

Jürgen Gerd Kuhrs

Der Fermion-Sektor im Rahmen
einer systematisch erweiterten Störungstheorie
für die Quantenchromodynamik

1997

Theoretische Physik

**Der Fermion-Sektor im Rahmen
einer systematisch erweiterten
Störungstheorie
für die Quantenchromodynamik**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Jürgen Gerd Kuhrs
aus Lingen (Ems)

1997

Dekan:	Prof. Dr. F.-K. Holtmeier
Erster Gutachter:	Prof. Dr. M. Stingl
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. G. Münster
Mündliche Prüfungen:	24.6.1997 und 30.6.1997
Tag der Promotion:	30.6.1997

*Aller
Anfang ist leicht,
und die letzten Stufen
werden am seltensten
erstiegen.*

Johann Wolfgang von Goethe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Allgemeine Grundlagen	9
1.1 Störungstheoretische QCD	9
1.2 Die spontane Massenskala Λ	11
1.3 Die Strommassen \hat{m}	12
1.4 Integraldarstellungen für Z_α und Z_m	13
2 Die systematisch erweiterte Störungstheorie	15
2.1 Die Vertexfunktionen als Doppelsequenz	15
2.2 Ansätze für die nichtperturbativen Vertexfunktionen	17
2.2.1 Die Propagatoren	17
2.2.2 Der 3-Gluon-Vertex	20
2.2.3 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex	21
2.3 Das Selbstkonsistenzproblem	23
2.4 „Entschärfte“ 1-Teilchen-Austauschdiagramme	25
2.4.1 Folgerungen für die DS-Gleichungen	29
2.4.2 Folgerungen für die Vertexparameter	30
3 Der inverse Fermion-Propagator	33
3.1 Die Fermion-Selbstenergie	33
3.2 Die Selbstkonsistenzgleichungen	37
3.3 Beispiel: Die Approximationsstufe $r = 0$	41
4 Der inverse Gluon-Propagator	43
4.1 Die Fermion-Schleife	43
4.2 Die gluonischen 1-Schleifen-Diagramme	46
4.3 Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen	48
4.3.1 Der massive Fall	48
4.3.2 Der chirale Fall	51
4.3.3 Die Approximationsstufe $r = 1$	53

4.4	Erste Zwischenbilanz	55
5	Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex	57
5.1	Der fermionische Kanal	57
5.1.1	Das „nichtabelsche“ Diagramm	57
5.1.2	Die Selbstkonsistenzgleichungen	61
5.2	Der gluonische Kanal	64
5.2.1	Ergebnisse der Schleifenberechnungen	64
5.2.2	Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen	66
5.3	Eine Slavnov-Taylor-Identität	70
6	Fermionische Beiträge zum 3-Gluon-Vertex	73
6.1	Die Fermion-Schleifen	73
6.2	Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen	77
6.2.1	Der massive Fall	78
6.2.2	Der chirale Fall	83
6.3	Zweite Zwischenbilanz	85
7	Lösung des SK-Gleichungssystems	87
7.1	Analyse der Selbstkonsistenzgleichungen	87
7.1.1	Lösung der gluonischen Gleichungen	89
7.1.2	Lösung der fermionischen Gleichungen	92
7.2	Festlegung der Parameter durch ST-Identitäten	93
7.3	Quarkmassen und Propagatoren	94
7.3.1	Nebenbedingungen und Störungen	97
7.3.2	Propagatoren und Lebensdauern	98
7.4	Das Fermion-Kondensat	101
7.5	Schwere Quarkonia	102
7.6	Der Quark-Antiquark-Photon-Vertex	103
	Zusammenfassung und Ausblick	105
A	Feynman-Regeln und DS-Gleichungen der QCD	107
A.1	Die störungstheoretischen Basisvertizes	107
A.1.1	Die Wirkung	107
A.1.2	Feynman-Regeln	108
A.2	Euklidische Green- und Vertexfunktionen	110
A.2.1	Definition durch erzeugende Funktionale	110
A.2.2	Feynman-Regeln	111
A.3	Dyson-Schwinger-Gleichungen	112

B Wichtige Ergänzungen	117
B.1 Partialbruchzerlegung der 3-Punkt-Vertizes für $r = 1$	117
B.2 Der 4-Gluon-Vertex	119
B.3 Ergänzung zu den entschärften Diagrammen	122
C Feynmanparametrisierungen	125
C.1 Feynmanparametrisierung $F_{(01)}$	125
C.2 Feynmanparametrisierungen $F_{(02)}$ und $F_{(03)}$	126
C.3 Standardintegrale in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen	127
D SK-Gleichungen durch Residuenbildung	129
E BS-resummierte DS-Gleichung für den $F\bar{F}V$-Vertex	137
E.1 Diagrammberechnungen	138
E.2 Die Selbstkonsistenzgleichungen	140
E.3 Lösung der SK-Gleichungen für $r = 1$	144
Literaturverzeichnis	147

Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die fundamentale Quantenfeldtheorie, von der wir annehmen, daß sie die starke Wechselwirkung beschreibt. Die störungstheoretische Behandlung der QCD ist für große Impulsüberträge möglich, da sie eine asymptotisch freie Theorie ist. Ihre Vorhersagen für harte Streuprozesse sind hervorragend durch Experimente bestätigt worden.

Die Quarks und Gluonen sind nicht frei beobachtbar. Diese wichtige Eigenschaft der starken Wechselwirkung bezeichnet man als Confinement; sie führt zum Scheitern der reinen Störungstheorie, da die Quarks und Gluonen in der störungstheoretischen Entwicklung stets freie, asymptotisch nachweisbare Teilchen der Theorie sind. Die Erklärung dieses Phänomens erfordert andere, nichtperturbative Methoden.

Der fundamentale Zugang zu den hadronischen Bindungszuständen ist derjenige über die Green-Funktionen der QCD. Eine Möglichkeit, die Green-Funktionen einer Quantenfeldtheorie zu bestimmen, besteht in der Verwendung der Dyson-Schwinger-(DS-) Gleichungen. Diese bilden ein hierarchisches Integralgleichungssystem für die Green-Funktionen der Theorie.

Das von uns gewählte nichtperturbative Lösungsverfahren ist eine systematisch erweiterte Störungstheorie. Nach einem Vorschlag von M. Stingl [STI 96] werden erweiterte Feynman-Regeln — d.h. nichtperturbativ modifizierte Vertizes nullter *perturbativer* Ordnung — verwendet, deren Impulsabhängigkeit durch eine rationale Approximantenfolge systematisch genähert wird. Die einzige Skala, die aufgrund ihrer Dimension, auch in einer masselosen Theorie, die Impulspotenzen kompensieren kann, ist die spontane Massenskala Λ , die in der Eichkopplung g^2 nichtanalytisch ist und so in einer rein perturbativen Entwicklung ignoriert wird. Durch DS-Iteration wird eine Doppelfolge mit sowohl einer nichtperturbativen Richtung (Index r , bezogen auf Λ) als auch einer perturbativen Richtung (Index p , bezogen auf g^2) erzeugt, die im Sinne einer Semikonvergenz praktikable Approximanten der vollen 1-Teilchen-irreduziblen Green-Funktionen bereitstellt. Die Doppelfolge kann auch als Folge von partiellen Resummationen der bei großen Impulsen gültigen Operatorproduktentwicklung (OPE) betrachtet werden — eine Auffassung, die nützliche heuristische Gesichtspunkte für die Konstruktion der erweiterten Feynman-Regeln und für Renormierungsfragen vermittelt. Außerdem wird die asymptotische Freiheit der Theorie von vornherein in den Approximanten berücksichtigt, was deren

Form stark einschränkt. Die für die QCD interessanten Approximantenfolgen haben ungeraden Index r , da diese die Ausbildung kurzreichweitiger Propagatoren und so eine Beschreibung des Confinements ermöglichen. Wesentlich ist die nullte perturbative Ordnung ($r \geq 1, p = 0$) — die höheren Ordnungen erhält man durch die Iteration —, da in dieser ein Selbstkonsistenzproblem entsteht, das durch einen sogenannten $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus in Strenge, d.h. ohne Entkopplungsnäherungen, auf die sieben oberflächlich divergenten Vertexfunktionen eingeschränkt ist. Es tritt also trotz des unendlichen, hierarchischen Charakters des DS-Gleichungssystems keine „Proliferation“ der erweiterten Feynman-Regeln ein. In 1-Schleifenordnung liefern die DS-Gleichungen dieser sieben Vertexfunktionen der QCD ein Selbstkonsistenzgleichungssystem für die Parameter der nichtperturbativ modifizierten Approximanten nullter perturbativer Ordnung. Eine wichtige Randbedingung ist hier die Erhaltung der perturbativen Renormierbarkeit.

Primäre Aufgabe ist zunächst das Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichungen für die sieben oberflächlich divergenten Vertexfunktionen der QCD und ihre Untersuchung auf die Möglichkeit physikalischer Lösungen hin.

In dieser Arbeit wird der fermionische Sektor dieses Selbstkonsistenzproblems in beliebiger rationaler Approximationsstufe r untersucht. M. Wigard [WIG 89] und R. Köning [KÖN 90] haben — noch ohne Kenntnis der Einbettung ihrer Ansätze in ein systematisches Näherungsverfahren — die entsprechenden DS-Gleichungen der QCD bereits in einer Näherung studiert, die vom heutigen Standpunkt der ersten Stufe rationaler Approximanten ($r = 1$) entspricht. Sie haben dabei jedoch einschneidende technische Vereinfachungen vorgenommen. Die Problematik externer Quarkmassen („Strommassen“) wurde vollständig ausgeklammert und die Selbstkonsistenz (SK) mit dem gluonischen Sektor überhaupt nicht untersucht. Zudem war damals der Mechanismus der kompensierenden Pole, der wesentliche Beiträge zu den Selbstkonsistenzgleichungen liefert, nicht bekannt.

Wir beginnen im ersten Kapitel dieser Arbeit mit der störungstheoretischen Behandlung der DS-Gleichungen und definieren die renormierungsgruppeninvarianten Größen Λ und \hat{m} . In Kapitel 2 stellen wir die systematisch erweiterte Störungstheorie vor, erklären den $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus und führen sogenannte „entschärfte“ 1-Teilchen-Austauschgraphen ein.

Das Ziel dieser Arbeit ist, die SK-Gleichungen für die beiden oberflächlich divergenten, fermionischen Vertizes — den inversen Fermion-Propagator (Kapitel 3) und den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex (Kapitel 5) — auf beliebiger Approximationsstufe r aufzustellen. Dabei ergeben sich zwei neue Aspekte. Zum einen muß das technische Problem der Behandlung von Impulsintegralen mit beliebig vielen Nennerfaktoren und anschließender Bestimmung der Selbstkonsistenzgleichungen gelöst werden. Andererseits treten neben der spontanen Massenskala auch die den externen Strommassen zugeordneten invarianten Massenskalen \hat{m} auf. Dadurch werden nicht nur die Rechnungen erheblich komplizierter, sondern es sind auch Fragen, wie die SK-Gleichungen aufzustellen sind und ob die perturbative Renormierung modifiziert werden muß, grundsätzlich neu zu untersuchen.

Außerdem werden die fermionischen Beiträge der SK-Gleichungen des inversen Gluon-Propagators (Kapitel 4) und des 3-Gluon-Vertex (Kapitel 6) auf beliebiger Approximationsstufe r berechnet. Dadurch erreichen wir die Ankopplung an den gluonischen Sektor. Zusammen mit den gluonischen Selbstkonsistenzgleichungen [DRI 97] erhalten wir auf der Approximationsstufe $r = 1$ ein Gleichungssystem, das in Kapitel 7 analysiert wird. Es werden Lösungen angegeben, die zugleich mit der Ausbildung kurzreichweitiger Propagatoren für Gluonen *und* Quarks auch die Brechung der chiralen Symmetrie zeigen.

Die Vielzahl der denkbaren Anwendungen und Tests der so etablierten Grundvertizes in der Physik der beobachtbaren Bindungszustände übersteigt natürlich den Rahmen dieser Arbeit. Jedoch werden das Fermion-Kondensat [STR 96] sowie das Potential für den 1-Gluon-Austausch zwischen schweren Quarks [BEC 91] berechnet, und abschließend betrachten wir kurz die Auswirkungen auf den Quark-Antiquark-Photon-Vertex.

Kapitel 1

Allgemeine Grundlagen

1.1 Störungstheoretische QCD

Die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung entstand, nachdem von 't Hooft (unveröffentlicht 1972), Gross und Wilczek [GW 73], sowie Politzer [POL 73] das Phänomen der *asymptotischen Freiheit*¹ in nichtabelschen Eichtheorien [YM 54] entdeckt worden war. Die natürliche (minimale) Kopplung von Quarks und Gluonen führt auf eine Yang-Mills-Theorie mit der Eichgruppe $SU(N_C)$ und N_F Quark-Flavours. Die zugehörige Lagrangedichte [GM 72, FGL 73] mit beliebiger kovarianter Eichfixierung lautet im euklidischen Kontinuum:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E(x) = & \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu}(x) F_a^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_a^\mu(x))^2 + (\partial^\mu \bar{c}_a(x)) [\partial^\mu \delta_{ab} + \tilde{g}_0 f_{abc} A_c^\mu(x)] c_b(x) \\ & + \sum_f \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left[-i \not{\partial} \delta^{ij} + m_0^{(f)} \delta^{ij} + \tilde{g}_0 T_a^{ij} \gamma^\mu A_a^\mu(x) \right] \psi_{(f)}^j(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\text{mit} \quad F_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) + \tilde{g}_0 f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x). \quad (1.2)$$

Ausgehend von dieser euklidischen Wirkung lassen sich mittels funktionaler Methoden die zusammenhängenden, amputierten, 1-Teilchen-irreduziblen Greenfunktionen im Impulsraum (kurz: *Vertexfunktionen*), Γ_N , mit N äußeren Beinen definieren (Anhang A.2). An der Lagrangedichte werden die störungstheoretischen Vertexfunktionen nullter Ordnung (kurz: *nackte Vertexfunktionen*), $\Gamma_N^{(0)pert}$, als Feynman-Regeln abgelesen (Anhang A.1). Die Dynamik der durch die Lagrangedichte definierten Theorie kann durch ein unendliches hierarchisches System gekoppelter Integro-Differentialgleichungen, die DS-Gleichungen [DS 49, EF 74], beschrieben werden:

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_N \left[\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \Gamma_{N+2} \right], \quad (1.3)$$

¹Das Verschwinden der effektiven Kopplungskonstante für kleine Abstände.

die wir hier in einer abgekürzten Notation angeben². Φ_N ist ein Funktional, das durch Schleifenintegrale definiert wird und somit einen Faktor \tilde{g}_0^2 ausbildet, was man bereits an (1.3) erkennt. In der reinen Störungstheorie werden Lösungen Γ_N^{pert} der DS-Gleichungen ausgehend von den nackten Vertexfunktionen durch Iteration gesucht:

$$\Gamma_N^{pert} = \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[p]pert}; \quad \Gamma_N^{[p]pert} = \Gamma_N^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{(p')pert}. \quad (1.4)$$

Da die Schleifenberechnung UV-divergente Integrale beinhaltet, ist eine Regularisierung erforderlich. In dimensioneller Regularisierung [TV 72] geht man zu $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen über, wobei ϵ der Regularisierungsparameter ist. Die dadurch dimensionsbehaftete Kopplung \tilde{g}_0 wird durch Einführung einer willkürlichen aber festen Skala ν_0 durch eine dimensionslose Kopplung ersetzt:

$$\tilde{g}_0 = g_0 \nu_0^\epsilon, \quad \text{wobei } g_0 \text{ dimensionslos ist.} \quad (1.5)$$

Die QCD als eine renormierbare Quantenfeldtheorie [TV 72a] hat endlich viele Renormierungskonstanten. Der Regularisierung entsprechend verwenden wir ein dimensionelles Renormierungsschema, das nach Berechnung endlicher Korrekturen festgelegt werden kann; üblich sind die MS- oder $\overline{\text{MS}}$ -Schemata. Die störungstheoretische Renormierung der Vertexfunktionen erfolgt multiplikativ und in *Landau-Eichung* ($\xi = 0$), auf die wir uns in der gesamten Arbeit festlegen; also schreibt man für die renormierten Vertexfunktionen:

$$\Gamma(\{p\}, g(\nu), m(\nu); \nu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_\Gamma(\nu, \epsilon) \Gamma^{(0)}(\{p\}, g_0, m_0; \epsilon), \quad (1.6)$$

mit $Z_\Gamma = Z_{3YM}^{n_{YM}/2} \tilde{Z}_3^{\tilde{n}/2} Z_{2F}^{n_F/2}$. Die nackten Größen mit Index 0, also die Parameter in der ursprünglichen Lagrangedichte, stehen mit den renormierten Größen in folgendem Zusammenhang:

$$(g(\nu)\nu^\epsilon)^2 = Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{-1} (g_0\nu_0^\epsilon)^2, \quad (1.7)$$

$$m(\nu) = Z_m(\nu)^{-1} m_0. \quad (1.8)$$

Die Renormierungsmassenskala ν ist im Gegensatz zu ν_0 eine variable, „laufende“ Skala. Die Renormierungskonstanten, die wir in dieser Arbeit benötigen, können z.B. [MUT 87] entnommen werden. In Landau-Eichung gilt in 1-Schleifenordnung im MS-Schema:

$$\text{inverser Fermion-Propagator: } Z_{2F} = 1, \quad Z_m = 1 - \frac{g(\nu)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} 3 \frac{N_C^2 - 1}{N_C}, \quad (1.9)$$

$$\text{Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex: } Z_{1F} = 1 - \frac{g(\nu)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{3}{4} N_C, \quad (1.10)$$

$$\text{inverser Gluon-Propagator: } Z_{3YM} = 1 + \frac{g(\nu)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{13}{6} N_C - \frac{2}{3} N_F \right). \quad (1.11)$$

²Die Herleitung dieser Gleichungen ist in Anhang A.3 erklärt.

Es existiert folgender Zusammenhang zwischen diesen Renormierungskonstanten:

$$Z_\alpha = Z_{1F}^2 Z_{3YM}^{-1} Z_{2F}^{-2} = 1 - \frac{g(\nu)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{11}{3} N_C - \frac{2}{3} N_F \right) + \mathcal{O}(g^4). \quad (1.12)$$

Die Störungstheorie ist für einen hinreichend kleinen Entwicklungsparameter, hier die Kopplung, ein vernünftiges Lösungsverfahren. Jedoch hat die in der Feldtheorie bewährte Störungstheorie für die QCD einen schwerwiegenden Nachteil. In jeder endlichen Ordnung der Entwicklung sind die freien, asymptotischen Teilchen der Theorie die Quarks und Gluonen. In der wirklichen Welt sind aber die freien Teilchen die Hadronen; Quarks und Gluonen sind vom physikalischen Spektrum verschwunden (*Confinement*).

Es sind andere sogenannte nichtperturbative Approximationsschemata notwendig. Dazu gehören in erster Linie Gittereichtheorien [WIL 74, CJR 83, MM 94], vielversprechende Ergebnisse liefert auch die numerische Integration der aus der exakten Renormierungsgruppe abgeleiteten Flußgleichungen [POL 84, EHW 96] sowie diverse Arbeiten, die auf der numerischen Lösung trunkierter DS-Gleichungen basieren [RW 94]. Wir stellen in Kapitel 2 den Arbeiten [STI 86, HÄB 90, STI 96] folgend einen anderen Zugang vor, *eine systematisch erweiterte Störungstheorie*. In dieser spielen die spontane Massenskala Λ und die ebenso renormierungsgruppeninvarianten Quarkmassen, deren Definitionen wir in den folgenden Abschnitten angeben, eine wichtige Rolle.

1.2 Die spontane Massenskala Λ

Die Unabhängigkeit der nackten Vertexfunktionen von ν liefert die Renormierungsgruppen-gleichung mit den endlichen Renormierungsgruppenfunktionen, von denen wir zunächst die β -Funktion benötigen:

$$\beta(g) := \nu \frac{dg}{d\nu}. \quad (1.13)$$

In einem dimensionellen Renormierungsschema hat sie folgende Gestalt:

$$\beta(g(\nu), \epsilon) = -g(\nu) \left(\epsilon + \beta_0 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \right), \quad (1.14)$$

mit dem renormierungsgruppenunabhängigen $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} N_F$. Für $\beta_0 > 0$, also $N_F \geq 16$, liegt *asymptotische Freiheit* vor, da die laufende Kopplung [MUT 87, BBJ 83] für große Skalen verschwindet (UV-Fixpunkt). Die Konsequenz ist, daß die Vertexfunktionen für große Impulse in ihre perturbative Form übergehen, was eine wesentliche Randbedingung an die in Kapitel 2.2 formulierten Vertexfunktionen darstellt.

Um die spontane Massenskala Λ einführen zu können, integriert man (1.13):

$$\ln \frac{\nu}{\nu_1} = \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} =: \psi(g(\nu)) - \psi(g_1). \quad (1.15)$$

Wir lesen sofort ab, daß

$$\ln \nu - \psi(g(\nu)) = \text{const}$$

und definieren durch diese Integrationskonstante die renormierungsgruppeninvariante Größe Λ :

$$\ln \Lambda(g(\nu), \nu) := \ln \nu - \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')}. \quad (1.16)$$

Die Renormierungsschemaabhängigkeit läßt sich durch Fixieren der unteren Integralgrenze³ ausdrücken:

$$\Lambda(g(\nu), \nu)^2 = \nu^2 \exp \left(-2 \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right) \quad (1.17)$$

$$= \nu^2 \exp \left(-\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(g^2)) \right). \quad (1.18)$$

Ein dimensionsloser Parameter der Theorie, die nackte Kopplung, wird in einen Parameter mit Massendimension transformiert (*dimensionelle Transmutation*). Da $\beta_0 > 0$ (für $N_F = 6$), verschwindet Λ im Limes $g^2 \rightarrow 0$ schneller als jede Potenz von g^2 , also können Terme, die diese nichtanalytische Kopplungsabhängigkeit aufweisen, nicht durch die störungstheoretische Entwicklung in g^2 erfaßt werden, d.h. Λ ist *der nichtperturbative Parameter* der Theorie.

1.3 Die Strommassen \hat{m}

Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, wie aus einem nackten Parameter der Lagrangedichte, der nackten Kopplung g_0 , durch dimensionelle Transmutation eine renormierungsgruppeninvariante Massenskala entsteht. Jetzt untersuchen wir, ob es für den Parameter m_0 einen ähnlichen Mechanismus gibt. Ausgangspunkt ist erneut eine Renormierungsgruppenfunktion:

$$\gamma_m(g(\nu)) = \gamma_m^0 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \gamma_m^1 \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \quad \text{mit} \quad \gamma_m^0 = 6 \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}, \quad (1.19)$$

definiert durch

$$\gamma_m := -\frac{\nu}{m} \frac{dg}{d\nu} \frac{dm}{dg} = -\frac{\beta}{m} \frac{dm}{dg}. \quad (1.20)$$

Durch Separation

$$\frac{dm}{m} = -\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g, \epsilon)} dg \quad (1.21)$$

³ g_1 ist die Kopplung bei der Skala, für die $\nu = \Lambda$ gilt.

läßt sich die Differentialgleichung unter Verwendung der Integrationskonstanten \hat{m} lösen:

$$m(\nu) = \hat{m} \exp \left(- \int_{g_2}^{g(\nu)} dg' \frac{\gamma_m(g')}{\beta(g', \epsilon)} \right). \quad (1.22)$$

Mit g_2 bezeichnen wir die Kopplung bei der Skala ν , für die $m(\nu) = \hat{m}$ gilt. Genauso wie Λ wurde \hat{m} als Integrationskonstante eingeführt und ist damit renormierungsgruppeninvariant:

$$\frac{d\hat{m}}{d\nu} = 0. \quad (1.23)$$

Im Gegensatz zu Λ kann man sich hier davon überzeugen, daß

$$\frac{d\hat{m}}{dg} = 0, \quad (1.24)$$

d.h. \hat{m} besitzt keine Kopplungsabhängigkeit; es ist eine „triviale“ Renormierungsgruppeninvariante.

Mit den Renormierungsgruppenfunktionen in 1-Schleifenordnung können wir das Integral in (1.22) ausführen:

$$\begin{aligned} m(\nu) &= \hat{m} \exp \left(\int_{g_2}^{g(\nu)} dg' \frac{\gamma_m^0 g'}{\epsilon(4\pi)^2 + \beta_0 g'^2} \right) \\ &= \hat{m} \left(\frac{\epsilon(4\pi)^2 + \beta_0 g(\nu)^2}{\epsilon(4\pi)^2 + \beta_0 g_2^2} \right)^{\frac{\gamma_m^0}{2\beta_0}} \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{m} \left(\frac{g(\nu)^2}{g_2^2} \right)^{\frac{\gamma_m^0}{2\beta_0}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Anzumerken ist an dieser Stelle, daß die Massen*verhältnisse* verschiedener Quarkflavours innerhalb der QCD unabhängig von Renormierungsschemata oder -skalen feste Werte annehmen:

$$\frac{m_{(f)}(\nu)}{m_{(f')}(\nu)} = \frac{\hat{m}_{(f)}}{\hat{m}_{(f')}}. \quad (1.26)$$

1.4 Integraldarstellungen für Z_α und Z_m

Die Unabhängigkeit der nackten Parameter g_0 und m_0 von der Renormierungsskala ν kann ausgenutzt werden, um Integraldarstellungen für die Renormierungskonstanten Z_α und Z_m anzugeben [THO 73].

