, wobei q der einlaufende W^0 -Impuls ist.

$\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0$ ist ein dimensionsloser, diracmatrixwertiger Lorentztensor erster Stufe. Eine Basis für diese Struktur läßt sich aus $\gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5, \mathbf{1}, \gamma_5$ und $\sigma_{\mu\nu} (:= \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu])$ sowie zwei linear unabhängigen Kombinationen aus den drei über die Viererimpulserhaltung voneinander abhängenden äußeren Impulsen konstruieren. Wir werden als unabhängige Impulse den W^0 -Impuls q und den Impuls p des einlaufenden Fermions benutzen.

An dieser Stelle wird deutlich, warum (2.18) eine stärkere Einschränkung als (2.17) darstellt. Unter Berücksichtigung von (2.16) und (2.17) stehen die Basiselemente $p_\mu, q_\mu, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}p_\nu$ und $\sigma_{\mu\nu}q_\nu$ zusammen mit geeigneten invarianten Funktionen zur Konstruktion nichtperturbativer Modifikationen zur Verfügung; dazu kommen die entsprechenden Terme $\cdot\gamma_5$ (Terme mit zwei oder mehr Impulsfaktoren sind aus Dimensionsgründen nicht mit (2.16) vereinbar). Der allgemeinste Ansatz hat dann die Form:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) = & \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)0} - \frac{1}{q^2 + z_0\Lambda^2} \left[\Lambda^2\gamma_\mu(v_1^{(f)} - a_1^{(f)}\gamma_5) \right. \\ & + \Lambda q_\mu(v_2^{(f)} - a_2^{(f)}\gamma_5) + \Lambda\frac{1}{i}\sigma_{\mu\nu}q_\nu(v_3^{(f)} - a_3^{(f)}\gamma_5) \\ & \left. + \Lambda p_\mu(v_4^{(f)} - a_4^{(f)}\gamma_5) + \Lambda\frac{1}{i}\sigma_{\mu\nu}p_\nu(v_5^{(f)} - a_5^{(f)}\gamma_5) \right]. \quad (2.38) \end{aligned}$$

Verwendet man stattdessen (2.16) und (2.18), so wird die Basis auf q_μ, γ_μ und $\sigma_{\mu\nu}q_\nu$ eingeschränkt. Laufen nämlich die Fermionlinien in einer Schleife und wird p hochskaliert,

während die W^0 -Linie eine äußere Linie ist und q endlich bleibt, so verletzen die den Impuls p enthaltenden Modifikationen die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit, während die naive asymptotische Freiheit gegeben ist.

Somit erhält man für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex den Ansatz:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) = & -T_{3f} \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) \\ & - \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0 \Lambda^2} \left[\gamma_\mu (v_1^{(f)} - a_1^{(f)} \gamma_5) \right. \\ & \left. + \frac{q_\mu}{\Lambda} (v_2^{(f)} - a_2^{(f)} \gamma_5) + \frac{1}{i} \sigma_{\mu\nu} \frac{q_\nu}{\Lambda} (v_3^{(f)} - a_3^{(f)} \gamma_5) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Koeffizienten $v_i^{(f)}$ und $a_i^{(f)}$ ($i = 1, 2, 3$) werden als von der Fermionsorte f abhängig angesetzt, um den Ansatz möglichst allgemein zu halten. Ferner sei darauf hingewiesen, daß die beiden Terme $\sim q_\mu \mathbf{1}$ und $\sim \sigma_{\mu\nu} q_\nu \gamma_5$ im Gegensatz zu den übrigen nicht invariant unter der \mathcal{CP} -Transformation sind.

Geist-Boson-Antigeist-Vertizes

Da an jedem der Geist-Boson-Antigeist-Vertizes entweder ein W^0 oder ein c^0 bzw. \bar{c}^0 einläuft, beträgt die Stufe der rationalen Approximation $r = 1$ bezüglich des Impulses des neutralen Teilchens. Die Vertizes sind Lorentztensoren erster Stufe; eine mögliche Basis besteht aus dem Impuls $p+q$ des auslaufenden Geistes und dem einlaufenden Bosonimpuls q . Dies führt zusammen mit (2.16) und (2.18) auf folgende Ansätze³ für die verschiedenen Vertizes:

$$\tilde{\Gamma}_3^{\pm\mp 0}{}_\mu(p+q, p, q) = \pm \left[(p+q)_\mu \left(1 + \frac{y_1^{(0)} \Lambda^2}{q^2 + y_0^{(0)} \Lambda^2} \right) + q_\mu \frac{y_2^{(0)} \Lambda^2}{q^2 + y_0^{(0)} \Lambda^2} \right], \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_3^{0\pm\mp}{}_\mu(p+q, p, q) = & \pm \left[(p+q)_\mu \left(1 + \frac{y_1^{(+)} \Lambda^2}{(p+q)^2 + y_0^{(+)} \Lambda^2} \right) \right. \\ & \left. + q_\mu \frac{y_2^{(+)} \Lambda^2}{(p+q)^2 + y_0^{(+)} \Lambda^2} \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\tilde{\Gamma}_3^{\mp 0\pm}{}_\mu(p+q, p, q) = \pm \left[(p+q)_\mu \left(1 + \frac{y_1^{(+)} \Lambda^2}{p^2 + y_0^{(+)} \Lambda^2} \right) + q_\mu \frac{y_2^{(+)} \Lambda^2}{p^2 + y_0^{(+)} \Lambda^2} \right]. \quad (2.42)$$

Drei-Bosonen-Vertex

Beim $W^+W^-W^0$ -Vertex $\Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q)$ handelt es sich um einen Lorentztensor dritter Stufe, der von zwei unabhängigen Impulsen abhängt ($k+p+q=0$). Er wird in der W^0 -Linie auf der Stufe $r = 1$ nichtperturbativ modifiziert, während für die W^\pm -Linien $r = 0$ gilt. Der Ansatz wird somit einen Nennerfaktor $q^2 + x_0 \Lambda^2$ besitzen.

³Die Ansätze für die Vertizes mit geladenen Bosonen enthalten aus Symmetriegründen dieselben Parameter $y_i^{(+)}$.

Eine Basis für die Lorentzstruktur besteht aus 14 paritätserhaltenden Tensoren, die aus der euklidischen Metrik $\delta_{\alpha\beta}$ und Kombinationen aus den äußeren Impulsen zusammengesetzt sind, sowie 8 Tensoren, die den total antisymmetrischen Tensor vierter Stufe $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ enthalten und paritätsverletzend sind. Dies liefert folgenden Ansatz⁴:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) = & \frac{1}{q^2 + x_0\Lambda^2} \left[F_1(k^2, p^2, q^2) \delta_{\mu\nu}(p - k)_\rho \right. \\
& + F'_1(k^2, p^2, q^2) \delta_{\nu\rho}(q - p)_\mu \\
& + F''_1(k^2, p^2, q^2) \delta_{\rho\mu}(k - q)_\nu \\
& + F_2(k^2, p^2, q^2) (q - p)_\mu (k - q)_\nu (p - k)_\rho \\
& + F_3(k^2, p^2, q^2) \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
& + F'_3(k^2, p^2, q^2) \delta_{\nu\rho} k_\mu \\
& + F''_3(k^2, p^2, q^2) \delta_{\rho\mu} p_\nu \\
& + F_4(k^2, p^2, q^2) (q - p)_\mu (k - q)_\nu q_\rho \\
& + F'_4(k^2, p^2, q^2) (k - q)_\nu (p - k)_\rho k_\mu \\
& + F''_4(k^2, p^2, q^2) (p - k)_\rho (q - p)_\mu p_\nu \\
& + F_5(k^2, p^2, q^2) (q - p)_\mu p_\nu q_\rho \\
& + F'_5(k^2, p^2, q^2) (k - q)_\nu q_\rho k_\mu \\
& + F''_5(k^2, p^2, q^2) (p - k)_\rho k_\mu p_\nu \\
& + F_6(k^2, p^2, q^2) k_\mu p_\nu q_\rho \\
& + F_7(k^2, p^2, q^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (p - k)_\sigma \\
& + F_8(k^2, p^2, q^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \\
& + F_9(k^2, p^2, q^2) (q - p)_\mu \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau} (q - p)_\sigma k_\tau \\
& + F'_9(k^2, p^2, q^2) (k - q)_\nu \varepsilon_{\rho\mu\sigma\tau} (k - q)_\sigma p_\tau \\
& + F''_9(k^2, p^2, q^2) (p - k)_\rho \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} (p - k)_\sigma q_\tau \\
& + F_{10}(k^2, p^2, q^2) k_\mu \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau} k_\sigma (q - p)_\tau \\
& + F'_{10}(k^2, p^2, q^2) p_\nu \varepsilon_{\rho\mu\sigma\tau} p_\sigma (k - q)_\tau \\
& \left. + F''_{10}(k^2, p^2, q^2) q_\rho \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} q_\sigma (p - k)_\tau \right] . \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Die Forderung nach naiver asymptotischer Freiheit schränkt (2.43) stark ein, denn da im Nenner nur der Faktor $q^2 + x_0\Lambda^2$ steht, müssen alle Terme, die Tensoren mit drei Impulsfaktoren beinhalten, verschwinden:

$$\begin{aligned}
F_2 = F_4 = F_5 = F_6 = F_9 = F_{10} = 0 , \\
F'_4 = F'_5 = F'_9 = F'_{10} = 0 , \\
F''_4 = F''_5 = F''_9 = F''_{10} = 0 . \quad (2.44)
\end{aligned}$$

⁴Die Striche an den invarianten Funktionen F_i dienen der Kennzeichnung und sind nicht mit Ableitungen zu verwechseln.

Ferner muß im perturbativen Limes

$$F_1 = F'_1 = F''_1 = q^2, \quad F_3 = F'_3 = F''_3 = F_7 = F_8 = 0 \quad (2.45)$$

gelten. Damit ergibt sich für den Vertexansatz:

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) = & \frac{1}{q^2 + x_0\Lambda^2} \left[\delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho(q^2 + x_2\Lambda^2) \right. \\ & + \delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu(q^2 + x_1\Lambda^2) \\ & + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu(q^2 + x_1\Lambda^2) \\ & + \delta_{\mu\nu}q_\rho(x_4\Lambda^2) \\ & + \delta_{\nu\rho}k_\mu(x_3\Lambda^2) \\ & + \delta_{\rho\mu}p_\nu(x_3\Lambda^2) \\ & + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p-k)_\sigma(x_5\Lambda^2) \\ & \left. + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\sigma(x_6\Lambda^2) \right]. \quad (2.46) \end{aligned}$$

Die ersten drei Terme sind bei obiger Wahl der Parameter ebenso wie der Term $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\sigma(x_6\Lambda^2)$ invariant unter der \mathcal{CP} -Transformation, die anderen sind \mathcal{CP} -verletzend.

Vier-Bosonen-Vertizes

Der $W^+W^+W^-W^-$ -Vertex wird nicht modifiziert, da er im Rahmen dieser Arbeit nur in seiner perturbativen Gestalt

$$\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{(0)++--} = 2\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}. \quad (2.47)$$

in Erscheinung tritt.

Der $W^+W^-W^0W^0$ -Vertex $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ (wobei $\sum_{i=1}^4 k_i = 0$ ist) erhält nicht-perturbative Modifikationen der Approximationsstufe $r = 1$ in den beiden W^0 -Linien; dies liefert zwei Nennerfaktoren $k_3^2 + \bar{x}_0\Lambda^2$ und $k_4^2 + \bar{x}_0\Lambda^2$. Ferner muß der vollständige Vertexansatz folgende Eigenschaften besitzen:

- Symmetrie unter Vertauschung von (k_3, ρ) und (k_4, σ) wegen der Bose-Symmetrie.
- Symmetrie unter Vertauschung von (k_1, μ) und (k_2, ν) , da der Ansatz \mathcal{CP} -invariant sein soll.

Die Vier-Bosonen-Vertizes sind Lorentztensoren vierter Stufe. Unter Verwendung der Metrik $\delta_{\alpha\beta}$ und dreier linear unabhängiger Kombinationen p_i ($i = 1, 2, 3$) aus den vier äußeren Impulsen kann man Basistensoren für die Lorentzstruktur des Ansatzes konstruieren⁵. Es sind Tensoren der Massendimensionen 0, 2 und 4 möglich:

⁵Tensoren, die den total antisymmetrischen Tensor vierter Stufe $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ enthalten, sind auf der hier verwendeten Stufe der rationalen Approximation stets \mathcal{CP} -verletzend.

- drei dimensionslose Tensoren $\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}$, $\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}$ und $\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$. Diese bilden die perturbative nullte Ordnung des Vertex.
- 54 unabhängige Tensoren der Form $\delta_{\alpha\beta}(p_m)_\gamma(p_n)_\delta$, von denen 24 transversal sind ($m, n = 1, 2, 3$). Sie haben die Massendimension 2.
- 81 unabhängige Tensoren der Form $(p_k)_\alpha(p_l)_\beta(p_m)_\gamma(p_n)_\delta$, von denen 16 transversal sind ($k, l, m, n = 1, 2, 3$). Sie haben die Massendimension 4.

Obwohl die Randbedingungen die Zahl der für die Konstruktion von $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}$ zulässigen Tensoren stark einschränken, hat der allgemeinste Ansatz immer noch eine sehr komplizierte Struktur. Da die DS-Gleichung für den $W^+W^-W^0W^0$ -Vertex im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht untersucht wird, soll in den folgenden Rechnungen ein vereinfachter Ansatz verwendet werden, welcher nur die dimensionslosen Tensoren und geeignete invariante Funktionen enthält:

$$\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{(k_3^2 + \bar{x}_0\Lambda^2)(k_4^2 + \bar{x}_0\Lambda^2)} \cdot \left[(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) F_1(k_3^2, k_4^2) + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} F_2(k_3^2, k_4^2) \right]. \quad (2.48)$$

Die Berücksichtigung sämtlicher Forderungen an den Ansatz legt die Gestalt der Funktionen F_i fest, und man erhält:

$$\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{1}{(k_3^2 + \bar{x}_0\Lambda^2)(k_4^2 + \bar{x}_0\Lambda^2)} \cdot \left[(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) (k_3^2 k_4^2 + \bar{x}_1\Lambda^2(k_3^2 + k_4^2) + \bar{x}_2\Lambda^4) + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} (-2k_3^2 k_4^2 + \bar{x}_3\Lambda^2(k_3^2 + k_4^2) + \bar{x}_4\Lambda^4) \right]. \quad (2.49)$$

Damit sind die Ansätze für die nichtperturbativ modifizierten Basisvertices nullter perturbativer Ordnung auf der Grundlage der oben diskutierten erweiterten Störungsrechnung vollständig konstruiert. Die verwendete Stufe der rationalen Approximation ist im W^0 - und c^0 -Bereich $r = 1$ und sonst $r = 0$.

Da die Ansätze für den c^\pm -Propagator, den $W^+W^+W^-W^-$ -Vertex und die Fermion- W^\pm -Antifermionvertices keine nichtstörungstheoretischen Modifikationen enthalten, sind ihre DS-Gleichungen nicht Gegenstand dieser Untersuchung.

Wir wenden uns nun der Lösung des im Abschnitt 2.1 dargestellten Selbstkonsistenzproblems zu.

2.5 Der Selbstkonsistenzmechanismus

Anhand von Gleichung (2.5)

$$\Gamma_N^{(0)np} - \Gamma_N^{(0)} + \mathcal{O}(g^2) = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i^{(0)np}]$$

haben wir gesehen, daß das Problem der selbstkonsistenten Reproduktion der Ansätze in den DS-Gleichungen eng mit der Frage zusammenhängt, ob die Schleifenintegrale im Funktional Φ_N einen Faktor $1/g^2$ ausbilden können. Unter der Selbstkonsistenz eines Ansatzes ist hier die Übereinstimmung auf beiden Seiten der DS-Gleichung

$$\Gamma_N^{(0)np} + \mathcal{O}(g^2) = \Gamma_N^{(0)} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N[\Gamma_i^{(0)np}] \quad (2.50)$$

an lediglich n Stützstellen im Raum der skalaren Impulsvariablen p_i^2 von $\Gamma_N^{(0)np}$ zu verstehen, wobei n die Zahl der dimensionslosen, nichtperturbativen Parameter im Ansatz ist. An allen anderen Stellen wird eine solche Übereinstimmung im allgemeinen nicht möglich sein, jedoch beinhalten die dort entstehenden Abweichungen mindestens eine Potenz der Größe $(g(\nu)/4\pi)^2$. Der Fehler wird kleiner, wenn die Stufe r der rationalen Approximation erhöht wird, da n mit r anwächst.

Die Auswertung der divergenten Einschleifenintegrale in Φ_N in dimensioneller Regularisierung und ein anschließendes Festsetzen der in den Resultaten vorkommenden Skalarprodukte aus unabhängigen äußeren Impulsen auf beliebige Werte $\sim \Lambda^2$ erzeugt in den Anteilen, welche die Divergenzen enthalten, einen Faktor:

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.51)$$

Hierbei ist zu beachten, daß bei der Fortsetzung zu $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen die β -Funktion $\beta(g)$ durch ihre D -dimensionale Form $\beta(g, \varepsilon) = -\varepsilon g + \beta(g)$ ersetzt werden muß; dies ist in der Definition von Λ entsprechend zu berücksichtigen.

Wegen der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit (2.18) bleibt die störungstheoretische multiplikative Kopplungsrenormierung (1.17) anwendbar und (2.51) kann geschrieben werden als:

$$\left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 Z_\alpha(g^2(\nu), \varepsilon) \left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} =: \Pi(g^2(\nu), \varepsilon). \quad (2.52)$$

Diese Größe $\Pi(g^2(\nu), \varepsilon)$ soll nun genauer untersucht werden, zunächst in erster Ordnung der Störungsrechnung und anschließend ohne Näherungen unter Verwendung exakter Integraldarstellungen [3].

Aus

$$\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.53)$$

folgt

$$\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.54)$$

woran man erkennt, daß der logarithmische Term im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht verschwindet. Er hat wegen (2.12) in Einschleifenordnung die Gestalt:

$$-\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right) = \left(\frac{4\pi}{g(\nu)}\right)^2 \frac{1}{\beta_0} (1 + \mathcal{O}(g^2 \ln g^2, g^4)). \quad (2.55)$$

Dies ist genau der $1/g^2$ -Faktor, der für die Selbstkonsistenz der Ansätze benötigt wird, denn es gilt:

$$\left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\beta_0} \left\{ 1 + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \beta_0 \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g^2 \ln g^2, g^4) + \mathcal{O}(g^2, \varepsilon) \right\}. \quad (2.56)$$

Die Renormierungskonstante $Z_\alpha(g^2(\nu), \varepsilon)$ in erster Ordnung ist durch (1.18) gegeben. Somit ergibt sich für $\Pi(g^2(\nu), \varepsilon)$:

$$\left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 Z_\alpha(g^2(\nu), \varepsilon) \left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\beta_0} \{1 + \mathcal{O}(g^2 \ln g^2) + \mathcal{O}(g^4) + \mathcal{O}(\varepsilon)\}. \quad (2.57)$$

Die selbstkonsistente Reproduktion der nichtperturbativ modifizierten Ansätze in den DS-Gleichungen ist demnach zumindest auf Einschleifenniveau möglich, und zwar ohne die Erzeugung zusätzlicher Divergenzen in der berechneten Ordnung. Es werden bei der Renormierung der Theorie keine nichtlokalen Counterterme benötigt, was eine Grundvoraussetzung für die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit (2.18) ist. Die mit $\mathcal{O}(g^4)$ bezeichneten Terme enthalten Beiträge $\sim g^4/\varepsilon$, die aber in einer Einschleifenrechnung nicht berücksichtigt werden.