Ausgehend von der multiplikativen Kopplungsrenormierung (1.7) folgt durch Differentiation nach der Renormierungsskala ν :

$$\frac{\nu}{Z_\alpha} \frac{d}{d\nu} Z_\alpha(g(\nu)) = -2 \frac{\beta(g) + \epsilon g}{g}. \quad (1.27)$$

Nach Einführung der quadratischen Kopplung $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$ und Schreiben der β -Funktion als

$$\frac{\beta(g)}{g} = -\left(\epsilon + \frac{\alpha}{4\pi f(\alpha)}\right) \quad \text{mit} \quad f(\alpha) = \left(\beta_0 + \beta_1\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right)^{-1} \quad (1.28)$$

erhält man die Integraldarstellung:

$$Z_\alpha(\alpha, \epsilon) = \exp\left(-\int_0^\alpha \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'}\right), \quad (1.29)$$

wobei ausgenutzt wurde, daß $Z_\alpha(0, \epsilon) = 1$. Der in $\epsilon = 0$ reguläre Teil des Integranden läßt sich abspalten:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'} = \frac{1}{4\pi\epsilon f(0) + \alpha'} + \epsilon\rho_\alpha(\alpha', \epsilon) \quad \text{mit} \quad \rho_\alpha(0, \epsilon) = 0, \quad (1.30)$$

und das Integral läßt sich ausführen:

$$Z_\alpha(\alpha, \epsilon) = \frac{4\pi\epsilon/\beta_0}{4\pi\epsilon/\beta_0 + \alpha} \exp\left(-\epsilon \int_0^\alpha d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \quad (1.31)$$

Das Verschwinden der Renormierungskonstanten Z_α und nach (1.7) auch der nackten Kopplung in der exakten Theorie zeigt, daß die auftretenden Divergenzen nicht als Divergenzen der exakten Theorie interpretiert werden dürfen [COL 84]. Die Differenz zwischen dem störungstheoretischen in ϵ divergenten Z_α (1.12) und der exakten für $\epsilon = 0$ verschwindenden Integraldarstellung

$$\frac{4\pi\epsilon/\beta_0}{4\pi\epsilon/\beta_0 + \alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\beta_0} + \mathcal{O}(\alpha^2, \epsilon) \quad (1.32)$$

ist von der Ordnung α^2 , wird also durch die nächsthöhere Ordnung in α korrigiert, bis sie letztendlich bei vollständiger Aufsummation der Störungsreihe verschwindet.

Analog läßt sich die Integraldarstellung für Z_m unter Verwendung von Glg. (1.8) angeben. Wir schreiben die Renormierungsgruppenfunktion

$$\gamma_m(g) = \frac{\alpha}{4\pi} f_m(\alpha) \quad \text{mit} \quad f_m(\alpha) = \left(\gamma_m^0 + \gamma_m^1\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \quad (1.33)$$

und erhalten die Integraldarstellung

$$Z_m(\alpha, \epsilon) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\alpha d\alpha' \frac{f_m(\alpha')f(\alpha')}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'}\right). \quad (1.34)$$

Wieder läßt sich der in $\epsilon = 0$ reguläre Teil des Integranden abspalten

$$\frac{f_m(\alpha')f(\alpha')}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'} = \frac{f_m(0)f(0)}{4\pi\epsilon f(0) + \alpha'} + \rho_m(\alpha', \epsilon) \quad \text{mit} \quad \rho_m(0, \epsilon) = 0, \quad (1.35)$$

und es folgt:

$$Z_m(\alpha, \epsilon) = \left(\frac{4\pi\epsilon/\beta_0}{4\pi\epsilon/\beta_0 + \alpha}\right)^{\frac{\gamma_m^0}{2\beta_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\alpha d\alpha' \rho_m(\alpha', \epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \quad (1.36)$$

Noch einmal zu betonen ist, daß diese Resultate nur für die exakte (summierte) Theorie gelten und nicht für die einzelnen Terme in einer störungstheoretischen Entwicklung. Deshalb werden wir diese Resultate, in Übereinstimmung mit [THO 73], *ausschließlich für die Behandlung rein nichtperturbativer Modifikationen verwenden.*

Kapitel 2

Die systematisch erweiterte Störungstheorie

In diesem Kapitel stellen wir [STI 96] folgend die Systematik der erweiterten Störungstheorie vor, geben die Approximanten für die Vertexfunktionen an und formulieren das Selbstkonsistenzproblem mit Hilfe der DS-Gleichungen. Entscheidend für die Selbstkonsistenz ist hier der $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus. Abschließend modifizieren wir die DS-Gleichungen durch die Einführung kompensierender Pole, die in [HÄB 90] noch nicht bekannt waren und neben der Systematik des Verfahrens eine grundlegende Neuerung darstellen.

2.1 Die Vertexfunktionen als Doppelsequenz

Analog zur Störungstheorie betrachten wir die Vertexfunktionen weiterhin als formale Potenzreihe in $(\frac{g(\nu)}{4\pi})^2 = \frac{\alpha_s}{\pi}$. Voraussetzung dafür ist, daß $g(\nu)$ für alle Skalen ν hinreichend klein bleibt, damit eine semi-konvergente Entwicklung möglich ist. Gitterrechnungen [LUE 94] und ebenso phänomenologische Arbeiten [SS 96] liefern Hinweise, daß α_s auch für kleine Skalen nicht sehr groß wird, sondern im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei einem Wert von 0.2 liegt.

Auf der anderen Seite ist Λ in einer masselosen Theorie der einzige fundamentale, dimensionsbehaftete Parameter und skaliert renormierungsgruppeninvariante Größen mit Massendimension, wie z.B. Vakuumkondensate der QCD [STR 96]. Im Rahmen der Operatorproduktentwicklung werden euklidische 2-Punkt-Vertexfunktionen zusätzlich zur Kopplungsentwicklung für $k^2 \gg \Lambda^2$ in $\frac{\Lambda^2}{k^2}$ entwickelt [ASS 93]. Dies ist im physikalisch interessanten Impulsbereich hadronischer Massen ($k^2 < \Lambda^2$) ungeeignet, zeigt aber, daß eine systematische Entwicklung bezüglich der nichtperturbativen Skala Λ möglich ist und lediglich noch der Fortsetzung zu einer „global“, d.h. im gesamten Impulsbereich, anwendbaren Approximationsfolge durch geeignete Resummation¹ bedarf.

¹Ausführungen zur „Vertikal-Summation“ in [STI 96].

Naheliegend ist nun, eine Doppelsequenz zu definieren:

$$\Gamma_N(\{k\}; g^2(\nu); \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}; g^2(\nu); \nu), \quad (2.1)$$

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}; g^2(\nu); \nu) = \Gamma_N^{[r,0]}(\{k\}; \Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{[r,p']}(\{k\}; \Lambda; \nu). \quad (2.2)$$

$\{k\}$ steht für sämtliche Impulsabhängigkeiten, der Index p bezeichnet die perturbative Entwicklung und der Index r den Grad der nichtperturbativen Approximation. Das bedeutet, daß wir die störungstheoretischen Vertexfunktionen $\Gamma_N^{(p)pert}$ modifizieren, und zwar so, daß wir Λ -Abhängigkeiten einbauen. Wegen der nichtanalytischen Kopplungsabhängigkeit verschwindet Λ für $g^2 \rightarrow 0$ schneller als jede Potenz g^{2p} (vgl. Kapitel 1.2). Somit ist der formale Limes $\Lambda \rightarrow 0$ mit $g^2 > 0$ sinnvoll, und da die Λ -abhängigen Modifikationen in der reinen Störungstheorie nicht auftreten, fordern wir als Randbedingung, daß die nichtperturbativen Vertexfunktionen in diesem perturbativen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ ihre störungstheoretische Form annehmen. Nichtstörungstheoretische Modifikationen sind also dadurch gekennzeichnet, daß sie im perturbativen Limes verschwinden.

Da die QCD eine asymptotisch freie Theorie ist, implementieren wir die Eigenschaft der „naiven“ asymptotischen Freiheit in den nichtperturbativen Approximanten nullter perturbativer Ordnung:

$$\Gamma^{[r,0]}(\{\lambda k\}) \longrightarrow \Gamma^{(0)pert}(\{\lambda k\}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Durch diese Randbedingung wird die Impulsstruktur der nichtperturbativen Approximanten stark eingeschränkt und damit ihre systematische Approximation, klassifiziert durch den Parameter r , möglich. Für die 2-Punkt-Funktionen bewirkt diese Randbedingung, daß die perturbativen Renormierungskonstanten nicht modifiziert werden. Um mit dem Approximationsverfahren die Nähe zur Störungstheorie zu wahren und nicht in eine unphysikalische Lösung zu laufen, fordern wir die Beibehaltung der perturbativen Renormierbarkeit für alle Vertexfunktionen; das bedeutet, daß die Impulse, die in Schleifendiagrammen laufen, nicht zu einem höheren als dem störungstheoretischen Divergenzgrad führen dürfen. Die Bestimmung eines oberflächlichen Divergenzgrades verlangt die Möglichkeit des einfachen „Power-Counting“. Mit der Forderung nach einer globalen Approximation — eine Potenzreihe in Λ ist, wie oben begründet, ungeeignet — wird man direkt zu einer *rationalen Approximation* in Λ geführt.

Bevor wir die Approximanten für die Vertexfunktionen in nullter perturbativer Ordnung $\Gamma_N^{[r,0]}$ im nächsten Kapitel angeben, fassen wir die Randbedingungen noch einmal zusammen:

- $\Gamma_N^{[r,p]}(\Lambda = 0) = \Gamma_N^{(p)pert}$ (RB 1)

- Die Impulsabhängigkeit der $\Gamma_N^{[r,p]}$ soll den Divergenzgrad der Schleifenintegrale im Vergleich zur Störungstheorie nicht erhöhen. (RB 2)

2.2 Ansätze für die nichtperturbativen Vertexfunktionen

Die Landau-Eichung erleichtert die für das SK-Problem (Kapitel 2.3) notwendigen Schleifenberechnungen erheblich, außerdem führt in dieser Eichung die Transversalprojektion sämtlicher Gluon-Beine zu einem geschlossenen SK-Problem. Bereits bei der Formulierung der Ansätze für die „nichtperturbativ erweiterten Feynman-Regeln“ ergibt dies wesentliche Vereinfachungen. Aufgrund seiner Divergenzstruktur in Landau-Eichung erfährt der Geist-Sektor in nullter perturbativer Ordnung keine nichtperturbativen Modifikationen [DRI 96, DRI 97]. Somit benötigen wir rationale Approximanten $\Gamma_N^{[r,0]}$ — r bezeichnet die Anzahl der Pole in jeweils einem Impuls — für den Gluon-Propagator, den Fermion-Propagator, den 3-Gluon-Vertex, den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex und für den 4-Gluon-Vertex. Letzteren geben wir, da er in dieser Arbeit nur mittelbar von Bedeutung ist, in einer vereinfachten Form für den rationalen Approximationsgrad $r = 1$ im Anhang B.2 an.

2.2.1 Die Propagatoren

Die in [STI 96] vorgeschlagenen Ansätze für die Propagatoren mit *ungeradem Approximationsgrad* r besitzen bei geeigneter Parameterwahl keine Teilchenpole für reelle zeitartige Impulsquadrate und sind somit geeignet, Teilchen zu beschreiben, die nicht asymptotisch frei detektierbar sind. Es ist uns kein physikalisches Prinzip bekannt, das komplexe Propagatorpole in nichtabelschen Eichtheorien mit Confinement verbietet. Um *intrinsisch kurzlebige Elementaranregungen* realisieren zu können, werden komplexe Propagatorpole verwendet, wobei der konjugiert komplexe Pol das entsprechende Antiteilchen beschreibt. Komplexe Propagatorpole treten auch bei schnell zerfallenden Resonanzen auf (siehe z.B. [NAC 86]), aber hier existieren wesentliche physikalische und mathematische Unterschiede; vgl. z.B. die Diskussion zu Fig. 5 in [STI 96]. Kurzlebige Elementaranregungen dieser Art findet man bei der Entstehung von Quark- und Gluon-Jets [AB 88].

Der **Gluon-Propagator**:

$$D^{\mu\nu}(k) = t^{\mu\nu}(k)D_T(k^2) \quad (2.4)$$

$$\text{mit } t^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{TT}(k^2) = -\frac{1}{D_T(k^2)}. \quad (2.6)$$

Auf das Propagator-Subscript T wird im weiteren Verlauf verzichtet und der Index $[r, 0]$ steht im Folgenden für den ungeraden nichtperturbativen Approximationsgrad r in nullter perturbativer Ordnung. Die Randbedingung (RB 2) legt die Differenz zwischen Nennergrad und Zählergrad der Polynome in k^2 fest. Der (RB 1) und (RB 2) erfüllende Ansatz für

den Gluonpropagator kann [STI 96] entnommen werden:

$$D^{[r,0]}(k^2) = \frac{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (k^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(k^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)}, \quad (2.7)$$

und ebenso:

$$-\Gamma_{TT}^{[r,0]}(k^2) = k^2 + u_{r,1}\Lambda^2 + \sum_{s=1}^r \frac{u_{r,2s+1}\Lambda^4}{(k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}, \quad (2.8)$$

für $r = 1, 3, 5, \dots$ mit $u_{r,1}, u_{r,2}, u_{r,3} \in \mathbb{R}$ und $u_{r,2s+2} = u_{r,2s}^*$ bzw. $u_{r,2s+3} = u_{r,2s+1}^*$ für $s = 2, 4, \dots, r-1$ sowie $u_{r,s+} = u_{r,s-}^*$. Zwischen den komplex-konjugierten Polen des Propagators und den Residuen der Vertexfunktion besteht folgender Zusammenhang:

$$u_{r,2t+1} = \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (u_{r,s+} - u_{r,2t})(u_{r,s-} - u_{r,2t})}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})}, \quad (t = 1 \dots r), \quad (2.9)$$

außerdem gilt (Vietascher Wurzelsatz):

$$u_{r,1} + \sum_{s=1}^r u_{r,2s} = \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (u_{r,s+} + u_{r,s-}). \quad (2.10)$$

Für $r = 1$ lassen sich die Propagator-Polpositionen schreiben als

$$u_{1,1\pm} = \frac{u_{1,1} + u_{1,2}}{2} \pm i\sqrt{u_{1,3} - \frac{(u_{1,1} - u_{1,2})^2}{4}} \quad (2.11)$$

und für einen „confining“ Propagator muß somit gelten:

$$u_{1,3} > \frac{(u_{1,1} - u_{1,2})^2}{4}. \quad (2.12)$$

Im Gegensatz zu dem in [HÄB 90] verwendeten Gluon-Propagator², der für kleine Impulse verschwindet, ist der Gluon-Propagator aus [STI 96] infrarot-endlich ($u_{1,2} \neq 0$); durch Gitterrechnungen in Landau-Eichung [MAR 94, GUT 96] wird dieses Infrarotverhalten bestätigt.

Für große r existieren neben einem führenden, d.h. dem Ursprung am nächsten liegenden, Paar komplex konjugierter Pole r reelle Nullstellen und $(r-1)/2$ komplexe Polpaare, die zusammen die rationale Approximation eines Paares komplex-konjugierter Verzweigungsschnitte darstellen. Diese beschreiben die Tatsache, daß das führende „Quasiteilchen“ virtuell in kurzlebige Mehrfachanregungen konvertieren kann, aber keine reellen Zerfallskanäle besitzt. Insgesamt wird damit eine vernünftige Beschreibung der uns bisher nur

²Diese Form des transversalen Gluon-Propagators wurde auch von Gribov [GRI 78] und Zwanziger [ZWA 92] vorgeschlagen und durch Gitterrechnungen [BPS 93] analysiert.

empirisch bekannten Situation bei der Entstehung von Gluon-Jets geliefert.

Der **Fermion-Propagator** (Flavour f):

$$S_{(f)}^{[r,0]}(\not{p}) = \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} + \kappa_{r,s+}^{(f)}) (\not{p} + \kappa_{r,s-}^{(f)})}. \quad (2.13)$$

Der Ansatz erfüllt (RB 2) und für die entsprechende Vertexfunktion gilt³:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{F\bar{F}(f)}^{[r,0]}(\not{p}) &= \not{p} + \kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})} = \not{p} \left(1 - \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(p^2 + (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2)} \right) \\ &\quad + \mathbb{1} \left(\kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{\kappa_{r,2s}^{(f)} (\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(p^2 + (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2)} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

für $r = 1, 3, 5, \dots$ mit $\kappa_{r,1}^{(f)}, \kappa_{r,2}^{(f)}, \kappa_{r,3}^{(f)} \in \mathbb{R}$ und $\kappa_{r,2s+2}^{(f)} = \kappa_{r,2s}^{(f)*}$, $\kappa_{r,2s+3}^{(f)} = \kappa_{r,2s+1}^{(f)*}$ für $s = 2, 4, \dots, r-1$ sowie $\kappa_{r,s+}^{(f)} = \kappa_{r,s-}^{(f)*}$. Der Zusammenhang zwischen den konjugiert-komplexen und den reellen Parametern ist analog zu (2.9/2.10). Die Notation vereinfachen wir, indem wir an allen Stellen, an denen es ohne Mehrdeutigkeitsprobleme möglich ist, den Flavour-Index f vernachlässigen. Die Formulierung mit „matrixwertigen Polen“ gibt das Verhältnis der Residuen der beiden invarianten Funktionen in (2.14) vor. Voneinander unabhängige Residuen führen, z.B. für $r = 1$, zu einem Polynom 3. Grades in \not{p} im Propagatornenner, d.h. es existiert ein reeller Pol, und der Propagator beschreibt somit ein stabiles Teilchen. Um dies auszuschließen, werden matrixwertige Pole verwendet. Im Unterschied zum Ansatz für den Gluon-Propagator sind die nichtperturbativen Massenskalen κ nicht Vielfache von Λ , sondern zunächst allgemeine Funktionen von Λ und den renormierungsgruppeninvarianten Strommassen \hat{m} (vgl. Kapitel 1.3). Die geforderte rationale Struktur der Approximanten kann durch polynomiale Abhängigkeiten erreicht werden:

$$\kappa_{r,1} = w_{r,1} \Lambda + w'_{r,1} \hat{m}, \quad (2.15)$$

$$\kappa_{r,2s} = w_{r,2s} \Lambda + w'_{r,2s} \hat{m}, \quad (2.16)$$

$$(\kappa_{r,2s+1})^2 = w_{r,2s+1} \Lambda^2 + w'_{r,2s+1} \Lambda \hat{m} + w''_{r,2s+1} \hat{m}^2. \quad (2.17)$$

Auch diese Struktur wird durch den Vergleich mit der Operatorproduktentwicklung gestützt; bei Anwesenheit von Strommassen \hat{m} werden dort die als Koeffizienten der $(1/p^2)$ -Potenzen auftretenden Vakuumkondensate homogene Polynome in Λ und \hat{m} . Wenn die Approximanten durch die renormierten Massen $m(\nu)$ anstatt durch \hat{m} parametrisiert werden, verliert man die Renormierungsgruppeninvarianz. Zudem sind die Strommassen \hat{m} kopplungsunabhängig, die Randbedingung (RB 1) bleibt also auch für die fermionischen Vertexfunktionen bestehen und verlangt:

$$w'_{r,1} = 1 \quad \text{und} \quad w''_{r,2s+1} = 0, \quad (s = 1 \dots r). \quad (2.18)$$

³Beachte: $\not{p}\not{p} = -p^2$, da in der hier verwendeten Konvention $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -\delta^{\mu\nu}$ gilt.

Die komplexen Propagatorpolstellen liegen für $r = 1$ bei

$$\kappa_{1,1\pm}^2 = \left(\frac{1}{2} (\kappa_{1,1}^2 + \kappa_{1,2}^2) - \kappa_{1,3}^2 \right) \pm i (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}) \sqrt{\kappa_{1,3}^2 - \left(\frac{1}{2} (\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}) \right)^2} \quad (2.19)$$

und kurzlebige Quark-Elementaranregungen liegen vor, falls:

$$\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} \neq 0 \quad \text{und} \quad \kappa_{1,3}^2 > \left(\frac{1}{2} (\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}) \right)^2. \quad (2.20)$$

Damit diese Ungleichung auch für große Quarkmassen (z.B. Top-Quark) erfüllt ist, muß

$$w'_{1,2} = 1 \quad (2.21)$$

gelten, was bereits in [STR 96] gefordert wurde, um den richtigen perturbativen Limes des renormierten Fermion-Kondensats zu erhalten.

Abschließend stellen wir fest, daß die komplexen Propagator-Pole automatisch eine dynamische chirale Symmetriebrechung (DCSB) bewirken. Betrachtet man in (2.14) den Anteil proportional zur Dirac-Einheitsmatrix, so sieht man, daß der „dynamische“, d.h. über das \hat{m} des perturbativen Propagators nullter Ordnung hinausgehende Anteil nur dann verschwindet, wenn reelle Pole vorliegen:

$$w_{1,1} = 0 = \kappa_{1,2} \Rightarrow \kappa_{1,1\pm}^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (2.22)$$

$$w_{1,1} = 0 = (\kappa_{1,3})^2 \Rightarrow \kappa_{1,1\pm}^2 = \left(\hat{m} + \frac{w_{1,2}}{2} \Lambda(1 \pm 1) \right). \quad (2.23)$$

2.2.2 Der 3-Gluon-Vertex

Die Farbstruktur ist wegen der Wahl eines stark vereinfachten Ansatzes für den 4-Gluon-Vertex (Anhang B.2) aus Konsistenzgründen auf den total antisymmetrischen Tensor eingeschränkt:

$$\Gamma_{3V}^{\mu\nu\rho} = if_{abc} \Gamma_{3V}^{\mu\nu\rho}. \quad (2.24)$$

Es existieren 4 unabhängige Lorentz-Tensorstrukturen, die die Transversalprojektion überleben⁴, also

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_{3T}^{[r,0]} \right)^{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) = & t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\nu\nu'}(p_2) t^{\rho\rho'}(p_3) \\ & \cdot \left(\delta^{\nu'\rho'}(p_2 - p_3)^{\mu'} F_0^{[r,0]}(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \right. \\ & + \delta^{\rho'\mu'}(p_3 - p_1)^{\nu'} F_0^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ & + \delta^{\mu'\nu'}(p_1 - p_2)^{\rho'} F_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & \left. + (p_2 - p_3)^{\mu'}(p_3 - p_1)^{\nu'}(p_1 - p_2)^{\rho'} F_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right), \quad (2.25) \end{aligned}$$

⁴Die analytische Struktur von 3-Punkt-Vertexfunktionen wird ausführlich in [BC 80] diskutiert.

$$\text{mit } F_k^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{N_{3T}^{k[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u'_{r,2s} \Lambda^2)}. \quad (2.26)$$

Durch diese Approximante mit faktorisiertem Nenner (kurz: FDRA) wurde, um eine geeignete Form für die DS-Selbstkonsistenz (Kapitel 2.3) zu erhalten, nicht das allgemeinste Nennerpolynom in p_1^2, p_2^2, p_3^2 gewählt. Die dennoch für eine Approximation ausreichende FDRA verlangsamt eventuell die Konvergenz der Approximantenfolge, erscheint aber sofort als natürlich, wenn man sie als diskrete Approximation der Spektraldarstellung

$$F^{(r=1)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{1}{\pi^3} \int dz_1 dz_2 dz_3 \frac{\rho^{(r=1)}(z_1, z_2, z_3, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{(z_1 - p_1^2)(z_2 - p_2^2)(z_3 - p_3^2)} \quad (2.27)$$

ansieht. Das Zählerpolynom wird durch die beiden Randbedingungen stark eingeschränkt:

$$N_{3T}^{k[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \sum_{m_1, m_2, m_3} C_{m_1 m_2 m_3}^{k[r]} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-k-(m_1+m_2+m_3)},$$

mit $m_1 + m_2 + m_3 \leq 3r - k$ (asymptotische Freiheit). (2.28)

Aus (RB 1) folgt sofort $C_{rrr}^{k[r]} = \delta_{k0}$ und (RB 2) schränkt die Parameter m_1, m_2, m_3 weiter ein:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &\leq 2r - k, \\ m_2 + m_3 &\leq 2r - k, \\ m_3 + m_1 &\leq 2r - k. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Außerdem liefert die Bose-Symmetrie $C_{m_1 m_2 m_3}^{0[r]} = C_{m_2 m_1 m_3}^{0[r]}$ und $C_{m_1 m_2 m_3}^{1[r]} = C_{m_2 m_1 m_3}^{1[r]} = C_{m_1 m_3 m_2}^{1[r]}$.

2.2.3 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Die Farbstruktur ist durch globale Eichinvarianz gegeben:

$$\Gamma_{F\bar{F}V_a}^{l_1 l_2 \mu}(-p_1, p_2, k) = \left(\frac{1}{2}\lambda_a\right)^{l_1 l_2} \Gamma_{F\bar{F}V}^{\mu}(-p_1, p_2, k). \quad (2.30)$$

Die allgemeinste Lorentz-Struktur wird von 12 matrixwertigen Vektoren gebildet [BER 68], die jedoch durch Transversalprojektion auf 8 reduziert werden [BC 80]. Der FDRA-Ansatz für die Approximationsstufe r lautet:

$$\Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0] \mu}(-p_1, p_2, k) = t^{\mu\nu}(k) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa'_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\nu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + \bar{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa'_{r,2s})} \quad (2.31)$$

mit

$$N_{F\bar{F}T}^{[r]\nu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \sum_{\lambda, m, n, n' \geq 0} (\not{p}_1)^n \left(C_{\lambda m n n'}^{[r]} \gamma^\nu + D_{\lambda m n n'}^{[r]} \frac{r^\nu}{\Lambda} \right) (\not{p}_2)^{n'} k^{2m} \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \Lambda^\lambda,$$

wobei $r^\nu = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)^\nu$. (2.32)

Wegen der Dirac-Matrixstruktur ist hier die Reihenfolge der Faktoren wesentlich. Die renormierungsgruppeninvarianten Massenskalen Λ und \hat{m} treten genauso wie im Propagator polynomial auf, d.h. $2m + n + n' \leq 4r - \lambda$. Dieser in [STI 94] vorgeschlagene Ansatz erfüllt (RB 1), wenn:

$$C_{0,m,n,n'}^{[r]} = \delta_{mr} c_{r-n}^{[r]} c_{r-n'}^{[r]} \quad (2.33)$$

mit $c_{r-n}^{[r]} = 0$ für $r - n < 0$ und sonst definiert durch

$$\prod_{s=1}^r (p + w'_{r,2s}) = \sum_{s=0}^r c_{r-s}^{[r]} p^s,$$

$$D_{\lambda,m,n,n'}^{[r]} = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2. \quad (2.34)$$

Die Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit (RB 2) liefert:

$$n + n' \leq 2r, \quad 2m + n \leq 3r, \quad 2m + n' \leq 3r, \quad \text{für } C_{\lambda,m,n,n'}^{[r]}, \quad (2.35)$$

$$n + n' \leq 2r - 1, \quad 2m + n \leq 3r - 1, \quad 2m + n' \leq 3r - 1, \quad \text{für } D_{\lambda,m,n,n'}^{[r]} \text{ und } \lambda \geq 2. \quad (2.36)$$

Die Ladungskonjugationssymmetrie (vgl. Anhang A.3)

$$U(\mathcal{C}) (\Gamma_{F\bar{F}V}(p, -q, q - p))^T U(\mathcal{C})^{-1} = -\Gamma_{F\bar{F}V}(-q, p, q - p) \quad (2.37)$$

reduziert ebenfalls die Parameterzahl:

$$\Rightarrow C_{\lambda mn'n}^{[r]} = C_{\lambda mnn'}^{[r]}, \quad D_{\lambda mn'n}^{[r]} = D_{\lambda mnn'}^{[r]}. \quad (2.38)$$

In Kapitel 2.4 werden wir zeigen, daß die Terme $\propto D_{\lambda mnn'}^{[r]}$ aufgrund des Mechanismus der kompensierenden Pole nicht selbstkonsistent behandelt werden können. Unter dieser Voraussetzung ist im Anhang B.1 die Umrechnung auf die in [STI 96] verwendete partialbruchzerlegte Form für $r = 1$ angegeben. Außerdem bietet sich insbesondere für die Berechnungen im chiralen Limes, d.h. $\hat{m} = 0$, eine kompaktere Schreibweise an, die durch folgende Definition erreicht wird:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=0}^{4r-2m-n-n'} C_{\lambda mnn'}^{[r]} \hat{m}^{4r-2m-n-n'-\lambda} \Lambda^\lambda \\ &= \Lambda^{4r-2m-n-n'} \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{4r-2m-n-n'} C_{\lambda mnn'}^{[r]} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right)^{4r-2m-n-n'-\lambda}}_{=: \bar{C}_{mnn'}^{[r]}} \\ & \text{mit } \bar{C}_{mnn'}^{[r]} = C_{4r-2m-n-n'mnn'}^{[r]} \text{ für } \hat{m} = 0. \quad (2.39) \end{aligned}$$

2.3 Das Selbstkonsistenzproblem

Für die $\Gamma_N^{[r,0]}$ liefern uns die DS-Gleichungen ein nichttriviales Selbstkonsistenzproblem. Betrachtet man z.B. den ersten Iterationsschritt, so folgt mit (2.1,2.2) aus (1.3):

$$\left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N \left[\Gamma^{[r,0]} \right] \Big|_R = \Gamma_N^{[r,0]} - \Gamma_N^{(0)pert} + \mathcal{O}(g^2(\nu), e(r+1)). \quad (2.40)$$

Nach diesem ersten Iterationsschritt ist die DS-Gleichung bis auf Fehler sowohl in der perturbativen Ordnung $g^2(\nu)$ als auch der nächsthöheren nichtperturbativen Approximation $r+1$ erfüllt. Die in [STI 96] genannten „Vergleichsdaten“ sind bei rationalen Approximanten im allgemeinen frei wählbar, hier aber weitgehend durch den Mechanismus der kompensierenden Pole (Kapitel 2.4) nahegelegt. Das bedeutet, die Vergleichsdaten sind die Residuen der nichtperturbativen Vertexfunktionen und somit durch die nichtperturbativen Approximanten festgelegt.

Die nichtperturbativ modifizierten Vertexfunktionen höherer perturbativer Ordnung, $\Gamma_N^{[r,p]}$ ($p > 0$), erhält man durch Iteration um $\Gamma_N^{[r,0]}$. Damit lassen sich die $\Gamma_N^{[r,0]}$ als die „neuen Feynman-Regeln“ der Theorie auffassen, mit denen sich dann im Prinzip off-shell-Korrelationsfunktionen berechnen lassen. Die Bestimmung physikalisch meßbarer Größen, wie z.B. Wirkungsquerschnitte oder Zerfallskonstanten, erfordert außerdem die in einer Theorie mit Confinement problematische Berechnung von S-Matrixelementen, da die Beschreibung der asymptotisch detektierbaren Teilchen, das sind die Hadronen, unter Verwendung von Bindungszustandsvertizes erfolgt. Die Behandlung dieses Problems, das den Rahmen dieser Arbeit übersteigt, erfordert einen systematischen Zugang zur approximativen Lösung einer entsprechenden Bethe-Salpeter-Gleichung (vgl. dazu z.B. [GRO 93, KUH 94]).

Die Bestimmung der $\Gamma_N^{[r,0]}$ erfolgt durch (2.40), was bedeutet, daß die Schleifenintegrale in einem geeigneten, hier dimensionellen, Renormierungsschema den nichtperturbativen Anteil der $\Gamma_N^{[r,0]}$ reproduzieren müssen. Diese Selbstkonsistenz ist nur dann möglich, wenn die Φ_N in der Lage sind, den Vorfaktor g_0^2 zu kompensieren, und somit die linke Seite von (2.40) Terme der Ordnung g^0 ausbildet.

Nach [STI 96] existiert ein sogenannter „ $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus“, durch den die divergenten nichtperturbativen Beiträge in Φ_N kopplungsunabhängig und divergenzfrei werden. Voraussetzung ist, daß die Schleifenintegrale neben der Divergenz $\propto \frac{1}{\epsilon}$ eine gebrochene Potenz $\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon}$ produzieren. Wie dies geschieht und welche Auswirkung die Behandlung massiver Fermionen hat, ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit (Kapitel 3-6).

Wenn sich die Größe

$$\Pi(\epsilon) = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} \quad (2.41)$$

ausbildet, kann man durch Anwendung der Kopplungsrenormierung (1.7), den Integraldar-

stellungen für Z_α , Glg. (1.29), und für $(\frac{\Lambda}{\nu_0})^{-2\epsilon}$, Glg. (1.17), bzw.

$$\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} = \frac{\alpha_1}{\alpha(\nu)} \exp\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha(\nu)} \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'}\right) \quad (2.42)$$

sofort ihre exakte Kopplungsunabhängigkeit ablesen:

$$\Pi(\epsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\epsilon} \exp\left(-\int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'}\right). \quad (2.43)$$

Analog zu Gleichung (1.30) können wir den in $\epsilon = 0$ regulären Teil des Integrals abspalten und erhalten:

$$\Pi(\epsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\epsilon} \frac{4\pi\epsilon/\beta_0}{4\pi\epsilon/\beta_0 + \alpha_1} \exp\left(-\epsilon \int_0^{\alpha_1} d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_0}, \quad \text{da } \rho_\alpha(0, \epsilon) = 0. \quad (2.44)$$

Durch diesen $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus entwickelt das Schleifenintegral sowohl Terme der Ordnung g^0 als auch Terme der Ordnung g^2 . Es besteht also nicht mehr die in der Störungstheorie geltende Gleichheit von g^2 -Ordnung und Schleifenordnung. Da der Begriff der g^2 -Ordnung aufgeweicht wird, unterscheiden wir ab sofort nur noch zwischen verschiedenen Schleifenordnungen⁵.

Betrachtet man die Herleitung von (2.44), so erkennt man, daß die $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz durch die bereits an der Integraldarstellung (1.31) ablesbare Eigenschaft $g_0 \propto \epsilon$ der in allen Ordnungen aufsummierten nackten Kopplung kompensiert wird. Wendet man diese jedoch auf die gesamte Theorie an, so verschwinden alle Green-Funktionen mit mehr als zwei äußeren Beinen (vgl. Anhang A.2). Dies unterstreicht die schon von 't Hooft [THO 73] betonte Tatsache, daß im *perturbativen* Zusammenhang g_0 nur in Form seiner Taylorentwicklung nach Potenzen von g^2 (mit dann für $\epsilon \rightarrow 0$ divergenten Koeffizienten) verwendet werden darf. Wie in Kapitel 1.4 angekündigt, verwenden wir diese Integraldarstellung daher nur für nichtperturbative Terme, die dadurch definiert sind, daß sie für $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden. Für den Rest, die rein störungstheoretischen Anteile, erfolgt die bekannte störungstheoretische Renormierung (Kapitel 1.1).

Anzumerken ist, daß die Anwendung dieser Eigenschaft der nackten Kopplung auf die nichtperturbativen *endlichen* Anteile der Schleifenintegrale Φ_N diese zum Verschwinden bringt. Ob bei diesem Vorgehen nichtperturbative Modifikationen überleben, kann erst durch eine Berechnung der endlichen Beiträge abschließend geklärt werden.

Die Kopplung des Selbstkonsistenzmechanismus an die Divergenzstruktur der Theorie zeigt, daß sich das Selbstkonsistenzproblem für die nichtperturbativen Vertexfunktionen $\Gamma_N^{[r,0]}$ auf die divergenten Anteile der Schleifenintegrale beschränkt, da nur diese durch den $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus Terme der Ordnung g^0 produzieren können. Es ist sofort klar, daß diese Terme auch bei Betrachtung höherer Schleifenordnungen nur für die sieben oberflächlich divergenten Vertexfunktionen Γ_{VV} , $\Gamma_{\bar{G}G}$, $\Gamma_{\bar{F}F}$, Γ_{3V} , $\Gamma_{\bar{G}GV}$, $\Gamma_{\bar{F}FV}$, Γ_{4V} gebildet werden können. Die unendlich vielen gekoppelten DS-Gleichungen werden so auf elegante Weise,

⁵In dieser Arbeit behandeln wir ausschließlich die 1-Schleifenordnung.

d.h. ohne Abschneiden oder Entkopplungsnäherungen, für das Selbstkonsistenzproblem der nullten Ordnung *entkoppelt*.

Die Schleifenintegrale in (2.40) faktorisieren Pole in den Impulsen äußerer Beine von nichtperturbativ erweiterten Vertexfunktionen nach außen ab. In den DS-Gleichungen für die inversen Propagatoren ist dies ein Faktor aus dem 3-Punkt-Vertex, und um Selbstkonsistenz zu erreichen, ohne bei der Approximation einen lokal unendlichen Fehler zu machen, müssen alle Gluon- und Fermion-Pole jeweils an denselben Stellen auftreten, d.h.:

$$\bar{u}'_{r,2s} = u'_{r,2s} = u_{r,2s}, \quad \kappa'_{r,2s} = \kappa_{r,2s}. \quad (2.45)$$

Damit liegen die Nullstellen der Propagatoren genau auf den Polstellen der 3-Punkt-Vertexes. Diese Eigenschaft ist von zentraler Bedeutung; sie bewirkt, daß die zusammenhängenden Greenschen Funktionen mit äußeren Gluon- oder Quark-Beinen in den Impulsen dieser Beine nichtsingulär werden und daher verschwindende S-Matrixelemente liefern.

Im nächsten Abschnitt analysieren wir die Polstruktur und verwenden ab sofort eine Diagrammsprache mit neuen, den „erweiterten“ Feynman-Regeln:

Im nullten Iterationsschritt ($p = 0$) stehen die Diagramme, die die Vertexfunktionen darstellen⁶, für die nichtperturbativen Vertexfunktionen $\Gamma_N^{[r,0]}$.

2.4 „Entschärfte“ 1-Teilchen-Austauschdiagramme

Ohne explizite Berechnung der Schleifenintegrale stößt man beim Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichungen für Vertexfunktionen mit mehr als zwei äußeren Beinen auf ein Problem, das wir in diesem Kapitel für den Fermion-Sektor auf beliebiger Approximationsstufe r behandeln, und das zu der natürlichen Definition von sogenannten „entschärfte“ 1-Teilchen-Austauschdiagrammen führt [JJ 73, CN 73, STI 95]. Da wir mehrfach die Residuen der nichtperturbativen Vertexfunktionen benötigen, führen wir zusätzliche Diagramme ein:

$$\text{Sharp Vertex} := \left[(\not{p} + \kappa_{r,2t}) \cdot \text{Circle Vertex} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}}. \quad (2.46)$$

Offensichtlich ist p der Impuls im horizontalen Kanal, und die rechte Seite steht für: Zerlege den Term in \not{p} - und 1l-Anteile und bilde anschließend das Residuum an der Stelle $p^2 = -\kappa_{r,2t}^2$. Da der Impuls nur matrixwertig auftritt ($p^2 = -\not{p}\not{p}$), läßt sich dies vereinfachen, indem man mit dem matrixwertigen Pol multipliziert und dann formal $\not{p} = -\kappa_{r,2t}$ setzt.

⁶Definiert sind diese in Anhang A.

Wir bilden Residuen bzgl. eines fermionischen Beins der DS-Gleichungen in dimensioneller Regularisierung. Zunächst behandeln wir den inversen Fermionpropagator (Anhang A.3) und nach Einsetzen der Ansätze aus Kapitel 2.2 folgt:

$$-\kappa_{r,2t+1}^2 = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left[\text{Diagram: a fermion loop with a wavy gluon line and a fermion line, with external momenta } p \text{ and } p + \kappa_{r,2t} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}} \quad (2.47)$$

Diese Beziehung ist nichts weiter als eine der Selbstkonsistenzgleichungen für die Fermion-Selbstenergie. Analog gehen wir beim Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex im fermionischen Kanal (Anhang A.3) vor:

$$\text{Diagram: a fermion-antifermion-gluon vertex with external momenta } t \text{ and } p + \kappa_{r,2t} \text{ and a wavy gluon line} = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left[\text{Diagram: a fermion loop with a wavy gluon line and a fermion line, with external momenta } p + \kappa_{r,2t} \text{ and } p \text{, and a vertex } T'_s \text{ on the gluon line} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}} \quad (2.48)$$

Die Gültigkeit der letzten Gleichung erfordert für $T'_s(F\bar{F}TT)$ einen $\frac{1}{(\not{p} + \kappa_{r,2t})}$ -Polterm im s-Kanal, der, da er in den 1-Teilchen-Austauschgraphen im t- bzw. u-Kanal nicht auftritt, im störungstheoretisch verschwindenden $\Gamma_{F\bar{F}TT}$ enthalten sein muß :

$$\text{Diagram: a vertex } \Gamma \text{ with two fermion lines and a wavy gluon line} = \frac{\Phi_L \cdot \Phi_R}{\not{p} + \kappa_{r,2t}} + \text{Diagram: a vertex } \Gamma' \text{ with two fermion lines and a wavy gluon line}, \quad (2.49)$$

wobei $\Gamma'_{F\bar{F}TT}$ regulär in $\not{p} = -\kappa_{r,2t}$ ist und die Faktorisierung des Polterms eine strukturelle Eigenschaft der Green-Funktionen ist [ZIM 60]. Eingesetzt in (2.48) folgt sofort:

$$\Phi_R \propto \text{Diagram: a fermion-antifermion-gluon vertex with external momenta } t \text{ and } p + \kappa_{r,2t} \text{ and a wavy gluon line}, \quad \text{und nach Ladungsumkehr: } \Phi_L \propto \text{Diagram: a fermion-antifermion-gluon vertex with external momenta } t \text{ and } p + \kappa_{r,2t} \text{ and a wavy gluon line}, \quad (2.50)$$

$$\text{und } \text{Diagram: a vertex } \Gamma \text{ with two fermion lines and a wavy gluon line} = \text{Diagram: a fermion-antifermion-gluon vertex with external momenta } t \text{ and } p + \kappa_{r,2t} \text{ and a wavy gluon line} \cdot \frac{\bar{C}_{r,2t}}{\not{p} + \kappa_{r,2t}} \cdot \text{Diagram: a fermion-antifermion-gluon vertex with external momenta } t \text{ and } p + \kappa_{r,2t} \text{ and a wavy gluon line} + \text{Diagram: a vertex } \Gamma' \text{ with two fermion lines and a wavy gluon line}. \quad (2.51)$$

$\bar{C}_{r,2t}$ ist eine Proportionalitätskonstante, die wir einfach ablesen können. Aus (2.48) folgt:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \left[\begin{array}{c} \text{Two external lines (one wavy, one straight) meeting at a vertex.} \\ \text{A shaded triangle with a double line through it.} \end{array} \right] = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left[\begin{array}{c} \text{A loop diagram with a wavy line on top and a shaded triangle on the right.} \\ \text{A double line with momentum } t \text{ enters from the right.} \end{array} \right] \cdot \bar{C}_{r,2t} \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Two external lines (one wavy, one straight) meeting at a vertex.} \\ \text{A shaded triangle with a double line through it.} \end{array} \right] , \\
 \text{(2.52)} \quad \text{with } \not{p} = -\kappa_{r,2t}
 \end{array}$$

und der Vergleich mit (2.47) zeigt:

$$\frac{1}{\bar{C}_{r,2t}} = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left[\begin{array}{c} \text{A loop diagram with a wavy line on top and a shaded triangle on the right.} \\ \text{A double line with momentum } t \text{ enters from the right.} \end{array} \right]_{\not{p} = -\kappa_{r,2t}} = -\kappa_{r,2t+1}^2 . \quad (2.53)$$

Es bietet sich an, für den in (2.51) auftretenden *Schattenpol* ein neues Diagramm zu definieren:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \left[\begin{array}{c} \text{Two shaded triangles connected by a double line with momentum } t. \\ \text{Each triangle has a wavy line on top and a straight line on the bottom.} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c} \text{A shaded triangle with a double line through it.} \\ \text{A double line with momentum } t. \end{array} \right] \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\not{p} + \kappa_{r,2t}} \left[\begin{array}{c} \text{A shaded triangle with a double line through it.} \\ \text{A double line with momentum } t. \end{array} \right] . \\
 \text{(2.54)}
 \end{array}$$

Dieses Schattenpol-Diagramm ist nicht reduzibel, denn sein Pol ist kein Propagator eines der *elementaren* Felder der Theorie; außerdem beschreibt es durch seinen reellen Pol keinen physikalischen Bindungszustand, da im allgemeinen ein negatives Residuum vorliegt. Es existiert somit kein physikalisches Prinzip, das das Auftreten dieser Schattenpole in $\Gamma_{F\bar{F}TT}$ verbietet.

Insgesamt werden im s-Kanal r Schattenpole abgezogen. Deshalb liegt eine neue Diagrammdefinition ohne den Index t nahe:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } \left[\begin{array}{c} \text{Two shaded triangles connected by a double line.} \\ \text{Each triangle has a wavy line on top and a straight line on the bottom.} \end{array} \right] := \sum_{t=1}^r \left[\begin{array}{c} \text{A shaded triangle with a double line through it.} \\ \text{A double line with momentum } t. \end{array} \right] \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\not{p} + \kappa_{r,2t}} \left[\begin{array}{c} \text{A shaded triangle with a double line through it.} \\ \text{A double line with momentum } t. \end{array} \right] . \\
 \text{(2.55)}
 \end{array}$$

Für den Schattenpol wird künftig die Bezeichnung *kompensierender Pol* verwendet, da er die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, die reellen Pole $(\not{p} + \kappa_{r,2t})^{-1}$ im reduziblen

s-Kanal-Austauschgraphen gerade zu kompensieren:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \tag{2.56} \\
 &= \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N^{\mu[r]}(\not{p}_1, \not{q}, k_1^2)}{\prod_{s=1}^r (k_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})} \frac{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \\
 & \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})} \frac{N^{\nu[r]}(\not{q}, \not{p}_2, k_2^2)}{\prod_{s=1}^r (k_2^2 + u_{r,2s})} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 & + \sum_{t=1}^r \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N^{\mu[r]}(\not{p}_1, -\kappa_{r,2t}, k_1^2)}{\prod_{s=1}^r (k_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\not{q} + \kappa_{r,2t}} \\
 & \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \frac{N^{\nu[r]}(-\kappa_{r,2t}, \not{p}_2, k_2^2)}{\prod_{s=1}^r (k_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 &= \sum_{t=1}^{r+1} \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0] \mu}(-p_1, p_1 - k_1, k_1) \Big|_{\not{p}_1 - \not{k}_1 = -\kappa_{r,t\pm}} \frac{1}{\not{q} + \kappa_{r,t\pm}} \left((\not{q} + \kappa_{r,t\pm}) S^{[r,0]}(q) \right) \Big|_{\not{q} = -\kappa_{r,t\pm}} \\
 & \cdot \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0] \nu}(-p_2 - k_2, p_2, k_2) \Big|_{\not{p}_2 + \not{k}_2 = -\kappa_{r,t\pm}} . \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

Die $\kappa_{r,t\pm}$ stehen für die $r + 1$ Parameter $\kappa_{r,s+}$, $\kappa_{r,s-}$. Diese kompakte Form, der man explizit ansehen kann, daß kein Pol an der Stelle $\not{q} = -\kappa_{r,2s}$ auftritt — der zunächst reelle Pol der Vierpunktfunktion wird kompensiert —, ergibt sich nach längerer Rechnung unter Verwendung der im Anhang B.3 angegebenen Identitäten. Die Existenz der Schattenpole und der Mechanismus der automatischen Kompensation reeller Pole auf inneren Linien wurde erstmals in Arbeiten zur dynamischen Massenerzeugung in abelschen Modellen von [JJ 73] und [CN 73] gefunden.

Kompensierende Pole treten, wie man durch entsprechende Residuenbildung sieht, auf gleiche Weise in den anderen Kanälen der $T'_s(F\bar{F}TT)$ -Amplitude auf. Da diese Diagramme in den DS-Gleichungen als Summe mit dem entsprechenden Austauschgraphen auftreten, kann zur Vereinfachung der Schreibweise ein neues Diagramm, das für den „entschärften“ 1-Teilchen-Austauschgraphen steht, eingeführt werden:

$$\text{Diagram 3} := \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} . \tag{2.58}$$

Mit der Einführung der kompensierenden Pole ist folgende Systematik zu erkennen:

Zwei nichtperturbative Vertexfunktionen verbindet eine entschärfte Linie.

Der kompensierende Pol als nichtperturbative Modifikation sollte nach (RB 1) im störungstheoretischen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden. Automatisch gelingt dies insbesondere im masselosen Fall ($\hat{m} = 0$) nicht, da die Potenzen Λ^1 , die in den durch Dreiecke definierten Vertizes in (2.55) enthalten sind, durch $(\kappa_{r,2s+1}^2)^{-1}$ kompensiert werden. In den Kapiteln 5 und 6 erhalten wir deshalb für $r = 1$ Defektterme in der störungstheoretischen Divergenz, die erst für höhere Approximationsgrade r aufgrund der zunehmenden Parameterzahl leichter zum Verschwinden zu bringen sind.

2.4.1 Folgerungen für die DS-Gleichungen

Mit den in den Vierpunktfunktionen auftretenden entschärfen Austauschdiagrammen folgt für die DS-Gleichung des Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex (vgl. Anhang A.3) im fermionischen Kanal in 1-Schleifenordnung:

$$\begin{aligned}
 & \text{Vertex} = \text{Tree} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{(A)} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{(B)} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{(C)} \\
 & + \text{ [zur 0. Ordnung nicht beitragende Terme]}. \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die DS Gleichung im gluonischen Kanal:

$$\text{Vertex} = \text{Tree} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{(A')}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (B')} \\
 & + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (B'')} \\
 & + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (C')} \\
 & - \sum_f (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (D')} \\
 & - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (E')} \\
 & + \quad \quad \quad \text{[zur 0. Ordnung nicht} \\
 & \quad \quad \quad \text{beitragende Terme].}
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Diese in 1-Schleifenordnung unterschiedlichen Formen zweier äquivalenter Gleichungen weisen auf die Problematik der Über- bzw. Unterbestimmung bei der Behandlung des SK-Problems des DS-Gleichungssystems hin (Kapitel 6.3), die in der entsprechenden Bethe-Salpeter-resummierten Form (Anhang E) nicht auftritt.

2.4.2 Folgerungen für die Vertexparameter

Durch den kompensierenden Pol, bzw. durch das Rechnen mit entschärften Linien, kann der Divergenzgrad der Schleifenintegrale erhöht werden. Um diese Divergenzsteigerung zu verhindern und damit die Randbedingung (RB 2) zu erfüllen, müssen die Ansätze aus Kapitel 2.2 weiter eingeschränkt werden. Die Vorgehensweise wird am Beispiel von Diagramm A aus Gleichung (2.59) erläutert. Bezeichne die äußeren Impulse mit p_1 (Fermion), p_2 (Antifermion) und k (Gluon) und den in der Schleife laufenden Impuls mit q . Dann

lautet das zu berechnende Impulsintegral:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} t^{\nu'\nu} (p_1 - q) D^{[r,0]}((p_1 - q)^2) S^{[r,0]}(q) \sum_{t=1}^{r+1} \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0]\nu}(-q, q - k, k) \Big|_{\not{q} - \not{k} = -\kappa_{r,t\pm}} \cdot \frac{1}{\not{q} - \not{k} + \kappa_{r,t\pm}} \left((\not{q} - \not{k} + \kappa_{r,t\pm}) S^{[r,0]}(q - k) \right) \Big|_{\not{q} - \not{k} = -\kappa_{r,t\pm}} \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0]\mu}(k - q, p_2, q - p_1) \Big|_{\not{q} - \not{k} = -\kappa_{r,t\pm}}. \quad (2.61)$$

Power-Counting ergibt im Zähler $2r + r + n + 2\bar{m} = 3r + n + 2\bar{m}$ und im Nenner $(2r + 2) + (r + 1) + r + 1 + 2r = 6r + 4$ Impulsfaktoren, wobei λ, n, n', m die Summationsindizes des ersten und $\bar{\lambda}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{n}'$ die Summationsindizes des zweiten Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex sind. Da das störungstheoretische Integral logarithmisch divergent ist, folgt unmittelbar die Bedingung

$$n + 2\bar{m} \leq 3r. \quad (2.62)$$

\bar{m} und n sind Summationsindizes verschiedener Fermion-Antifermion-Gluon-Vertizes. Also muß sogar

$$n, n', m \leq r \quad (2.63)$$

erfüllt sein, damit keine Integrale entstehen, die die ursprüngliche logarithmische Divergenz steigern. Analog läßt sich am Power-Counting des fermionischen Beitrags zum 4-Gluonen-Vertex [DRI 97] ablesen, daß $n' + \bar{n} \leq 2r - 1$ für die Beiträge $\propto C_{\lambda\bar{m}\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \cdot D_{\lambda\bar{m}\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \cdot C_{\lambda m n n'}^{[r]}$ gilt. Die Folgerung $C_{\lambda m n n'}^{[r]} = 0$ für $n, n' > r - 1$ ergibt die zu Gleichung (2.33) im Widerspruch stehende Identität $C_{0rrr}^{[r]} = 0$. Die Konsequenz ist die Forderung:

$$D_{\lambda m n n'}^{[r]} = 0 \quad \forall \lambda, m, n, n'. \quad (2.64)$$

Aus dem nichtabelschen Beitrag zum Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex, Diagramm B aus Glg. (2.59), folgt für die Parameter des 3-Gluon-Vertex:

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{0[r]} = 0 \quad \forall m_1, m_2, m_3 > r \quad (2.65)$$

$$\text{und } C_{m_1 m_2 m_3}^{1[r]} = 0 \quad \forall m_1, m_2, m_3. \quad (2.66)$$

In den 3-Punkt-Vertizes überlebt nur die störungstheoretische Lorentz-Struktur, modifiziert durch Polfaktoren, die für die Fermionen matrixwertig sind. Außerdem dürfen sämtliche Summationsindizes der Zählerpolynome nicht größer als r werden. Diese Restriktionen vereinfachen die im jetzt folgenden Hauptteil der Arbeit durchgeführten Rechnungen so, daß das DS-SK Problem für beliebigen ungeraden rationalen Approximationsgrad r behandelt werden kann⁷.