Verwendet man für die beiden Größen Z_α und $(\Lambda^2/\nu^2)^{-\varepsilon}$ statt der Darstellung durch Reihen exakte Integraldarstellungen, so läßt sich zeigen, daß $\Pi(g^2(\nu), \varepsilon)$ tatsächlich völlig unabhängig von g^2 ist:

Ausgehend von der zu $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen fortgesetzten Definitionsgleichung (2.11)

$$\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} = \exp\left\{2\varepsilon \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g') - \varepsilon g'}\right\} \quad (2.58)$$

erhält man nach Durchführen der Substitution $\kappa(\nu) = (g(\nu)/4\pi)^2$ und einigen Umformungen den Ausdruck:

$$\left(\frac{\Lambda^2}{\nu^2}\right)^{-\varepsilon} = \frac{\kappa_1}{\kappa(\nu)} \exp\left\{\int_{\kappa_1}^{\kappa(\nu)} \frac{d\kappa'}{\kappa' + \varepsilon f(\kappa')}\right\}, \quad (2.59)$$

wobei $f(\kappa) = [\beta_0 + \beta_1\kappa + \beta_2\kappa^2 + \dots]^{-1}$ ist. Die untere Integrationsgrenze κ_1 ist Teil des gewählten Renormierungsschemas und hängt im allgemeinen von ε ab:

$$\kappa_1 = \kappa_1(\varepsilon) = \kappa_1(0)\{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\}, \quad \kappa_1(0) = \left(\frac{g(\Lambda)}{4\pi}\right)^2. \quad (2.60)$$

Der $1/\kappa$ -Faktor ist das exakte Gegenstück zum $1/g^2$ -Faktor in (2.55).

Andererseits folgt aus (1.21) die Beziehung:

$$\frac{\beta(g)}{g} = -\frac{1}{2} \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_\alpha(g, \varepsilon) = -\frac{1}{2} \beta(g, \varepsilon) \frac{d}{dg} \ln Z_\alpha(g, \varepsilon), \quad (2.61)$$

die nach Ersetzen von g und $\beta(g)$ durch die Größen κ und $f(\kappa)$ auf die Form

$$\frac{d}{d\kappa} \ln Z_\alpha(\kappa, \varepsilon) = -\frac{1}{\kappa + \varepsilon f(\kappa)} \quad (2.62)$$

gebracht werden kann. Die Integration dieser Gleichung unter Verwendung der Randbedingung $Z_\alpha(0, \varepsilon) = 1$ ergibt die Integraldarstellung für Z_α :

$$Z_\alpha(\kappa, \varepsilon) = \exp \left\{ - \int_0^{\kappa(\nu)} \frac{d\kappa'}{\kappa' + \varepsilon f(\kappa')} \right\}, \quad (2.63)$$

und für Π erhält man:

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{\kappa_1}{\varepsilon} \exp \left\{ - \int_0^{\kappa_1} \frac{d\kappa'}{\kappa' + \varepsilon f(\kappa')} \right\}. \quad (2.64)$$

Dieses Resultat enthält im Gegensatz zu (2.57) keine g^2 -Abhängigkeiten mehr. Die Zerlegung des Integranden in:

$$\frac{1}{\kappa' + \varepsilon f(\kappa')} = \frac{1}{\kappa' + (\varepsilon/\beta_0)} + \varepsilon \rho(\kappa', \varepsilon), \quad \rho(0, \varepsilon) = 0, \quad (2.65)$$

führt nach kurzer Rechnung auf:

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{1}{\beta_0} \{1 + \mathcal{O}(\varepsilon, \varepsilon \ln \varepsilon)\}, \quad (2.66)$$

d. h. $\Pi(\varepsilon)$ ist wie in der Einschleifenrechnung endlich im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$.

Hiermit existiert ein Mechanismus, der die Selbstkonsistenz der nichtperturbativ modifizierten Ansätze für die Basisvertizes unabhängig von der berechneten Schleifenordnung ermöglicht; dies geschieht ohne Erzeugung zusätzlicher Divergenzen. Wegen des $1/\varepsilon$ -Faktors in (2.52) ist der Selbstkonsistenzmechanismus sehr eng mit der Divergenzstruktur der Theorie verbunden, was dazu führt, daß sich in oberflächlich konvergenten Vertexfunktionen keine nichtperturbativen Modifikationen etablieren können. Das zu untersuchende Selbstkonsistenzproblem beschränkt sich unabhängig von der Verwendung von Entkoppelungsnäherungen auf die DS-Gleichungen für die Basisvertizes.

$$\begin{aligned}
&= g_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\{ \delta_{\lambda\sigma}(2k - q)_\nu + \delta_{\sigma\nu}(-q - k)_\lambda + \delta_{\nu\lambda}(2q - k)_\sigma \} \right. \\
&\quad \cdot \left. \{ t_{\kappa\lambda}(q - k) \frac{1}{(q - k)^2 + u_+ \Lambda^2} \} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left\{ \frac{1}{q^2 + x_0 \Lambda^2} [\delta_{\kappa\mu}(2q - k)_\rho (q^2 + x_1 \Lambda^2) + \delta_{\mu\rho}(-q - k)_\kappa (q^2 + x_1 \Lambda^2) \right. \right. \\
&\quad \quad + \delta_{\rho\kappa}(2k - q)_\mu (q^2 + x_2 \Lambda^2) + \delta_{\kappa\mu}(-k)_\rho (x_3 \Lambda^2) \\
&\quad \quad + \delta_{\mu\rho}(k - q)_\kappa (x_3 \Lambda^2) + \delta_{\rho\kappa} q_\mu (x_4 \Lambda^2) \\
&\quad \quad \left. \left. + \varepsilon_{\rho\kappa\mu\eta}(2k - q)_\eta (x_5 \Lambda^2) + \varepsilon_{\rho\kappa\mu\eta} q_\eta (x_6 \Lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad \cdot \left. \{ t_{\rho\sigma}(k) \frac{1}{k^2 + u_+ \Lambda^2} \} \right). \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Durch Abzählen der Potenzen des Integrationsimpulses k im Zähler und Nenner des Integranden stellt man fest, daß $\mathcal{I}_1(q)$ quadratisch divergent ist. Es wird deshalb in dimensioneller Regularisierung [14, 15] ausgewertet, d. h. zu $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen fortgesetzt, wobei $\varepsilon > 0$ ist:

$$\begin{aligned}
&g_0 \rightarrow g_0 \nu_0^\varepsilon, \\
&\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \\
\Rightarrow \mathcal{I}_1^{(D)}(q) &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \Gamma_{3\lambda\sigma\nu}^{(0)+-0}(q - k, k, -q) D_{\kappa\lambda}^+(q - k) \right. \\
&\quad \left. \cdot \Gamma_{3\rho\kappa\mu}^{+-0}(-k, k - q, q) D_{\rho\sigma}^-(k) \right\}, \\
\mathcal{I}_1^{(D)}(q) &\rightarrow \mathcal{I}_1(q) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren des Zählers des Integranden von $\mathcal{I}_1^{(D)}$ und die Kontraktion der inneren Lorentz-Indizes unter Berücksichtigung von $\delta_{\rho\sigma}\delta_{\sigma\rho} = D$ führt auf:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1^{(D)}(q) &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \frac{1}{q^2 + x_0 \Lambda^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((q - k)^2 + u_+ \Lambda^2) (q - k)^2 (k^2 + u_+ \Lambda^2) k^2} \\
&\quad \cdot \left(\delta_{\mu\nu} \{ 8(k^2)^2 q^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \right. \\
&\quad \quad \left. - 8k^2 (kq)^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \} \right. \\
&\quad + k_\mu k_\nu \{ 4[D - 1](k^2)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\
&\quad \quad + 8[1 - D]k^2 (kq) (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\
&\quad \quad + 4[D - 1]k^2 q^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\
&\quad \quad - 4k^2 q^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \\
&\quad \quad \left. + 4(kq)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +k_\mu q_\nu \{ 2[1-D](k^2)^2(q^2+x_2\Lambda^2) \\
& \quad +4[D-2]k^2(kq)(q^2+x_2\Lambda^2) \\
& \quad +8k^2(kq)(q^2+x_1\Lambda^2) \} \\
& +k_\nu q_\mu \{ 2[1-D](k^2)^2(q^2+x_2\Lambda^2-x_4\Lambda^2) \\
& \quad +4[D-1]k^2(kq)(q^2+x_2\Lambda^2-x_4\Lambda^2) \\
& \quad +4k^2(kq)(q^2+x_1\Lambda^2) \} \\
& +q_\mu q_\nu \{ [D-1](k^2)^2(q^2+x_2\Lambda^2-x_4\Lambda^2) \\
& \quad -8(k^2)^2(q^2+x_1\Lambda^2) \} \\
& +\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho q_\sigma \{ -8(k^2)^2(x_5\Lambda^2) \\
& \quad +4k^2(kq)(x_6-4x_5)\Lambda^2 \} \\
& +\mathcal{O}(k^3) \}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Die mit $\mathcal{O}(k^3)$ bezeichneten Terme tragen nicht zum divergenten Anteil von $\mathcal{I}_1(q)$ bei. Im nächsten Schritt werden die vier Nennerfaktoren im Integral mittels Feynman-Parametrisierung (A.19) zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{((q-k)^2+u_+\Lambda^2)(q-k)^2(k^2+u_+\Lambda^2)k^2} \\
= & \Gamma(4) \int_0^1 \frac{a^2b \, da \, db \, dc}{[abc((q-k)^2+u_+\Lambda^2)+ab(1-c)(q-k)^2+a(1-b)(k^2+u_+\Lambda^2)+(1-a)k^2]^4} \\
= & \Gamma(4) \int_0^1 \frac{a^2b \, da \, db \, dc}{[k^2-2ab(kq)+abq^2+(abc-ab+a)u_+\Lambda^2]^4}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Definiert man $\tilde{k} := k - abq$, so nimmt (3.3) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
& \Gamma(4) \int_0^1 \frac{a^2b \, da \, db \, dc}{[\tilde{k}^2+(ab-a^2b^2)q^2+(abc-ab+a)u_+\Lambda^2]^4} \\
= & \Gamma(4) \int_0^1 \frac{a^2b \, da \, db \, dc}{[\tilde{k}^2+S^2(q^2)]^4}, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

wobei $S^2(q^2) := (ab-a^2b^2)q^2+(abc-ab+a)u_+\Lambda^2 \geq 0$ ist. Die Translation $k \rightarrow k - abq = \tilde{k}$ führt dazu, daß der Nenner des Integranden von $\mathcal{I}_1^{(D)}(q)$ nur noch von den Impulsquadraten \tilde{k}^2 und q^2 abhängt und keine in \tilde{k} und q linearen Terme mehr enthält. Im Zähler des Integranden und im Integrationsmaß wird ebenfalls k durch \tilde{k} ersetzt:

$$\begin{aligned}
k & = \tilde{k} + \alpha q, \quad \alpha := ab, \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} & = \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D},
\end{aligned}$$

so daß sich der Wert des Integrals durch die Translation des Integrationsimpulses nicht ändert. Im weiteren Verlauf der Rechnung wird statt \tilde{k} wieder k geschrieben.

Die Feynman-Parametrisierung des Nenners und die anschließende Verschiebung des Integrationsimpulses haben zur Folge, daß alle Terme im Integranden bezüglich k die Struktur $f(k^2)$ oder $k_{\mu_1} \dots k_{\mu_n} f(k^2)$ haben, wobei $f(k^2)$ eine integrable Funktion von k^2 ist. Deshalb können nun die Regeln der symmetrischen Integration angewandt werden.

Zunächst wird das Verschwinden des Integrals über ungeradzahlige Potenzen von k ausgenutzt (A.22):

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_{\mu_1} \dots k_{\mu_n} f(k^2) = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade.} \quad (3.5)$$

Damit ergibt sich für $\mathcal{I}_1^{(D)}(q)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(D)}(q) = & (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \frac{1}{q^2 + x_0 \Lambda^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Gamma(4) \int_0^1 \frac{a^2 b da db dc}{[k^2 + S^2(q^2)]^4} \\ & \cdot \left(\delta_{\mu\nu} \{ 8(k^2)^2 q^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \right. \\ & \quad \left. - 8k^2 (kq)^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \} \right. \\ & + k_\mu k_\nu \{ 4[D-1](k^2)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad + 4[D-1](2\alpha^2 - 2\alpha + 1)k^2 q^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad - 4k^2 q^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \\ & \quad + 16[D-1](\alpha^2 - \alpha)(kq)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad \left. + 4(kq)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \} \right. \\ & + k_\mu q_\nu \{ 16[D-1](\alpha^2 - \alpha)k^2 (kq)(q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad + 8k^2 (kq)(q^2 + x_1 \Lambda^2) \\ & \quad + 4[D-2]k^2 (kq)(q^2 + x_2 \Lambda^2) \} \\ & + k_\nu q_\mu \{ 16[D-1](\alpha^2 - \alpha)k^2 (kq)(q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad + 4[D-1](2\alpha - 1)k^2 (kq)(x_4 \Lambda^2) \\ & \quad + 4[D-1]k^2 (kq)(q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad + 4k^2 (kq)(q^2 + x_1 \Lambda^2) \} \\ & + q_\mu q_\nu \{ [D-1](2\alpha - 1)(k^2)^2 (x_4 \Lambda^2) \\ & \quad + 4[D-1](\alpha^2 - \alpha)(k^2)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ & \quad - 8(k^2)^2 (q^2 + x_1 \Lambda^2) \\ & \quad + [D-1](k^2)^2 (q^2 + x_2 \Lambda^2) \} \\ & + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho q_\sigma \{ 16(2\alpha - 1)k^2 (kq)(x_5 \Lambda^2) \\ & \quad + 4k^2 (kq)(x_6 \Lambda^2) \} \\ & \left. + \mathcal{O}(k^2) \right). \quad (3.6) \end{aligned}$$

Anschließend wird das Integral unter Verwendung von (A.23)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{1}{D} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 f(k^2)$$

und (A.24)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma f(k^2) = \frac{1}{D(D+2)} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^2 f(k^2)$$

weiter vereinfacht:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(D)}(q) &= (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \frac{D-1}{D} \Gamma(4) \frac{q^2 + x_2 \Lambda^2}{q^2 + x_0 \Lambda^2} 4 \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 a^2 b \, da \, db \, dc \frac{(k^2)^3}{[k^2 + S^2(q^2)]^4} \\ &+ (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(4)}{D(D+2)} \frac{1}{q^2 + x_0 \Lambda^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 a^2 b \, da \, db \, dc \frac{(k^2)^2}{[k^2 + S^2(q^2)]^4} \\ &\cdot \left(\delta_{\mu\nu} q^2 \{ 8[D^2 + 3D - 4](\alpha^2 - \alpha)(q^2 + x_2 \Lambda^2) \right. \\ &\quad + 4[D^2 + D - 1](q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ &\quad \left. + 4[2D^2 + D - 6](q^2 + x_1 \Lambda^2) \right\} \\ &+ q_\mu q_\nu \{ 4[D^3 + 9D^2 + 14D - 24](\alpha^2 - \alpha)(q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ &\quad + [D^3 + 9D^2 + 2D - 16](q^2 + x_2 \Lambda^2) \\ &\quad + 4[-2D^2 - D + 6](q^2 + x_1 \Lambda^2) \\ &\quad \left. + [D^3 + 5D^2 + 2D - 8](x_4 \Lambda^2) \right\} \\ &+ \text{(für } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ endliche Anteile)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nun können die in $\mathcal{I}_1^{(D)}$ vorkommenden D -dimensionalen, sphärisch symmetrischen Impulsraumintegrale berechnet werden. Mit (A.26) und den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Gamma(-1 + \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\gamma \approx 0.5772), \\ \Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \Gamma(z + 1) &= z \Gamma(z), \\ \Gamma(n + 1) &= n! \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ (4\pi)^\varepsilon &= 1 + \varepsilon \ln 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^3}{[k^2 + S^2(q^2)]^4} &= \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{\Gamma(5-\varepsilon)\Gamma(-1+\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(4)} S^2(q^2) \left(\frac{S^2(q^2)}{4\pi\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&= -\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} 4 S^2(q^2) \left(\frac{S^2(q^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0), \\
(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^2}{[k^2 + S^2(q^2)]^4} &= \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{\Gamma(4-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(4)} \left(\frac{S^2(q^2)}{4\pi\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&= \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{S^2(q^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0)
\end{aligned}$$

und für $\mathcal{I}_1^{(D)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1^{(D)}(q) &= -\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{q^2 + x_2 \Lambda^2}{q^2 + x_0 \Lambda^2} 72 \delta_{\mu\nu} \int_0^1 a^2 b \, da \, db \, dc \, S^2(q^2) \left(\frac{S^2(q^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&\quad + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{q^2 + x_0 \Lambda^2} \int_0^1 a^2 b \, da \, db \, dc \left(\frac{S^2(q^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&\quad \cdot \left(\delta_{\mu\nu} q^2 \{ (48\alpha^2 - 48\alpha + 19)(q^2 + x_2 \Lambda^2) + 30(q^2 + x_1 \Lambda^2) \} \right. \\
&\quad \left. + q_\mu q_\nu \{ (240\alpha^2 - 240\alpha + 50)(q^2 + x_2 \Lambda^2) - 30(q^2 + x_1 \Lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + 36(2\alpha - 1)(x_4 \Lambda^2) \} \right) \\
&\quad + (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ endliche Anteile}) . \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Da der Ansatz für den W^0 -Propagator rein transversal konstruiert worden ist, sind für das Selbstkonsistenzproblem nur die transversalen divergenten Anteile der Integrale in der DS-Gleichung von Bedeutung¹. Bei Verwendung der Landau-Eichung erhält man durch Transversalprojektion aller äußeren Bosonlinien stets ein abgeschlossenes System von Gleichungen für die nichtperturbativen Parameter, das von den Longitudinalanteilen völlig unabhängig ist. Die Summe der longitudinalen Beiträge sollte allerdings 0 ergeben, wenn die Slavnov-Taylor-Identitäten für die Propagatoren in unserer erweiterten Störungsrechnung erfüllt sein sollen. Dies wird aufgrund der niedrigen Approximationsstufe im allgemeinen nur dann der Fall sein, wenn die nichtperturbativen Parameter zusätzlichen Bedingungen genügen. Eine Untersuchung der Slavnov-Taylor-Identitäten kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt werden.

¹Dies gilt auch für die Integrale der DS-Gleichung für den W^\pm -Propagator.

Der Transversalanteil von $\mathcal{I}_1^{(D)}$ lautet:

$$\begin{aligned}
t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_1^{(D)}(q) &= t_{\mu\nu}(q) \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{q^2 + x_2 \Lambda^2}{q^2 + x_0 \Lambda^2} \int_0^1 a^2 b \, da \, db \, dc \left(\frac{S^2(q^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&\quad \cdot \{ (48\alpha^2 - 48\alpha + 19)q^2 - 72 S^2(q^2) \} \\
&+ t_{\mu\nu}(q) \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{q^2 + x_1 \Lambda^2}{q^2 + x_0 \Lambda^2} 30q^2 \int_0^1 a^2 b \, da \, db \, dc \left(\frac{S^2(q^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&+ \quad (\text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ endliche Anteile}) \\
&=: t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_1^{(D)T}(q^2) .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Bis hierher erfolgte die Rechnung allgemein für äußere Impulse q . Setzt man nun das Quadrat des Impulses auf einen beliebigen Wert $q^2 = -\bar{u}\Lambda^2$ fest, so nimmt $S^2(q^2)$ die Form

$$\begin{aligned}
S^2(-\bar{u}\Lambda^2) &= (ab - a^2b^2) (-\bar{u}\Lambda^2) + (abc - ab + a) u_+ \Lambda^2 \\
&= ((a^2b^2 - ab) \bar{u} + (abc - ab + a) u_+) \Lambda^2
\end{aligned}$$

an, und der im Integranden stehende Faktor $(S^2(q^2)/\nu_0^2)^{-\varepsilon}$ geht über in:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S^2(-\bar{u}\Lambda^2)}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} &= ((a^2b^2 - ab) \bar{u} + (abc - ab + a) u_+)^{-\varepsilon} \left(\frac{\Lambda^2}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} \\
&= \left(\frac{\Lambda^2}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) .
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhält man in $\mathcal{I}_1^{(D)T}(-\bar{u}\Lambda^2)$ die für den Selbstkonsistenzmechanismus entscheidende Größe $\Pi(\varepsilon)$ (2.52):

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\Lambda^2}{\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon} =: \Pi(\varepsilon) ,$$

die sich laut (2.66) exakt als

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{1}{\beta_0} \{1 + \mathcal{O}(\varepsilon, \varepsilon \ln \varepsilon)\}$$

schreiben läßt. Das Ausführen der Feynman-Parameterintegration in $\mathcal{I}_1^{(D)T}(-\bar{u}\Lambda^2)$ und Vollziehen des Grenzübergangs $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert:

$$\mathcal{I}_1^{(D)T}(-\bar{u}\Lambda^2) \rightarrow \mathcal{I}_1^T(-\bar{u}\Lambda^2) , \quad t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_1(q) = t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_1^T(q^2) ; \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1^T(-\bar{u}\Lambda^2) &= \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{-\bar{u}\Lambda^2 + x_2 \Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0 \Lambda^2}\right) \left(\frac{5}{6}\bar{u} - 6u_+\right) \Lambda^2 \\
&- \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{-\bar{u}\Lambda^2 + x_1 \Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0 \Lambda^2}\right) 5\bar{u}\Lambda^2 \\
&+ \mathcal{O}(g^2) .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Die Zerlegung von $\mathcal{I}_1^T(-\bar{u}\Lambda^2)$ in einen Anteil, der einen Pol bei $\bar{u} = x_0$ besitzt, und einen bezüglich $\bar{u}\Lambda^2$ regulären Anteil führt schließlich auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^T(-\bar{u}\Lambda^2) &= \frac{1}{\beta_0} \frac{25}{6} (-\bar{u}\Lambda^2) + \frac{1}{\beta_0} \left(-\frac{25}{6} x_0 + 5x_1 - \frac{5}{6} x_2 - 6u_+ \right) \Lambda^2 \\ &+ \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0\Lambda^2} \left(\frac{25}{6} x_0^2 + \left(\frac{5}{6} x_2 - 5x_1 + 6u_+ \right) x_0 - 6u_+ x_2 \right) \Lambda^2 \\ &+ \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dies ist das Resultat, welches zur Aufstellung der Selbstkonsistenzgleichung im nächsten Kapitel benötigt wird.

Auf die gleiche Weise werden auch die übrigen Einschleifenintegrale behandelt. Integrale mit Fermionlinien sind dabei entgegen der Fermionflußrichtung auszuwerten. Bei den Integralen der DS-Gleichungen für den Fermion-Propagator und den Fermion- W^0 -Antifermionvertex müssen zusätzlich zu den im obigen Beispiel durchgeführten Schritten Produkte von γ -Matrizen kontrahiert werden; in Integralen mit Fermionschleifen sind Spuren von γ -Matrixprodukten zu berechnen. Diese Operationen sind im Anschluß an die Fortsetzung des Integrals zu $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen durchzuführen; die hierfür benötigten Formeln sind in A.1 zusammengestellt.

Da die Fermion-Boson-Wechselwirkung der untersuchten Modelltheorie paritätsverletzend ist, stellt sich das Problem der Behandlung von γ_5 in dimensioneller Regularisierung [14, 16]. In dieser Arbeit wird das in [17] vorgestellte γ_5 -Schema verwendet, welches ein mit allen γ_μ ($\mu = 0, \dots, D-1$) antikommütierendes γ_5 beinhaltet. Es zeigt sich allerdings, daß alle in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen zusätzlich auftretenden Effekte, insbesondere auch die zu den bekannten chiralen Anomalien führenden, proportional zu ε und daher bei der Berechnung der *divergenten* Anteile der Integrale ohne Bedeutung sind.

3.2 Resultate der Integralberechnungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der einzelnen Rechnungen aufgelistet. Sie wurden ebenso wie das obige Beispiel mit Hilfe des Algebra-Programmiersystems REDUCE [18] durchgeführt.

Zunächst wird das Integral in seiner graphischen Darstellung und in seiner formalen Gestalt als Impulsintegral über ein Produkt aus Vertizes und Propagatoren aufgeführt. Anschließend wird der divergente Anteil des Integrals dargestellt. Hierbei sind alle Skalarprodukte aus unabhängigen äußeren Impulsen auf beliebige Werte $\sim \Lambda^2$ festgelegt², der Faktor $\Pi(\varepsilon)$ (2.52) gemäß (2.66) als

$$\Pi(\varepsilon) = \frac{1}{\beta_0} \{1 + \mathcal{O}(\varepsilon, \varepsilon \ln \varepsilon)\} \quad (3.13)$$

²Dies ist zulässig, da Λ den einzigen invarianten Massenmaßstab der Theorie darstellt.

$$\mathcal{I}_2^T(-\bar{u}\Lambda^2) = \frac{1}{\beta_0} \frac{9}{2} u_+ \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{3f}(q) &= \text{Diagram: A circle with two external wavy lines. The left line is labeled W_ν^0 and has momentum $-q$. The right line is labeled W_μ^0 and has momentum q. The circle has two arrows labeled f, one at the top and one at the bottom. A shaded circular region is attached to the right side of the circle.} \\ &= g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \bar{\Gamma}_{3ff\nu}^{(0)\ 0} S_f(k+q) \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)\ 0}(k+q, k, q) S_f(k) \right\} \\ &= t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_{3f}^T(q^2) + l_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_{3f}^L(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{3f}^T(-\bar{u}\Lambda^2) &= \frac{1}{\beta_0} \left[-\frac{1}{3}(v_0^2 + a_0^2)\bar{u} + 2a_0^2 u_f^2 + \frac{4}{3} T_{3f}(v_0 v_1^{(f)} + a_0 a_1^{(f)}) + 4T_{3f} v_0 v_3^{(f)} u_f \right] \Lambda^2 \\ &+ \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + z_0 \Lambda^2} T_{3f} \left[8a_0 a_1^{(f)} u_f^2 - \frac{4}{3}(v_0 v_1^{(f)} + a_0 a_1^{(f)}) z_0 - 4v_0 v_3^{(f)} u_f z_0 \right] \Lambda^2 \\ &+ \mathcal{O}(g^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4(q) &= \text{Diagram: A dashed circle with two external wavy lines. The left line is labeled W_ν^0 and has momentum $-q$. The right line is labeled W_μ^0 and has momentum q. The circle has two arrows labeled c^+, one at the top and one at the bottom. A shaded circular region is attached to the right side of the circle.} \\ &= g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\Gamma}_3^{(0)\ -+0}(k) \tilde{D}^+((k+q)^2) \tilde{\Gamma}_3^{-+0}(k+q, k, q) \tilde{D}^+(k^2) \right\} \\ &= t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_4^T(q^2) + l_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_4^L(q^2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_4^T(-\bar{u}\Lambda^2) = \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{12} (\bar{u} - y_1^{(0)}) \Lambda^2 + \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + y_0^{(0)} \Lambda^2} \frac{1}{12} y_0^{(0)} y_1^{(0)} \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2)$$

$$\mathcal{I}_5(q) = \text{Diagram: A dashed circle with two external wavy lines. The left line is labeled W_ν^0 and has momentum $-q$. The right line is labeled W_μ^0 and has momentum q. The circle has two arrows labeled c^-, one at the top and one at the bottom. A shaded circular region is attached to the right side of the circle.}$$

$$\mathcal{I}_3(q) = W_\nu^- \text{---} \text{---} \text{---} \overset{W^0}{\text{---}} \text{---} \text{---} W_\mu^+$$

$$= g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{(0)+-00} D_{\rho\sigma}^0(k) \right\}$$

$$= t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_3^T(q^2) + l_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_3^L(q^2)$$

$$\mathcal{I}_3^T(-\bar{u}\Lambda^2) = \frac{1}{\beta_0} \frac{9}{2} (u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2)$$

$$\mathcal{I}_{4f'f}(q) = W_\nu^- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} W_\mu^+$$

$$= g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \bar{\Gamma}_{3ff'\nu}^{(0)-} S_{f'}(k+q) \bar{\Gamma}_{3f'f\mu}^+(k+q, k, q) S_f(k) \right\}$$

$$= t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_{4f'f}^T(q^2) + l_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_{4f'f}^L(q^2)$$

$$\mathcal{I}_{4f'f}^T(-\bar{u}\Lambda^2) = \frac{1}{\beta_0} (v_0^2 + a_0^2) \left(-\frac{2}{3} \bar{u} + u_f^2 + u_{f'}^2 \right) \Lambda^2 + \frac{1}{\beta_0} 2(a_0^2 - v_0^2) u_f u_{f'} \Lambda^2$$

$$+ \mathcal{O}(g^2)$$

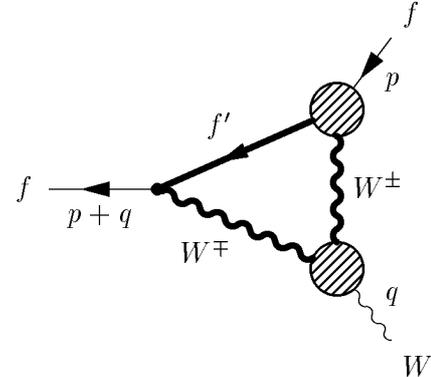
$$\mathcal{I}_5(q) = W_\nu^- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} W_\mu^+$$

$$= g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\Gamma}_3^{(0)+0-} \tilde{D}^0((k+q)^2) \tilde{\Gamma}_3^{0-+} \tilde{D}^+(k^2) \right\}$$

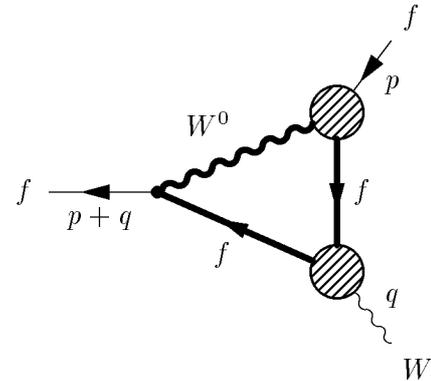
$$= t_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_5^T(q^2) + l_{\mu\nu}(q) \mathcal{I}_5^L(q^2)$$

$$\mathcal{I}_2(-\bar{u}\Lambda^2) = \frac{1}{\beta_0} \frac{3}{4} (y_1^{(+)} - \bar{u}) \Lambda^2 - \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + y_0^{(+)}\Lambda^2} \frac{3}{4} y_0^{(+)} y_1^{(+)} \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2)$$

Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(p, q) &= \text{Diagram} \\ &= g_0^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\Gamma}_{3ff'\rho}^{(0)\pm} S_{f'}(p-k) \bar{\Gamma}_{3f'f\kappa}^{\mp}(p-k, p, -k) D_{\kappa\lambda}^+(k) \right. \\ &\quad \left. \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{3\lambda\sigma\mu}^{+-0}(k, -k-q, q) \\ \Gamma_{3\sigma\lambda\mu}^{+0}(-k-q, k, q) \end{pmatrix} D_{\rho\sigma}^+(-k-q) \right\} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(p, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ pq = -\bar{w}\Lambda^2}} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \left(1 + \frac{(x_2 - x_0)\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0\Lambda^2} \right) \frac{3}{2} (-T_{3f}) \gamma_\mu [(v_0^2 + a_0^2) - 2v_0 a_0 \gamma_5] \\ &+ \mathcal{O}(g^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(p, q) &= \text{Diagram} \\ &= g_0^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\Gamma}_{3ff\lambda}^{(0)0} S_f(k+q) \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(k+q, k, q) S_f(k) \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{\Gamma}_{3ff\kappa}^0(k, p, k-p) D_{\kappa\lambda}^0(p-k) \right\} \end{aligned}$$


$$\mathcal{I}_2(p, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ pq = -\bar{w}\Lambda^2}} = g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + z_0 \Lambda^2} (v_0^2 - a_0^2) \cdot \left(-\frac{3}{4} \frac{q_\mu}{\Lambda} (v_2^{(f)} - a_2^{(f)} \gamma_5) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{i} \sigma_{\mu\nu} \right) \frac{q_\nu}{\Lambda} (v_3^{(f)} - a_3^{(f)} \gamma_5) \right) + \mathcal{O}(g^3)$$

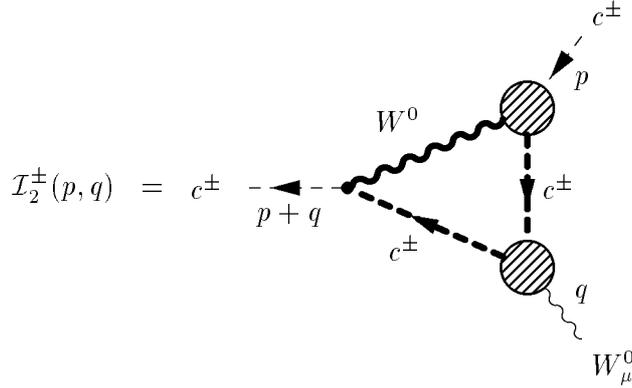
$$\mathcal{I}_3(p, q) = \text{Diagram} = g_0^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\Gamma}_{3ff'\lambda}^{(0)\pm} S_{f'}(k+q) \bar{\Gamma}_{3f'f'\mu}^0(k+q, k, q) S_{f'}(k) \cdot \bar{\Gamma}_{3f'f\kappa}^\mp(k, p, k-p) D_{\kappa\lambda}^+(p-k) \right\}$$

$$\mathcal{I}_3(p, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ pq = -\bar{w}\Lambda^2}} = g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + z_0 \Lambda^2} (v_0^2 - a_0^2) \cdot \left(-\frac{3}{2} \frac{q_\mu}{\Lambda} (v_2^{(f')} - a_2^{(f')} \gamma_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} \sigma_{\mu\nu} \right) \frac{q_\nu}{\Lambda} (v_3^{(f')} - a_3^{(f')} \gamma_5) \right) + \mathcal{O}(g^3)$$

Geist- W^0 -Antigeist-Vertex

$$\mathcal{I}_1^\pm(p, q) = \text{Diagram}$$

$$= g_0^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\Gamma}_3^{(0)\mp 0\pm}(p+q) \tilde{D}^0((p-k)^2) \tilde{\Gamma}_3^{0\pm\mp}(p-k, p, -k) \right. \\ \left. \cdot D_{\kappa\lambda}^+(k) \begin{pmatrix} \Gamma_{3\lambda\sigma\mu}^{+-0}(k, -k-q, q) \\ \Gamma_{3\sigma\lambda\mu}^{+-0}(-k-q, k, q) \end{pmatrix} D_{\rho\sigma}^+(-k-q) \right\}$$



$$= g_0^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\Gamma}_3^{(0)\mp 0\pm}(p+q) \tilde{D}^+((k+q)^2) \tilde{\Gamma}_3^{\mp\pm 0}(k+q, k, q) \right. \\ \left. \cdot \tilde{D}^+(k^2) \tilde{\Gamma}_3^{\mp\pm 0}(k, p, k-p) D_{\rho\sigma}^0(p-k) \right\}$$

Durch Abzählen der Potenzen des Integrationsimpulses k in Zähler und Nenner der Integranden erkennt man zunächst, daß \mathcal{I}_1^\pm und \mathcal{I}_2^\pm logarithmisch divergente Integrale sind. Die drei Propagatoren sind von der Ordnung k^{-2} , weshalb der Nenner die Form $k^6 + \mathcal{O}(k^5)$ besitzt. Die vollen Vertizes liefern im Zähler jeweils eine Potenz in k , während der perturbative Geist-Boson-Antigeist-Vertex die Impulsstruktur $(p+q)_\rho$ hat und unabhängig von k ist. Die Integranden von \mathcal{I}_1^\pm und \mathcal{I}_2^\pm sind somit von der Ordnung k^{-4} .

In \mathcal{I}_1^\pm hat der Geist-Boson-Antigeist-Vertex $\tilde{\Gamma}_3^{0\pm\mp}$ bezüglich k die Struktur $k_\kappa(1 + \mathcal{O}(k^{-2}))$. Der Boson-Propagator $D_{\kappa\lambda}^+(k)$ in Landau-Eichung ist proportional zum Transversalprojektor $t_{\kappa\lambda}(k)$, was wegen $t_{\kappa\lambda}(k)k_\kappa = 0$ dazu führt, daß der Integrand tatsächlich nur von der Ordnung k^{-5} ist. Für $\xi = 0$ ist \mathcal{I}_1^\pm also konvergent.

Mit der gleichen Argumentation zeigt man die Konvergenz von \mathcal{I}_2^\pm für $\xi = 0$, denn $\tilde{\Gamma}_3^{\mp\pm 0}$ hat bezüglich k die Struktur $k_\sigma(1 + \mathcal{O}(k^{-2}))$, $D_{\rho\sigma}^0(p-k)$ ist proportional zu $t_{\rho\sigma}(p-k)$ und $t_{\rho\sigma}(p-k)k_\sigma = t_{\rho\sigma}(p-k)p_\sigma$.