⁷Die Kondensatberechnungen auf beliebiger Approximationsstufe r , die in [STR 96] durchgeführt wurden, vereinfachen sich hierdurch erheblich.

Die Anzahl der nicht durch Randbedingungen und Symmetrien festgelegten 3-Punkt-Vertexparameter läßt sich nun leicht ablesen:

$$-1 + \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r \sum_{n'=0}^n 1 = \frac{r}{2}(r^2 + 4r + 5). \quad (2.67)$$

Diese Zahl entspricht genau der Anzahl der Parameter in $N_{3T}^{0[r]}$ im 3-Gluon-Vertex. Somit hat man für $r = 1$ nur 5 und für $r = 3$ bereits 39 Parameter (im Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex pro Flavour!).

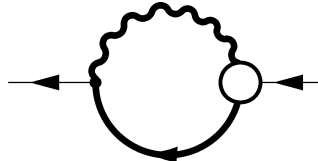
Kapitel 3

Der inverse Fermion-Propagator

Die DS-Gleichung für den inversen Fermion-Propagator (Anhang A.3) enthält ein Schleifendiagramm, dessen Berechnung bereits sämtliche Komplikationen, die im Zusammenhang mit der Behandlung massiver Fermionen entstehen, aufzeigt.

3.1 Die Fermion-Selbstenergie

Zu berechnen ist folgendes Diagramm:

$$\left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{F\bar{F}}^{ij}(p) = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle \quad (3.1)$$


$$= \delta^{ij} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \gamma^\mu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\nu}(q-p) D^{[r,0]}((q-p)^2) \cdot S^{[r,0]}(q) \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0]\nu}(-q, p, q-p). \quad (3.2)$$

Wir haben gemäß (2.40) die „neuen“ Feynman-Regeln $\Gamma_N^{[r,0]}$ aus Kapitel 2.2 eingesetzt und erhalten ein linear divergentes Integral:

$$\left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{F\bar{F}}^{ij}(p) = \delta^{ij} \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{I^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \quad (3.3)$$

mit¹

$$I^{(01)}(\not{p}) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \gamma^\mu t^{\mu\nu}(q-p) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} - \kappa_{r,s+})(\not{q} - \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} ((q-p)^2 + u_{r,s+} \Lambda^2) ((q-p)^2 + u_{r,s-} \Lambda^2) (q^2 + \kappa_{r,s+}^2) (q^2 + \kappa_{r,s-}^2)}$$

¹Die in dieser Arbeit berechneten Impulsintegrale werden fortlaufend numeriert.

$$\cdot \sum_{m,n,n'=0}^r \sum_{\lambda=0}^{4r-2m-n-n'} \not{q}^\lambda C_{\lambda m n n'}^{[r]} \gamma^\nu \not{p}^{n'} (q-p)^{2m} \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \Lambda^\lambda. \quad (3.4)$$

Da nur die divergenten Anteile des Integrals $I^{(01)}$ zum SK-Problem beitragen können, führen wir die Berechnung der endlichen Anteile nicht durch und erhalten mit der in Anhang C.1 angegebenen Feynmanparametrisierung für die divergenten Anteile:

$$\begin{aligned} I^{(01)}(\not{p}) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \gamma^\mu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int dF_{(01)}(x) \frac{\delta^{\mu\nu} (q-p)^2 - (q-p)^\mu (q-p)^\nu}{((q-xp)^2 + R_{(01)}^2(x, p^2))^{2r+3}} \\ &\quad \cdot \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} - \kappa_{r,s+})(\not{q} - \kappa_{r,s-}) \\ &\quad \cdot \left(\not{q}^r \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r-n'} \bar{C}_{rrn'}^{[r]} \not{p}^{n'} \right. \\ &\quad \left. + \not{q}^{r-1} \gamma^\nu (q-p)^{2r} \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r+1-n'} \bar{C}_{rr-1n'}^{[r]} \not{p}^{n'} \right) + \text{endl.} \quad (3.5) \\ &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int dF_{(01)}(x) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+2}}{(q^2 + R_{(01)}^2(x, p^2))^{2r+3}} \left(\frac{D-1}{D} \right) \\ &\quad \cdot \left(D \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r+1-n'} \bar{C}_{rr-1n'}^{[r]} \not{p}^{n'} \right. \\ &\quad \left. + \not{p} (4 + 2r - 4rx - (D+2)x) \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r-n'} \bar{C}_{rrn'}^{[r]} \not{p}^{n'} \right. \\ &\quad \left. - D \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r-n'} \bar{C}_{rrn'}^{[r]} \not{p}^{n'} \right) + \text{endl.} \quad (3.6) \end{aligned}$$

Nach symmetrischer Integration verbleiben zwei Typen logarithmisch divergenter Integrale:

$$I_A^{(01)}(p^2) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int dF_{(01)}(x) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{4r+2}}{(q^2 + R_{(01)}^2(x, p^2))^{2r+3}} + \text{endl.}, \quad (3.7)$$

$$I_B^{(01)}(p^2) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int dF_{(01)}(x) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{x q^{4r+2}}{(q^2 + R_{(01)}^2(x, p^2))^{2r+3}} + \text{endl.}, \quad (3.8)$$

in denen Terme $\propto \Lambda^{-2\epsilon}$ entstehen, wie man an folgendem stark vereinfachten Integral sofort sieht:

$$\int_0^1 dx \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(g_0 \nu_0^\epsilon)^2}{(q^2 + x\Lambda^2 + (1-x)\kappa^2)^2}$$

$$= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{1-\epsilon} \left(\left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} + \frac{\kappa^2}{\Lambda^2 - \kappa^2} \underbrace{\left(\left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} - \left(\frac{\kappa}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \right)}_{\mathcal{O}(\epsilon)} \right) + \text{endl.} \quad (3.9)$$

Nur die Terme $\propto \Lambda^{-2\epsilon}$ sind in der Lage, die für den Selbstkonsistenzmechanismus entscheidende Größe $\Pi(\epsilon)$ zu bilden, und müssen deshalb aus dem Impulsintegral extrahiert werden. Bei der Integration entstehen divergente ($\propto \epsilon^{-1}$) und konvergente ($\propto \epsilon^0$) Terme. Man hat die Freiheit, die divergenten Anteile zu definieren. Diese Definition ist in der Störungstheorie Teil des Renormierungsschemas. Auf der Suche nach den Divergenzen nutzen wir diese Freiheit aus:

Wenn in divergenten Integralen sowohl Nennerfaktoren mit der spontanen Massenskala Λ allein als auch Nennerfaktoren mit nichtspontanen Massenskalen, wie z.B. \hat{m} oder äußere Impulsquadrate², auftreten, werden die Divergenzen so berechnet, daß die mit ihnen verbundene gebrochene Potenz als Massenskala ausschließlich $\frac{\Lambda}{\nu_0}$ enthält.

Die so bestimmten divergenten Anteile sind eindeutig und, das ist der wichtige Punkt dieser Definition, proportional zu $\Lambda^{-2\epsilon}$. Der Übergang $\Lambda \rightarrow 0$ ist dann nur für die nichtperturbativen Divergenzen sinnvoll³, da diese einen zusätzlichen Faktor Λ enthalten. Dies ist z.B. an Glg. (3.9) zu sehen, wenn man dort den ersten Term der Klammer als nichtperturbativen isoliert hat; dieser Term *allein* besäße keinen Grenzwert für $\Lambda \rightarrow 0$. Durch diese Eigenschaft können die nichtperturbativen von den störungstheoretischen Anteilen getrennt werden:

Nichtperturbative Terme sind dadurch charakterisiert, daß sie für $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden.

Praktisch werden die wie oben definierten divergenten Anteile durch Zurücknehmen der Feynmanparametrisierung und anschließendes geschicktes Hinzuaddieren konvergenter Impulsintegrale berechnet. Das ist für die hier auftretenden Integrale genauso wie für die in den folgenden Kapiteln zu berechnenden Integrale mit Ausnahme der Fermion-Schleifen, die keinen Nennerfaktor mit rein spontaner Massenskala Λ ausbilden, möglich. Zum besseren Verständnis dieser Technik führen wir die Integralberechnung für das Integral $I_A^{(01)}(p^2)$ explizit durch:

$$I_A^{(01)}(p^2) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int dF_{(01)}(x) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q - xp)^{4r+2}}{((q - xp)^2 + R_{(01)}^2(x, p^2))^{2r+3}} + \text{endl.}$$

²Durch diese Definition können die Unstetigkeitsprobleme, die in [SCH 91] bei verschwindenden äußeren Impulsquadraten auftraten, gelöst werden.

³Für das gesamte Integral (inklusive endlicher Anteile) existiert der Übergang $\Lambda \rightarrow 0$ und man erhält das bekannte Resultat der reinen Störungstheorie.

$$\begin{aligned}
 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^{r-1}}{\prod_{s=1}^{r+1} ((q-p)^2 + u_{r,s\pm} \Lambda^2)} \cdot \frac{q^2}{(q-p)^2} \cdot \frac{(q^2)^{r+1}}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \kappa_{r,s\pm}^2)} + \text{endl.} \\
 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2r-2}}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s+} \Lambda^2) (q^2 + u_{r,s-} \Lambda^2)} + \text{endl.} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

$$\tag{3.11}$$

Analog erhält man nach geschickten Umformungen:

$$I_B^{(01)}(p^2) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2r-2}}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s+} \Lambda^2) (q^2 + u_{r,s-} \Lambda^2)} \cdot \frac{2r+D}{2(2r+1)+D} + \text{endl.} \tag{3.12}$$

Nach der Impulsintegration ist das auszuführende Feynmanparameter-Integral $\propto \Lambda^{-2\epsilon}$ und wird, da nach Bildung der Größe $\Pi(\epsilon)$ der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ vollzogen werden darf, nur für $\epsilon = 0$ bestimmt. Somit folgt für das Schleifenintegral:

$$I^{(01)}(\not{p}) = \underbrace{\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon}}_{=\Pi(\epsilon)} \cdot \hat{I}^{(01)}(\not{p}) + \text{endl.} \tag{3.13}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \hat{I}^{(01)}(\not{p}) &= 3 \left(\sum_{n'=0}^r \Lambda^{r-n'+1} \bar{C}_{rr-1n'}^{[r]} \not{p}^{n'} - \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) \sum_{n'=0}^r \Lambda^{r-n'} \bar{C}_{rrn'}^{[r]} \not{p}^{n'} \right) \\
 &= 3 \sum_{n'=0}^r \left(\sum_{\lambda=0}^{r-n'+1} C_{\lambda rr-1n'}^{[r]} \hat{m}^{r-n'+1-\lambda} \Lambda^\lambda \right. \\
 &\quad \left. - \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) \sum_{\lambda=0}^{r-n'} C_{\lambda rrn'}^{[r]} \hat{m}^{r-n'-\lambda} \Lambda^\lambda \right) \not{p}^{n'} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \sum_{n'=0}^r \left(C_{0rr-1n'}^{[r]} - \left(1 + \sum_{s=1}^r w'_{r,2s} \right) C_{0rrn'}^{[r]} \right) \hat{m}^{r-n'+1} \not{p}^{n'} + \mathcal{O}(\Lambda) \\
 &= -3 \sum_{n'=0}^r C_{0rrn'}^{[r]} \hat{m}^{r-n'+1} \not{p}^{n'} + \mathcal{O}(\Lambda) \\
 &= -3 \hat{m}^{r+1} \prod_{s=1}^r \left(\frac{\not{p}}{\hat{m}} + w'_{r,2s} \right) + \mathcal{O}(\Lambda) \quad (\text{vgl. (2.33)}) \\
 &= \mathcal{O}(\Lambda) \quad \text{für } \not{p} = -\kappa_{r,2t}, (t = 1, \dots, r), \quad (\text{vgl. (2.16)}) \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

wobei die Identität (nochmals Vieta)

$$\sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) = \kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \tag{3.16}$$

verwendet wurde, um das Integral in Abhängigkeit der Vertexfunktions-Parameter schreiben zu können. Anzumerken ist an dieser Stelle, daß analog zur Störungstheorie in Landau-Eichung keine Divergenzen $\propto \not{p}$, die als perturbative Divergenzen zu identifizieren und durch Renormierung zu beheben wären, existieren, da der \not{p}^{r+1} -Term für $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Wenn im Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex das Residuum bei $\not{p} = -\kappa_{r,2t}$ gebildet wird, ist sogar der gesamte divergente Anteil des Integrals impulsunabhängig. Ein solches Integral tritt in der DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex im fermionischen Kanal auf (Kapitel 5.1), und liefert aus diesem Grund im Gegensatz zu der DS-Gleichung im gluonischen Kanal (Kapitel 5.2) keinen regulären Beitrag.

3.2 Die Selbstkonsistenzgleichungen

Die aus der DS-Gleichung des inversen Fermion-Propagators (Anhang A.3) folgenden Selbstkonsistenzgleichungen können jetzt mit Hilfe des Integrals $I^{(01)}(\not{p})$ aufgestellt werden:

$$-\not{p} - \kappa_{r,1} - \sum_{s=1}^r \frac{\kappa_{r,2s+1}}{\not{p} + \kappa_{r,2s}} = -\not{p} - m_0 + \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{I^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})}. \quad (3.17)$$

In [STI 96] waren für die Parameteranpassung „Vergleichsdaten“ notwendig, die wir hier, wie im Folgenden noch deutlich wird, nicht benötigen. Zunächst wird nach matrixwertigen \not{p} und $\mathbb{1}$ Termen sortiert. Danach führt die Residuenbildung an den Stellen $p^2 = -\kappa_{r,2t}^2$ ($t = 1 \dots r$) zu den r Selbstkonsistenzgleichungen⁴:

$$-\kappa_{r,2t+1}^2 = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \Pi(\epsilon) \frac{\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})}, \quad (t = 1 \dots r), \quad (3.18)$$

und die DS-Gleichung (3.17) läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} -\hat{m} - w_{r,1}\Lambda &= -m_0 + \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{I^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} \\ &\quad - \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \Pi(\epsilon) \sum_{t=1}^r \frac{\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{(\not{p} + \kappa_{r,2t}) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

⁴Anstatt zunächst nach matrixwertigen \not{p} und $\mathbb{1}$ Termen zu sortieren und mit diesen anschließend die Residuenbildung an den Stellen $p^2 = -\kappa_{r,2t}^2$ zu vollziehen, führen wir formal die „matrixwertige Residuenbildung“ an den Stellen $\not{p} = -\kappa_{r,2t}$ ($t = 1 \dots r$) durch und erhalten mit unserer Konvention $\not{p}\not{p} = -p^2$ dieselben Selbstkonsistenzgleichungen.

Das Produkt $\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})$ tritt in dieser Arbeit an vielen Stellen auf und ist nur für $r > 1$ definiert; für $r = 1$ ist dieser Ausdruck durch 1 zu ersetzen.

Für die Anpassung des Parameters $w_{r,1}$ definieren wir in Anlehnung an [STI 96] eine impulsunabhängige Größe $\hat{J}^{(01)}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{J}^{(01)} &:= \frac{\hat{I}^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} - \sum_{t=1}^r \frac{\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{(\not{p} + \kappa_{r,2t}) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \\
 &\quad - \left[\frac{\hat{I}^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} - \sum_{t=1}^r \frac{\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{(\not{p} + \kappa_{r,2t}) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \right]_{\Lambda=0} \quad (3.20) \\
 &= 3 \left(\Lambda \bar{C}_{rr-1r}^{[r]} - \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) \bar{C}_{rrr}^{[r]} \right) \\
 &\quad - \left[3 \left(\Lambda \bar{C}_{rr-1r}^{[r]} - \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) \bar{C}_{rrr}^{[r]} \right) \right]_{\Lambda=0} \\
 &= 3 \left(\underbrace{C_{0rr-1r}^{[r]}}_{\sum_{s=1}^r w'_{r,2s}} \hat{m} + C_{1rr-1r}^{[r]} \Lambda - \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) + w'_{r,1} \hat{m} \right) \\
 &= 3 \left(C_{1rr-1r}^{[r]} - \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) \right) \Lambda. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Die Selbstkonsistenzgleichung lautet dann

$$-w_{r,1} \Lambda = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \Pi(\epsilon) \hat{J}^{(01)}. \quad (3.22)$$

Jetzt sind alle nichtperturbativen Parameter der linken Seite der DS-Gleichung angepaßt, und es können keine weiteren nichtperturbativen SK-Gleichungen durch den Selbstkonsistenzmechanismus entstehen. Es bleibt ein perturbativer Rest der ursprünglichen DS-Gleichung (3.17) übrig:

$$\begin{aligned}
 -\hat{m} = -m_0 + \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{I^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} - \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \Pi(\epsilon) \sum_{t=1}^r \frac{\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{(\not{p} + \kappa_{r,2t}) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \\
 - \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \Pi(\epsilon) \hat{J}^{(01)}, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

der, da $\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})$ (3.15) und $\hat{J}^{(01)}$ (3.21) proportional zu Λ sind, automatisch für $\Lambda \rightarrow 0$ das rein störungstheoretische Ergebnis liefert. Als Divergenz muß gemäß der Randbedingung bzgl. Beibehaltung der perturbativen Renormierbarkeit für endliches Λ die störungstheoretische Divergenz stehen bleiben. Einsetzen von $\hat{J}^{(01)}$ ergibt für die divergenten Bei-

träge im MS-Schema⁵:

$$\begin{aligned}
 -\hat{m} &= -m_0 + \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\hat{I}^{(01)}(\not{p})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s})} - \sum_{t=1}^r \frac{\hat{I}^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{(\not{p} + \kappa_{r,2t}) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \right]_{\Lambda=0} \\
 &= -m_0 - \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} 3 \hat{m} = -Z_m(\nu)m(\nu) - C_m(\nu)\hat{m}. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Für den Vergleich mit der störungstheoretischen Divergenz wird an dieser Stelle die renormierte Masse $m(\nu)$ benötigt. Nach Glg. (1.25) gilt in 1-Schleifenordnung die Beziehung⁶:

$$\hat{m} = m(\nu) \left(\frac{g(\nu)^2}{g_2^2} \right)^{-\frac{\gamma_m^0}{2\beta_0}}. \tag{3.25}$$

g_2 ist die Kopplung bei der Skala ν , für die $\hat{m} = m(\nu)$ gilt. Unter der Annahme, daß ein Skalenbereich verwendet wird, in dem $g(\nu) \approx g_2$ gilt, läßt sich die ungerade Potenz in $\Delta g(\nu) := \frac{g(\nu)^2 - g_2^2}{g_2^2}$ entwickeln:

$$\hat{m} = m(\nu) \left(1 - \frac{\gamma_m^0}{2\beta_0} \Delta g(\nu) \right) + \mathcal{O}(\Delta g(\nu)^2). \tag{3.26}$$

Mit dieser Beziehung zwischen \hat{m} und $m(\nu)$ folgt aus dem perturbativen Rest der DS-Gleichung (3.24):

$$\begin{aligned}
 -\hat{m} &= -Z_m(\nu)(m(\nu) - \hat{m}) - \hat{m} \\
 &= -Z_m(\nu) \frac{\gamma_m^0}{2\beta_0} \Delta g(\nu) m(\nu) - \hat{m} + \mathcal{O}(\Delta g(\nu)^2). \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Es entstehen also zusätzliche störungstheoretische Terme der Ordnung $\frac{g(\nu)^2 - g_2^2}{g_2^2}$, die durch eine Modifikation — genauer: eine zusätzliche *endliche* Umskalierung — der störungstheoretischen Massenrenormierung beseitigt werden können:

$$Z_m(\nu) = (1 - C_m(\nu)) \quad \rightarrow \quad \hat{Z}_m(\nu) = (1 - C_m(\nu)) \left(1 - \frac{\gamma_m^0}{2\beta_0} \Delta g(\nu) \right). \tag{3.28}$$

Die Massenrenormierungskonstante ist unabhängig von den anderen Renormierungskonstanten der QCD und bewirkt somit keine weiteren Modifikationen. Außerdem hat diese Modifikation auf den Skalenbereich, in dem $\hat{m} \approx m(\nu)$ gilt, keine Auswirkungen. Wir

⁵Die rein störungstheoretische Renormierungskonstante ist definiert durch $m_0 = Z_m(\nu)m(\nu) = (1 - C_m(\nu))m(\nu)$; vgl. (1.9).

⁶Faktoren der Form $g^{\frac{\gamma_m^0}{\beta_0}}$ sind uns gut bekannt, denn sie treten ebenfalls auf, wenn man mit RG-verbesserten Vertexfunktionen arbeitet [ASS 93].

schreiben $m_0 = \hat{Z}_m m(\nu)$, und anstatt (3.27) folgt nun aus (3.24):

$$\begin{aligned}
 -\hat{m} &= -\hat{Z}_m(\nu)m(\nu) - C_m(\nu)\hat{m} \\
 &= -(1 - C_m(\nu))\left(1 - \frac{\gamma_m^0}{2\beta_0}\Delta g(\nu)\right)m(\nu) - C_m(\nu)\hat{m} \\
 &= -\hat{m} + \mathcal{O}(\Delta g(\nu)^2).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Neben dieser modifizierten Massenrenormierung werden auch die Vertexfunktionen anders als in der Störungstheorie renormiert. Das geschieht bei den störungstheoretischen Anteilen nachwievor multiplikativ durch die bekannten Renormierungskonstanten, jedoch bedürfen die nichtperturbativen Terme keiner Renormierung, da sie sich durch den $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus endlich etablieren. Insgesamt kann man die Renormierung der Vertexfunktionen schreiben als

$$(\Gamma_N)_R = Z_\Gamma \Gamma_N^{(pert)} + \left(\Gamma_N - \Gamma_N^{(pert)}\right), \tag{3.30}$$

d.h. die Renormierung erfolgt nicht multiplikativ. Dies gilt auch bereits in der Operatorproduktentwicklung, wenn man nichtlokale Gegenterme vermeiden will.

Nachdem nun alle Divergenzen beseitigt sind, geben wir die $(r + 1)$ SK-Gleichungen explizit an.

SK F2.1:

$$\begin{aligned}
 -\kappa_{r,2t+1}^2 &= \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{1}{\beta_0} \frac{3\Lambda^r}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})} \sum_{n'=0}^r \left(-\frac{\kappa_{r,2t}}{\Lambda}\right)^{n'} \left(\Lambda \bar{C}_{rr-1n'}^{[r]} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}\right) \bar{C}_{rrn'}^{[r]}\right), \quad (t = 1 \dots r) \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

SK F2.2:

$$-w_{r,1}\Lambda = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{1}{\beta_0} 3 \left(C_{1rr-1r}^{[r]} - \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) \right) \Lambda. \tag{3.32}$$

Eine Aufteilung von Glg. (3.31) nach Potenzen von \hat{m} und Λ ist möglich, hätte aber als Resultat $r(r + 1)$ Gleichungen und würde damit zu einer Überbestimmung führen. Außerdem nehmen die Massenskalen \hat{m} und Λ nach durchgeführter Renormierung abhängig

vom Renormierungsschema feste Werte an, und wir definieren die relative Quarkmasse:

$$\hat{x} := \frac{\hat{m}}{\Lambda}. \quad (3.33)$$

Damit liefern die Selbstkonsistenzgleichungen SK F2.1/2 pro Quark-Flavour $r + 1$ Gleichungen für $2r + 1$ Propagator-Parameter.

Für die Analyse der SK-Gleichungen auf der Approximationsstufe $r = 1$ definieren wir $\hat{\kappa}_{1,3} := \frac{\kappa_{1,3}^2}{\Lambda^2}$ und verwenden die an dieser Stelle geeigneteren Vertexparameter z (vgl. Anhang B.1). Die SK-Gleichungen lauten:

$$\text{SK F2.1 :} \quad -\hat{\kappa}_{1,3} = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{1}{\beta_0} 3(z_{0,4} - z_{0,1}(\hat{x} + w_{1,1})), \quad (3.34)$$

$$\text{SK F2.2 :} \quad w_{1,1} = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{1}{\beta_0} 3(w_{1,1} - z_{0,1}). \quad (3.35)$$

Auffallend, aber aufgrund der nur linearen Divergenz vorhersehbar, ist, daß der Parameter $\kappa_{1,2}$ des Propagator-Zählers nicht in diesen Gleichungen erscheint. Dieser kann aber trotzdem bestimmt werden, da er durch den quadratisch divergenten Beitrag der Fermion-Schleife zum inversen Gluon-Propagator (Kapitel 4) im Selbstkonsistenzproblem auftritt.