Da die Einschleifenintegrale in den DS-Gleichungen für die Geist- W^\pm -Antigeist-Vertizes die gleiche Struktur wie \mathcal{I}_1^\pm und \mathcal{I}_2^\pm haben, sind sie in Landau-Eichung ebenfalls konvergent.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(k, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ k^2 = -\bar{v}\Lambda^2}} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{4} (\delta_{\mu\nu} k_\rho - \delta_{\rho\mu} k_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + \bar{x}_0\Lambda^2} \frac{5}{4} (-3\bar{x}_0 + \bar{x}_1 - \bar{x}_3) (\delta_{\mu\nu} k_\rho - \delta_{\rho\mu} k_\nu) \\
&+ \mathcal{O}(g^3) \\
&= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{8} (-\delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho - \delta_{\rho\mu} (k-q)_\nu - \delta_{\mu\nu} q_\rho + \delta_{\rho\mu} p_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + \bar{x}_0\Lambda^2} \frac{5}{8} (3\bar{x}_0 - \bar{x}_1 + \bar{x}_3) \\
&\quad \cdot (\delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho + \delta_{\rho\mu} (k-q)_\nu + \delta_{\mu\nu} q_\rho - \delta_{\rho\mu} p_\nu) \\
&+ \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3(q) &= \text{Diagram} \\
&= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \Gamma_{4\mu\gamma\nu\alpha}^{(0)++--} D_{\alpha\beta}^+(l) \Gamma_{3\beta\delta\rho}^{+-0}(l, -l-q, q) D_{\gamma\delta}^+(q+l) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3(q) \Big|_{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{4} (\delta_{\rho\mu} q_\nu - \delta_{\nu\rho} q_\mu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0\Lambda^2} \frac{1}{4} (15x_0 - 12x_1 - 3x_2) (\delta_{\nu\rho} q_\mu - \delta_{\rho\mu} q_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0\Lambda^2} \left(-\frac{9}{4} x_4 \delta_{\mu\nu} q_\rho - \frac{3}{2} x_6 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \right) \\
&+ \mathcal{O}(g^3) \\
&= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{8} (-\delta_{\nu\rho} (q-p)_\mu - \delta_{\rho\mu} (k-q)_\nu + \delta_{\nu\rho} k_\mu - \delta_{\rho\mu} p_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0\Lambda^2} \frac{1}{8} (15x_0 - 12x_1 - 3x_2) \\
&\quad \cdot (\delta_{\nu\rho} (q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu} (k-q)_\nu - \delta_{\nu\rho} k_\mu + \delta_{\rho\mu} p_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + x_0\Lambda^2} \left(-\frac{9}{4} x_4 \delta_{\mu\nu} q_\rho - \frac{3}{2} x_6 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \right) \\
&+ \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_4(p) &= W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---} \text{---} W^+ \text{---} \text{---} W^0 \text{---} \text{---} \text{---} p \text{---} W_\nu^- \\
&= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \Gamma_{4\mu\alpha\rho\gamma}^{(0)+-00} D_{\alpha\beta}^+(p+l) \Gamma_{3\beta\nu\delta}^{+-0}(-p-l, p, l) D_{\gamma\delta}^0(l) \right\} \\
\mathcal{I}_4(p)|_{p^2=-\bar{v}\Lambda^2} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{4} (\delta_{\nu\rho} p_\mu - \delta_{\mu\nu} p_\rho) + \mathcal{O}(g^3) \\
&= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{8} (-\delta_{\nu\rho} (q-p)_\mu - \delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho - \delta_{\nu\rho} k_\mu + \delta_{\mu\nu} q_\rho) + \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{5ff'}(p, q) &= W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \text{---} \text{---} W_\rho^0 \text{---} q \text{---} \text{---} W_\nu^- \\
&= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \bar{\Gamma}_{3f'f\mu}^{(0)+} S_f(l) \bar{\Gamma}_{3ff\rho}^0(l, l-q, q) S_f(l-q) \right. \\
&\quad \left. \cdot \bar{\Gamma}_{3ff'\nu}^-(l-q, l-p-q, p) S_{f'}(l-p-q) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{5f'f}(p, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ pq = -\bar{w}\Lambda^2}} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{3} (v_0^2 + 3a_0^2) v_0 (\delta_{\mu\nu} (-2p - q)_\rho + \delta_{\nu\rho} (p - q)_\mu + \delta_{\rho\mu} (p + 2q)_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + z_0\Lambda^2} \\
&\cdot \left\{ \frac{2}{3} ((v_0^2 + a_0^2) v_1^{(f')} + 2a_0 v_0 a_1^{(f')}) \right. \\
&\quad \cdot (\delta_{\mu\nu} (2p + q)_\rho + \delta_{\nu\rho} (-p + q)_\mu + \delta_{\rho\mu} (-p - 2q)_\nu) \\
&\quad + 2(v_2^{(f')} + v_3^{(f')}) ((v_0^2 + a_0^2) u_{f'} - (v_0^2 - a_0^2) u_{f'}) \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
&\quad + 2(v_0^2 + a_0^2) v_3^{(f')} u_{f'} (-\delta_{\mu\nu} q_\rho + \delta_{\nu\rho} q_\mu - \delta_{\rho\mu} q_\nu) \\
&\quad + 2(v_0^2 - a_0^2) v_3^{(f')} u_{f'} \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
&\quad \left. + 2(v_0^2 + a_0^2) a_3^{(f')} u_{f'} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \right\} \\
&+ \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{6f'f}(p, q) &= W_\mu^+ \text{---} k \text{---} \begin{array}{c} \nearrow f' \\ \searrow f \\ \downarrow f' \end{array} \begin{array}{c} \text{---} W_\rho^0 \\ \text{---} q \\ \text{---} W_\nu^- \\ \text{---} p \end{array} \\
&= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \bar{\Gamma}_{3f'f\mu}^{(0)+} S_f(l) \bar{\Gamma}_{3ff'\nu}^-(l, l - p, p) S_{f'}(l - p) \right. \\
&\quad \left. \cdot \bar{\Gamma}_{3f'f'\rho}^0(l - p, l - p - q, q) S_{f'}(l - p - q) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{6f'f}(p, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ pq = -\bar{w}\Lambda^2}} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{3} (v_0^2 + 3a_0^2) v_0 (\delta_{\mu\nu} (-2p - q)_\rho + \delta_{\nu\rho} (p - q)_\mu + \delta_{\rho\mu} (p + 2q)_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + z_0\Lambda^2} \\
&\cdot \left\{ \frac{2}{3} ((v_0^2 + a_0^2) v_1^{(f')} + 2a_0 v_0 a_1^{(f')}) \right. \\
&\quad \cdot (\delta_{\mu\nu} (2p + q)_\rho + \delta_{\nu\rho} (-p + q)_\mu + \delta_{\rho\mu} (-p - 2q)_\nu) \\
&\quad + 2(v_2^{(f')} + v_3^{(f')}) ((v_0^2 + a_0^2) u_{f'} - (v_0^2 - a_0^2) u_{f'}) \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
&\quad + 2(v_0^2 + a_0^2) v_3^{(f')} u_{f'} (-\delta_{\mu\nu} q_\rho - \delta_{\nu\rho} q_\mu + \delta_{\rho\mu} q_\nu) \\
&\quad + 2(v_0^2 - a_0^2) v_3^{(f')} u_{f'} \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
&\quad \left. - 2(v_0^2 + a_0^2) a_3^{(f')} u_{f'} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \right\} \\
&+ \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{I}_{5ff}(p, q) + \mathcal{I}_{6ff}(p, q) \right) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ pq = -\bar{w}\Lambda^2}} \\
&= -g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{2}{3} (v_0^2 + 3a_0^2) v_0 (\delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho + \delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu) \\
&\quad + g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + z_0\Lambda^2} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{2}{3} ((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(f)} + v_1^{(f')}) + 2a_0 v_0 (a_1^{(f)} + a_1^{(f')})) \right. \\
&\quad \quad \cdot (\delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho + \delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu) \\
&\quad + 2((v_0^2 + a_0^2)(v_2^{(f)} u_f + v_2^{(f')} u_{f'}) - (v_0^2 - a_0^2)(v_2^{(f)} u_{f'} + v_2^{(f')} u_f)) \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
&\quad + (v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(f)} u_f - v_3^{(f')} u_{f'}) (\delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu - \delta_{\nu\rho} k_\mu + \delta_{\rho\mu} p_\nu) \\
&\quad \left. + 2(v_0^2 + a_0^2)(a_3^{(f)} u_f - a_3^{(f')} u_{f'}) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_7(k, q) &= \text{Diagram} \\
&= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \tilde{\Gamma}_3^{(0)0-\mu}(l) \tilde{D}^+((l-k)^2) \tilde{\Gamma}_3^{+0-\rho}(l-k, l-k-q, q) \right. \\
&\quad \left. \cdot \tilde{D}^+((l-k-q)^2) \tilde{\Gamma}_3^{+0-\nu}(l-k-q, l, -k-q) \tilde{D}^0(l^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_7(k, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ k^2 = -\bar{v}\Lambda^2 \\ kq = -\bar{w}\Lambda^2}} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \left(1 + \frac{y_1^{(0)} \Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + y_0^{(0)} \Lambda^2} \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{12} (\delta_{\mu\nu}(-k+q)_\rho + \delta_{\nu\rho}(2k+q)_\mu + \delta_{\rho\mu}(-k-2q)_\nu) \\
&+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{y_2^{(0)} \Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + y_0^{(0)} \Lambda^2} \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} q_\rho \\
&+ \mathcal{O}(g^3)
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Selbstkonsistenzgleichungen und Massenbildung

4.1 Selbstkonsistenzgleichungen für die Propagatoren

Mit den Resultaten aus dem vorigen Kapitel werden nun die Selbstkonsistenzgleichungen (2.8) für die in den nichtperturbativ modifizierten Ansätzen vorkommenden Parameter, zu denen auch die der Massenterme in den Propagatoren gehören, aufgestellt. Sie müssen erfüllt sein, damit sich die Ansätze in den DS-Gleichungen reproduzieren können (2.4). Die Auswertung dieser Selbstkonsistenzgleichungen wird dann Aussagen darüber ermöglichen, ob unsere Ansätze eine Lösung der DS-Gleichungen darstellen, welche die dynamische Bildung von Teilchenmassen und damit verbunden eine spontane Brechung der Eichsymmetrie beschreibt.

In Abschnitt 2.5 wurde erwähnt, daß Selbstkonsistenz eines Ansatzes nur Übereinstimmung auf beiden Seiten der DS-Gleichung an n „Vergleichsdaten“ bedeuten kann, wobei n die Zahl der nichtperturbativen Parameter im Ansatz ist. Wie diese Stützstellen zweckmäßig zu wählen sind, soll zunächst für die Propagatoren dargelegt werden.

Der Ansatz für den W^0 -Propagator lautet:

$$D_{\mu\nu}^0(q) = t_{\mu\nu}(q) \frac{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2}{q^2(q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2)} ; \quad (4.1)$$

für die zugehörige Vertexfunktion gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\mu\nu}^0(q) &= -t_{\mu\nu}(q) \frac{q^2(q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2)}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} \\ &= -t_{\mu\nu}(q) \left[q^2 + (u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^2 + \frac{u_0^{(2)}(u_0^{(2)} - u_0^{(1)}) \Lambda^4}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) stellt für die Approximationsstufe $r = 1$ bis auf Korrekturen der Ordnung g^2 die linke Seite der DS-Gleichung dar, deren rechte Seite in Einschleifenordnung nach Trans-

versalprojektion die Struktur

$$-t_{\mu\nu}(q)q^2 + t_{\mu\nu}(q)\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\left[\mathcal{J}_0(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + x_0\Lambda^2}\mathcal{J}_1^{(1)}(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + y_0^{(0)}\Lambda^2}\mathcal{J}_1^{(2)}(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2}\mathcal{J}_1^{(3)}(q^2)\right] \quad (4.3)$$

hat. Daraus ergibt sich:

$$(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})\Lambda^2 + \frac{u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})\Lambda^4}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2} + \mathcal{O}(g^2) \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\left[\mathcal{J}_0(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + x_0\Lambda^2}\mathcal{J}_1^{(1)}(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + y_0^{(0)}\Lambda^2}\mathcal{J}_1^{(2)}(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2}\mathcal{J}_1^{(3)}(q^2)\right]. \quad (4.4)$$

Während die linke Seite von (4.4) einen Pol bei $q^2 = -u_0^{(2)}\Lambda^2$ besitzt, stehen auf der rechten Seite drei Terme mit unterschiedlichen Polstellen bezüglich q^2 . Es ist deshalb naheliegend, die nichtperturbativen Parameter so zu wählen, daß die Pole und deren Residuen auf beiden Seiten der DS-Gleichung übereinstimmen, denn sonst würde man lokal unendlich große Anpassungsfehler erhalten. Die Anpassung der Polstellen liefert mit

$$u_0^{(2)} \stackrel{!}{=} x_0 = y_0^{(0)} = z_0 \quad (4.5)$$

die erste Selbstkonsistenzgleichung; (4.4) geht dann über in:

$$\begin{aligned} & (u_0^{(2)} - u_0^{(1)})\Lambda^2 + \frac{u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})\Lambda^4}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2} + \mathcal{O}(g^2) \\ & \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\left[\mathcal{J}_0(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}\mathcal{J}_1(q^2)\right] \\ & = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\left[\mathcal{J}_0(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}\{\mathcal{J}_1(q^2) - \mathcal{J}_1(-u_0^{(2)}\Lambda^2)\} + \frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}\mathcal{J}_1(-u_0^{(2)}\Lambda^2)\right] \\ & = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\left[\mathcal{K}_0(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}\mathcal{J}_1(-u_0^{(2)}\Lambda^2)\right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei im letzten Schritt die bei $q^2 = -u_0^{(2)}\Lambda^2$ reguläre Funktion

$$\mathcal{K}_0(q^2) := \mathcal{J}_0(q^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2}\{\mathcal{J}_1(q^2) - \mathcal{J}_1(-u_0^{(2)}\Lambda^2)\} \quad (4.7)$$

definiert wurde. Die Anpassung der Residuen führt auf die zweite Selbstkonsistenzgleichung:

$$u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})\Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2) \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\mathcal{J}_1(-u_0^{(2)}\Lambda^2). \quad (4.8)$$

Schließlich kann man den Massenterm $(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})\Lambda^2$ auf der linken Seite von (4.6) an die Funktion $\mathcal{K}_0(q^2)$ an einer zunächst beliebigen Stelle $q^2 = -\bar{u}\Lambda^2$ anpassen und erhält:

$$(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})\Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2) \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2\mathcal{K}_0(-\bar{u}\Lambda^2). \quad (4.9)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß (4.8) und (4.9) nur deshalb nichttriviale Lösungen besitzen können, weil sowohl $(g_0/4\pi)^2 \mathcal{J}_1(-u_0^{(2)} \Lambda^2)$ als auch $(g_0/4\pi)^2 \mathcal{K}_0(-\bar{u} \Lambda^2)$ in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen Anteile enthalten, die proportional zu $\Pi(\varepsilon)$ (2.52) sind¹. Der in Abschnitt 2.5 erläuterte Selbstkonsistenzmechanismus ist somit in der Lage, auf den rechten Seiten von (4.8) und (4.9) Terme zu erzeugen, die trotz des Faktors $(g_0/4\pi)^2$ von der Ordnung g^0 sind. Die mit $\mathcal{O}(g^2)$ bezeichneten Ausdrücke sind endliche Störungskorrekturen.

(4.6) kann nun in der Form

$$\begin{aligned} & (u_0^{(2)} - u_0^{(1)}) \Lambda^2 + \frac{u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^4}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} + \mathcal{O}(g^2) \\ \stackrel{!}{=} & \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left[\mathcal{K}_0(-\bar{u} \Lambda^2) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} \mathcal{J}_1(-u_0^{(2)} \Lambda^2) \right. \\ & \left. + \{ \mathcal{K}_0(q^2) - \mathcal{K}_0(-\bar{u} \Lambda^2) \} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

geschrieben werden. Der Restterm $(g_0/4\pi)^2 \{ \mathcal{K}_0(q^2) - \mathcal{K}_0(-\bar{u} \Lambda^2) \}$ enthält noch divergente Anteile, die aber nicht proportional zu $\Pi(\varepsilon)$ sind. Er trägt demnach zur perturbativen Korrektur der Ordnung g^2 bei, die gemäß (2.4) im ersten Iterationsschritt miterzeugt wird. Da in (2.18) die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit gestellt wurde, muß die Divergenz gleich der störungstheoretischen Divergenz sein. Dies wird zur Festlegung des bisher unbestimmten Parameters \bar{u} führen.

Obwohl im Propagatoransatz nur zwei Parameter stehen, erhält man drei Selbstkonsistenzgleichungen. Die dritte Bedingung muß erfüllt sein, damit einer der Pole bei $q^2 = 0$ liegt.

Es ergeben sich aus der DS-Gleichung für den W^0 -Propagator zusammengefaßt folgende Selbstkonsistenzgleichungen:

$$\begin{aligned} u_0^{(2)} & \stackrel{!}{=} x_0 = y_0^{(0)} = z_0, \\ u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2) & \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \mathcal{J}_1(-u_0^{(2)} \Lambda^2), \\ (u_0^{(2)} - u_0^{(1)}) \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2) & \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \mathcal{K}_0(-\bar{u} \Lambda^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die gleiche Argumentation gilt auch für den c^0 -Propagator, da er bis auf den Transversalprojektor die in (4.2) angegebene Struktur besitzt. Somit erhält man die zu (4.11) analogen Selbstkonsistenzgleichungen.

Für Propagatoren der rationalen Approximationsstufe $r = 0$ ergibt sich *eine* Selbstkonsistenzgleichung, da genau ein nichtperturbativer Parameter im Ansatz vorkommt.

Die DS-Gleichung für den W^\pm -Propagator liefert in Einschleifenordnung die Beziehung:

$$\begin{aligned} -t_{\mu\nu}(q) [q^2 + u_+ \Lambda^2] + \mathcal{O}(g^2) & \stackrel{!}{=} -t_{\mu\nu}(q) q^2 + t_{\mu\nu}(q) \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \mathcal{J}_0(q^2) \\ \Rightarrow -u_+ \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2) & \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \mathcal{J}_0(q^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

¹Dies sind genau ihre divergenten Anteile.

Die Selbstkonsistenzgleichung erhält man, indem der Massenterm $-u_+ \Lambda^2$ an die Funktion $\mathcal{J}_0(q^2)$ an einer beliebigen Stelle $q^2 = -\bar{u}\Lambda^2$ angepaßt wird:

$$-u_+ \Lambda^2 + \mathcal{O}(g^2) \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{J}_0(-\bar{u}\Lambda^2) + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \{\mathcal{J}_0(q^2) - \mathcal{J}_0(-\bar{u}\Lambda^2)\}. \quad (4.13)$$

Der divergente Restterm $(g_0/4\pi)^2 \{\mathcal{J}_0(q^2) - \mathcal{J}_0(-\bar{u}\Lambda^2)\}$ ist ein Teil der perturbativen Korrektur der Ordnung g^2 ; seine Divergenz muß wegen der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit die störungstheoretische Divergenz sein.

Für die DS-Gleichung des Fermion-Propagators gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} -(\not{p} + u_f \Lambda) + \mathcal{O}(g^2) &\stackrel{!}{=} -\not{p} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{J}_0(p) \\ \Rightarrow -u_f \Lambda + \mathcal{O}(g^2) &\stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{J}_0(p) \\ &= \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{J}_0(p)|_{p^2=-\bar{u}\Lambda^2} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \{\mathcal{J}_0(p) - \mathcal{J}_0(p)|_{p^2=-\bar{u}\Lambda^2}\}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Resultate aus Kapitel 3 werden nun die Selbstkonsistenzgleichungen für die Propagatoren aufgestellt. Ihre Auswertung wird zurückgestellt, bis auch die Vertextgleichungen zur Verfügung stehen.

W^0 -Propagator

Anpassung der Pole:

$$u_0^{(2)} = x_0 = y_0^{(0)} = z_0. \quad (4.14)$$

Anpassung der Residuen:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) &= \frac{25}{6} u_0^{(2)2} + \left(\frac{5}{6} x_2 - 5x_1 + 6u_+ - \frac{1}{6} y_1^{(0)}\right) \\ &+ \frac{2}{3} [v_0(v_1^{(\nu)} - v_1^{(\tau)}) + a_0(a_1^{(\nu)} - a_1^{(\tau)})] + 2v_0(v_3^{(\nu)} u_\nu - v_3^{(\tau)} u_\tau) \\ &+ 2[v_0(v_1^{(t)} - v_1^{(b)}) + a_0(a_1^{(t)} - a_1^{(b)})] + 6v_0(v_3^{(t)} u_t - v_3^{(b)} u_b) \Big) u_0^{(2)} \\ &- 6u_+ x_2 - 4a_0(a_1^{(\nu)} u_\nu^2 - a_1^{(\tau)} u_\tau^2) - 12a_0(a_1^{(t)} u_t^2 - a_1^{(b)} u_b^2). \quad (4.15) \end{aligned}$$

Anpassung des Massenterms:

$$\begin{aligned} \beta_0 (u_0^{(2)} - u_0^{(1)}) &= \left(-\frac{13}{3} + \frac{8}{3}(v_0^2 + a_0^2)\right) \bar{u} - \frac{25}{6} u_0^{(2)} + 5x_1 \\ &- \frac{5}{6} x_2 - \frac{3}{2} u_+ + \frac{1}{6} y_1^{(0)} - 2a_0^2(u_\nu^2 + u_\tau^2) - 6a_0^2(u_t^2 + u_b^2) \\ &- \frac{2}{3} [v_0(v_1^{(\nu)} - v_1^{(\tau)}) + a_0(a_1^{(\nu)} - a_1^{(\tau)})] - 2v_0(v_3^{(\nu)} u_\nu - v_3^{(\tau)} u_\tau) \\ &- 2[v_0(v_1^{(t)} - v_1^{(b)}) + a_0(a_1^{(t)} - a_1^{(b)})] - 6v_0(v_3^{(t)} u_t - v_3^{(b)} u_b). \quad (4.16) \end{aligned}$$

Divergender Anteil des Restterms $\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \{\mathcal{K}_0(q^2) - \mathcal{K}_0(-\bar{u}\Lambda^2)\}$:

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{13}{3} - \frac{8}{3}(v_0^2 + a_0^2)\right) (q^2 + \bar{u}\Lambda^2). \quad (4.17)$$

Dies ist für $\bar{u} = 0$ die perturbative Einschleifendivergenz in Landau-Eichung. Die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit legt den zunächst unbestimmten Parameter \bar{u} fest, denn nur für $\bar{u} = 0$ läßt sich die Divergenz durch den störungstheoretischen Counterterm beheben.