3.3 Beispiel: Die Approximationsstufe $r = 0$

An dem folgenden kleinen Beispiel sieht man nach kurzer Rechnung, welche Aussagekraft die Selbstkonsistenzgleichungen für kleinen Approximationsgrad r haben. Wir betrachten die DS-Gleichung für den inversen Fermion-Propagator mit N_F masselosen Fermionen (d.h. $\hat{m} = 0$) und folgenden Approximanten:

$$\begin{aligned} \text{Fermion-Propagator: } r = 0 & \quad \Gamma_{F\bar{F}}^{[0,0]} = -\not{p} - w\Lambda, \\ \text{Gluon-Propagator: } r = 0 & \quad \Gamma_{TT}^{[0,0]} = -p^2 - u\Lambda^2, \\ \text{Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex: } r = 0, & \quad \text{d.h. hier: rein perturbativ} \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

In $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen kann man sofort schreiben:

$$\begin{aligned} -\not{p} - w\Lambda &= -\not{p} + (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \gamma^\mu \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} t^{\mu\nu} (q - p) \frac{1}{(q - p)^2 + u\Lambda^2} \frac{1}{\not{q} + w\Lambda} \gamma^\nu \\ &= -\not{p} + \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \Pi(\epsilon)(1 - D)w\Lambda + \text{endl.} \end{aligned}$$

Die Selbstkonsistenz, d.h. Reproduktion der Approximante, erfordert die SK-Gleichung:

$$w\Lambda = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{1}{\beta_0} 3w\Lambda. \quad (3.37)$$

Exakt läßt sich diese Gleichung nur für $w = 0$ erfüllen. Dies entspricht der trivialen Lösung, die keine Erweiterung der Störungstheorie darstellt. Für $w \neq 0$ ergibt sich mit $N_C = 3$:

$$1 = \frac{4}{\beta_0}, \quad (3.38)$$

und für asymptotisch freies $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_F > 0$ liefert die rechte Seite der Gleichung zumindest das richtige Vorzeichen und eine vergleichbare Größenordnung.

Dagegen läßt sich zwar für das SK-Problem auf der Approximationsstufe $r = 1$ eine Lösung angeben (vgl. Kapitel 7), allerdings existieren Defekte und Nebenbedingungen, die erst für größere r durch die stark ansteigende Parameterzahl beseitigt bzw. erfüllt werden können. Aufgrund dieser Tatsache bestimmen wir in dieser Arbeit sämtliche SK-Gleichungen für beliebigen Approximationsgrad r .

mit dem quadratisch divergenten Integral¹:

$$\begin{aligned}
 t^{\mu\nu}(k)I^{(02)}(k^2) &= (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \text{Tr}\left(\gamma^\nu \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \prod_{s=1}^{(r+1)/2} \frac{1}{(\not{p} + \kappa_{r,s+})(\not{p} + \kappa_{r,s-})} t^{\mu\mu'}(k) \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{\lambda,m,n,n'} (\not{p})^n C_{\lambda m n n'}^{[r]} \gamma^{\mu'} (\not{p} + \not{k})^{n'} k^{2m} \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \Lambda^\lambda \\
 &\quad \left. \cdot \prod_{s=1}^{(r+1)/2} \frac{1}{(\not{p} + \not{k} + \kappa_{r,s+})(\not{p} + \not{k} + \kappa_{r,s-})} \right). \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Nach Einführung der Feynman-Parametrisierung (Anhang C.2) können die divergenten Anteile berechnet werden²:

$$\begin{aligned}
 t^{\mu\nu}(k)I^{(02)}(k^2) &= (g_0\nu_0^\epsilon)^2 t^{\mu\mu'}(k) \sum_{\lambda,m} k^{2m} \Lambda^\lambda \int dF_{(02)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{D}{\left((p+xk)^2 + R_{(02)}^2(x)\right)^{2r+2}} \\
 &\quad \cdot \left(C_{\lambda m r r}^{[r]} \hat{m}^{2r-(2m+\lambda)} \left(-\delta^{\mu'\nu} \left(p^{4r+2} + p^{4r}(kp)(2r+1) + p^{4r}k^2r + p^{4r-2}(kp)^2 2r^2 \right. \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. \left. + p^{4r} \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^2 + \kappa_{r,s-}^2) \right) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + 2p^{\mu'} p^\nu \left(p^{4r} + p^{4r-2}(kp)2r + p^{4r-2}k^2r + p^{4r-4}(kp)^2 2r(r-1) \right. \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. \left. - p^{4r-2} \left(\sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \right)^2 \right. \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. \left. + p^{4r-2} \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^2 + \kappa_{r,s-}^2) \right) \right) \right) \\
 &\quad + 2 C_{\lambda m r r-1}^{[r]} \hat{m}^{2r+1-(2m+\lambda)} \left(2 p^{\mu'} p^\nu p^{4r-2} \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \right) \\
 &\quad + C_{\lambda m r-1 r-1}^{[r]} \hat{m}^{2r+2-(2m+\lambda)} \left(-\delta^{\mu'\nu} p^{4r} \right) \\
 &\quad \left. + 2 C_{\lambda m r r-2}^{[r]} \hat{m}^{2r+2-(2m+\lambda)} \left(\delta^{\mu'\nu} p^{4r} - 2 p^{\mu'} p^\nu p^{4r-2} \right) \right) + \text{endl}. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Substitution $p \rightarrow p - xk$ und anschließende Impulsintegration ergibt:

$$\begin{aligned}
 I^{(02)}(k^2) &= (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \sum_{\lambda,m} k^{2m} \Lambda^\lambda D \int dF_{(02)} (R_{(02)}^2(x))^{-\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \\
 &\quad \cdot \left(C_{\lambda m r r}^{[r]} \hat{m}^{2r-(2m+\lambda)} \left(\left(1 - \frac{2}{D}\right) R_{(02)}^2(x)(2r+2) - k^2 r \frac{D+2r}{D+2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

¹ Alle fermionischen Parameter tragen einen Flavour-Index f , den wir zugunsten der Übersicht weglassen haben.

² Für $r = 1$ treten Vertexparameter mit negativen Indizes auf. Wir definieren deshalb: $C_{\lambda m n n'}^{[r]} = 0$, falls λ, m, n oder $n' < 0$.

$$\begin{aligned}
 & + xk^2 \frac{D+4r}{D(D+2)} (D+2+2Dr) \\
 & - x^2 k^2 \frac{D+4r}{D(D+2)} (D+2+2Dr) \\
 & - \frac{2}{D} \left(\sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \right)^2 \\
 & - \left(1 - \frac{2}{D} \right) \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^2 + \kappa_{r,s-}^2) \\
 & + 2 C_{\lambda m r r-1}^{[r]} \hat{m}^{2r+1-(2m+\lambda)} \left(\frac{2}{D} \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \right) \\
 & - C_{\lambda m r-1 r-1}^{[r]} \hat{m}^{2r+2-(2m+\lambda)} \\
 & + 2 C_{\lambda m r r-2}^{[r]} \hat{m}^{2r+2-(2m+\lambda)} \left(1 - \frac{2}{D} \right) + \text{endl.} \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Rechnung mit derjenigen zum Fermion-Propagator, so erkennt man, daß zwar durch geschicktes Hinzuaddieren geeigneter konvergenter oder logarithmisch divergenter Integrale die Impulsabhängigkeit eliminiert werden kann, jedoch bleiben die nicht rein spontanen Skalen κ im Nenner des Integrals stehen. D.h., daß sich im massiven Fall keine $\Lambda^{-\epsilon}$ Faktoren und somit keine Terme der Ordnung g^0 ausbilden können. Die reine $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz lautet im massiven Fall:

$$I^{(02)}(k^4) =: \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \hat{I}^{(02)}(k^2) + \text{endl.} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } \hat{I}^{(02)}(k^2) = & 4 \left(\sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r-2m} (k^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r r}^{[r]} \hat{m}^{2r-(2m+\lambda)} \left(\frac{1}{3} k^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s})^2 - \kappa_{r,1} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} - \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s+1})^2 \right) \right. \\
 & + \sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r+1-2m} (k^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r r-1}^{[r]} \hat{m}^{2r+1-(2m+\lambda)} \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) \\
 & - \sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r+2-2m} (k^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r-1 r-1}^{[r]} \hat{m}^{2r+2-(2m+\lambda)} \\
 & \left. + \sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r+2-2m} (k^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r r-2}^{[r]} \hat{m}^{2r+2-(2m+\lambda)} \right). \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Die komplexen Skalen $\kappa_{r,s\pm}$ wurden mit (3.16) und

$$\left(\sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+} + \kappa_{r,s-}) \right)^2 - \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^2 + \kappa_{r,s-}^2)$$

$$= \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right)^2 - \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s})^2 + \kappa_{r,1} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s+1}^2 \quad (4.8)$$

durch die reellen Skalen ersetzt.

Im chiralen Fall ($\hat{m} = 0$) gilt für die Massenskalen: $\kappa_{r,2s} = w_{r,2s}\Lambda$ bzw. $\kappa_{r,1} = w_{r,1}\Lambda$ und $\kappa_{r,2s+1}^2 = w_{r,2s+1}\Lambda^2$, ($s = 1 \dots r$). Es bildet sich demnach die Größe $\Pi(\epsilon)$ aus, und wir können schreiben:

$$I_{(ch)}^{(02)}(k^4) =: \Pi(\epsilon) \hat{I}_{(ch)}^{(02)}(k^2) + endl. \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \hat{I}_{(ch)}^{(02)}(k^2) &= 4\Lambda^{2r} \sum_{m=0}^r \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right)^m \\ &\cdot \left(C_{2r-2mmrr}^{[r]} \left(\frac{1}{3}k^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right)^2 \Lambda^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r w_{r,2s}^2 \Lambda^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - w_{r,1} \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \Lambda^2 - \sum_{s=1}^r w_{r,2s+1} \Lambda^2 \right) \right) \\ &+ C_{2r-2m+1mrr-1}^{[r]} \Lambda^2 \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) \\ &- C_{2r-2m+2mr-1r-1}^{[r]} \Lambda^2 + C_{2r-2m+2mrr-2}^{[r]} \Lambda^2 \Big). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die Unstetigkeit in der Rückwirkung des Fermion-Sektors auf die Gluonen im Fall $\hat{m} \rightarrow 0$ — exakt masselose Quarks produzieren Beiträge nullter Ordnung zu den gluonischen Vertizes, massive tun dies schon bei kleinsten endlichen Strommassen nicht mehr — ist ein merkwürdiges, aber im Rahmen der vorliegenden Methode offenbar unvermeidliches Phänomen.

4.2 Die gluonischen 1-Schleifen-Diagramme

Im Gegensatz zu der Fermion-Schleife treten in diesen Diagrammen keine nicht-spontanen Massenskalen κ auf. Die Schleifen können also durch den $1/g^2$ -Mechanismus Terme der Ordnung g^0 liefern. Wir beginnen mit der Gluon-Schleife:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_{TT}^{(A)\mu\nu}(k^2) &= \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \cdot \text{diagram} \\ &= \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Gamma_{3V}^{(0)\mu\rho\sigma}(-k, q, k-q) t^{\rho\rho'}(q) D^{[r,0]}(q^2) t^{\sigma\sigma'}(q-k) D^{[r,0]}((q-k)^2) \\ &\quad \cdot i f'_{c'cb} \Gamma_{3T}^{[r,0]\sigma'\rho'\nu}(q-k, -q, k). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nach Einsetzen der Ansätze erhält man ein quadratisch divergentes Integral, dessen divergenten Anteil man leicht berechnen kann:

$$\left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{TT}^{(C)\mu\nu} = \delta_{ab} \frac{N_C}{2} \delta^{\mu\nu} I^{(04)} \quad (4.17)$$

mit

$$I^{(04)} = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{9}{2} u_{r,1} \Lambda^2 + \text{endl.} =: \Pi(\epsilon) \hat{I}^{(04)} + \text{endl.} \quad (4.18)$$

4.3 Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen

Für die zugrundeliegende transversalprojizierte DS-Gleichung können wir nach Abspaltung der Farb- und Lorentz-Strukturen schreiben:

$$-k^2 - u_{r,1} \Lambda^2 - \sum_{s=1}^r \frac{u_{r,2s+1} \Lambda^4}{k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2} = -k^2 + \frac{N_C}{2} I^{(04)} + \frac{1}{2} \frac{N_C I^{(03)}(k^2) - \sum_f I_f^{(02)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)}. \quad (4.19)$$

Die ersten r Selbstkonsistenzgleichungen folgen nun unmittelbar durch Residuenbildung³:

$$-u_{r,2t+1} \Lambda^4 = \frac{1}{2} \frac{N_C I^{(03)}(-u_{r,2t} \Lambda^2) - \sum_f I_f^{(02)}(-u_{r,2t} \Lambda^2)}{\Lambda^{2r-2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})}, \quad (t = 1 \dots r). \quad (4.20)$$

Bereits die Berechnung der Fermion-Schleife zeigte, daß das Integral $I_f^{(02)}$ für massive Fermionen keine nichtperturbativen $\Lambda^{-2\epsilon}$ -Terme entwickeln kann, also im massiven Fall rein perturbative Beiträge liefert. Das sind Divergenzen, die entweder in den Selbstkonsistenzgleichungen stehen bleiben, oder nichtlokale Modifikationen der rein störungstheoretischen Divergenzen darstellen würden. Da dies ein unerwünschter Effekt ist, umgehen wir diese Schwierigkeit, die nur im massiven Fall entsteht, durch Nebenbedingungen. Anschließend stellen wir die SK-Gleichungen für den chiralen Fall, d.h. N_F masselose Fermionen, auf und geben abschließend die Resultate für $r = 1$ an.

4.3.1 Der massive Fall

Die Gleichung (4.20) erfordert Nebenbedingungen, die durch Nullsetzen der divergenten Anteile der Fermion-Schleifenintegrale gegeben sind:

$$0 = I_f^{(02)}(-u_{r,2t} \Lambda^2). \quad (4.21)$$

³Das Produkt $\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})$ ist nur für $r > 1$ definiert; für $r = 1$ ist dieser Ausdruck durch 1 zu ersetzen.

Die r Selbstkonsistenzgleichungen lauten

$$u_{r,2t+1} = \frac{N_C}{2\beta_0} \frac{\hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{\Lambda^{2r+2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})}, \quad (4.22)$$

und die DS-Gleichung (4.19) läßt sich jetzt schreiben als:

$$\begin{aligned} -u_{r,1}\Lambda^2 &= \frac{N_C}{2} I^{(04)} + \frac{1}{2} \frac{N_C I^{(03)}(k^2) - \sum_f I_f^{(02)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \Lambda^{-2\epsilon} \sum_{t=1}^r \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{(k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2) \Lambda^{2r-2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da $I_f^{(02)}$ keine Beiträge der Ordnung g^0 liefern kann, definieren wir analog zu (3.20) die Größe $\hat{J}^{(03)}$, die sich von dem J in [STI 96] dadurch unterscheidet, daß hier nur Terme $\propto \Lambda$ eingehen und damit das an dieser Stelle in [STI 96] unumgängliche Anpaßdatum nicht benötigt wird:

$$\begin{aligned} \hat{j}^{(03)} &:= \frac{N_C}{2} \hat{I}^{(04)} + \frac{1}{2} \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{(k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2) \Lambda^{2r-2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \\ &\quad - \left[\frac{N_C}{2} \hat{I}^{(04)} + \frac{1}{2} \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{(k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2) \Lambda^{2r-2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \right]_{\Lambda=0} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$= \frac{N_C}{2} \left(-\frac{3}{2} u_{r,1} - \frac{61}{6} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} + 11 C_{rr-1r} - \frac{5}{6} C_{rrr-1} \right) \Lambda^2. \quad (4.25)$$

Die Parameteranpassung für $u_{r,1}$ erfolgt durch die SK-Gleichung

$$u_{r,1} = -\frac{1}{\beta_0} \frac{\hat{J}^{(03)}}{\Lambda^2}, \quad (4.26)$$

und als Rest der DS-Gleichung (4.23) bleibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(N_C \frac{25}{12} k^2 - \frac{\frac{1}{2} \sum_f \hat{I}_f^{(02)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \right) + endl. \\ &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(N_C \frac{25}{12} k^2 - \frac{1}{2} \sum_f \frac{1}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(\hat{I}_f^{(02)}(k^2) - \sum_{t=1}^r \hat{I}_f^{(02)}(-u_{r,2t}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{u_{r,2s}\Lambda^2 + k^2}{u_{r,2s}\Lambda^2 - u_{r,2t}\Lambda^2} \right) + \text{endl.} \quad (4.28) \\
 &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\left(N_C \frac{25}{12} - N_F \frac{2}{3} \right) k^2 - 2 \sum_f \left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^2 \right. \right. \\
 & \quad - \kappa_{r,1} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} - \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s+1}^2 - \frac{1}{3} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} \Lambda^2 + \frac{1}{3} C_{1r-1rr}^{[r]} \hat{m} \Lambda + \frac{1}{3} C_{2r-1rr}^{[r]} \Lambda^2 \\
 & \quad + \left(\sum_{s=1}^r w'_{r,2s} \hat{m} + C_{1rrr-1}^{[r]} \Lambda \right) \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) - \left(\sum_{s=1}^r w'_{r,2s} \hat{m} \right)^2 \\
 & \quad \left. - C_{1rr-1r-1}^{[r]} \hat{m} \Lambda - C_{2rr-1r-1}^{[r]} \Lambda^2 + C_{0rrr-2}^{[r]} \hat{m}^2 + C_{1rrr-2}^{[r]} \hat{m} \Lambda + C_{2rrr-2}^{[r]} \Lambda^2 \right) + \text{endl.}, \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

was genau der rein perturbativen Divergenz (ohne Geistschleife) plus einer Störung durch die fermionischen Beiträge, die wir durch eine zusätzliche Nebenbedingung eliminieren können, entspricht. Abschließend geben wir eine Zusammenstellung der SK-Gleichungen und Nebenbedingungen an.

Die $r + 1$ SK-Gleichungen lauten:

SK G2.1:

$$\begin{aligned}
 u_{r,2t+1} &= \frac{1}{\beta_0} \frac{2N_C}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \left(\frac{5}{4} u_{r,2t} \sum_{m_2=0}^r C_{rrm_2r}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_2} \right. \\
 & \quad + \left(\frac{3}{2} u_{r,1} + \frac{3}{2} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} - \frac{5}{24} u_{r,2t} \right) \sum_{m_3=0}^r C_{rrm_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_3} \\
 & \quad \left. - \frac{3}{2} \sum_{m_3=0}^r C_{rr-1m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_3} \right), \quad (t = 1 \dots r) \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

SK G2.2:

$$u_{r,1} = -\frac{1}{\beta_0} \frac{9N_C}{4} u_{r,1} + \frac{2N_C}{\beta_0} \left(\frac{61}{24} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} + \frac{3}{2} u_{r,1} - \frac{11}{4} C_{rr-1r}^{0[r]} + \frac{5}{24} C_{rrr-1}^{0[r]} \right) \quad (4.31)$$

Es ergeben sich zusätzlich $r + 1$ Nebenbedingungen:

NB G2.1:

$$\begin{aligned}
 0 = \sum_f \left[\sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r-2m} (-u_{r,2t}\Lambda^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r r}^{f[r]} \hat{m}_{(f)}^{2r-(2m+\lambda)} \left(-\frac{1}{3} u_{r,2t} \Lambda^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} \right)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2 - \kappa_{r,1}^{(f)} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} - \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2 \right) \right. \\
 + \sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r+1-2m} (-u_{r,2t}\Lambda^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r r-1}^{f[r]} \hat{m}_{(f)}^{2r+1-(2m+\lambda)} \left(\kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} \right) \\
 - \sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r+2-2m} (-u_{r,2t}\Lambda^2)^m \Lambda^\lambda C_{\lambda m r-1 r-1}^{f[r]} \hat{m}_{(f)}^{2r+2-(2m+\lambda)} \\
 \left. + \sum_{m=0}^r \sum_{\lambda=0}^{2r+2-2m} (-u_{r,2t}\Lambda^2)^m \Lambda^\lambda + C_{\lambda m r r-2}^{f[r]} \hat{m}_{(f)}^{2r+2-(2m+\lambda)} \right], \quad (t = 1 \dots r) \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

NB G2.2:

$$\begin{aligned}
 0 = \sum_f \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2 - \kappa_{r,1}^{(f)} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} - \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2 \right. \\
 - \frac{1}{3} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} \Lambda^2 + \frac{1}{3} C_{1r-1rr}^{f[r]} \hat{m}_{(f)} \Lambda + \frac{1}{3} C_{2r-1rr}^{f[r]} \Lambda^2 \\
 + \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s}^{(f)'} \hat{m}_{(f)} + C_{1rrr-1}^{[r]} \Lambda \right) \left(\kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} \right) - \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s}^{(f)'} \hat{m}_{(f)} \right)^2 \\
 \left. - C_{1rr-1r-1}^{f[r]} \hat{m}_{(f)} \Lambda - C_{2rr-1r-1}^{f[r]} \Lambda^2 + C_{0rrr-2}^{f[r]} \hat{m}_{(f)}^2 + C_{1rrr-2}^{f[r]} \hat{m}_{(f)} \Lambda + C_{2rrr-2}^{f[r]} \Lambda^2 \right] \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Nebenbedingungen für $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden. NB G2.2 kann auch als Defekterterm (DT G2.A) in der perturbativen Renormierungskonstanten aufgefaßt werden, die für große r immer leichter zu beheben ist.

4.3.2 Der chirale Fall

Im masselosen Fall verhält sich die Fermion-Schleife ähnlich wie die Gluon-Schleife und liefert ebenfalls Beiträge zu den SK-Gleichungen. Nebenbedingungen ergeben sich in diesem

Fall nicht. Die ersten r SK-Gleichungen kann man sofort schreiben als:

$$-u_{r,2t+1} = \frac{1}{2\beta_0} \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2) - N_F \hat{I}^{(02)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{\Lambda^{2r+2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})}. \quad (4.34)$$

Durch die Definition

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(04)} := & \frac{N_C}{2} \hat{I}^{(04)} + \frac{1}{2} \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(k^2) - N_F I_f^{(02)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2) - N_F I_f^{(02)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{(k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2) \Lambda^{2r-2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \\ & - \left[\frac{N_C}{2} \hat{I}^{(04)} + \frac{1}{2} \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(k^2) - N_F I_f^{(02)}(k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{N_C \hat{I}^{(03)}(-u_{r,2t}\Lambda^2) - N_F I_f^{(02)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{(k^2 + u_{r,2t}\Lambda^2) \Lambda^{2r-2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \right]_{\Lambda=0} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{9N_C}{4} u_{r,1}\Lambda^2 - 2N_C \left(\frac{61}{24} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} + \frac{3}{2} u_{r,1} - \frac{11}{4} C_{rr-1r}^{0[r]} + \frac{5}{24} C_{rrr-1}^{0[r]} \right) \Lambda^2 \\ & - 2N_F \left(-\frac{1}{3} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r w_{r,2s}^2 \right. \\ & \quad \left. - w_{r,1} \sum_{s=1}^r w_{r,2s} - \sum_{s=1}^r w_{r,2s+1} + \frac{1}{3} C_{2r-1rr}^{[r]} \right. \\ & \quad \left. + C_{1rrr-1}^{[r]} \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) - C_{2rr-1r-1}^{[r]} + C_{2rrr-2}^{[r]} \right) \Lambda^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

erhalten wir als letzte SK-Gleichung

$$u_{r,1} = -\frac{1}{\beta_0} \frac{\hat{J}^{(04)}}{\Lambda^2}, \quad (4.37)$$

und als Rest der DS-Gleichung (4.19) bleibt die Divergenz

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(N_C \frac{25}{12} - N_F \frac{2}{3} \right) k^2 + \text{endl.}, \quad (4.38)$$

also die rein störungstheoretische Divergenz, und genügt somit unserer Randbedingung (RB 2).

Es folgt die Zusammenstellung der $r + 1$ SK-Gleichungen:

SK G2.1^(ch):

$$\begin{aligned}
 u_{r,2t+1} = & \frac{1}{\beta_0} \frac{2N_C}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \left(\frac{5}{4} u_{r,2t} \sum_{m_2=1}^r C_{rm_2r}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_2} - \frac{3}{2} \sum_{m_3=1}^r C_{rr-1m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_3} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{3}{2} u_{r,1} + \frac{3}{2} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} - \frac{5}{24} u_{r,2t} \right) \sum_{m_3=1}^r C_{rrm_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_3} \right) \\
 & + \frac{1}{\beta_0} \frac{2N_F}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \sum_{m=0}^r (-u_{r,2t})^m \\
 & \cdot \left(C_{2r-2mmrr}^{[r]} \left(-\frac{1}{3} u_{r,2t} - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r w_{r,2s}^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - w_{r,1} \sum_{s=1}^r w_{r,2s} - \sum_{s=1}^r w_{r,2s+1} \right) \right) \\
 & + C_{2r-2m+1mrr-1}^{[r]} \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) \\
 & \left. - C_{2r-2m+2mr-1r-1}^{[r]} + C_{2r-2m+2mrr-2}^{[r]} \right), \quad (t = 1 \dots r) \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

SK G2.2^(ch):

$$\begin{aligned}
 u_{r,1} = & -\frac{1}{\beta_0} \frac{9N_C}{4} u_{r,1} + \frac{2N_C}{\beta_0} \left(\frac{61}{24} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} + \frac{3}{2} u_{r,1} - \frac{11}{4} C_{rr-1r}^{0[r]} + \frac{5}{24} C_{rrr-1}^{0[r]} \right) \\
 & + \frac{2N_F}{\beta_0} \left(-\frac{1}{3} \sum_{s=1}^r u_{r,2s} - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r w_{r,2s}^2 \right. \\
 & \left. - w_{r,1} \sum_{s=1}^r w_{r,2s} - \sum_{s=1}^r w_{r,2s+1} + \frac{1}{3} C_{2r-1rr}^{[r]} \right. \\
 & \left. + C_{1rrr-1}^{[r]} \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) - C_{2rr-1r-1}^{[r]} + C_{2rrr-2}^{[r]} \right) \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

4.3.3 Die Approximationsstufe $r = 1$

Bei der Auswertung der SK-Gleichungen in Kapitel 7 beschränken wir uns auf den Fall $r = 1$. Deshalb listen wir an dieser Stelle SK-Gleichungen und Nebenbedingungen für

$r = 1$ auf, wobei wir den für r stehenden Index 1 der Parameter weglassen.