W^\pm -Propagator

Anpassung des Massenterms:

$$\begin{aligned} -\beta_0 u_+ &= \left(-\frac{13}{3} + \frac{8}{3}(v_0^2 + a_0^2) \right) \bar{u} - \frac{3}{4}u_+ - \frac{3}{4}u_0^{(1)} \\ &- \frac{9}{4}u_0^{(2)} + 3x_1 - \frac{1}{2}y_0^{(+)} - \frac{1}{2}y_1^{(+)} + \frac{1}{2}u_G^{(1)} - (v_0^2 + a_0^2)(u_\nu^2 + u_\tau^2) \\ &- 3(v_0^2 + a_0^2)(u_t^2 + u_b^2) + 2(v_0^2 - a_0^2)(u_\nu u_\tau) + 6(v_0^2 - a_0^2)(u_t u_b) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Divergender Anteil des Restterms $\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \{ \mathcal{J}_0(q^2) - \mathcal{J}_0(-\bar{u}\Lambda^2) \}$:

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{13}{3} - \frac{8}{3}(v_0^2 + a_0^2) \right) (q^2 + \bar{u}\Lambda^2) . \quad (4.19)$$

Dies ist für $\bar{u} = 0$ die perturbative Einschleifendivergenz in Landau-Eichung.

Fermion-Propagator

Anpassung des Massenterms:

$$\begin{aligned} -\beta_0 u_f &= \frac{3}{8}(a_0^2 - v_0^2)(u_f + 4u_{f'}) + \frac{3}{2}T_{3f} [(v_0 v_3^{(f)} - a_0 a_3^{(f)}) \\ &+ (a_0 v_3^{(f)} - v_0 a_3^{(f)})\gamma_5] . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Der Restterm $(g_0/4\pi)^2 \{ \mathcal{J}_0(p) - \mathcal{J}_0(p)|_{p^2=-\bar{u}\Lambda^2} \}$ erweist sich in Landau-Eichung als konvergent² und gestattet es somit nicht, den willkürlich gewählten Parameter \bar{u} festzulegen. Da dieser in (4.20) jedoch nicht vorkommt, besteht hierfür keine Notwendigkeit.

c^0 -Propagator

Anpassung der Pole:

$$u_G^{(2)} = y_0^{(+)} . \quad (4.21)$$

Anpassung der Residuen:

$$\beta_0 u_G^{(2)} (u_G^{(1)} - u_G^{(2)}) = -\frac{3}{2}u_G^{(2)} y_1^{(+)} . \quad (4.22)$$

Anpassung des Massenterms:

$$\beta_0 (u_G^{(2)} - u_G^{(1)}) = \frac{3}{2}(y_1^{(+)} - \bar{u}) . \quad (4.23)$$

²Dieses Resultat steht in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die perturbative Einschleifendivergenz des Fermion-Propagators proportional zur Eichfixierung ist.

Divergender Anteil des Restterms $\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \{\mathcal{K}_0(q^2) - \mathcal{K}_0(-\bar{u}\Lambda^2)\}$:

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{3}{2} (q^2 + \bar{u}\Lambda^2). \quad (4.24)$$

Dies ist für $\bar{u} = 0$ die perturbative Einschleifendivergenz in Landau-Eichung.

4.2 Selbstkonsistenzgleichungen für die Vertizes

In diesem Abschnitt werden die Selbstkonsistenzgleichungen für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex, den Geist- W^0 -Antigeist-Vertex und den Drei-Bosonen-Vertex bestimmt. Die Ansätze für diese Vertexfunktionen bestehen aus der perturbativen nullten Ordnung und den nichtperturbativen Modifikationen. Letztere besitzen stets einen Polfaktor der Form $\Lambda^2/(q^2 + c\Lambda^2)$, was dazu führt, daß ein zu den Massentermen der negativen inversen Propagatoren analoger Term nicht auftritt. Die Vorgehensweise zur Aufstellung der Selbstkonsistenzgleichungen wird zunächst am Beispiel des Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex erläutert.

Die DS-Gleichung liefert folgende Beziehung (q ist der W^0 -Impuls):

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)\ 0} + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(np)\ 0}(q) + \mathcal{O}(g^2) &\stackrel{!}{=} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(0)\ 0} + \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \left[\mathcal{J}_0(p, q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \mathcal{J}_1^{(1)}(p, q) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + x_0\Lambda^2} \mathcal{J}_1^{(2)}(p, q) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Den ersten Schritt stellt die Anpassung der Polstellen auf beiden Seiten der Gleichung dar:

$$z_0 \stackrel{!}{=} x_0. \quad (4.26)$$

Diese Selbstkonsistenzgleichung ist bereits in (4.14) enthalten³. (4.25) geht dann über in:

$$\begin{aligned} &\frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{(np)\ 0}(q) + \mathcal{O}(g^2) \\ &\stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \left[\mathcal{J}_0(p, q) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \mathcal{J}_1(p, q) \right] \\ &= \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \left[\mathcal{J}_0(p, q) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \mathcal{J}_1(p, q)|_{q^2=-z_0\Lambda^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \{ \mathcal{J}_1(p, q) - \mathcal{J}_1(p, q)|_{q^2=-z_0\Lambda^2} \} \right] \\ &= \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \left[\mathcal{K}_0(p, q) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \mathcal{J}_1(p, q)|_{q^2=-z_0\Lambda^2} \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{K}_0(p, q) := \mathcal{J}_0(p, q) + \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0\Lambda^2} \{ \mathcal{J}_1(p, q) - \mathcal{J}_1(p, q)|_{q^2=-z_0\Lambda^2} \}. \quad (4.28)$$

³Die Anpassung der Polstellen kann auch neue Informationen liefern; z. B. führt die Polanpassung in der DS-Gleichung für den Drei-Bosonen-Vertex zur Bestimmung des Parameters \bar{x}_0 .

Anschließend paßt man die Residuen an:

$$\bar{\Gamma}_{3\text{ff}\mu}^{(np)0}(q) + \mathcal{O}(g^2) \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{J}_1(p, q)|_{q^2=-z_0\Lambda^2}. \quad (4.29)$$

Damit der Selbstkonsistenzmechanismus auf der rechten Seite von (4.29) Terme der Ordnung g^0 erzeugen kann, müssen die in $\mathcal{J}_1(p, q)$ vorkommenden Skalarprodukte p^2 und pq auf beliebige Werte $p^2 = -\bar{v}\Lambda^2$ und $pq = -\bar{w}\Lambda^2$ festgelegt werden. Diese Skalarprodukte stehen ausschließlich in der nichtganzen Potenz, die ein Ergebnis der Impulsintegration (A.26) ist. Deshalb erscheinen die willkürlich gewählten Parameter \bar{v} und \bar{w} nicht in der Selbstkonsistenzgleichung, welche folgende Form annimmt:

$$\bar{\Gamma}_{3\text{ff}\mu}^{(np)0}(q) + \mathcal{O}(g^2) \stackrel{!}{=} \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{J}_1(p, q)|_{\substack{q^2=-z_0\Lambda^2 \\ p^2=-\bar{v}\Lambda^2 \\ pq=-\bar{w}\Lambda^2}}. \quad (4.30)$$

(4.30) liefert genaugenommen sechs Selbstkonsistenzgleichungen, da für jede der sechs unabhängigen Diracmatrix- bzw. Lorentztensorstrukturen in $\bar{\Gamma}_{3\text{ff}\mu}^{(np)0}(q)$ ein separater Koeffizientenvergleich durchgeführt wird.

Der divergente Restterm $(g_0/4\pi)^2 \mathcal{K}_0(p, q)$ trägt nur zur perturbativen Korrektur der Ordnung g^2 bei; seine Divergenz muß wegen der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit gleich der störungstheoretischen Divergenz sein. Es zeigt sich, daß dies bei allen betrachteten Vertizes tatsächlich der Fall ist.

Auf die gleiche Weise verfährt man beim Drei-Bosonen-Vertex. Hier liefert die Residuenanpassung für jeden der acht unabhängigen Lorentztensoren des Ansatzes eine Selbstkonsistenzgleichung.

Die Aufstellung der Selbstkonsistenzgleichungen für den Geist- W^0 -Antigeist-Vertex wird sich als wesentlich einfacher erweisen, da alle Einschleifenintegrale der zugehörigen DS-Gleichung in Landau-Eichung konvergent sind.

Man erhält somit die nachfolgend aufgelisteten Selbstkonsistenzbeziehungen:

Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex

Anpassung der Pole:

$$z_0 = x_0. \quad (4.31)$$

Anpassung der Residuen:

$$\beta_0(v_1^{(f)} - a_1^{(f)}\gamma_5) = \frac{3}{2} T_{3f}(x_2 - x_0) [(v_0^2 + a_0^2) - 2v_0 a_0 \gamma_5], \quad (4.32)$$

$$\beta_0(v_2^{(f)} - a_2^{(f)}\gamma_5) = (v_0^2 - a_0^2) \frac{3}{4} [(v_2^{(f)} + 2v_2^{(f')}) - (a_2^{(f)} + 2a_2^{(f')})\gamma_5], \quad (4.33)$$

$$\beta_0(v_3^{(f)} - a_3^{(f)}\gamma_5) = (a_0^2 - v_0^2) \frac{1}{4} [(v_3^{(f)} + 2v_3^{(f')}) - (a_3^{(f)} + 2a_3^{(f')})\gamma_5]. \quad (4.34)$$

Divergender Anteil des Restterms $\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{K}_0(p, q)$:

$$-\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{3}{2} T_{3f} \gamma_\mu [(v_0^2 + a_0^2) - 2v_0 a_0 \gamma_5] . \quad (4.35)$$

Dies ist die perturbative Einschleifendivergenz in Landau-Eichung.

Geist- W^0 -Antigeist-Vertex

Sämtliche Einschleifenintegrale der DS-Gleichung für den Geist- W^0 -Antigeist-Vertex haben sich in Landau-Eichung als konvergent herausgestellt⁴. Da der Selbstkonsistenzmechanismus an die Divergenzen gebunden ist, werden die nichtperturbativen Modifikationen des Ansatzes (2.40) auf der rechten Seite der DS-Gleichung nicht reproduziert. Der Geist- W^0 -Antigeist-Vertex behält demnach seine störungstheoretische Gestalt; es gilt:

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = 0 . \quad (4.36)$$

Dieses Resultat läßt sich ohne weiteres auch auf die Geist- W^\pm -Antigeist-Vertizes übertragen, da ihre DS-Gleichungen dieselbe Struktur wie die Geist- W^0 -Antigeist-Vertextgleichung besitzen. Man erhält somit:

$$y_1^{(+)} = y_2^{(+)} = 0 . \quad (4.37)$$

Drei-Bosonen-Vertex

Anpassung der Pole:

$$x_0 = \bar{x}_0 = y_0^{(0)} = z_0 . \quad (4.38)$$

Anpassung der Residuen:

$$\begin{aligned} \beta_0(x_2 - x_0) &= \frac{7}{8}x_0 + x_2 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 - \frac{1}{12}y_1^{(0)} \\ &- \frac{2}{3}((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(\nu)} + v_1^{(\tau)}) + 2a_0v_0(a_1^{(\nu)} + a_1^{(\tau)})) \\ &- 2((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(t)} + v_1^{(b)}) + 2a_0v_0(a_1^{(t)} + a_1^{(b)})) , \\ \beta_0(x_1 - x_0) &= \frac{7}{8}x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 - \frac{1}{12}y_1^{(0)} \\ &- \frac{2}{3}((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(\nu)} + v_1^{(\tau)}) + 2a_0v_0(a_1^{(\nu)} + a_1^{(\tau)})) \\ &- 2((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(t)} + v_1^{(b)}) + 2a_0v_0(a_1^{(t)} + a_1^{(b)})) \\ &+ (v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(\nu)}u_\nu - v_3^{(\tau)}u_\tau) \\ &+ 3(v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(t)}u_t - v_3^{(b)}u_b) , \end{aligned} \quad (4.39)$$

⁴Die perturbativen Einschleifendivergenzen der Geist-Boson-Antigeist-Vertizes verschwinden in Landau-Eichung ebenfalls, da sie proportional zum Eichfixierungsparameter ξ sind.

$$\begin{aligned}
\beta_0(x_1 - x_0) &= \frac{11}{4}x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 - \frac{1}{12}y_1^{(0)} \\
&- \frac{2}{3}((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(\nu)} + v_1^{(\tau)}) + 2a_0v_0(a_1^{(\nu)} + a_1^{(\tau)})) \\
&- 2((v_0^2 + a_0^2)(v_1^{(t)} + v_1^{(b)}) + 2a_0v_0(a_1^{(t)} + a_1^{(b)})) \\
&+ (v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(\nu)}u_\nu - v_3^{(\tau)}u_\tau) \\
&+ 3(v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(t)}u_t - v_3^{(b)}u_b) , \tag{4.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0x_4 &= \frac{15}{8}x_0 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 + \frac{3}{4}x_4 \\
&- 2((v_0^2 + a_0^2)(v_2^{(\nu)}u_\nu + v_2^{(\tau)}u_\tau) - (v_0^2 - a_0^2)(v_2^{(\nu)}u_\tau + v_2^{(\tau)}u_\nu)) \\
&- 6((v_0^2 + a_0^2)(v_2^{(t)}u_t + v_2^{(b)}u_b) - (v_0^2 - a_0^2)(v_2^{(t)}u_b + v_2^{(b)}u_t)) , \tag{4.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0x_3 &= -\frac{15}{8}x_0 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{8}x_2 \\
&- (v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(\nu)}u_\nu - v_3^{(\tau)}u_\tau) \\
&- 3(v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(t)}u_t - v_3^{(b)}u_b) , \tag{4.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0x_3 &= \frac{5}{8}\bar{x}_1 - \frac{5}{8}\bar{x}_3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{8}x_2 \\
&+ (v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(\nu)}u_\nu - v_3^{(\tau)}u_\tau) \\
&+ 3(v_0^2 + a_0^2)(v_3^{(t)}u_t - v_3^{(b)}u_b) , \tag{4.44}
\end{aligned}$$

$$\beta_0x_5 = 4x_5 , \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0x_6 &= -\frac{3}{2}x_6 + 2(v_0^2 + a_0^2)(a_3^{(\nu)}u_\nu - a_3^{(\tau)}u_\tau) \\
&+ 6(v_0^2 + a_0^2)(a_3^{(t)}u_t - a_3^{(b)}u_b) . \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Man beachte, daß die Zählerparameter \bar{x}_1 und \bar{x}_3 des Vier-Bosonen-Vertex, dessen Selbstkonsistenzproblem in dieser Arbeit nicht studiert wird, nur in vier von diesen acht Gleichungen und nur in der Kombination $5/8(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)$ auftreten. Ferner ist das Gleichungssystem in den Parametern x_i des Drei-Bosonen-Vertex linear.

Divergender Anteil des Restterms $\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \mathcal{K}_0(k, p, q)$ (es gilt $k + p + q = 0$):

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{17}{6} + \frac{8}{3}(v_0^2 + 3a_0^2)v_0 \right) \left(\delta_{\mu\nu}(p - k)_\rho + \delta_{\nu\rho}(q - p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k - q)_\nu \right) . \tag{4.47}$$

Dies ist die perturbative Einschleifendivergenz in Landau-Eichung.

Hiermit sind alle Selbstkonsistenzbeziehungen, die sich aus den untersuchten DS-Gleichungen ergeben, zusammengestellt. Bevor wir uns der Frage zuwenden, ob diese Selbstkonsistenzgleichungen die Ausbildung dynamischer Fermion- und Eichbosonmassen gestatten, wollen wir die Resultate für den Geistsektor der Theorie bei Verwendung der Landau-Eichung betrachten:

Aus der DS-Gleichung für den c^0 -Propagator haben sich die Beziehungen (4.22) und (4.23) ergeben, die unter Berücksichtigung der Forderung $\bar{u} = 0$ beide auf

$$\beta_0 (u_G^{(2)} - u_G^{(1)}) = \frac{3}{2}y_1^{(+)} \tag{4.48}$$

führen. Zusammen mit den Ergebnissen

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = y_1^{(+)} = y_2^{(+)} = 0 \quad (4.49)$$

aus den DS-Gleichungen für die Geist-Boson-Antigeist-Vertizes erhält man somit:

$$u_G^{(2)} = u_G^{(1)}. \quad (4.50)$$

Daraus folgt, daß sowohl die Geist-Propagatoren als auch die Geist-Boson-Antigeist-Vertizes ihre störungstheoretische Gestalt beibehalten; die nichtperturbativen Modifikationen im Geistsektor erweisen sich in Landau-Eichung als nicht selbstkonsistenzfähig⁵.

4.3 Fermionmassen

Für die Beantwortung der Frage, ob die Fermionen im Rahmen unserer Modelltheorie dynamisch Massen ausbilden können, ist Gleichung (4.20) ausschlaggebend. Da in dieser aber Parameter aus dem Ansatz für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex vorkommen, werden zunächst die Selbstkonsistenzgleichungen (4.32) – (4.34) untersucht.

Aus

$$\beta_0(v_1^{(f)} - a_1^{(f)}\gamma_5) = \frac{3}{2}T_{3f}(x_2 - x_0)[(v_0^2 + a_0^2) - 2v_0a_0\gamma_5]$$

erhält man für $v_1^{(f)}$ und $a_1^{(f)}$ die Bestimmungsgleichungen:

$$v_1^{(f)} = \frac{3}{2\beta_0}T_{3f}(x_2 - x_0)(v_0^2 + a_0^2), \quad (4.51)$$

$$a_1^{(f)} = \frac{3}{\beta_0}T_{3f}(x_2 - x_0)v_0a_0; \quad (4.52)$$

$a_0 = 0$ hat demnach $a_1^{(f)} = 0$ zur Folge und für $v_0 = \pm a_0$ ergibt sich $v_1^{(f)} = \pm a_1^{(f)}$. Die beiden Parameter hängen nur über den Faktor T_{3f} von der Fermionsorte ab; es gilt:

$$v_1^{(\nu)} = v_1^{(t)} = -v_1^{(\tau)} = -v_1^{(b)} = \frac{3}{4\beta_0}(x_2 - x_0)(v_0^2 + a_0^2), \quad (4.53)$$

$$a_1^{(\nu)} = a_1^{(t)} = -a_1^{(\tau)} = -a_1^{(b)} = \frac{3}{2\beta_0}(x_2 - x_0)v_0a_0. \quad (4.54)$$

Ferner können sie wegen der Abhängigkeit von $(x_2 - x_0)$ nur dann von Null verschieden sein, wenn der Drei-Bosonen-Vertex die entsprechende nichtperturbative Modifikation ausbildet. Es handelt sich also um ein Phänomen, das nur in einer *nichtabelschen* Theorie auftreten kann.