Der massive Fall

Die SK-Gleichungen (SK G2.1/2):

$$u_3 = \frac{2N_C}{\beta_0} \left(\frac{5}{4} u_2 (C_{101}^0 - u_2) + \left(\frac{3}{2} u_1 + \frac{31}{24} u_2 \right) (C_{110}^0 - u_2) - \frac{3}{2} (C_{100}^0 - u_2 C_{101}^0) \right) \quad (4.41)$$

$$= \frac{N_C}{3\beta_0} \left(\left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right) u_2 + 9u_1 x_3 - 9x_4 \right), \quad (4.42)$$

$$u_1 = -\frac{N_C}{\beta_0} \frac{9}{4} u_1 + \frac{2N_C}{\beta_0} \left(\frac{61}{24} u_2 + \frac{3}{2} u_1 - \frac{11}{4} C_{101}^0 + \frac{5}{24} C_{110}^0 \right) \quad (4.43)$$

$$= \frac{N_C}{3\beta_0} \left(\frac{9}{4} u_1 - \frac{33}{2} x_1 + \frac{5}{4} x_3 \right). \quad (4.44)$$

Die Nebenbedingungen (NB G2.1/2):

$$0 = \sum_f \left((\bar{C}_{011}^f - u_2 \bar{C}_{111}^f) \left(-\frac{1}{3} u_2 \Lambda^2 - \kappa_1^{(f)} \kappa_2^{(f)} - (\kappa_3^{(f)})^2 \right) \right. \\ \left. + (\bar{C}_{101}^f - u_2 \bar{C}_{110}^f) \Lambda (\kappa_1^{(f)} + \kappa_2^{(f)}) - (\bar{C}_{000}^f - u_2 \bar{C}_{100}^f) \Lambda^2 \right) \quad (4.45)$$

$$= -\sum_f \left(z_{1,0}^f \left(\frac{1}{3} u_2 \Lambda^2 + (\kappa_3^{(f)})^2 \right) + z_{1,1}^f (\kappa_2^{(f)} - \kappa_1^{(f)}) \Lambda + z_{1,4}^f \Lambda^2 \right), \quad (4.46)$$

$$0 = \sum_f \left(-\kappa_1^{(f)} \kappa_2^{(f)} - (\kappa_3^{(f)})^2 - \frac{1}{3} u_2 \Lambda^2 + \frac{1}{3} \bar{C}_{011}^f \Lambda^2 + \bar{C}_{110}^f \Lambda (\kappa_1^{(f)} \kappa_2^{(f)}) - \bar{C}_{100}^f \Lambda^2 \right) \quad (4.47)$$

$$= \sum_f \left(-(\kappa_3^{(f)})^2 + \frac{1}{3} z_{1,0}^f \Lambda^2 + z_{0,1}^f (\kappa_1^{(f)} - \kappa_2^{(f)}) \Lambda - z_{0,4}^f \Lambda^2 \right). \quad (4.48)$$

Der chirale Fall

Die SK-Gleichungen (SK G2.1/2^(ch)):

$$u_3 = \frac{2N_C}{\beta_0} \left(\frac{5}{4} u_2 (C_{101}^0 - u_2) + \left(\frac{3}{2} u_1 + \frac{31}{24} u_2 \right) (C_{110}^0 - u_2) - \frac{3}{2} (C_{100}^0 - u_2 C_{101}^0) \right) \\ + \frac{2N_F}{\beta_0} \left((C_{2011} - u_2 C_{0111}) \left(-\frac{1}{3} u_2 - w_1 w_2 - w_3 \right) \right. \\ \left. + (C_{1101} - u_2 C_{1110}) (w_1 + w_2) - (C_{4000} - u_2 C_{2100}) \right) \quad (4.49)$$

$$= \frac{N_C}{3\beta_0} \left(\left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right) u_2 + 9u_1 x_3 - 9x_4 \right)$$

$$-\frac{N_F}{\beta_0} \left(z_{1,0} \left(\frac{2}{3} u_2 + 2w_3 \right) + 2z_{1,1} (w_2 - w_1) + 2z_{1,4} \right), \quad (4.50)$$

$$u_1 = -\frac{N_C}{\beta_0} \frac{9}{4} u_1 + \frac{2N_C}{\beta_0} \left(\frac{61}{24} u_2 + \frac{3}{2} u_1 - \frac{11}{4} C_{101}^0 + \frac{5}{24} C_{110}^0 \right) + \frac{2N_F}{\beta_0} \left(-w_1 w_2 - w_3 - \frac{1}{3} u_2 + \frac{1}{3} C_{2011} + C_{1110} (w_1 - w_2) - C_{2100} \right) \quad (4.51)$$

$$= \frac{N_C}{3\beta_0} \left(\frac{9}{4} u_1 - \frac{33}{2} x_1 + \frac{5}{4} x_3 \right) + \frac{N_F}{\beta_0} \left(-2w_3 + \frac{2}{3} z_{1,0} + 2z_{0,1} (w_1 - w_2) - 2z_{0,4} \right). \quad (4.52)$$

Nebenbedingungen gibt es im chiralen Fall nicht. Diese Gleichungen stimmen überein mit denen von [STI 96], wo nur der chirale Fall betrachtet wird.

4.4 Erste Zwischenbilanz

Bereits die Analyse der DS-Gleichungen für die inversen Propagatoren in 1-Schleifenordnung zeigt grundsätzliche Eigenschaften der nichtperturbativ erweiterten Störungsreihe. Ein wichtiges und im Hinblick auf die Strommassen auch notwendiges Hilfsmittel ist die Trennung zwischen störungstheoretischen Divergenzen und nichtperturbativen Modifikationen.

- Sämtliche nichtperturbativen Divergenzen verschwinden im Limes $\Lambda \rightarrow 0$.

Die Berechnung der Schleifenintegrale, die wenigstens einen Pol im Integrationsimpuls an gewissen Vielfachen der rein spontanen Massenskala Λ haben, zeigt, daß sich die nichtperturbativen Terme durch eine sinnvolle Definition der divergenten Anteile auch in einer Theorie mit externen Strommassen endlich etablieren.

- Die nichtperturbativen Anteile divergenter Schleifenintegrale erfordern keine Renormierung und die Reproduktion des Fermion-Propagators gelingt ohne Hinzunahme von Vergleichsdaten.

Die störungstheoretischen Divergenzen werden weiterhin durch multiplikative Renormierung des perturbativen Anteils allein beseitigt, wie es auch vom Vergleich mit der Operatorproduktentwicklung her zu erwarten ist. Modifiziert wird allein die Massenrenormierung, da wir anstatt renormierter Massen die renormierungsgruppeninvarianten Massen verwenden. Das Renormierungsschema ist dimensionell, eine genauere Spezifizierung wäre erst durch Berechnung der endlichen g_0^2 -Beiträge möglich.

In reinen Fermion-Schleifen — diese enthalten in 1-Schleifenordnung keine anderen als Fermion-Propagatoren — können sich die nichtperturbativen Terme nicht endlich etablieren, da in der Theorie mit externen Strommassen keine Pole im Integrationsimpuls in der rein spontanen Massenskala vorliegen und sich damit die Größe $\Pi(\epsilon)$ nicht ausbilden

kann. Dadurch entstehen neue Divergenzen, die in der chiralen Theorie ($\hat{m} = 0$) nicht auftreten, in der massiven Theorie jedoch Nebenbedingungen an die nichtperturbativen Parameter erzwingen.

- Die nichtperturbativ erweiterte Störungsreihe verhält sich für $\hat{m} \rightarrow 0$ nicht stetig.

Deshalb ist beim Auftreten reiner Fermion-Schleifen, also bei den DS-Gleichungen im gluonischen Kanal, die Fallunterscheidung massiv/chiral notwendig.

Im chiralen Fall, d.h. ohne Nebenbedingungen und Flavour-Indizes, liefern die 2-Punkt-Vertexfunktionen jeweils $r+1$ SK-Gleichungen für $2r+1$ Parameter. Im massiven Fall resultieren $(N_F+1)(r+1)$ Gleichungen und $r+1$ Nebenbedingungen für $(N_F+1)(2r+1)$ Parameter. Diese Unterbestimmung ist unvermeidlich, da die Polparameter $u_{r,2s}$ und $\kappa_{r,2s}$ nicht direkt bestimmt werden können, und kann durch zusätzliche Gleichungen, wie Slavnov-Taylor-Identitäten oder Bewegungsgleichungs-Kondensate, die im Prinzip integrierte DS-Gleichungen darstellen, behoben werden (vgl. Kapitel 7 für $r = 1$).

Kapitel 5

Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Eine zentrale Stellung in dieser Arbeit nimmt der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex als höchster oberflächlich divergenter Vertex im Fermion-Sektor ein, dessen DS-Gleichungen wir in diesem Kapitel in der 1-Schleifennäherung untersuchen. In beiden Kanälen gemäß (2.59/2.60) verlaufen die Diagrammberechnungen analog zur Fermion-Selbstenergie. Deshalb beschränken wir uns auf die Angabe der Resultate der Schleifenberechnungen. Zu untersuchen sind jeweils ein „abelsches“ und ein „nichtabelsches“ Diagramm. Wie in der Störungstheorie, vgl. z.B. [PT 84], liefert das abelsche Diagramm in Landau-Eichung keine divergenten Beiträge, was direkt nach der symmetrischen Integration abgelesen werden kann. Deshalb trägt das abelsche Diagramm *in dieser Eichung* nicht zu den SK-Gleichungen bei und kann im weiteren Verlauf den endlichen Beiträgen zugerechnet werden.

5.1 Der fermionische Kanal

5.1.1 Das „nichtabelsches“ Diagramm

Die Diagrammberechnung beschränkt sich auf das nichtabelsches Diagramm, das aufgrund der Definition (2.58) der entschärften Linie in zwei separate Integralberechnungen aufgeteilt werden kann. Die divergenten Anteile werden mit Hilfe der in Kapitel 3.1 gegebenen Definition berechnet. Die Darstellung erfolgt hier ausführlicher, damit das Integrationsverfahren deutlich wird.

$$\left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{F\bar{F}T}^B \quad ij \mu \quad a \quad (p_1, p_2, p_3) = (g_0 \nu_0^\epsilon)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \left(\mathbf{B}_{(ppp)} + \mathbf{B}_{(psp)} \right) \\
 &=: \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_{F\bar{F}T}^{(B)ppp\,ij\,\mu} (p_1, p_2, p_3) + \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_{F\bar{F}T}^{(B)psp\,ij\,\mu} (p_1, p_2, p_3).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die Schleifenintegrale berechnen wir durch Einsetzen der nichtperturbativen Vertexfunktionen aus Kapitel 2.2. (ppp) bzw. (psp) bezeichnen in Dreiecksdiagrammen die Propagatoren (p) oder Schattenpole (s) der Schleife ausgehend von dem Vertex, dessen äußeres Bein im horizontalen Kanal läuft.

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_{F\bar{F}V}^{(B)ppp\,ij\,\mu} (p_1, p_2, p_3) \\
 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)pert\,i\ell\,\mu'} (-p_1, q, p_1 - q) t^{\mu'\nu} (q - p_1) D^{[r,0]}((q - p_1)^2) S^{[r,0]}(q) \\
 &\quad \cdot \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0]\,lj\,\rho} (-q, p_2, q - p_2) D^{[r,0]}((q - p_2)^2) \Gamma_{3T}^{[r,0]\,\rho\mu\nu} (p_2 - q, p_3, q - p_1) \\
 &= \frac{\lambda_a^{ij}}{2} \frac{N_C}{2} t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma^{\mu'} \frac{t^{\mu'\nu} (q - p_1)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} ((q - p_1)^2 + u_{r,s} \Lambda^2) ((q - p_1)^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \\
 &\quad \cdot \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} - \kappa_{r,s+}) (\not{q} - \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + \kappa_{r,s+}^2) (q^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\nu'}(\not{q}, \not{p}_2, (q - p_2)^2)}{\prod_{s=1}^r ((q - p_2)^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 &\quad \cdot \frac{t^{\nu'\rho} (q - p_2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} ((q - p_2)^2 + u_{r,s} \Lambda^2) ((q - p_2)^2 + u_{r,s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \\
 &\quad \cdot \left\{ \delta^{\bar{\mu}\nu} (p_1 + p_3 - q)^\rho N_{3T}^{0[r]}(p_3^2, (q - p_1)^2; (p_2 - q)^2) \right. \\
 &\quad + \delta^{\nu\rho} (2q - p_1 - p_2)^{\bar{\mu}} N_{3T}^{0[r]}((q - p_1)^2, (p_2 - q)^2; p_3^2) \\
 &\quad \left. + \delta^{\rho\bar{\mu}} (p_2 - p_3 - q)^\nu N_{3T}^{0[r]}((p_2 - q)^2, p_3^2; (q - p_1)^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$=: \frac{\lambda_a^{ij}}{2} \frac{N_C}{2} I^{(05)\mu} (p_1, p_2, p_3) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \tag{5.3}$$

Für die Berechnung der divergenten Anteile des Integrals $I^{(05)\mu}$ sind ähnliche Überlegungen notwendig wie bei der Berechnung der Fermion-Selbstenergieschleife. Da $I^{(05)\mu}$ logarithmisch divergent ist, liefert nur die zweite Lorentz-Struktur in $\{\dots\}$ von Glg. (5.2) einen divergenten Beitrag (in den beiden anderen Strukturen werden die davorstehenden q -Potenzen q^ρ , q^ν durch die Transversalprojektion entfernt), und die Integrationsimpulse im Zähler lauten (ohne Transversalprojektoren):

$$(q^2)^{(r+1)/2} \not{q} (q^2)^{(r-1)/2} (q-p_2)^{2r} q^{\bar{\mu}} (q-p_1)^{2r} (p_2-q)^{2r}.$$

Die letzten beiden Faktoren kompensieren die Pole der Transversalprojektoren, und die Impulsfaktoren $(q^2)^{(r+1)/2} (q^2)^{(r-1)/2} (q-p_2)^{2r}$ reichen aus, um die $r+1$ Nennerfaktoren der Form $(q^2 + \kappa^2)$ durch Hinzuaddieren konvergenter Integrale zu eliminieren. Die divergenten Anteile des zu berechnenden Impulsintegrals haben nach der Substitution $q \rightarrow q + p_2$ die Struktur:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2 \delta^{\mu'\nu} - q^{\mu'} q^\nu}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} ((q-p_1+p_2)^2 + u_{r,s+}\Lambda^2) ((q-p_1+p_2)^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \frac{q^2 \delta^{\nu'\rho} - q^{\nu'} q^\rho}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \frac{\not{q} q^{\bar{\mu}} (q^2)^{3r-3}}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s+}\Lambda^2) (q^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)}. \quad (5.4)$$

Nach Feynmanparametrisierung, symmetrischer Integration und anschließender Wiederherstellung der Nennerfaktoren (Zurücknehmen der Feynmanparametrisierung) besitzt der Zähler der divergenten Anteile die Impulspotenzen $(q^2)^{3r}$. D.h. auch die Nennerfaktoren, die die Impulse $(q-p_1+p_2)^2$ enthalten, können durch Addition konvergenter Integrale eliminiert werden. Übrig bleibt ein Integral vom Typ

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^{2r-1}}{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s+}\Lambda^2) (q^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)}, \quad (5.5)$$

das mit den herkömmlichen Formeln für divergente Integrale in der Dimension $D = 4 - 2\epsilon$ ausgewertet werden kann und einen Faktor $\Lambda^{-2\epsilon}$ enthält, der notwendig ist, um die für den Selbstkonsistenzmechanismus notwendige Größe $\Pi(\epsilon)$ bilden zu können. Insgesamt folgt somit:

$$\begin{aligned} & I^{(05)\mu}(p_1, p_2, p_3) \\ &= t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) \Pi(\epsilon) \frac{3}{2} \sum_{\bar{n}', m_3=0}^r \gamma^{\bar{\mu}} \not{p}_2^{\bar{n}'} \Lambda^{r-\bar{n}'} p_3^{2m_3} \Lambda^{2r-2m_3} \cdot \left(\bar{C}_{r\bar{r}\bar{n}'}^{[r]} C_{r\bar{r}m_3}^{[r]} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{\bar{m}, m_2=0}^r \bar{C}_{\bar{m}\bar{r}\bar{n}'}^{[r]} C_{r\bar{m}m_2}^{[r]} (-u_{r,2t})^{\bar{m}+m_2} \right) + \text{endl}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Unter Berücksichtigung der neuen Feynman-Regel für den kompensierenden Pol (Kapitel 2.4) berechnen wir das zweite Schleifenintegral in (5.1):

$$\begin{aligned}
 \Phi_{F\bar{F}T}^{(B)psp^{ij\mu}}(p_1, p_2, p_3) &= \sum_{t=1}^r (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}T}^{(0)pert^{i\mu'}}(-p_1, q, p_1 - q) S^{[r,0]}(q) \\
 &\quad \cdot \left[((q - p_2)^2 + u_{r,2t} \Lambda^2) \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0]^{lj\nu'}}(-q, p_2, q - p_2) \right]_{(q-p_2)^2 = -u_{r,2t}\Lambda^2} \\
 &\quad \cdot t^{\mu'\nu} (q - p_1) D^{[r,0]}((q - p_1)^2) \frac{(-u_{r,2t+1} \Lambda^4)^{-1} t^{\nu'\rho} (q - p_2)}{(q - p_2)^2 + u_{r,2t} \Lambda^2} \\
 &\quad \cdot \left[((q - p_2)^2 + u_{r,2t} \Lambda^2) \Gamma_{3T}^{[r,0]^{\rho\mu\nu}}(p_2 - q, p_3, q - p_1) \right]_{(q-p_2)^2 = -u_{r,2t}\Lambda^2} \\
 &= \frac{\lambda^{ij}}{2} \frac{N_C}{2} I^{(06)\mu}(p_1, p_2, p_3) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)}. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Analog zu $I^{(05)}$ berechnen wir dieses Integral:

$$\begin{aligned}
 I^{(06)\mu}(p_1, p_2, p_3) &= t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1} \Lambda^4)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2 \Lambda^4} \\
 &\quad \cdot \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma^{\mu'} \frac{t^{\mu'\nu} (q - p_1)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} ((q - p_1)^2 + u_{r,s+} \Lambda^2) ((q - p_1)^2 + u_{r,s-} \Lambda^2)} \\
 &\quad \cdot \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+}) (\not{q} + \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + \kappa_{r,s+}^2) (q^2 + \kappa_{r,s-}^2)} \cdot N_{F\bar{F}T}^{[r]\nu}(\not{q}, \not{p}_2, -u_{r,2t} \Lambda^2) \\
 &\quad \cdot \frac{t^{\nu'\rho} (q - p_2)}{(q - p_2)^2 + u_{r,2t} \Lambda^2} \delta^{\nu\rho} 2q^{\bar{\mu}} N_{3T}^{0[r]}((q - p_1)^2, -u_{r,2t} \Lambda^2; p_3^2) + endl. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Durch geschicktes Hinzuaddieren konvergenter Integrale lassen sich wiederum die nicht-spontanen Massenskalen und die äußeren Impulse aus dem divergenten Anteil des Impulsintegrals eliminieren, und es folgt:

$$\begin{aligned}
 I^{(06)\mu}(p_1, p_2, p_3) &= t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) \Pi(\epsilon) \frac{3}{2} \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{n', m_3=0}^r \gamma^{\bar{\mu}} \not{p}_2^{n'} \Lambda^{3r-n'-2m_3} p_3^{2m_3} \\
 &\quad \cdot \left(\sum_{m, m_2=0}^r \bar{C}_{mrn'}^{[r]} C_{rm_2 m_3}^{[r]} (-u_{r,2t})^{m+m_2} \right) + endl. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

5.1.2 Die Selbstkonsistenzgleichungen

Für die Herleitung der Selbstkonsistenzgleichungen benötigen wir das Diagramm mit Schattenlinie im s-Kanal. Diese Schleife ist im Prinzip bereits berechnet worden und kann mit Hilfe des vom inversen Fermion-Propagator her bekannten Integrals $I^{(01)}(\not{p}_1)$ angegeben werden (Glg. 3.14). Das Integral ist unabhängig von dem von links einlaufenden Impuls p_1 , d.h. die Impulsabhängigkeit entsteht allein durch den $F\bar{F}V$ -Vertex:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{F\bar{F}T}^C{}_{ij\mu}{}^a &= (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \text{(C)} \\
 &= \frac{\lambda_a^{ij}}{2} t^{\mu\mu'}(p_3) (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \sum_{t=1}^r \cdot \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \frac{I^{(01)}(-\kappa_{r,2t})}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\not{p}_1 + \kappa_{r,2t}} \\
 &\quad \cdot \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\mu}(-\kappa_{r,2t}, \not{p}_2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})(p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Die Selbstkonsistenzgleichungen werden, wie in Anhang D ausführlich beschrieben wird, aufgestellt.

Das Residuum an der Stelle $\not{p}_1 = -\kappa_{r,2t}$ liefert die Selbstkonsistenzgleichungen für die Polanteile des inversen Fermionpropagators. Nach Abzug dieser Terme verbleibt als Rest der DS-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m,n'=0}^r \bar{C}_{mrrn'}^{[r]} \not{p}_2^{n'} p_3^{2m} \Lambda^{3r-2m-n'} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s}) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 &= 1 + \frac{N_C}{2} \Pi(\varepsilon) \frac{3}{2} \sum_{n',m_3=0}^r \not{p}_2^{n'} p_3^{2m_3} \Lambda^{3r-n'-2m_3} \left(\bar{C}_{rrn'}^{[r]} C_{rrm_3}^{0[r]} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{m,m_2=0}^r \bar{C}_{mrrn'}^{[r]} C_{rm_2m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m+m_2} \right) \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s}) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} + \text{endl.} \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

An dieser Gleichung ist zu erkennen, daß aus den im Anschluß an (3.15) diskutierten Gründen jeglicher Beitrag des Diagramms (C) bereits verschwunden ist. Weitere Residuenbildungen an den Stellen $\not{p}_2 = -\kappa_{r,2t'}$ und $p_3^2 = -u_{r,2t'}\Lambda^2$ ergeben $r^2 + 2r = r(r+2)$

SK-Gleichungen:

$$\sum_{m,n'=0}^r \bar{C}_{m r n'}^{[r]} \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'} (-u_{r,2t'})^m = \frac{N_C}{2} \frac{1}{\beta_0} \frac{3}{2} \sum_{n',m_3=0}^r \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'} (-u_{r,2t'})^{m_3} \left(\bar{C}_{r r n'}^{[r]} C_{r r m_3}^{0[r]} \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{m,m_2=0}^r \bar{C}_{m r n'}^{[r]} C_{r m_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m+m_2} \right), \quad (5.12)$$

$$\sum_{m=0}^r \bar{C}_{m r r}^{[r]} (-u_{r,2t'})^m = \frac{N_C}{2} \frac{1}{\beta_0} \frac{3}{2} \sum_{m_3=0}^r (-u_{r,2t'})^{m_3} \left(\bar{C}_{r r r}^{[r]} C_{r r m_3}^{0[r]} \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{m,m_2=0}^r \bar{C}_{m r r}^{[r]} C_{r m_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m+m_2} \right), \quad (5.13)$$

$$\sum_{n'=0}^r \bar{C}_{r r n'}^{[r]} \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'} = \frac{N_C}{2} \frac{1}{\beta_0} \frac{3}{2} \sum_{n'=0}^r \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'} \left(\bar{C}_{r r n'}^{[r]} C_{r r r}^{0[r]} \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{m,m_2=0}^r \bar{C}_{m r n'}^{[r]} C_{r m_2 r}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m+m_2} \right). \quad (5.14)$$

Zur Vereinfachung führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$z_{0,1}(t') = \sum_{n'=0}^r \bar{C}_{r r n'}^{[r]} \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'}, \quad (5.15)$$

$$z_{1,0}(t'') = \sum_{m=0}^r \bar{C}_{m r r}^{[r]} (-u_{r,2t''})^m, \quad (5.16)$$

$$z_{1,1}(t', t'') = \sum_{m,n'=0}^r \bar{C}_{m r n'}^{[r]} \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'} (-u_{r,2t''})^m, \quad (5.17)$$

$$x_1(t) = \sum_{m_2=0}^r C_{r m_2 r}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_2}, \quad (5.18)$$

$$x_3(t'') = \sum_{m_3=0}^r C_{r r m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t''})^{m_3}, \quad (5.19)$$

$$x_4(t, t'') = \sum_{m_2, m_3=0}^r C_{r m_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_2} (-u_{r,2t''})^{m_3}. \quad (5.20)$$

Diese Parameter sind für $r = 1$ identisch mit den durch die Partialbruchzerlegung (Anhang B.1) definierten Parametern des Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex. Die SK-Gleichungen, an denen dadurch sofort die Gleichungen für die Approximationsstufe $r = 1$ abgelesen werden können, haben folgende Form:

SK F3.1:

$$z_{1,1(t',t'')} = \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} x_{3(t'')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} z_{1,1(t',t)} x_{4(t,t'')} \right),$$

(5.21)

SK F3.2:

$$z_{1,0(t'')} = \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(x_{3(t'')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} z_{1,0(t)} x_{4(t,t'')} \right),$$

(5.22)

SK F3.3:

$$z_{0,1(t')} = \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} z_{1,1(t',t)} x_{1(t)} \right),$$

(5.23)

Nach Abzug dieser Divergenzen lautet die DS-Gleichung (5.11):

$$0 = \Pi(\epsilon) z_{F\bar{F}T}^{(1)ferm} + endl. \quad (5.24)$$

$$\text{mit } z_{F\bar{F}T}^{(1)ferm} = \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(1 + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} z_{1,0(t)} x_{1(t)} \right). \quad (5.25)$$

An dieser Stelle verschwinden keine Terme für $\Lambda \rightarrow 0$, also wird der gesamte Ausdruck störungstheoretisch behandelt. Durch

$$\Pi(\epsilon) \rightarrow \left(\frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} \quad (5.26)$$

erhalten wir die reine $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenz, deren Abweichung von der störungstheoretischen Größe

$$\left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \frac{3N_C}{4} \quad (5.27)$$

dadurch zustandekommt, daß der Ansatz für den kompensierenden Polterm nicht im perturbativen Limes verschwindet. Für große r erwarten wir, daß die Störung

$$\sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} z_{1,0(t)} x_{1(t)} \quad (5.28)$$

aufgrund des starken Anstiegs der Parameterzahl klein gemacht werden kann.

Es liegen $r^2 + 2r$ Vertexgleichungen für $\frac{r}{2}(r^2 + 4r + 5)$ Vertexparameter vor. Um dieser Unterbestimmung des Gleichungssystems entgegenzuwirken, betrachten wir im nächsten Abschnitt *zusätzlich* die DS-Gleichung im gluonischen Kanal.