In den Selbstkonsistenzgleichungen (4.33)

$$\beta_0(v_2^{(f)} - a_2^{(f)}\gamma_5) = (v_0^2 - a_0^2)\frac{3}{4}[(v_2^{(f)} + 2v_2^{(f')}) - (a_2^{(f)} + 2a_2^{(f')})\gamma_5]$$

⁵Das gleiche Resultat wird in [13] auch für den Geistsektor der QCD gefunden.

und (4.34)

$$\beta_0(v_3^{(f)} - a_3^{(f)}\gamma_5) = (a_0^2 - v_0^2)\frac{1}{4}[(v_3^{(f)} + 2v_3^{(f')}) - (a_3^{(f)} + 2a_3^{(f')})\gamma_5],$$

die aus der DS-Gleichung für den Vertex $\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q)$ folgen, sind die Parameter für ein Fermion der Sorte f mit den entsprechenden Parametern des Dublettpartners f' verknüpft. Die DS-Gleichung für $\bar{\Gamma}_{3f'f'\mu}^0(p+q, p, q)$ liefert dieselben Selbstkonsistenzbeziehungen mit vertauschten Indizes f und f' :

$$\beta_0(v_2^{(f')} - a_2^{(f')}\gamma_5) = (v_0^2 - a_0^2)\frac{3}{4}[(v_2^{(f')} + 2v_2^{(f)}) - (a_2^{(f')} + 2a_2^{(f)})\gamma_5], \quad (4.55)$$

$$\beta_0(v_3^{(f')} - a_3^{(f')}\gamma_5) = (a_0^2 - v_0^2)\frac{1}{4}[(v_3^{(f')} + 2v_3^{(f)}) - (a_3^{(f')} + 2a_3^{(f)})\gamma_5], \quad (4.56)$$

die ebenfalls erfüllt sein müssen. Die Untersuchung des aus (4.33) und (4.55) bestehenden Gleichungssystems führt auf folgendes Ergebnis⁶:

- für $v_0^2 - a_0^2 = \frac{4}{9}\beta_0$ ergibt sich $v_2^{(f)} = v_2^{(f')}$ und $a_2^{(f)} = a_2^{(f')}$.
- für $v_0^2 - a_0^2 = -\frac{4}{3}\beta_0$ ergibt sich $v_2^{(f)} = -v_2^{(f')}$ und $a_2^{(f)} = -a_2^{(f')}$.
- für alle anderen Werte von $v_0^2 - a_0^2$ ergibt sich $v_2^{(f)} = v_2^{(f')} = a_2^{(f)} = a_2^{(f')} = 0$.

Das aus (4.34) und (4.56) bestehende Gleichungssystem liefert:

- für $v_0^2 - a_0^2 = -\frac{4}{3}\beta_0$ ergibt sich $v_3^{(f)} = v_3^{(f')}$ und $a_3^{(f)} = a_3^{(f')}$.
- für $v_0^2 - a_0^2 = 4\beta_0$ ergibt sich $v_3^{(f)} = -v_3^{(f')}$ und $a_3^{(f)} = -a_3^{(f')}$.
- für alle anderen Werte von $v_0^2 - a_0^2$ ergibt sich $v_3^{(f)} = v_3^{(f')} = a_3^{(f)} = a_3^{(f')} = 0$.

Demnach können nur für $v_0^2 - a_0^2 = -\frac{4}{3}\beta_0$ alle vier Parameter $v_2^{(f)}$, $a_2^{(f)}$, $v_3^{(f)}$ und $a_3^{(f)}$ von Null verschieden sein; im Fall $v_0 = \pm a_0$ gilt $v_i^{(f)} = v_i^{(f')} = a_i^{(f)} = a_i^{(f')} = 0$ ($i = 2, 3$).

Die Selbstkonsistenzgleichung für den Propagator eines Fermions der Sorte f (4.20) lautet:

$$-\beta_0 u_f = \frac{3}{8}(a_0^2 - v_0^2)(u_f + 4u_{f'}) + \frac{3}{2}T_{3f}[(v_0 v_3^{(f)} - a_0 a_3^{(f)}) + (a_0 v_3^{(f)} - v_0 a_3^{(f)})\gamma_5].$$

Der Massenterm im Propagator wurde dabei mit $u_f \Lambda$ angesetzt. (4.20) enthält neben u_f auch den Massenparameter des zu f gehörenden Dublettpartners f' , was dazu führt, daß gleichzeitig auch

$$-\beta_0 u_{f'} = \frac{3}{8}(a_0^2 - v_0^2)(u_{f'} + 4u_f) + \frac{3}{2}T_{3f'}[(v_0 v_3^{(f')} - a_0 a_3^{(f')}) + (a_0 v_3^{(f')} - v_0 a_3^{(f')})\gamma_5]$$

⁶Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß β_0 in asymptotisch freien Theorien positiv ist; für das hier untersuchte $SU(2)$ -Modell ist $\beta_0 = 14/3$.

gelten muß. Damit in beiden Gleichungen der γ_5 -Term verschwindet, ist

$$a_0 v_3^{(f)} - v_0 a_3^{(f)} = 0 \quad \text{und} \quad a_0 v_3^{(f')} - v_0 a_3^{(f')} = 0 \quad (4.57)$$

zu fordern. Dies stellt keinen Widerspruch zu den aus (4.34) und (4.56) gefundenen Eigenschaften der Parameter $v_3^{(f)}, a_3^{(f)}, v_3^{(f')}$ und $a_3^{(f')}$ dar. Das zu lösende Gleichungssystem besteht dann aus

$$u_f = \frac{3}{8\beta_0}(v_0^2 - a_0^2)(u_f + 4u_{f'}) + \frac{3}{2\beta_0}T_{3f}(a_0 a_3^{(f)} - v_0 v_3^{(f)}), \quad (4.58)$$

$$u_{f'} = \frac{3}{8\beta_0}(v_0^2 - a_0^2)(u_{f'} + 4u_f) + \frac{3}{2\beta_0}T_{3f'}(a_0 a_3^{(f')} - v_0 v_3^{(f')}), \quad (4.59)$$

was sich nach Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} A &:= \frac{3}{8\beta_0}(v_0^2 - a_0^2), \\ B_f &:= \frac{3}{2\beta_0}T_{3f}(a_0 a_3^{(f)} - v_0 v_3^{(f)}), \\ B_{f'} &:= \frac{3}{2\beta_0}T_{3f'}(a_0 a_3^{(f')} - v_0 v_3^{(f')}) \end{aligned}$$

als

$$u_f = A(u_f + 4u_{f'}) + B_f, \quad (4.60)$$

$$u_{f'} = A(u_{f'} + 4u_f) + B_{f'} \quad (4.61)$$

schreiben läßt. Unter Berücksichtigung der Folgerungen aus (4.34) und (4.56) lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- $v_0^2 - a_0^2 = -\frac{4}{3}\beta_0 \Rightarrow v_3^{(f)} = v_3^{(f')}$ und $a_3^{(f)} = a_3^{(f')} \Rightarrow B_f = -B_{f'}$ und $A = -\frac{1}{2}$.

Dann lautet die Lösung von (4.60) und (4.61): $u_f = -u_{f'} = \frac{B_f}{1+3A} = -2B_f$.

- $v_0^2 - a_0^2 = 4\beta_0 \Rightarrow v_3^{(f)} = -v_3^{(f')}$ und $a_3^{(f)} = -a_3^{(f')} \Rightarrow B_f = B_{f'}$ und $A = \frac{3}{2}$.

Dann lautet die Lösung von (4.60) und (4.61): $u_f = u_{f'} = \frac{B_f}{1-5A} = -\frac{2}{13}B_f$.

- für alle anderen Werte von $v_0^2 - a_0^2$ ergibt sich $v_3^{(f)} = v_3^{(f')} = a_3^{(f)} = a_3^{(f')} = 0$
 $\Rightarrow B_f = B_{f'} = 0$. Dann lautet die Lösung von (4.60) und (4.61): $u_f = u_{f'} = 0$.

Somit können Fermionmassen nur dann dynamisch erzeugt werden, wenn $v_0^2 - a_0^2 = 4\beta_0$ ist, da dies die einzige Möglichkeit darstellt, positive reelle Werte für die Parameter u_f und $u_{f'}$ zu erhalten. Mit $\beta_0 = 14/3$ ergibt sich $v_0^2 - a_0^2 = 56/3$, was z. B. für $v_0 \approx 4, 4$ und $a_0 = \pm 1$ erfüllt ist. Die beiden Mitglieder eines Fermiondoublets besitzen dann dieselbe Masse:

$$u_f = \frac{3}{13\beta_0}T_{3f}(v_0 v_3^{(f)} - a_0 a_3^{(f)}) \quad \forall f \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow m_\nu = m_\tau = \frac{3}{26\beta_0}(v_0 v_3^{(\nu)} - a_0 a_3^{(\nu)})\Lambda = \frac{3}{26\beta_0}(a_0 a_3^{(\tau)} - v_0 v_3^{(\tau)})\Lambda, \quad (4.63)$$

$$m_t = m_b = \frac{3}{26\beta_0}(v_0 v_3^{(t)} - a_0 a_3^{(t)})\Lambda = \frac{3}{26\beta_0}(a_0 a_3^{(b)} - v_0 v_3^{(b)})\Lambda, \quad (4.64)$$

sofern $v_0 v_3^{(\nu)} - a_0 a_3^{(\nu)} \geq 0$ und $v_0 v_3^{(t)} - a_0 a_3^{(t)} \geq 0$ gilt. Diese Bedingungen stehen aber in keinem Widerspruch zu vorherigen Ergebnissen. Massenbildung ist auch für $a_3^{(f)} = 0$ möglich; dann muß wegen (4.57) $a_0 = 0$ gewählt werden, was wiederum $a_1^{(f)} = 0$ nach sich zieht, d. h. die Modelltheorie ist in diesem Fall paritätserhaltend.

Die Parameter $v_2^{(f)}$ und $a_3^{(f)}$ gehören zu den \mathcal{CP} -verletzenden Strukturen $q_\mu \mathbf{1}$ und $\sigma_{\mu\nu} q_\nu \gamma_5$ im Ansatz (2.39) für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex. Während für alle f $v_2^{(f)} = 0$ sein muß, können die $a_3^{(f)}$ nicht nur ungleich Null gewählt werden, sondern haben auch Einfluß auf die Massenbildung. *Die selbstkonsistente Reproduktion \mathcal{CP} -verletzender nichtperturbativer Modifikationen in der DS-Gleichung für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex ist prinzipiell möglich* und könnte auf einen Mechanismus zur Beschreibung \mathcal{CP} -verletzender Effekte in der Natur hinweisen.

Zusammenfassend läßt sich folgendes feststellen:

Fermionmassen können im Spezialfall $v_0^2 - a_0^2 = 4\beta_0$ dynamisch erzeugt werden. Die Mitglieder eines Fermiondubletts erhalten dieselben Massen, d. h. im Fermionsektor findet keine spontane Brechung der Eichsymmetrie statt. Dies ist letztendlich darauf zurückzuführen, daß in den Selbstkonsistenzgleichungen für die Parameter $v_3^{(f)}$ und $a_3^{(f)}$ einer Fermionsorte f außer den entsprechenden Größen $v_3^{(f')}$ und $a_3^{(f')}$ des zugehörigen Dublettpartners f' keine weiteren nichtperturbativen Variablen vorkommen. Eine Lösung des Problems könnte der Übergang zu einer höheren Approximationsstufe r im Fermionsektor der Theorie darstellen, da die Ansätze für die Fermion-Boson-Antifermion-Vertizes dann kompliziertere nichtperturbative Modifikationen und somit auch eine größere Anzahl von Parametern enthalten. Dieser Zuwachs an Freiheitsgraden könnte dazu führen, daß die obigen Einschränkungen teilweise oder ganz aufgehoben werden und innerhalb eines Dubletts verschiedene Fermionmassen möglich sind.

Die Selbstkonsistenzgleichungen für die nichtperturbativen Parameter lauten:

$$\begin{aligned}
v_0 v_3^{(\nu)} - a_0 a_3^{(\nu)} &\geq 0, & v_0 v_3^{(t)} - a_0 a_3^{(t)} &\geq 0, \\
a_0 v_3^{(\nu)} - v_0 a_3^{(\nu)} &= 0, & a_0 v_3^{(t)} - v_0 a_3^{(t)} &= 0, \\
v_1^{(\nu)} = -v_1^{(\tau)} = v_1^{(t)} = -v_1^{(b)} &= \frac{3}{4\beta_0} (x_2 - x_0) (v_0^2 + a_0^2), \\
a_1^{(\nu)} = -a_1^{(\tau)} = a_1^{(t)} = -a_1^{(b)} &= \frac{3}{2\beta_0} (x_2 - x_0) v_0 a_0, \\
v_2^{(\nu)} = v_2^{(\tau)} = v_2^{(t)} = v_2^{(b)} &= 0, \\
a_2^{(\nu)} = a_2^{(\tau)} = a_2^{(t)} = a_2^{(b)} &= 0, \\
v_3^{(\nu)} = -v_3^{(\tau)}, & v_3^{(t)} = -v_3^{(b)}, \\
a_3^{(\nu)} = -a_3^{(\tau)}, & a_3^{(t)} = -a_3^{(b)}, \\
u_f \Lambda &= \frac{3}{13\beta_0} T_{3f} (v_0 v_3^{(f)} - a_0 a_3^{(f)}) \Lambda \quad \forall f.
\end{aligned}$$

Der Ansatz für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex besitzt damit die Gestalt:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) = & -T_{3f} \gamma_\mu (v_0 - a_0 \gamma_5) \\ & - \frac{\Lambda^2}{q^2 + z_0 \Lambda^2} \left[\frac{3}{2\beta_0} T_{3f} (x_2 - x_0) \gamma_\mu ((v_0^2 + a_0^2) - 2v_0 a_0 \gamma_5) \right. \\ & \left. + \frac{1}{i} \sigma_{\mu\nu} \frac{q_\nu}{\Lambda} (v_3^{(f)} - a_3^{(f)} \gamma_5) \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Die schon in (4.32) sichtbare Tatsache, daß der nichtperturbative Anteil des Vertex bei $q = 0$ hinsichtlich seiner Abhängigkeit von der Fermionsorte f vollständig proportional zu T_{3f} wird, hat eine wesentliche Konsequenz:

Die effektive Kopplung der Fermionen an das masselose Eichboson, d. h. das Photon unseres Modells, die man identifizieren kann, indem man in der nichtamputierten Korrelationsfunktion

$$S_f(-p-q) \left[\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) D_{\mu\nu}^0(q) \right] S_f(p) \quad (4.66)$$

den Polterm bei $q^2 = 0$ (Photonpol) isoliert, wird ebenfalls proportional zu T_{3f} . Dies bedeutet, daß die beiden Mitglieder eines Dubletts sozusagen entgegengesetzt gleiche „elektrische Ladungen“ erhalten, während ein realistisches Modell eine Proportionalität der Kopplung zu $(T_{3f} + Y_f/2)$ mit $Y_f = -1$ für Leptonen und $Y_f = 1/3$ für Quarks erfordern würde. Die Hyperladung Y_f des Standardmodells kann auf der hier betrachteten niedrigsten Näherungsstufe offensichtlich nicht dynamisch „simuliert“ werden. Die Forderung nach einer paritätserhaltender Photonkopplung führt auf die zusätzliche Bedingung:

$$\left[z_0 + \frac{3}{\beta_0} (x_2 - x_0) v_0 \right] a_0 = 0. \quad (4.67)$$

Bezüglich seiner Masse und seiner Kopplung an das masselose Eichboson stellt das ν_τ unseres Modells kein realistisches Neutrino dar.

4.4 Bosonmassen

Zur Untersuchung der Massenbildung im Eichbosonsektor werden zunächst die Selbstkonsistenzgleichungen für den Drei-Bosonen-Vertex und anschließend diejenigen für die Propagatoren betrachtet.

Unter Verwendung der bisher erhaltenen Resultate aus dem Geist- und Fermionsektor gehen (4.39) – (4.46) über in:

$$\beta_0(x_2 - x_0) = \frac{7}{8}x_0 + x_2 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3, \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \beta_0(x_1 - x_0) = & \frac{7}{8}x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 \\ & + 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ & + 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}\beta_0(x_1 - x_0) &= \frac{11}{4}x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 \\ &+ 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t ,\end{aligned}\quad (4.70)$$

$$\beta_0x_4 = \frac{15}{8}x_0 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 + \frac{3}{4}x_4 , \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}\beta_0x_3 &= -\frac{15}{8}x_0 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{8}x_2 \\ &- 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &- 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t ,\end{aligned}\quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}\beta_0x_3 &= \frac{5}{8}\bar{x}_1 - \frac{5}{8}\bar{x}_3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{8}x_2 \\ &+ 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t ,\end{aligned}\quad (4.73)$$

$$\beta_0x_5 = 4x_5 , \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}\beta_0x_6 &= -\frac{3}{2}x_6 + 4(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 12(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(t)}u_t .\end{aligned}\quad (4.75)$$

Aus (4.74) folgt sofort $x_5 = 0$; die \mathcal{CP} -verletzende Tensorstruktur $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p-k)_\sigma$ im Ansatz für $\Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k,p,q)$ erweist sich als nicht selbstkonsistenzfähig. Das Gleichsetzen der rechten Seiten von (4.69) und (4.70) führt auf die Bedingung:

$$\frac{15}{8}x_0 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 \stackrel{!}{=} 0 . \quad (4.76)$$

Die Berücksichtigung von (4.76) in den übrigen Selbstkonsistenzgleichungen hat schwerwiegende Folgen, denn (4.71) liefert $x_4 = 0$, das Gleichsetzen der rechten Seiten von (4.72) und (4.73) führt auf $x_3 = 0$ und aus (4.68) folgt $x_2 = x_0$. Es verbleiben lediglich die beiden Gleichungen:

$$\left(\beta_0 + \frac{3}{2}\right)(x_1 - x_0) = 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu + 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t , \quad (4.77)$$

$$\left(\beta_0 + \frac{3}{2}\right)x_6 = 4(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(\nu)}u_\nu + 12(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(t)}u_t . \quad (4.78)$$

Da aber die rechte Seite von (4.73) wegen $x_3 = 0$ ebenfalls Null sein muß, was sich mit (4.76) und $x_2 = x_0$ als

$$\frac{3}{2}(x_0 - x_1) + 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu + 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t = 0 \quad (4.79)$$

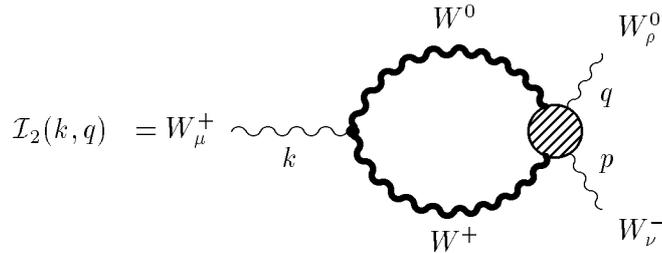
schreiben läßt, folgt aus (4.77) $x_1 = x_0$.

Der Versuch, das Selbstkonsistenzproblem für den Drei-Bosonen-Vertex exakt zu lösen, führt demnach zum Verschwinden fast aller nichtperturbativen Modifikationen; der einzige

Vertexparameter, der von Null verschieden sein kann, ist x_6 . Die Ursache hierfür ist die Bedingung (4.76)

$$\frac{5}{8}(3x_0 - \bar{x}_1 + \bar{x}_3) = 0,$$

die für eine exakte Lösung des aus (4.68) – (4.75) bestehenden Gleichungssystems erfüllt sein muß. Sie bedeutet, daß das Einschleifenintegral



keine nichtperturbative Divergenz besitzt und somit zum Selbstkonsistenzproblem nicht beiträgt.

Das hier auftretende Problem wird nicht etwa durch Mängel in den Ansätzen für den Drei-Bosonen-Vertex und den $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}$ -Vertex verursacht, sondern ist in der asymmetrischen Natur der DS-Gleichungen für Vertizes mit drei oder mehr äußeren Linien begründet. Eine dieser äußeren Linien ist nämlich dadurch ausgezeichnet, daß sie stets in einen nackten Vertex einläuft. Während im Ansatz für den Drei-Bosonen-Vertex aufgrund der Verwendung der gleichen Approximationsstufe $r = 0$ keine Unterschiede zwischen dem W^+ - und dem W^- -Bein bestehen, zeichnet die untersuchte DS-Gleichung die W^+ -Linie aus. Vergleicht man die divergenten Anteile der in ihr enthaltenen Einschleifenintegrale mit denen aus der DS-Gleichung, welche die W^- -Linie auszeichnet⁷, so stellt man fest, daß nur zwei der Integrale in beiden Gleichungen unterschiedliche Divergenzen besitzen. Diese Ausnahmen sind das den $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}$ -Vertex beinhaltende Diagramm und einer der Tadpole-Graphen:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^*(p, q) &= W^-_\nu \text{ --- } p \text{ --- } \text{Loop} \text{ --- } \text{Vertex} \text{ --- } \begin{cases} W^+_\mu \text{ --- } k \\ W^0_\rho \text{ --- } q \end{cases} \\ &= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \Gamma_{3\alpha\nu\gamma}^{(0)+-0}(l-p, p, -l) D_{\alpha\beta}^+(p-l) \right. \\ &\quad \left. \cdot \Gamma_{4\mu\beta\delta\rho}^{+-00}(-p-q, p-l, l, q) D_{\gamma\delta}^0(l) \right\} \end{aligned}$$

⁷Beide Vertexgleichungen sind bezüglich der Struktur der in ihnen enthaltenen Integrale völlig identisch.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_2^*(p, q) \Big|_{\substack{q^2 = -\bar{u}\Lambda^2 \\ p^2 = -\bar{v}\Lambda^2}} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{4} (\delta_{\nu\rho} p_\mu - \delta_{\mu\nu} p_\rho) \\
 &+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + \bar{x}_0\Lambda^2} \frac{5}{4} (3\bar{x}_0 - \bar{x}_1 + \bar{x}_3) (\delta_{\mu\nu} p_\rho - \delta_{\nu\rho} p_\mu) \\
 &+ \mathcal{O}(g^3) \\
 &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{8} (-\delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho - \delta_{\nu\rho} (q-p)_\mu + \delta_{\mu\nu} q_\rho - \delta_{\nu\rho} k_\mu) \\
 &+ g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{-\bar{u}\Lambda^2 + \bar{x}_0\Lambda^2} \frac{5}{8} (3\bar{x}_0 - \bar{x}_1 + \bar{x}_3) \\
 &\quad \cdot (\delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho + \delta_{\nu\rho} (q-p)_\mu - \delta_{\mu\nu} q_\rho + \delta_{\nu\rho} k_\mu) \\
 &+ \mathcal{O}(g^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_4^*(k) &= \text{Diagram} \\
 &= g_0^3 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \Gamma_{4\alpha\nu\rho\gamma}^{(0)+-00} D_{\alpha\beta}^+(l-k) \Gamma_{3\mu\beta\delta}^{+-0}(k, l-k, -l) D_{\gamma\delta}^0(-l) \right\} \\
 \mathcal{I}_4^*(k) \Big|_{k^2 = -\bar{v}\Lambda^2} &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{4} (\delta_{\mu\nu} k_\rho - \delta_{\rho\mu} k_\nu) + \mathcal{O}(g^3) \\
 &= g_0 \frac{1}{\beta_0} \frac{15}{8} (-\delta_{\rho\mu} (k-q)_\nu - \delta_{\mu\nu} (p-k)_\rho + \delta_{\rho\mu} p_\nu - \delta_{\mu\nu} q_\rho) + \mathcal{O}(g^3)
 \end{aligned}$$

Alle anderen Integrale haben in beiden Vertexgleichungen jeweils dieselben divergenten Anteile. Da der Tadpole-Graph \mathcal{I}_4^* keinen bezüglich q^2 singulären divergenten Anteil besitzt, ist er für das Selbstkonsistenzproblem ohne Bedeutung. Die Asymmetrie der DS-Gleichung für den Drei-Bosonen-Vertex wirkt sich demnach über das den $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}$ -Vertex enthaltende Integral auf die Gleichungen (4.68) – (4.75) aus und ist letztendlich für die Schwierigkeiten verantwortlich, die durch (4.76) entstehen.

Um die Auswirkungen der oben diskutierten Asymmetrie zu vermeiden, wird zur Aufstellung der Selbstkonsistenzgleichungen für den Drei-Bosonen-Vertex eine „symmetrisier-

te“ DS-Gleichung der Form

$$\begin{aligned} & \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k,p,q) - \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{(0)+-0}(k,p,q) \\ = & \frac{1}{2} \left(\text{Einschleifenintegrale der DS-Gleichung mit Auszeichnung der } W^+ \text{-Linie} \right. \\ & \left. + \text{Einschleifenintegrale der DS-Gleichung mit Auszeichnung der } W^- \text{-Linie} \right) \end{aligned}$$

verwendet. Man erhält auf diese Weise statt der Gleichungen (4.68)–(4.75) folgende Selbstkonsistenzbeziehungen:

$$\beta_0(x_2 - x_0) = \frac{7}{8}x_0 + x_2 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3, \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \beta_0(x_1 - x_0) &= \frac{29}{16}x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 - \frac{5}{16}\bar{x}_1 + \frac{5}{16}\bar{x}_3 \\ &+ 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \beta_0(x_1 - x_0) &= \frac{29}{16}x_0 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 - \frac{5}{16}\bar{x}_1 + \frac{5}{16}\bar{x}_3 \\ &+ 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\beta_0x_4 = \frac{3}{4}x_4, \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \beta_0x_3 &= -\frac{15}{16}x_0 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{8}x_2 - \frac{5}{16}\bar{x}_1 + \frac{5}{16}\bar{x}_3 \\ &- 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &- 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t, \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \beta_0x_3 &= \frac{15}{16}x_0 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{8}x_2 + \frac{5}{16}\bar{x}_1 - \frac{5}{16}\bar{x}_3 \\ &+ 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\beta_0x_5 = 4x_5, \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \beta_0x_6 &= -\frac{3}{2}x_6 + 4(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 12(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(t)}u_t. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Aus (4.83) und (4.86) folgt $x_4 = 0$ und $x_5 = 0$. Da sich die rechten Seiten von (4.84) und (4.85) nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, muß $x_3 = 0$ sein und

$$\begin{aligned} & \frac{15}{16}x_0 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{8}x_2 + \frac{5}{16}\bar{x}_1 - \frac{5}{16}\bar{x}_3 \\ & + 2(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(\nu)}u_\nu + 6(v_0^2 + a_0^2)v_3^{(t)}u_t = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

gelten. Einsetzen von (4.88) in (4.81) und (4.82) führt auf:

$$\begin{aligned} \beta_0(x_1 - x_0) &= \frac{7}{8}x_0 + x_2 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3 \\ &\stackrel{!}{=} \beta_0(x_2 - x_0). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Damit ergeben sich zusammengenommen folgende Bedingungen für die Vertexparameter:

$$(\beta_0 - 1)x_1 = (\beta_0 + \frac{7}{8})x_0 - \frac{5}{8}\bar{x}_1 + \frac{5}{8}\bar{x}_3, \quad (4.90)$$

$$x_2 = x_1, \quad (4.91)$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad (4.92)$$

$$(\beta_0 + \frac{3}{2})x_6 = 4(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(\nu)}u_\nu + 12(v_0^2 + a_0^2)a_3^{(t)}u_t. \quad (4.93)$$

Während in (4.90) nur Parameter aus dem Drei- und Vier-Bosonen-Vertex vorkommen, hängt x_6 von fermionischen Variablen ab. Der Vertexansatz nimmt die Form

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) &= \frac{q^2 + x_1\Lambda^2}{q^2 + x_0\Lambda^2} [\delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho + \delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu] \\ &+ \frac{x_6\Lambda^2}{q^2 + x_0\Lambda^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\sigma \end{aligned} \quad (4.94)$$

an. Er enthält ausschließlich \mathcal{CP} -invariante Anteile; die selbstkonsistente Reproduktion \mathcal{CP} -verletzender nichtperturbativer Modifikationen scheint nur im Fermionsektor möglich zu sein. Dies steht in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß \mathcal{CP} -Verletzung auch in der Natur nur in mesonischen, d. h. aus Quarks bestehenden Systemen beobachtet wird [7].

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß der Vertexansatz (4.94) ebenso wie jeder andere Ansatz der allgemeinen Struktur (2.46) weder die DS-Gleichung mit Auszeichnung der W^+ -Linie noch diejenige mit Auszeichnung der W^- -Linie exakt löst. Dieses Problem ist aber allein auf die Asymmetrie der DS-Gleichungen für Vertizes mit drei oder mehr äußeren Linien zurückzuführen und wird auch bei Vertexansätzen höherer Approximationsstufe r auftreten; es ist nur asymptotisch für $r \gg 1$ lösbar.

Wir wenden uns nun den Selbstkonsistenzgleichungen für die Boson-Propagatoren zu. Die Gleichung für den W^\pm -Propagator lautet unter Verwendung der bisher gefundenen Resultate:

$$(\beta_0 - \frac{3}{4})u_+ = \frac{3}{4}u_0^{(1)} + \frac{9}{4}u_0^{(2)} - 3x_1 + 4a_0^2u_\nu^2 + 12a_0^2u_t^2, \quad (4.95)$$

die beiden Gleichungen für den W^0 -Propagator haben die Form:

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) &= \frac{25}{6}u_0^{(2)2} + \left(-\frac{25}{6}x_1 + 6u_+ + \frac{4}{3}(v_0v_1^{(\nu)} + a_0a_1^{(\nu)}) + 4v_0v_3^{(\nu)}u_\nu \right. \\ &\quad \left. + 4(v_0v_1^{(t)} + a_0a_1^{(t)}) + 12v_0v_3^{(t)}u_t \right) u_0^{(2)} \\ &\quad - 6u_+x_1 - 8a_0a_1^{(\nu)}u_\nu^2 - 24a_0a_1^{(t)}u_t^2, \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 (u_0^{(2)} - u_0^{(1)}) &= -\frac{25}{6}u_0^{(2)} + \frac{25}{6}x_1 - \frac{3}{2}u_+ - 4a_0^2u_\nu^2 - 12a_0^2u_t^2 \\ &\quad - \frac{4}{3}(v_0v_1^{(\nu)} + a_0a_1^{(\nu)}) - 4v_0v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &\quad - 4(v_0v_1^{(t)} + a_0a_1^{(t)}) - 12v_0v_3^{(t)}u_t. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Ferner gilt als Folge der Polanpassung $u_0^{(2)} = x_0$. Multipliziert man die rechte Seite von (4.97) mit $u_0^{(2)}$ und addiert sie zur rechten Seite von (4.97), so muß die Summe verschwinden:

$$-6u_+x_1 - 8a_0a_1^{(\nu)}u_\nu^2 - 24a_0a_1^{(t)}u_t^2 + \left(\frac{9}{2}u_+ - 4a_0^2u_\nu^2 - 12a_0^2u_t^2\right)u_0^{(2)} = 0. \quad (4.98)$$

Dies ist im wesentlichen die Bedingung für das Auftreten eines Propagatorpols bei $q^2 = 0$, d. h. für die Masselosigkeit des „Photons“. Man erhält somit die drei Bedingungen:

$$\left(\beta_0 - \frac{3}{4}\right)u_+ = \frac{3}{4}u_0^{(1)} + \frac{9}{4}u_0^{(2)} - 3x_1 + 4a_0^2u_\nu^2 + 12a_0^2u_t^2, \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \beta_0u_0^{(1)} &= \left(\beta_0 + \frac{25}{6}\right)u_0^{(2)} - \frac{25}{6}x_1 + \frac{3}{2}u_+ + 4a_0^2u_\nu^2 + 12a_0^2u_t^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}(v_0v_1^{(\nu)} + a_0a_1^{(\nu)}) + 4v_0v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &\quad + 4(v_0v_1^{(t)} + a_0a_1^{(t)}) + 12v_0v_3^{(t)}u_t, \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\left(\frac{9}{2}u_+ - 4a_0^2u_\nu^2 - 12a_0^2u_t^2\right)u_0^{(2)} = 6u_+x_1 + 8a_0a_1^{(\nu)}u_\nu^2 + 24a_0a_1^{(t)}u_t^2. \quad (4.101)$$

Mit den Abkürzungen

$$A := -3x_1 + 4a_0^2u_\nu^2 + 12a_0^2u_t^2, \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} B := &-\frac{25}{6}x_1 + 4a_0^2u_\nu^2 + 12a_0^2u_t^2 + \frac{4}{3}(v_0v_1^{(\nu)} + a_0a_1^{(\nu)}) + 4v_0v_3^{(\nu)}u_\nu \\ &+ 4(v_0v_1^{(t)} + a_0a_1^{(t)}) + 12v_0v_3^{(t)}u_t \end{aligned} \quad (4.103)$$

nimmt das aus (4.99) und (4.100) bestehende Gleichungssystem die Gestalt

$$\left(\beta_0 - \frac{3}{4}\right)u_+ - \frac{3}{4}u_0^{(1)} = \frac{9}{4}u_0^{(2)} + A, \quad (4.104)$$

$$-\frac{3}{2}u_+ + \beta_0u_0^{(1)} = \left(\beta_0 + \frac{25}{6}\right)u_0^{(2)} + B \quad (4.105)$$

an. Es besitzt für $\beta_0 \neq (3/2), (-3/4)$ die Lösung:

$$u_+ = \frac{1}{(2\beta_0 - 3)(4\beta_0 + 3)} \left[(24\beta_0 + 25)u_0^{(2)} + 8\beta_0A + 6B \right], \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} u_0^{(1)} &= \frac{2}{3(2\beta_0 - 3)(4\beta_0 + 3)} \left[(12\beta_0^2 + 41\beta_0 + 3)u_0^{(2)} + 18A \right. \\ &\quad \left. + (12\beta_0 - 9)B \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Durch Einsetzen von (4.106) in (4.101) erhält man eine quadratische Gleichung für $u_0^{(2)}$. Damit hat man die drei Parameter aus den Bosonpropagatoren als Funktionen der Parameter aus den Vertizes dargestellt.

Das so erhaltene Gleichungssystem sollte auch unter Berücksichtigung aller anderen Selbstkonsistenzbedingungen zumindest für $a_0 \neq 0$ genug Freiheitsgrade besitzen, um von Null verschiedene Parameter $u_0^{(1)}$ und u_+ und somit die dynamische Erzeugung von Bosonmassen zu ermöglichen. Da es im hier untersuchten Modell mehr nichtverschwindende

Parameter als Bestimmungsgleichungen gibt, wäre es Zufall, wenn die Bildung von Eichbosonmassen irgendwelchen Einschränkungen unterläge. Mit $u_0^{(1)} > 0$ ist das W^0 -Eichfeld offensichtlich in der Lage, zwei stabile Teilchen auszubilden, von denen eines masselos und das andere massiv ist; sie stellen in unserem Modell das Photon und das Z -Boson dar.

Dynamische Massenbildung war bereits in [19] Gegenstand einer Untersuchung, wobei die auch in dieser Arbeit benutzte Methode einer nichtperturbativ erweiterten Störungsreihe auf das $SU(2) \times U(1)$ -Standardmodell ohne Skalarfelder angewandt wurde. Dort konnten jedoch trotz Verwendung der Approximationsstufe $r = 1$ im Fermion- und Bosonsektor keine Fermionmassen erzeugt werden. Dies war im wesentlichen darauf zurückzuführen, daß die $SU(2)$ -Eichfelder im Standardmodell nur an linkshändige Fermionen koppeln. Auch in unserem Modell findet im Fall $v_0 = a_0$ keine Erzeugung von Fermionmassen statt. Ferner ist im Standardmodell die asymptotische Freiheit, die bei der Konstruktion der Vertexansätze ausgenutzt wird, nicht gegeben.

4.5 Kompensierende Pole

Die bisherige Diskussion läßt noch die Frage offen, ob die Untersuchung der DS-Gleichung für den Drei-Bosonen-Vertex bei Auszeichnung der W^0 -Linie zu anderen Aussagen als den bisher gefundenen führt. Wir werden diesen Aspekt im Zusammenhang mit dem Prinzip der sogenannten kompensierenden Pole behandeln, können auf dieses Thema jedoch nur kurz und am Beispiel unseres Modells *ohne Fermionen* eingehen; für eine detaillierte Behandlung sei auf [12, 20] verwiesen.

Die kompensierenden Pole treten im Zusammenhang mit folgenden zwei Problemstellungen auf:

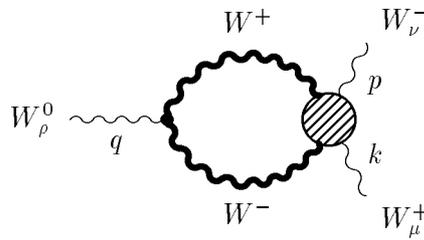
Der Ansatz (2.46) für den Drei-Bosonen-Vertex besteht aus der perturbativen nullten Ordnung und den nichtperturbativen Modifikationen, die alle eine Polfaktor der Form $\Lambda^2/(q^2 + u_0^{(2)}\Lambda^2)$ besitzen. Diese Zerlegung läßt sich graphisch als

darstellen.

Betrachtet man die DS-Gleichung für den Drei-Bosonen-Vertex bei Auszeichnung des W^0 -Beins⁸, so stellt sich die Frage, wie der Polterm im Vertexansatz in den Einschleifenintegralen auf der rechten Seite der Gleichung reproduziert werden soll. Die äußere W^0 -Linie

⁸Die Struktur der Einschleifenintegrale auf der rechten Seite der Gleichung ist dieselbe wie in den DS-Gleichungen bei Auszeichnung einer geladenen Bosonlinie.

läuft in allen Integralen in einen perturbativen Vertex nullter Ordnung ein und man überzeugt sich leicht davon, daß nichtperturbative Modifikationen für diese Linie nur aus dem Beitrag kommen können, der den Vier-Bosonen-Vertex enthält:



Damit dies möglich ist, muß im Ansatz für $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{++--}$ ein Term mit einem Pol in q^2 vorhanden sein. Da die Approximationsstufe für die geladenen Bosonen $r = 0$ beträgt, kommen keine Modifikationen bezüglich äußerer Linien vor. Nichtperturbative Modifikationen sind bei einem Vier-Punkt-Vertex jedoch nicht auf die äußeren Linien beschränkt, sondern können prinzipiell auch in den Mandelstam-Variablen s, t und u auftreten. Für den Vier-Bosonen-Vertex in obigem Integral ist unter Berücksichtigung der Ladungserhaltung demnach ein Ansatz der Form

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \left(\frac{c}{s + u_0^{(2)} \Lambda^2} \right) \text{Diagram 3} \\
 & \quad + \text{(Term mit Pol im } t\text{-Kanal)}
 \end{aligned}$$

möglich und für die Erfüllung der DS-Gleichung auch notwendig. Die Existenz dieser Pole in den Mandelstam-Variablen steht in keinem Widerspruch zur Einteilchenirreduzibilität von Γ_4 , denn damit ist stets eine Irreduzibilität bezüglich der Propagatoren der elementaren Felder gemeint und $1/(s + u_0^{(2)} \Lambda^2)$ ist kein solcher Propagator. Die Pole in den Mandelstam-Variablen werden als „kompensierende Pole“ bezeichnet; der Grund hierfür wird etwas später deutlich.

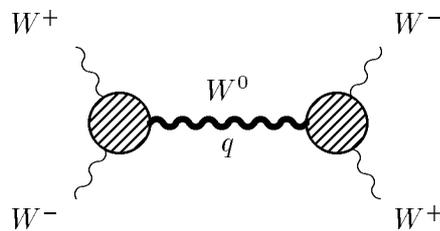
Nun kann man auf beiden Seiten der DS-Gleichung für den Drei-Bosonen-Vertex die Residuen bilden und erhält mit deren Anpassung die Selbstkonsistenzbeziehung:

Der Term innerhalb der Klammern ist im Rahmen der Untersuchung der DS-Gleichung für den negativen inversen W^0 -Propagator aber bereits an dessen Residuum angepaßt worden⁹. Deshalb ist die Konstante c ohne Zusatzannahmen eindeutig festgelegt; es gilt:

$$c = \frac{1}{u_0^{(2)}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})}. \tag{4.108}$$

Betrachtet man die noch nicht angepaßten, in q^2 regulären Beiträge auf beiden Seiten der DS-Gleichung für den Drei-Bosonen-Vertex, so stellt man fest, daß auf der linken wie auf der rechten Seite die perturbative nullte Ordnung des Vertex steht. Dazu kommen auf der rechten Seite die Einschleifenintegrale, die jedoch, wie man leicht nachprüft, keine nichtperturbativen Divergenzen besitzen; sie tragen also nur zur perturbativen Korrektur der Ordnung g^2 bei. Dies gilt auch für das Integral, welches den Teil des Vier-Bosonen-Vertex mit einem Pol im t -Kanal beinhaltet. Das Selbstkonsistenzproblem des Drei-Bosonen-Vertex im W^0 -Kanal ist mit der Residuenanpassung vollständig behandelt, liefert allerdings keine neuen Informationen.