5.2 Der gluonische Kanal

In diesem Kanal sind mehr Diagramme zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{F\bar{F}V_a}^{ij\mu} = & \Gamma_{F\bar{F}V_a}^{(0)pert\,ij\mu} + \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \left(\Phi_{F\bar{F}V_a}^{(A')\,ij\mu} + \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(B')\,ij\mu} + \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(B'')\,ij\mu} \right. \\ & \left. + \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(C')\,ij\mu} + \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(D')\,ij\mu} + \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(E')\,ij\mu} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Das abelsche Diagramm (A') liefert analog zum fermionischen Kanal keine divergenten Beiträge, jedoch beeinflussen hier die Selbstenergieschleifen (C') und (D') aufgrund ihrer quadratischen Divergenzen die SK-Gleichungen. Das Diagramm (E') trägt in Landau-Eichung wiederum nicht bei, da der Geistsektor in störungstheoretischer erster Ordnung ($p = 0$) rein perturbativ bleibt.

5.2.1 Ergebnisse der Schleifenberechnungen

Aufgrund der Symmetrie des nackten 3-Gluon-Vertex liefern die beiden Diagramme (B') und (B'') dasselbe Resultat.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \left(\Phi_{F\bar{F}V_a}^{(B')} ij\mu + \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(B'')} ij\mu \right) &= (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \text{ [Diagram: A loop with a wavy line on the left and two external lines on the right, one with an arrow pointing up-right and one with an arrow pointing down-right. The loop contains two vertices connected by a vertical line with a dot in the middle.] } \\
 &=: \frac{\lambda_a^{ij}}{2} \frac{N_C}{2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} I^{(07)\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

mit

$$\begin{aligned}
 I^{(07)\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2) &= \Pi(\epsilon) \frac{3}{2} \sum_{n', \bar{n}=0}^r \not{p}_1^{\bar{n}} \gamma^\mu \not{p}_2^{n'} \Lambda^{2r-n'-\bar{n}} \left(\bar{C}_{r\bar{n}r}^{[r]} \bar{C}_{rrn'}^{[r]} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{n, \bar{n}'=0}^r \bar{C}_{r\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \bar{C}_{rnn'}^{[r]} \Lambda^{2r-n-\bar{n}'} (-\kappa_{r,2t})^{n+\bar{n}'} \right).
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Für die Berechnung der Schleifen, die kompensierende Pole im s-Kanal enthalten, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{F\bar{F}V_a}^{(C')} ij\mu &= (g_0\nu_0^\epsilon)^2 \text{ [Diagram: A loop with a wavy line on the left and two external lines on the right. The loop contains a shaded region labeled (C') and is connected to a vertex with two external lines.] } \\
 &= \frac{\lambda_a^{ij}}{2} \frac{N_C}{2} t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) \sum_{t=1}^r \frac{I^{(08)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2} \frac{(-u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{p_3^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\bar{\mu}}(\not{p}_1, \not{p}_2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

mit dem aus $I^{(03)}$ von Gleichung (4.14) abgeleiteten Integral

$$I^{(08)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) = \Pi(\epsilon) (-4\Lambda^{2r}) \left(-\frac{5}{4} p_3^2 x_{1(t)} + \frac{5}{24} p_3^2 x_{3(t)} + \dots \right), \tag{5.33}$$

wobei wir nur die impulsabhängigen Terme angegeben haben, da der impulsunabhängige Teil nach Abzug der Residuen in p_3^2 nicht mehr zu den SK-Gleichungen beitragen kann.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_{F\bar{F}V a}^{(C')} ij\mu &= (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \text{ (D')} \text{ } \text{Diagram} \\
 &= \frac{\lambda_a^{ij}}{2} \frac{1}{2} t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) \sum_{t=1}^r \frac{\sum_f I_f^{(09)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2} \frac{(-u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{p_3^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\bar{\mu}}(\not{p}_1, \not{p}_2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

mit der aus dem Integral $I^{(02)}$ von Gleichung (4.7) abgeleiteten Divergenz

$$\begin{aligned}
 I^{(09)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} 4 \sum_{m=0}^r (-u_{r,2t}\Lambda^2)^m \left(\Lambda^{2r-2m} \bar{C}_{mrr}^{[r]} \left(\frac{1}{3} p_3^2 + \dots \right) \right) + \text{endl.} \\
 &= \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} 4 \Lambda^{2r} \left(\frac{1}{3} p_3^2 z_{1,0(t)} + \dots \right) + \text{endl.} \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

im massiven Fall. Analog zu den vorangehenden Rechnungen erfordert die Fermion-Schleife Nebenbedingungen, dagegen tritt im chiralen Fall der Faktor $\Pi(\epsilon)$ an die Stelle von $\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$ und es folgt ein Beitrag zu den SK-Gleichungen.

5.2.2 Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen

Nach Transversalprojektion und Abspalten der Farb- und Tensorstrukturen erhält man für die DS-Gleichung die Form:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 - u_{r,2t}\Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 &= \gamma^\mu + \frac{N_C}{2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} I^{(07)\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 &+ \sum_{t=1}^r \frac{\frac{N_C}{2} I^{(08)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) - \frac{1}{2} \sum_f I_f^{(09)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) (-u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2} \frac{1}{p_3^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}T}^{[r]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})}. \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

Bildung des Residuums an der Stelle $p_3^2 = -u_{r,2t}\Lambda^2$ liefert die bekannten SK-Gleichungen für die Polanteile des Gluon-Propagators. Nach Abzug dieser Terme schreibt sich die DS-Gleichung wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \sum_{n,n'=0}^r \bar{C}_{rnn'}^{[r]} \not{p}_1^n \gamma^\mu \not{p}_2^{n'} \Lambda^{2r-n-n'} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 &= \gamma^\mu + \frac{N_C}{2} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} I^{(07)\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \\
 & \quad + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1}\Lambda^4)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2 \Lambda^4} \\
 & \quad \left(\frac{N_C}{2} \frac{I^{(08)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) - I^{(08)}(-u_{r,2t}\Lambda^2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{p_3^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_f \frac{I_f^{(09)}(p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) - I_f^{(09)}(-u_{r,2t}\Lambda^2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{p_3^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
 & \quad \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} N^\mu(\not{p}_1, \not{p}_2, -u_{r,2t}\Lambda^2) \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})}. \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

Durch weitere Residuumbildungen können nach Definition von

$$z_{0,4(t,t')} = \sum_{n,n'=0}^r \bar{C}_{rnn'} \left(-\frac{\kappa_{r,2t}}{\Lambda}\right)^n \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^{n'} = z_{0,4(t',t)}, \quad (5.38)$$

$$z_{1,4(t,t',t'')} = \sum_{m,n,n'=0}^r \bar{C}_{mnn'} (-u_{r,2t}\Lambda^2)^m \left(-\frac{\kappa_{r,2t'}}{\Lambda}\right)^n \left(-\frac{\kappa_{r,2t''}}{\Lambda}\right)^{n'} = z_{1,4(t',t'',t)} \quad (5.39)$$

die beiden SK-Gleichungen für den massiven Fall aufgestellt werden:

SK F3.4:

$$\begin{aligned}
 z_{0,4(t',t'')} &= \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} z_{0,1(t'')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} z_{0,4(t',t)} z_{0,4(t,t'')} \right) \\
 & \quad + N_C \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \left(\frac{5}{2} x_{1(t)} - \frac{5}{12} x_{3(t)} \right) z_{1,4(t,t',t'')}, \\
 & \quad (t', t'' = 1 \dots r) \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

SK F3.5:

$$\begin{aligned}
 z_{0,1(t')} &= \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} z_{0,1(t)} z_{0,4(t,t')} \right. \\
 &\quad \left. - N_C \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \left(\frac{5}{2} x_{1(t)} - \frac{5}{12} x_{3(t)} \right) z_{1,1(t,t')} \right), \\
 &\quad (t' = 1 \dots r)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Die Nebenbedingungen lauten:

NB F3.1:

$$0 = \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{f'} z_{1,0(t)}^{f'} z_{1,4(t,t',t'')}^f, \quad (t', t'' = 1 \dots r) \tag{5.42}$$

NB F3.2:

$$0 = \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{f'} z_{1,0(t)}^{f'} z_{1,1(t,t')}^f, \quad (t' = 1 \dots r) \tag{5.43}$$

Nach Abzug dieser nichtperturbativen endlichen Terme verbleibt die DS-Gleichung als

$$0 = \Pi(\epsilon) z_{F\bar{F}T}^{(1)gluon} + endl. \tag{5.44}$$

Diese Gleichung wird wieder störungstheoretisch behandelt und wie im fermionischen Kanal (5.25) wird die störungstheoretische Divergenz von einem unerwünschten Term beglei-

tet:

$$\begin{aligned}
 z_{F\bar{F}T}^{(1)gluon} &= \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(1 + \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} z_{0,1(t)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \left(N_C \left(\frac{5}{2} x_{1(t)} - \frac{5}{12} x_{3(t)} \right) - \frac{2}{3} \sum_f z_{1,0(t)}^f \right) z_{1,0(t)} \right), \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

der sich aber von der Störung im fermionischen Kanal (5.25) unterscheidet.

Die Gesamtzahl der SK-Gleichungen in beiden Kanälen ist damit $\frac{r}{2}(3r + 7)$, die der Nebenbedingungen $\frac{r}{2}r + 3$.

Im chiralen Fall sind keine Nebenbedingungen erforderlich, stattdessen treten die entsprechenden Ausdrücke als Beiträge zu den SK-Gleichungen auf. Diese lauten:

SK F3.4^(ch):

$$\begin{aligned}
 z_{0,4(t',t'')} &= \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} z_{0,1(t'')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1} \Lambda^{2r-2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} z_{0,4(t',t)} z_{0,4(t,t'')} \right) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \left(N_C \left(\frac{5}{2} x_{1(t)} - \frac{5}{12} x_{3(t)} \right) - N_F \frac{2}{3} z_{1,0(t)} \right) z_{1,4(t,t',t'')}, \\
 &\quad (t', t'' = 1 \dots r) \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

SK F3.5^(ch):

$$\begin{aligned}
 z_{0,1(t')} &= \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} + \sum_{t=1}^r \frac{(-w_{r,2t+1})^{-1} \Lambda^{2r-2}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} z_{0,1(t)} z_{0,4(t,t')} \right) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \left(N_C \left(\frac{5}{2} x_{1(t)} - \frac{5}{12} x_{3(t)} \right) - N_F \frac{2}{3} z_{1,0(t)} \right) z_{1,1(t,t')}, \\
 &\quad (t' = 1 \dots r) \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

5.3 Eine Slavnov-Taylor-Identität

Mit der Berechnung des nichtabelschen Diagramms im gluonischen Kanal (5.30) sind wir in der Lage, eine bekannte Slavnov-Taylor-(ST-) Identität¹ zu analysieren, die in Landau-Eichung folgende vereinfachte Form annimmt:

$$\frac{-\Gamma_{G\bar{G}}(k^2)}{k^2} k^\mu \Gamma_{F\bar{F}V}^\mu(-p_1, p_2, k) = \Gamma_{F\bar{F}}(p_2) - \Gamma_{F\bar{F}}(p_1) + \mathcal{O}(g_0^2), \quad (k = p_1 - p_2). \quad (5.48)$$

Für $\Gamma_{F\bar{F}V}^\mu$ benötigen wir eine nicht transversalprojizierte Form, damit die Longitudinalprojektion überhaupt sinnvoll wird. Da bisher nur transversalprojizierte Ansätze für alle Vertexfunktionen verwendet wurden, besteht nur die Möglichkeit, für $\Gamma_{F\bar{F}V}^\mu$ die DS-Gleichung im gluonischen Kanal zu verwenden, da in dieser ein nackter Vertex mit nach außen laufendem Gluon auftritt. Mit dem störungstheoretischen 1-Schleifenresultat

$$\Gamma_{G\bar{G}}(k^2) = -k^2 \left(1 - \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{9}{4} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right), \quad (5.49)$$

in Landau-Eichung erhalten wir auf der Approximationsstufe $r = 1$ die divergenten g_0^2 -Beiträge (Beachte: $\Pi(\epsilon) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon}$):

$$\begin{aligned} & \frac{-\Gamma_{G\bar{G}}(k^2)}{k^2} k^\mu \Gamma_{F\bar{F}V}^\mu(-p_1, p_2, k) \\ &= \not{k} \left(1 - \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{9}{4} \right) + \Pi(\epsilon) \frac{9}{4} \left\{ \left(1 + \frac{z_{0,1}\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_2} \right) (\not{p}_1 - \not{p}_2) \left(1 + \frac{z_{0,1}\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\Lambda^2}{\kappa_3^2} \left(z_{0,1} + \frac{z_{0,4}\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_2} \right) (\not{p}_1 - \not{p}_2) \left(z_{0,1} + \frac{z_{0,4}\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_2} \right) \right\} + \text{endl.} \quad (5.50) \end{aligned}$$

Der kompensierende Pol im horizontalen Kanal liefert keinen Beitrag und somit auch keine Nebenbedingungen, da der Schattenpol transversalprojiziert ist. Die rechte Seite der ST-Identität lautet:

$$\not{k} + \kappa_3^2 \left(\frac{1}{\not{p}_1 + \kappa_2} - \frac{1}{\not{p}_2 + \kappa_2} \right). \quad (5.51)$$

Die nichtperturbativen Matrixpol-Strukturen treten auf beiden Seiten der ST-Identität auf und liefern nach $\Pi(\epsilon) \rightarrow \frac{1}{\beta_0}$ eine Gleichung der Ordnung g^0 :

$$\boxed{-\frac{1}{\beta_0} \frac{9}{4} \left(z_{0,1}^2 \Lambda^2 - \frac{\Lambda^2}{\kappa_3^2} z_{0,4}^2 \Lambda^2 \right) = \kappa_3^2.} \quad (5.52)$$

¹Die Herleitung unter Verwendung von sogenannten Hilfsamplituden [ST 71], die in Landau-Eichung ihre störungstheoretische Form beibehalten und auch keine störungstheoretische Divergenz 1. Ordnung ausbilden, wurde [WIG 89, KÖN 90] entnommen.

Diese Gleichung verschwindet für $\Lambda \rightarrow 0$ und hat somit nichtperturbativen Charakter. Eine Störung resultiert aus den beiden Polfaktorstrukturen mit \not{k} im Zähler, da diese nicht auf der rechten Seite der ST-Identität auftreten:

$$\frac{1}{\beta_0} \frac{9}{4} \left(z_{0,1} \Lambda - \frac{\Lambda^2}{\kappa_3^2} z_{0,1} z_{0,4} \Lambda \right) = 0. \quad (5.53)$$

Abschließend verbleiben auf der linken Seite der ST-Identität die Divergenzen

$$\not{k} \left(- \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{9}{4} \right) + \Pi(\epsilon) \frac{9}{4} \not{k} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\kappa_3^2} z_{0,1}^2 \right) + \text{endl.} = - \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{9}{4} \not{k} \frac{\Lambda^2}{\kappa_3^2} z_{0,1}^2 + \text{endl.}, \quad (5.54)$$

die sich im Gegensatz zur Störungstheorie jedenfalls auf der Stufe $r = 1$ nicht exakt wegheben. Wir werden alsbald sehen, daß der Versuch, auf der Stufe $r = 1$ die beiden Defekte von (5.53) und (5.54) durch die Wahl $z_{0,1} = 0$ auf Null zu bringen, die Gesamtlösung auf die triviale zurückfallen läßt.

Kapitel 6

Fermionische Beiträge zum 3-Gluon-Vertex

Bei den Fermion-Scheifenbeiträgen zum inversen Gluon-Propagator sind wir im massiven Fall auf nichtperturbative Terme gestoßen, die sich nicht endlich etablierten, und somit Nebenbedingungen an die nichtperturbativen Parameter erforderten. Auch in der DS-Gleichung für den 3-Gluon-Vertex treten Fermion-Schleifen auf, die in einfacher Analogie ebenfalls zu Nebenbedingungen führen.

6.1 Die Fermion-Schleifen

Die DS-Gleichung des 3-Gluon-Vertex enthält in 1-Schleifenordnung 3 fermionische Diagramme [DRI 96]:

$$\text{Tree-level vertex} = \text{Tree-level vertex with dot} + \dots$$
$$- \sum_f (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ (E)}$$
$$- \sum_f (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ (E')}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot S^{[r,0]}(q-p_3) \left(\frac{1}{2} \lambda_c \right)^{ki} \Gamma_{F\bar{F}T}^{[r,0]\nu}(-q+p_3, q-p_1, p_2^2) S^{[r,0]}(q-p_1) \\
 & + \text{Permutation } (p_2, \nu, b) \leftrightarrow (p_3, \rho, c) \tag{6.4} \\
 & = t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\nu\nu'}(p_2) t^{\rho\rho'}(p_3) \left(\delta^{\mu'\nu'}(p_1-p_2)^{\rho'} + \delta^{\nu'\rho'}(p_2-p_3)^{\mu'} + \delta^{\rho'\mu'}(p_3-p_1)^{\nu'} \right)
 \end{aligned}$$

$$\cdot i f_{abc} \frac{\sum_f I_f^{(10)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)}, \tag{6.5}$$

wobei die bei der Spurbildung über die Farbindizes entstehenden Terme mit der Farbstruktur d_{abc} durch Addition mit dem permutierten Diagramm verschwinden. Für das Diagramm mit kompensierendem Pol folgt nach analoger Rechnung:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \left(\Phi_{3T}^{(E)psp^{\mu\nu\rho}}(p_1, p_2, p_3) + \Phi_{3T}^{(E')psp^{\mu\nu\rho}}(p_1, p_2, p_3) \right) \\
 & = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{Diagram} + \text{Permutation } (p_2, \nu, b) \leftrightarrow (p_3, \rho, c) \\
 & = t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\nu\nu'}(p_2) t^{\rho\rho'}(p_3) \left(\delta^{\mu'\nu'}(p_1-p_2)^{\rho'} + \delta^{\nu'\rho'}(p_2-p_3)^{\mu'} + \delta^{\rho'\mu'}(p_3-p_1)^{\nu'} \right) \\
 & \cdot i f_{abc} \frac{\sum_f I_f^{(11)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)}. \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Für den Schattenpolbeitrag im s -Kanal (F) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_{3T}^{(F)\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) & = t^{\mu\mu'}(p_1) t^{\nu\nu'}(p_2) t^{\rho\rho'}(p_3) \frac{i}{2} f_{abc} \sum_{t=1}^r \\
 & \cdot \left(\delta^{\mu'\nu'}(p_1-p_2)^{\rho'} N_{3T}^{0[r]}(-u_{r,2t} \Lambda^2, p_2^2, p_3^2) \right. \\
 & + \delta^{\nu'\rho'}(p_2-p_3)^{\mu'} N_{3T}^{0[r]}(p_2^2, p_3^2, -u_{r,2t} \Lambda^2) \\
 & \left. + \delta^{\rho'\mu'}(p_3-p_1)^{\nu'} N_{3T}^{0[r]}(p_3^2, -u_{r,2t} \Lambda^2, p_2^2) \right) \\
 & \cdot \frac{\sum_f I_f^{(12)}(p_1^2, -u_{r,2t} \Lambda^2)}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \cdot \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{(p_1^2 + u_{r,2t} \Lambda^2) \Lambda^{2r+2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})}. \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

Die divergenten Anteile der Integrale $I^{(10)}$ und $I^{(11)}$ werden in den nächsten beiden Abschnitten jeweils für den massiven und den chiralen Fall berechnet, dagegen kann $I_f^{(12)}$ von

dem in Kapitel 3 für beide Fälle bereits berechneten Integral $I_f^{(02)}$ (Glg. 4.7) abgeleitet werden.

Der massive Fall:

Für die Nebenbedingungen benötigen wir die reinen $\frac{1}{\epsilon}$ -Divergenzen:

$$I_f^{(10)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = -\frac{2}{3} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \sum_{m=0}^r (p_3^2)^m \Lambda^{2r-2m} \bar{C}_{mrr}^{[r]} \cdot \sum_{m=0}^r (p_2^2)^m \Lambda^{2r-2m} \bar{C}_{mrr}^{[r]} + \text{endl.}, \quad (6.8)$$

sowie

$$I_f^{(11)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{2}{3} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \cdot \sum_{m,n'=0}^r (p_3^2)^m (-\kappa_{r,2t})^{n'} \Lambda^{3r-2m-n'} \bar{C}_{mnr}^{[r]} \cdot \sum_{m,n=0}^r (p_2^2)^m (-\kappa_{r,2t})^n \Lambda^{3r-2m-n} \bar{C}_{mnr}^{[r]} + \text{endl.} \quad (6.9)$$

und

$$I_f^{(12)}(p_1^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) = 4 \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \sum_{m=0}^r (-u_{r,2t})^m \Lambda^{2r} \cdot \left(\bar{C}_{mrr}^{[r]} \left(\frac{1}{3} p_1^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s})^2 - \kappa_{r,1} \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} - \sum_{s=1}^r (\kappa_{r,2s+1})^2 \right) + \bar{C}_{mrr-1}^{[r]} \Lambda \left(\kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s} \right) - \bar{C}_{mr-1r-1}^{[r]} \Lambda^2 + \bar{C}_{mrr-2}^{[r]} \Lambda^2 \right) + \text{endl.} \quad (6.10)$$

Der chirale Fall:

Der $\frac{1}{g^2}$ -Mechanismus kann durchgeführt werden, da keine nichtspontanen Massen auftreten, und wir erhalten die endlichen Beiträge der Ordnung g^0 :

$$I_{(ch)f}^{(10)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = -\frac{2}{3} \Pi(\epsilon) \sum_{m=0}^r (p_3^2)^m \Lambda^{2r-2m} C_{2r-2mmrr}^{[r]} \cdot \sum_{m=0}^r (p_2^2)^m \Lambda^{2r-2m} C_{2r-2mmrr}^{[r]}, \quad (6.11)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 I_{(ch)f}^{(11)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{2}{3}\Pi(\epsilon) \sum_{t=1}^r \frac{(w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} \\
 &\cdot \sum_{m,n'=0}^r (p_3^2)^m (-w_{r,2t})^{n'} \Lambda^{2r-2m} C_{3r-2m-n'mrn'}^{[r]} \\
 &\cdot \sum_{m,n=0}^r (p_2^2)^m (-w_{r,2t})^n \Lambda^{2r-2m} C_{3r-2m-nmnr}^{[r]} \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 I_{(ch)f}^{(12)}(p_1^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) &= 4\Pi(\epsilon) \sum_{m=0}^r (-u_{r,2t})^m \Lambda^{2r} \\
 &\cdot \left(C_{2r-2mmrr}^{[r]} \left(\frac{1}{3}p_1^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^r w_{r,2s}\Lambda \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^r (w_{r,2s}\Lambda)^2 - w_{r,1}\Lambda \sum_{s=1}^r w_{r,2s}\Lambda - \sum_{s=1}^r w_{r,2s+1}\Lambda^2 \right) \right) \\
 &+ C_{2r+1-2mmr-1}^{[r]} \Lambda \left(w_{r,1} + \sum_{s=1}^r w_{r,2s} \right) \Lambda \\
 &- C_{2r+2-2mmr-1r-1}^{[r]} \Lambda^2 + C_{2r+2-2mmr-2}^{[r]} \Lambda^2 \Big) + \text{endl.} \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

6.2 Selbstkonsistenzgleichungen und Nebenbedingungen

In der DS-Gleichung (6.1) treten auf der linken und rechten Seite jeweils drei Tensorstrukturen auf. Wir erhalten somit drei skalare Gleichungen¹:

$$\begin{aligned}
 &\frac{N_{3T}^{0[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 &= \dots - \sum_f \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 &\quad \cdot \left(I_f^{(10)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + I_f^{(11)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{I_f^{(12)}(p_1^2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\Lambda^{2r+2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} N_{3T}^{0[r]}(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_2^2, p_3^2) \Big), \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

¹Die Punkte stehen für die nichtfermionischen Beiträge, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind [DRI 97].

$$\begin{aligned}
 & \frac{N_{3T}^{0[r]}(p_2^2, p_3^2, p_1^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 &= \dots - \sum_f \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 & \quad \cdot \left(I_f^{(10)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + I_f^{(11)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{I_f^{(12)}(p_1^2, -u_{r,2t}\Lambda^2)}{\Lambda^{2r+2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} N_{3T}^{0[r]}(p_2^2, p_3^2, -u_{r,2t}\Lambda^2) \right), \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{N_{3T}^{0[r]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 &= \dots - \sum_f \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 & \quad \cdot \left(I_f^{(10)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + I_f^{(11)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^r \frac{I_f^{(12)}(-u_{r,2t}\Lambda^2)}{\Lambda^{2r+2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} N_{3T}^{0[r]}(p_2^2, -u_{r,2t}\Lambda^2, p_3^2) \right). \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Wird in der letzten Gleichung die Umbenennung $p_2 \leftrightarrow p_3$ durchgeführt und werden anschließend die ersten beiden Argumente in $N^{[r]}$ vertauscht, so folgt direkt aus (6.16) die Gleichung (6.14), d.h. für das SK-Problem genügt es, die Gleichungen (6.14) und (6.15) zu betrachten. Im folgenden werden wir die Nebenbedingungen im massiven Fall und die Beiträge zu den Selbstkonsistenzgleichungen im chiralen Fall angeben.