Das zweite Problem, auf das hier eingegangen werden soll, hängt mit Einteilchen-Austauschgraphen wie z.B.



zusammen. Zerlegt man die beiden Vertizes, so erhält man (der Transversalprojektor aus dem Propagator sei vernachlässigt) unter anderem einen Term der Form:

⁹Es sei noch einmal daran erinnert, daß wir in diesem Abschnitt ohne Fermionen arbeiten.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{ccc}
W^+ & & W^- \\
\text{---} & & \text{---} \\
\text{---} & & \text{---} \\
\text{---} & & \text{---} \\
W^- & & W^+
\end{array}
\left(\frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} \right)
\left(\frac{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2}{q^2 (q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2)} \right)
\left(\frac{\Lambda^2}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} \right) \\
= & \begin{array}{ccc}
W^+ & & W^- \\
\text{---} & & \text{---} \\
\text{---} & & \text{---} \\
W^- & & W^+
\end{array}
\left(\frac{\Lambda^4}{q^2 (q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2) (q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2)} \right)
\end{aligned}$$

Neben den beiden Polen aus dem W^0 -Propagator tritt ein weiterer reeller Pol auf, der zunächst einen neuen, stabilen Bindungszustand zu beschreiben scheint. Die Notwendigkeit, diesen „falschen“ Pol interpretieren zu müssen, entfällt jedoch, wenn man berücksichtigt, daß zur verbundenen Vier-Punkt-Greensfunktion außer den Einteilchen-Austauschdiagrammen auch der Vier-Bosonen-Vertex Γ_4 gehört. Dieser besteht aus seiner perturbativen nullten Ordnung und aus den kompensierenden Poltermen. Addiert man nun obigen Einteilchen-Austauschgraphen und den kompensierenden Polterm mit Pol im s -Kanal:

$$\begin{array}{ccc}
W^+ & & W^- \\
\text{---} & & \text{---} \\
\text{---} & & \text{---} \\
W^- & & W^+
\end{array}
\left(\frac{\Lambda^4}{q^2 (q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2) (q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2)} + \frac{1/(u_0^{(2)} (u_0^{(1)} - u_0^{(2)}))}{q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2} \right)$$

so ergibt sich unter Verwendung von

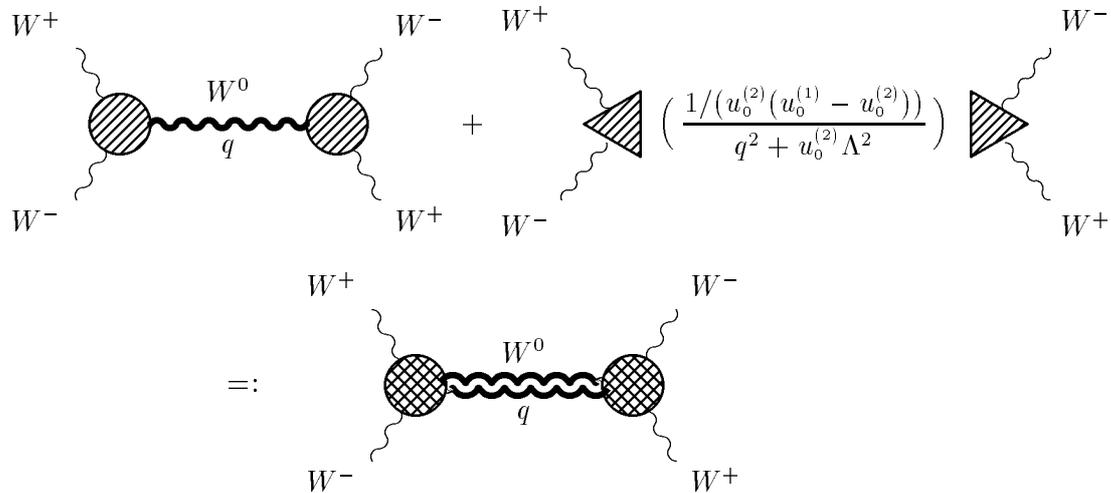
$$u_0^{(2)} (u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^4 + q^2 (q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2) = (q^2 + u_0^{(2)} \Lambda^2) (q^2 + (u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^2) \quad (4.109)$$

das Resultat

$$\begin{array}{ccc}
W^+ & & W^- \\
\text{---} & & \text{---} \\
\text{---} & & \text{---} \\
W^- & & W^+
\end{array}
\left(\frac{1}{u_0^{(2)} (u_0^{(1)} - u_0^{(2)})} \cdot \frac{q^2 + (u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) \Lambda^2}{q^2 (q^2 + u_0^{(1)} \Lambda^2)} \right)$$

in welchem nur die Polfaktoren aus dem W^0 -Propagator vorkommen. An dieser Stelle wird klar, warum die Bezeichnung „kompensierender Pol“ gewählt wurde, denn die Polterme im Ansatz für den Vier-Bosonen-Vertex kompensieren genau die unphysikalischen Pole in den

Einteilchen-Austauschgraphen. Für die Summe aus dem Einteilchen-Austauschdiagramm und dem zugehörigen kompensierenden Polterm kann man eine neue graphische Darstellung



eingeführen, die auch als „entschärftes“ Austauschdiagramm bezeichnet wird.

Das Prinzip der kompensierenden Pole läßt sich bei Berücksichtigung der Fermionen völlig analog auf den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex übertragen. Es erlangt seine besondere Bedeutung durch die elegante Lösung der beiden oben diskutierten Probleme. Diese Lösung läuft auf die Einsicht hinaus, daß im nichtperturbativen Kontext die Zerlegung der verbundenen Vier-Punkt-Greensfunktion in einteilchenreduzible und -irreduzible Anteile im üblichen Sinne durchaus unzweckmäßig sein kann, da beide noch unphysikalische Artefakte - die „falschen“ Pole - enthalten, die sich erst in der Summe herausheben. Man zerlegt daher von vornherein besser in die „entschärften“ Austauschgraphen und einen „reduzierten“, d. h. von Polen in den Mandelstam-Variablen freien Vier-Punkt-Vertex.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird am Beispiel einer einfachen $SU(2)$ -Modelltheorie die Frage untersucht, ob Teilchenmassen ohne Verwendung von Skalarfeldern rein dynamisch erzeugt werden können. Auf der Grundlage einer systematisch erweiterten Störungsreihe werden nichtperturbativ modifizierte Ansätze für die oberflächlich divergenten Vertexfunktionen konstruiert, welche massive Fermionen und Bosonen beschreiben. Die Forderung, daß diese Ansätze Lösungen der Dyson-Schwinger-Gleichungen des Modells sein sollen, liefert Selbstkonsistenzbedingungen für die freien Parameter in den nichtperturbativen Modifikationen und somit Aussagen darüber, ob dynamische Massenerzeugung möglich ist.

Die Auswertung der Selbstkonsistenzgleichungen führt zu dem Schluß, daß Fermionmassen auf der hier betrachteten niedrigsten Stufe des Näherungsverfahrens nur unter starken Einschränkungen dynamisch erzeugt werden können. Ferner erhalten die beiden Mitglieder eines Fermiondubletts gleiche Massen sowie entgegengesetzt gleiche Kopplungen an das masselose Eichboson (das Photon des Modells). Spontane Symmetriebrechung und Verschiebung des Ladungsschwerpunktes in den Fermiondubletts in Form einer „dynamischen Simulation“ der Hyperladung des Standardmodells finden nicht statt. Die dynamische Erzeugung von Bosonmassen scheint dagegen allgemein möglich zu sein. Das neutrale Eichbosonfeld kann zwei stabile Teilchen ausbilden, von denen eines masselos und das andere massiv ist.

Die Probleme im Fermionsektor sind vermutlich darauf zurückzuführen, daß dort die Zahl der nichtperturbativen Parameter zu klein ist. Eine weiterführende Rechnung auf einer höheren Approximationsstufe, d. h. unter Verwendung von komplizierteren Ansätzen, könnte die Einschränkungen unter Umständen aufheben und innerhalb eines Dubletts verschiedene Massen ermöglichen. Besonderes Interesse verdient die Approximationsstufe $r = 2$, die Propagatoren mit drei Polen beinhaltet. Auf diese Weise könnte man versuchen, durch Fermion-Propagatoren mit drei reellen Polen bei den entsprechenden Massen die Generationenstruktur der Fermionen zu beschreiben. Allerdings würde der Umfang der Integralberechnungen selbst bei Beschränkung auf das Selbstkonsistenzproblem beträchtlich zunehmen.

Die Tatsache, daß schon in einem verhältnismäßig einfachen Modell wie dem hier untersuchten die dynamische Erzeugung von Massen sowohl für Fermionen als auch Bosonen zumindest prinzipiell möglich ist, läßt darauf schließen, daß die verwendete Methode einer

nichtperturbativ erweiterten Störungsreihe eine interessante Alternative zur Massenbildung mit Hilfe von Skalarfeldern darstellen könnte.

Anhang A

Mathematischer Anhang

In diesem Anhang sind die mathematischen Hilfsmittel zusammengestellt, die bei der Berechnung der Einschleifenintegrale in Kapitel 3 verwendet wurden. Soweit nicht anders angegeben, sind sie [14] und [15] entnommen.

A.1 Euklidische γ -Algebra

Ausgehend von der in dieser Arbeit verwendeten Antikommutator-Relation der euklidischen γ -Algebra in D Dimensionen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

erhalt man folgende Beziehungen:

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = -D, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\mu = [D - 2]\gamma_\rho, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu = 4\delta_{\rho\sigma} + [4 - D]\gamma_\rho \gamma_\sigma, \quad (\text{A.4})$$

$$\not{p}\not{p} = -p^2, \quad (\text{A.5})$$

$$\not{p}\not{q} = -2pq - \not{q}\not{p}, \quad (\text{A.6})$$

$$\not{p}\not{q}\not{p} = -2pq\not{p} + p^2\not{q}, \quad (\text{A.7})$$

$$\not{p}\gamma_\mu\not{p} = p^2\gamma_\mu - 2p_\mu\not{p}, \quad (\text{A.8})$$

$$\not{p}\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p} = 4p_\mu p_\nu + 2p_\mu\not{p}\gamma_\nu + 2p_\nu\gamma_\mu\not{p} - p^2\gamma_\mu\gamma_\nu. \quad (\text{A.9})$$

Unter Verwendung der Konvention $\text{Tr}\{\mathbf{1}\} = 4$ gelten die Spurrelationen:

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = -4\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}), \quad (\text{A.11})$$

wahrend die Spur des Produktes aus einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen verschwindet. Fur die γ_5 -Matrix gelten die Beziehungen:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \gamma_5\gamma_5 = \mathbf{1} \quad (\text{A.12})$$

und die Spurrelationen :

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5\} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5\} = -4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}\{\gamma_1 \dots \gamma_{2n-1} \gamma_5\} = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (\text{A.15})$$

Weitere Details des verwendeten γ_5 -Schemas in D Dimensionen, die für die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen allerdings ohne Bedeutung sind, kann man [17] entnehmen.

Schließlich gelten für

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{A.16})$$

die Beziehungen:

$$\sigma_{\mu\nu} = i(\delta_{\mu\nu} + \gamma_\mu \gamma_\nu), \quad (\text{A.17})$$

$$[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5] = 0. \quad (\text{A.18})$$

A.2 Feynman-Parametrisierung

In den Berechnungen der Schleifenintegrale wird für die Zusammenfassung der Nennerfaktoren folgende Form der Feynman-Parametrisierung benutzt:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \Gamma(n) \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \dots \int_0^1 du_{n-1} \cdot \frac{u_1^{n-2} u_2^{n-3} \dots u_{n-2}}{[y_n A_1 + y_{n-1} A_2 + \dots + y_2 A_{n-1} + y_1 A_n]^n};$$

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - u_1), \quad y_2 = u_1(1 - u_2), \quad \dots, \quad y_{n-1} = u_1 u_2 \dots u_{n-2}(1 - u_{n-1}), \\ y_n &= u_1 u_2 \dots u_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Für zwei bzw. drei Nennerfaktoren ergibt sich:

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 du \frac{1}{[u A_1 + (1 - u) A_2]^2}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2 \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \frac{u_1}{[u_1 u_2 A_1 + u_1(1 - u_2) A_2 + (1 - u_1) A_3]^3}. \quad (\text{A.21})$$

A.3 Symmetrische Integration

Für euklidische Impulsraumintegrale gelten in dimensioneller Regularisierung ($D = 4 - 2\varepsilon$) die folgenden Regeln der symmetrischen Integration:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_{\mu_1} \dots k_{\mu_n} f(k^2) = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade,} \quad (\text{A.22})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{1}{D} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 f(k^2), \quad (\text{A.23})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma f(k^2) = \frac{1}{D(D+2)} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^2 f(k^2). \quad (\text{A.24})$$

A.4 Euklidische Impulsintegration

Durch Feynman-Parametrisierung, Translation des Integrationsimpulses und symmetrische Integration lassen sich alle in dieser Arbeit vorkommenden Einschleifenintegrale auf die allgemeine Form

$$\mathcal{I}_{mn}^{(D)} := (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^m}{(k^2 + M^2)^n} \quad (\text{A.25})$$

bringen (m, n ganzzahlig, M^2 reell und positiv). Für diese sphärisch symmetrischen, D -dimensionalen Impulsraumintegrale gilt die Standardformel:

$$\mathcal{I}_{mn}^{(D)} = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{\Gamma(m+2-\varepsilon)\Gamma(n-m-2+\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(n)} (M^2)^{m+2-n} \left(\frac{M^2}{4\pi\nu_0^2}\right)^{-\varepsilon}. \quad (\text{A.26})$$

Um die Ausdrücke in (A.26) untersuchen zu können, sind folgende Beziehungen nützlich:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z \Gamma(z), \\ \Gamma(n+1) &= n! \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(-n+\varepsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \Psi(n+1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \\ \Psi(n+1) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \gamma, \\ \gamma &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right) \approx 0,5772, \\ \Gamma(-1+\varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Anhang B

\mathcal{CP} -Invarianz

Wir führen hier die Bedingungen auf, unter denen die Ansätze für die Vertizes und Propagatoren invariant unter \mathcal{CP} -Transformation sind. Sie sind im Minkowski-Impulsraum formuliert, lassen sich aber ohne weiteres ins Euklidische übertragen. Eine ausführliche Herleitung dieser Invarianzbedingungen findet sich in [19].

B.1 Propagatoren

Die \mathcal{CP} -Invarianz der Eichbosonpropagatoren ist gewährleistet, wenn das W^+ und das W^- durch denselben Propagator beschrieben werden. Für den W^0 -Propagator ist sie automatisch erfüllt; das W^0 ist sein eigenes Antiteilchen.

Der Fermion-Propagator ist \mathcal{CP} -invariant, wenn

$$S_f(p) = \gamma^0 C S_f^T(-\tilde{p}) C^{-1} \gamma^0 \quad (\text{B.1})$$

gilt. Hierbei sind die Bezeichnungen $C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^T$ für die Transformationsmatrix der Ladungskonjugation im Spinorraum sowie $p = (p^0, \vec{p})$ und $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$ verwendet worden.

B.2 Vertizes

Die \mathcal{CP} -Invarianzbedingung ist für den Drei-Bosonen-Vertex durch

$$\Gamma_{3\mu\nu\rho}^{+-0}(k, p, q) = -\Gamma_{3\nu\mu\rho}^{+-0}(p, k, q) \quad (\text{B.2})$$

und für den Vier-Bosonen-Vertex $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}$ durch

$$\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{+-00}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma_{4\nu\mu\rho\sigma}^{+-00}(k_2, k_1, k_3, k_4) \quad (\text{B.3})$$

gegeben. Der Vier-Bosonen-Vertex $\Gamma_{4\mu\nu\rho\sigma}^{++--}$ und die Fermion- W^\pm -Antifermion-Vertizes behalten in dieser Untersuchung ihre \mathcal{CP} -invariante perturbative Gestalt.

Für den Fermion- W^0 -Antifermion-Vertex

$$\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^0(p+q, p, q) = \sum_i \bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{0(i)}(p+q, p, q)(v_i - a_i\gamma_5) \quad (\text{B.4})$$

muß

$$\bar{\Gamma}_{3ff\mu}^{0(i)}(p+q, p, q)(v_i - a_i\gamma_5) = -(v_i + a_i\gamma_5)\gamma^0 C [\bar{\Gamma}_{3ff0}^{\mu(i)}(-\tilde{p}, -\tilde{p} - \tilde{q}, \tilde{q})]^T C^{-1}\gamma^0 \quad (\text{B.5})$$

gelten.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, T. Muta, *Electroweak Theory*, Suppl. Prog. Theor. Phys. **73** (1982).
- [2] E. Farhi, R. Jackiw (Ed.), *Dynamical Gauge Symmetry Breaking: A Collection of Reprints*, World Scientific, Singapur 1982.
- [3] M. Stingl, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Z. Physik A **353**, 423 (1996).
- [4] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1980.
- [5] C. D. Roberts, A. G. Williams, *Dyson-Schwinger Equations and their Application to Hadronic Physics*, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994).
- [6] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapur 1987.
- [7] E. D. Commins, P. H. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks*, Cambridge University Press, Cambridge 1983.
- [8] J. S. Ball, T.-W. Chiu, *Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories I, II*, Phys. Rev. D **22**, 2542, 2550 (1980).
- [9] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford 1984.
- [10] H. Lehmann, *Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder*, Nuov. Cim. **11**, 342 (1954); G. Källen, *On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics*, Helv. Phys. Acta **25**, 417 (1952).
- [11] M. Spratte, *Nichtperturbative Berechnung der Gluonselfenergie in Einschleifen-Näherung*, Diplomarbeit WWU Münster (1995).
- [12] J. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsrechnung für die QCD*, Dissertation WWU Münster (in Vorbereitung).

- [13] L. Driesen, *Der Vier-Gluonen-Vertex und sein Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation WWU Münster (in Vorbereitung).
- [14] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge 1984.
- [15] S. Narison, *Techniques of Dimensional Regularization and the Two-Point Functions of QCD and QED*, Phys. Rep. **84**, 263 (1982).
- [16] C. Schubert, *On the γ_5 -Problem of Dimensional Regularization*, HD-THEP-93-46.
- [17] J. G. Körner, D. Kreiner, K. Schilcher, *A Practicable γ_5 -Scheme in Dimensional Regularization*, Z. Physik **C 54**, 503 (1992).
- [18] A. C. Hearn, *REDUCE User's Manual Version 3.5*, RAND Publication CP78, Santa Monica 1993.
- [19] M. Scholze, *Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgs-Feld*, Diplomarbeit WWU Münster (1991).
- [20] J. Fromm, *Dyson-Schwinger-Gleichung des Dreigluonvertex und Bestimmung des effektiven Gluonpropagators einer erweiterten Störungstheorie der QCD*, Diplomarbeit WWU Münster (1996).

Der Abschnitt 2.2 über die Massenskala Λ beruht im wesentlichen auf einer Mitschrift der Vorlesung *Quantenchromodynamik*, die Prof. G. Münster und Prof. M. Stingl im Sommersemester 1994 an der WWU Münster gehalten haben.

Schlußwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit auf die eine oder andere Weise unterstützt haben.

Herrn Prof. Dr. M. Stingl danke ich für die Anregung zu diesem interessanten Thema und seine ständige Bereitschaft zu ausgiebigen Diskussionen.

Ferner danke ich den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, insbesondere J. Kuhrs und L. Driesen, für das angenehme Arbeitsklima und zahlreiche klärende Gespräche.

Schließlich sei hier meiner Familie und meinem Freundeskreis für ihre Geduld und Aufmunterung vor allem in der Endphase der Anfertigung gedankt.

Sie alle haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, November 1996