6.2.1 Der massive Fall

Das hier auf Gleichung (6.14) angewandte Verfahren der Residuenbildung und anschließender Extraktion der SK-Gleichungen ist Anhang D zu entnehmen. Die Residuenbildungen (R1), (R2), (R3) und (R5) liefern allein Beiträge der kompensierenden Pole im s -Kanal und führen deshalb auf die SK-Gleichungen des inversen Gluon-Propagators (Kapitel 4). Aus (R4) folgen r^2 , und aus (R6) und (R7) jeweils r SK-Gleichungen. Für die Rechnung mit massiven Fermionen ergeben sich somit $r^2 + 2r$ Nebenbedingungen:

$$0 = \sum_f \frac{2}{3} \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t'})^m \right) \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t''})^m \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{\Lambda^{2r}}{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^{-2} \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m,n=0}^r C_{3r-2m-nmnr}^{f[r]} (-u_{r,2t'})^m (-\kappa_{r,2t}^{(f)}/\Lambda)^n \right) \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m,n'=0}^r C_{3r-2m-n'mrn'}^{f[r]} (-u_{r,2t''})^m (-\kappa_{r,2t}^{(f)}/\Lambda)^{n'} \right) \\
 & + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{1}{u_{r,2t+1}} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^{-2} \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1 m_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_1} (-u_{r,2t'})^{m_2} (-u_{r,2t''})^{m_3} \right) \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t})^m \right), \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 & = \sum_f \frac{2}{3} \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t'})^m \right) \\
 & - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{\Lambda^{2r}}{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^{-2} \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m,n=0}^r C_{3r-2m-nmnr}^{f[r]} (-u_{r,2t'})^m (-\kappa_{r,2t}^{(f)}/\Lambda)^n \right) \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{n'=0}^r C_{r-n'rrn'}^{f[r]} (-\kappa_{r,2t}^{(f)}/\Lambda)^{n'} \right) \\
 & + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{1}{u_{r,2t+1}} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^{-2} \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m_1, m_2=0}^r C_{m_1 m_2 r}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_1} (-u_{r,2t'})^{m_2} \right) \\
 & \quad \cdot \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t})^m \right), \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 & = \sum_f \frac{2}{3} \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t''})^m \right) \\
 & - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{\Lambda^{2r}}{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(\sum_{n=0}^r C_{r-nrnr}^{f[r]} (-\kappa_{r,2t}^{(f)}/\Lambda)^n \right) \\
 & \cdot \left(\sum_{m,n'=0}^r C_{3r-2m-n'mrn'}^{f[r]} (-u_{r,2t'})^m (-\kappa_{r,2t}^{(f)}/\Lambda)^{n'} \right) \\
 + & \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{1}{u_{r,2t+1}} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^{-2} \\
 & \cdot \left(\sum_{m_1, m_3=0}^r C_{m_1 r m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_1} (-u_{r,2t'})^{m_3} \right) \\
 & \cdot \left(\sum_{m=0}^r C_{2r-2mmrr}^{f[r]} (-u_{r,2t})^m \right). \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

Diese Form der Gleichungen ist sehr unhandlich, und durch die Abkürzungen (5.15-5.20, 5.38, 5.39) sowie

$$x_{2(t,t')} = \sum_{m_1, m_2=0}^r C_{m_1 m_2 r}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_1} (-u_{r,2t'})^{m_2} = x_{2(t',t)}, \tag{6.20}$$

$$x_{5(t,t',t'')} = \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1 m_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m_1} (-u_{r,2t'})^{m_2} (-u_{r,2t''})^{m_3} = x_{5(t',t,t'')} \tag{6.21}$$

erhalten wir die Nebenbedingungen in einer kompakten Form:

NB G3.3:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_f \frac{2}{3} z_{10(t')}^f z_{10(t'')}^f \\
 & - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{11(t,t')}^f z_{11(t,t'')}^f \\
 & + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{5(t,t',t'')} z_{10(t)}^f, \quad (t', t'' = 1 \dots r) \tag{6.22}
 \end{aligned}$$

NB G3.4:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_f \frac{2}{3} z_{10}^f(t') \\
&\quad - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{11}^f(t, t') z_{01}^f(t) \\
&\quad + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{2(t, t')} z_{10}^f(t), \quad (t' = 1 \dots r) \quad (6.23)
\end{aligned}$$

NB G3.5:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_f \frac{2}{3} z_{10}^f(t'') \\
&\quad - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{01}^f(t) z_{11}^f(t, t'') \\
&\quad + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{4(t, t'')} z_{10}^f(t), \quad (t'' = 1 \dots r) \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Die Anwendung des Verfahrens der Residuenbildung auf Gleichung (6.15) ergibt NB G3.1 und aufgrund der Symmetrie von $N_{3T}^{0[r]}$ zweimal NB G3.2.

NB G3.1:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_f \frac{2}{3} z_{10(t')}^f z_{10(t'')}^f \\
 &\quad - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{11(t,t')}^f z_{11(t,t'')}^f \\
 &\quad + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{5(t',t'',t)} z_{10(t)}^f, \quad (t', t'' = 1 \dots r) \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

NB G3.2:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_f \frac{2}{3} z_{10(t'')}^f \\
 &\quad - \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{01(t)}^f z_{11(t,t'')}^f \\
 &\quad + \sum_f \frac{2}{3} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{4(t'',t)} z_{10(t)}^f, \quad (t'' = 1 \dots r) \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Symmetrien bei Vertauschung von t' und t'' in NB G3.4, so erhalten wir eine Gesamtzahl von $r^2 + 2r + r \frac{r+1}{2} + r = \frac{1}{2}(3r^2 + 7r)$ Nebenbedingungen. Da für $r = 1$ sowohl NB G3.1 identisch mit NB G3.3 als auch NB G3.2 identisch mit NB G3.5 ist, verbleiben in diesem Fall nur noch 3 Nebenbedingungen.

Nach der letzten Residuenanpassung bleiben analog zum SK-Problem des Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex Terme übrig, die auf Grund der „perturbativen“ Randbedingung (RB 2) als perturbativ zu behandeln sind und neben der aus der Störungstheorie bekannten Divergenz

$$\frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{2}{3} N_F \quad (6.27)$$

Defektterme liefern:

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{2}{3} N_F - \frac{2}{3} \sum_f \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{01(t)}^f z_{01(t)}^f \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \sum_f \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{1(t)} z_{10(t)}^f \right) \quad \text{aus (6.14), (6.28)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{2}{3} N_F - \frac{2}{3} \sum_f \sum_{t=1}^r \frac{(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^{-2} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})^2} z_{01(t)}^f z_{01(t)}^f \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \sum_f \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{3(t)} z_{10(t)}^f \right) \quad \text{aus (6.15). (6.29)} \end{aligned}$$

6.2.2 Der chirale Fall

Die formale Ersetzung von \sum_f durch N_F/β_0 in den Termen der rechten Seiten der Nebenbedingungen NB G3.3/4/5/1/2 ergibt die entsprechenden fermionischen Beiträge zu den SK-Gleichungen des 3-Gluon-Vertex:

SK G3.3^(ch):

$$\begin{aligned} x_{4(t',t'')} = \dots + N_F \frac{2}{3\beta_0} z_{10(t')} z_{10(t'')} \\ - N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} z_{11(t,t')} z_{11(t,t'')} \\ + N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{5(t,t',t'')} z_{10(t)}, \quad (t', t'' = 1 \dots r) \end{aligned} \quad (6.30)$$

SK G3.4^(ch):

$$\begin{aligned}
 x_{1(t')} &= \dots + N_F \frac{2}{3\beta_0} z_{10(t')} \\
 &\quad - N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} z_{11(t,t')} z_{01(t)} \\
 &\quad + N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{2(t,t')} z_{10(t)}, \quad (t' = 1 \dots r) \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

 SK G3.5^(ch):

$$\begin{aligned}
 x_{3(t'')} &= \dots + N_F \frac{2}{3\beta_0} z_{10(t'')} \\
 &\quad - N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} z_{01(t)} z_{11(t,t'')} \\
 &\quad + N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{4(t,t'')} z_{10(t)}, \quad (t'' = 1 \dots r) \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

 SK G3.1^(ch):

$$\begin{aligned}
 x_{2(t',t'')} &= \dots + N_F \frac{2}{3\beta_0} z_{10(t')} z_{10(t'')} \\
 &\quad - N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} z_{11(t,t')} z_{11(t,t'')} \\
 &\quad + N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{5(t',t'',t)} z_{10(t)}, \quad (t', t'' = 1 \dots r) \\
 & \hspace{15em} (6.33)
 \end{aligned}$$

SK G3.2^(ch):

$$\begin{aligned}
 x_{1(t')} = & \dots + N_F \frac{2}{3\beta_0} z_{10(t')} \\
 & - N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(w_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (w_{r,2s} - w_{r,2t})^2} z_{11(t,t')} z_{01(t)} \\
 & + N_F \frac{2}{3\beta_0} \sum_{t=1}^r \frac{(u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} x_{4(t',t)} z_{10(t)}, \quad (t'' = 1 \dots r) \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

Die Anzahl der SK-Gleichungen ist gleich der Anzahl der Nebenbedingungen im massiven Fall, und für $r = 1$ ergeben sich somit Beiträge zu 5 SK-Gleichungen:

$$\text{SK G3.3:} \quad x_4 = \dots + \frac{2N_f}{3\beta_0} z_{1,0}^2 - \frac{2N_f}{3\beta_0 w_3} z_{1,1}^2 + \frac{2N_f}{3\beta_0 u_3} z_{1,0} x_5 \quad (6.35)$$

$$\text{SK G3.4:} \quad x_1 = \dots + \frac{2N_f}{3\beta_0} z_{1,0} - \frac{2N_f}{3\beta_0 w_3} z_{1,1} z_{0,1} + \frac{2N_f}{3\beta_0 u_3} z_{1,0} x_2 \quad (6.36)$$

$$\text{SK G3.5:} \quad x_3 = \dots + \frac{2N_f}{3\beta_0} z_{1,0} - \frac{2N_f}{3\beta_0 w_3} z_{1,1} z_{0,1} + \frac{2N_f}{3\beta_0 u_3} z_{1,0} x_4 \quad (6.37)$$

$$\text{SK G3.1:} \quad x_2 = \dots + \frac{2N_f}{3\beta_0} z_{1,0}^2 - \frac{2N_f}{3\beta_0 w_3} z_{1,1}^2 + \frac{2N_f}{3\beta_0 u_3} z_{1,0} x_5 \quad (6.38)$$

$$\text{SK G3.2:} \quad x_1 = \dots + \frac{2N_f}{3\beta_0} z_{1,0} - \frac{2N_f}{3\beta_0 w_3} z_{1,1} z_{0,1} + \frac{2N_f}{3\beta_0 u_3} z_{1,0} x_4 \quad (6.39)$$

6.3 Zweite Zwischenbilanz

Die beiden Kapitel 5 und 6 zeigen, daß sich die SK-Gleichungen mit beliebigem ungeradem Approximationsgrad r auch für die 3-Punkt-Vertexfunktionen berechnen lassen. Die Einführung des kompensierenden Pols erforderte wegen der Randbedingung (RB 2), daß der Grad der Zählerpolynome in den einzelnen Impulsen den Approximationsgrad r nicht übersteigt. Damit wurde die Bestimmung der SK-Gleichungen durch einfache Residuenbildung erstmals für einen beliebigen ungeraden Approximationsgrad r möglich. Außerdem konnten diese SK-Gleichungen durch eine geeignete Zusammenfassung der Vertexparameter in einer kompakten Form angegeben werden.

Aufgrund der Symmetrie der Ansätze hat der transversale 3-Gluon-Vertex genauso viele Parameter wie der chirale $F\bar{F}V$ -Vertex, nämlich

$$\frac{r}{2}(r^2 + 4r + 5). \quad (6.40)$$

Die Anzahl der SK-Gleichungen haben wir in den vorangehenden Abschnitten bestimmt. Das SK-Problem des $F\bar{F}V$ -Vertex in den beiden Kanälen zusammen liefert die gleiche

Anzahl an SK-Gleichungen wie die Betrachtung des 3-Gluon-Vertex in seinen drei unterschiedlichen Tensorstrukturen:

$$\frac{r}{2}(3r + 7). \quad (6.41)$$

Die Anzahl der 3-Punkt-Vertex-Parameter steigt also mit r^3 und die Anzahl der SK-Gleichungen mit r^2 an. Bereits für $r = 3$ liegen 48 3-Punkt-Vertex-Gleichungen für 78 3-Punkt-Vertex-Parameter vor.

- Die Unterbestimmung der SK-Gleichungen wächst mit zunehmendem rationalen Approximationsgrad für Vertexfunktionen mit mehr als 2 äußeren Beinen sehr stark an.

Die Ursache ist in dem Mechanismus der kompensierenden Pole zu finden. Dadurch, daß die Polanpassung der 3-Punkt-Vertex-Gleichungen im s-Kanal die 2-Punkt-Vertex-Gleichung liefert, können nicht für alle Polstrukturen des 3-Punkt-Vertex neue SK-Gleichungen auftreten. Diese Unterbestimmung kann im Prinzip vermieden werden:

- Die Bethe-Salpeter resummierte Form der DS-Gleichungen liefert für *jede* Polstruktur der 3-Punkt-Vertizes eine neue SK-Gleichung.

Die Analyse der Bethe-Salpeter-resummierten Form der DS-Gleichung des Fermion-Gluon-Antifermion-Vertex in 1-Schleifenordnung geben wir in Anhang E an, wobei wir für die Bestimmung der SK-Gleichungen nichtperturbative Modifikationen des „entschärften BS-Kerns“ vernachlässigt haben. Die Möglichkeit nichtperturbativer Modifikationen des störungstheoretischen BS-Kerns wurde in [LÖF 92] ausführlich diskutiert. Die vollständige Behandlung des BS-resummierten Gleichungssystems, das die Bethe-Salpeter-Gleichungen einschließt, ist ein sinnvoller, aber über den Rahmen dieser Arbeit hinausführender Lösungsweg.

Kapitel 7

Lösung des SK-Gleichungssystems

Für die Lösung des SK-Gleichungssystems benötigen wir neben den in dieser Arbeit ermittelten fermionischen SK-Gleichungen die aus den DS-Gleichungen für den 3-Gluon- und 4-Gluon-Vertex folgenden SK-Gleichungen, die in [DRI 97] auf der Approximationsstufe $r = 1$ bestimmt wurden. Da die Parameter des 3-Gluon-Vertex mit Ausnahme der Gleichungen für den inversen Fermion-Propagator in sämtlichen SK-Gleichungen auftreten, wählen wir für das Lösungsverfahren auch im fermionischen Sektor die niedrigste Approximationsstufe. Das Lösungsverfahren, bei dem wir uns, da der chirale Fall in [DRI 97] behandelt wird, auf den massiven Fall beschränken, ist „straightforward“. Zunächst werden die nichtlinearen SK-Gleichungen für die 2-Punkt- und 3-Punkt-Vertizes gelöst, wobei jene Lösungen des nichtlinearen Systems ausgesucht werden, für welche Confinement im Sinne kurzreichweitiger Elementaranregungen (d.h. ein Propagator mit komplexen Polen) sowohl für Gluonen als auch für Fermionen vorliegt. (Daß derartige Lösungen überhaupt existieren, ist natürlich keineswegs trivial). Diese Lösung wird durch die ST-Identitäten fixiert, und anschließend kann mit einer Nebenbedingung der letzte unbestimmte fermionische Parameter, die Polposition des inversen Propagators, angegeben werden. Das lineare, aber überbestimmte SK-Problem des 4-Gluon-Vertex ist nur durch zwei Parameterkombinationen an die Gleichungen des 3-Gluon-Vertex gekoppelt und wird durch Minimierung der Summe der Fehlerquadrate gelöst¹. Mit den gefundenen Zahlenwerten für die Parameter berechnen wir das Fermion-Kondensat [STR 96]. Als Anwendung diskutieren wir das statische Potential schwerer Quarkonia und betrachten abschließend den Quark-Antiquark-Photon-Vertex.

7.1 Analyse der Selbstkonsistenzgleichungen

Es folgt die Zusammenstellung der SK-Gleichungen, Nebenbedingungen (NB) und Defektterme (DT) für die 2-Punkt- und 3-Punkt-Vertizes. Mit Defekten bezeichnen wir die

¹Ausführlich werden diese Gleichungen und deren Lösung in [DRI 97] diskutiert.

Terme, die den perturbativen Limes verletzen, also Modifikationen der perturbativen Divergenzen darstellen. Die Anzahl dieser Defektterme ist unabhängig vom Approximationsgrad und somit sicherlich aufgrund der stark ansteigenden Parameterzahl für große r zu beheben. Deshalb berücksichtigen wir diese Störungen für die Lösungsfindung auf der Approximationsstufe $r = 1$ nicht, sondern geben, nachdem die Parameter bestimmt sind, die Größe der Störungen an.

Wir suchen eine nichttriviale Lösung mit $u_3 \neq 0 \neq \hat{\kappa}_3$ und multiplizieren daher die SK-Gleichungen mit u_3 bzw. $\hat{\kappa}_3$, um eine handlichere Form zu erreichen. Die gluonischen Gleichungen lauten:

$$\text{SK G2.1:} \quad \beta_0 u_3 = \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right) u_2 - 9x_4 + 9x_3 u_1$$

$$\text{SK G2.2:} \quad \beta_0 u_1 = -\frac{15}{2} x_1 + \frac{5}{4} x_3 + \frac{9}{4} u_1 - 9x_1$$

$$\text{NB G2.1:} \quad 0 = \sum_f \left(z_{10}^{(f)} \left(\frac{1}{3} u_2 + \hat{\kappa}_3^{(f)} \right) + z_{11}^f (w_2^{(f)} - w_1^{(f)}) + z_{14}^{(f)} \right)$$

$$\text{DT G2.A:} \quad 0 = \sum_f \left(-\hat{\kappa}_3^{(f)} + \frac{1}{3} z_{10}^{(f)} + z_{01}^{(f)} (w_1^{(f)} - w_2^{(f)}) - z_{04}^{(f)} \right)$$

$$\text{SK G3.1:} \quad \beta_0 u_3 x_2 = \frac{3}{2} u_3 x_3^2 + \frac{1}{2} x_2 x_4 - 2x_4^2 - x_5 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right)$$

$$\text{SK G3.2:} \quad \beta_0 u_3 x_1 = -\frac{9}{4} u_3 x_1 + \frac{15}{16} u_3 x_3 + \frac{1}{4} x_1 x_2 - \frac{3}{2} x_1 x_4 - \frac{1}{4} x_3 x_4 - x_4 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right)$$

$$\text{SK G3.3:} \quad \beta_0 u_3 x_4 = \frac{3}{2} u_3 x_3^2 - \frac{1}{4} x_2 x_4 - \frac{5}{4} x_4^2 - u_3 Z_2(\zeta) - x_5 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right)$$

$$\text{SK G3.4:} \quad \beta_0 u_3 x_1 = -\frac{9}{4} u_3 x_1 + \frac{15}{16} u_3 x_3 - \frac{1}{4} x_1 x_2 - \frac{5}{4} x_1 x_4 - u_3 Z_1(\zeta) - x_2 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right)$$

$$\text{SK G3.5:} \quad \beta_0 u_3 x_3 = \frac{3}{4} u_3 x_3 - \frac{7}{4} x_1 x_4 + \frac{1}{4} x_3 x_4 - u_3 Z_1(\zeta) - x_4 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 \right)$$

$$\text{NB G3.1:} \quad 0 = \frac{2}{3} \sum_f \left((z_{10}^f)^2 - \frac{(z_{11}^f)^2}{\hat{\kappa}_3^{(f)}} + \frac{z_{10}^f x_5}{u_3} \right)$$

$$\text{NB G3.2:} \quad 0 = \frac{2}{3} \sum_f \left(z_{10}^f - \frac{z_{11}^f z_{01}^f}{\hat{\kappa}_3^{(f)}} + \frac{z_{10}^f x_2}{u_3} \right)$$

$$\text{NB G3.3:} \quad 0 = \frac{2}{3} \sum_f \left(z_{10}^f - \frac{z_{11}^f z_{01}^f}{\hat{\kappa}_3^{(f)}} + \frac{z_{10}^f x_4}{u_3} \right)$$

$$\text{DT G3.A:} \quad 0 = \frac{1}{u_3} \left(-x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_3 - x_3 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 - \frac{2}{3} \sum_f z_{10}^f \right) \right) - \frac{2}{3} \sum_f \frac{z_{01}^f z_{01}^f}{\hat{\kappa}_3^{(f)}}$$

$$\text{DT G3.B:} \quad 0 = \frac{1}{u_3} \left(-\frac{7}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_1 x_3 - x_1 \left(\frac{15}{2} x_1 - \frac{5}{4} x_3 - \frac{2}{3} \sum_f z_{10}^f \right) \right) - \frac{2}{3} \sum_f \frac{z_{01}^f z_{01}^f}{\hat{\kappa}_3^{(f)}}.$$

Neben den bekannten Parametern treten Kombinationen der siebzehn Parameter $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{17}\}$ des 4-Gluon-Vertex (vgl. Anhang B.2) auf:

$$Z_1(\zeta) = \frac{45}{32}\zeta_1 - \frac{15}{32}\zeta_7, \quad (7.1)$$

$$Z_2(\zeta) = \frac{45}{32}\zeta_2 - \frac{15}{32}\zeta_8 + \frac{45}{32}\zeta_3 - \frac{15}{32}\zeta_9. \quad (7.2)$$

Die fermionischen Gleichungen lauten:

$$\text{SK F2.1:} \quad \beta_0 \hat{\kappa}_3 = 4z_{01}(w_1 + \hat{x}) - 4z_{04}$$

$$\text{SK F2.2:} \quad \beta_0 w_1 = 4w_1 - 4z_{01}$$

$$\text{SK F3.1:} \quad \beta_0 u_3 z_{11} = \frac{9}{4}u_3 z_{01} x_3 - \frac{9}{4}z_{11} x_4$$

$$\text{SK F3.2:} \quad \beta_0 u_3 z_{10} = \frac{9}{4}u_3 x_3 - \frac{9}{4}z_{10} x_4$$

$$\text{SK F3.3:} \quad \beta_0 u_3 z_{01} = \frac{9}{4}u_3 z_{01} - \frac{9}{4}z_{11} x_1$$

$$\text{SK F3.4:} \quad \beta_0 u_3 \hat{\kappa}_3 z_{04} = \frac{9}{4}u_3 \hat{\kappa}_3 z_{01}^2 - \frac{9}{4}u_3 z_{04}^2 - \hat{\kappa}_3 z_{14} \left(\frac{15}{2}x_1 - \frac{5}{4}x_3 \right)$$

$$\text{SK F3.5:} \quad \beta_0 u_3 \hat{\kappa}_3 z_{01} = \frac{9}{4}u_3 \hat{\kappa}_3 z_{01} - \frac{9}{4}u_3 z_{01} z_{04} - \hat{\kappa}_3 z_{11} \left(\frac{15}{2}x_1 - \frac{5}{4}x_3 \right)$$

$$\text{NB F3.1} \quad 0 = \frac{2}{3} \frac{z_{14}}{u_3} \sum_f z_{10}^f$$

$$\text{NB F3.2} \quad 0 = \frac{2}{3} \frac{z_{11}}{u_3} \sum_f z_{10}^f$$

$$\text{DT F3.A:} \quad 0 = -\frac{9}{4} \frac{z_{10} x_1}{u_3}$$

$$\text{DT F3.B:} \quad 0 = -\frac{9}{4} \frac{z_{01}^2}{\hat{\kappa}_3} - \frac{z_{10}}{u_3} \left(\frac{15}{2}x_1 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{2}{3} \sum_f z_{10}^f \right)$$

7.1.1 Lösung der gluonischen Gleichungen

Auf der Approximationsstufe $r = 1$ haben die fermionischen SK-Gleichungen eine interessante Eigenschaft: sie bilden eine Gleichung aus, die ausschließlich gluonische Parameter enthält. Für $w_1 \neq 0$ folgt aus SK F3.1 und F3.3:

$$\beta_0 u_3 + \frac{9}{4}x_4 = -\frac{81}{16 \left(\beta_0 - \frac{9}{4} \right)} x_1 x_3, \quad (7.3)$$

also neben den Gleichungen vom Typ SK G3 eine weitere Gleichung, in der nur gluonische Parameter auftreten². Jedoch kann die Gleichung (7.3) umgangen werden, indem

²In einer Theorie ohne Fermionen, also $N_f = 0$, $\beta_0 = 11$, existiert diese Gleichung nicht.

$z_{11} = z_{01} = 0$ gewählt wird. Es folgt $w_1 = 0$; man überzeugt sich leicht davon, daß dann die Gesamtlösung die triviale (alle nichtperturbativen Koeffizienten gleich Null) wird. Im weiteren Verlauf nehmen wir $w_1 \neq 0$, also die Existenz von Gleichung (7.3), an. Damit ist $x_1 \neq 0$, da aus $x_1 = 0$ mit SK F3.3 $z_{01} = 0$ und mit SK F2.2 $w_1 = 0$ folgt. Jetzt nutzen wir eine interessante Eigenschaft der Struktur der SK-Gleichungen aus. x_1 kann nämlich aus allen gluonischen SK-Gleichungen durch Definition neuer Parameter eliminiert werden:

Gluon-Propagator	3-Gluon-Vertex	4-Gluon-Vertex
$\tilde{u}_1 := \frac{u_1}{x_1}$	$\tilde{x}_2 := \frac{x_2}{x_1^2}$	$\tilde{Z}_1 := \frac{Z_1}{x_1}$
$\tilde{u}_2 := \frac{u_2}{x_1}$	$\tilde{x}_3 := \frac{x_3}{x_1}$	$\tilde{Z}_2 := \frac{Z_2}{x_1^2}$
$\tilde{u}_3 := \frac{u_3}{x_1^2}$	$\tilde{x}_4 := \frac{x_4}{x_1^2}$	
	$\tilde{x}_5 := \frac{x_5}{x_1^3}$	

Durch diese *Skalierungseigenschaft* erhält man für 9 gluonische Variablen ein nichtlineares Gleichungssystem mit 8 Gleichungen (SK G2.1/2, SK G3.1/2/3/4/5 und Glg. (7.3)). Bei fest vorgegebenem \tilde{x}_3 läßt sich das Gleichungssystem in den übrigen Variablen linear lösen, und wir können die Lösung angeben ($N_f = 6$, $\beta_0 = 7$):

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1 &= \frac{-66 + 5\tilde{x}_3}{19} \\
 \tilde{u}_2 &= \frac{36\tilde{x}_3}{95(\tilde{x}_3 - 6)} \cdot \frac{-5310192 + 1844480\tilde{x}_3 - 211805\tilde{x}_3^2 + 7825\tilde{x}_3^3}{78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2} \\
 \tilde{u}_3 &= \frac{648\tilde{x}_3}{19} \cdot \frac{542 - 149\tilde{x}_3 + 10\tilde{x}_3^2}{-78784 + 21496\tilde{x}_3 - 1565\tilde{x}_3^2} \\
 \tilde{x}_2 &= \frac{162\tilde{x}_3}{19} \cdot \frac{5032 - 3050\tilde{x}_3 + 275\tilde{x}_3^2}{78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2} \\
 \tilde{x}_4 &= \frac{81\tilde{x}_3}{19} \cdot \frac{4736 - 1320\tilde{x}_3 + 75\tilde{x}_3^2}{78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2} \\
 \tilde{x}_5 &= \frac{972\tilde{x}_3^2}{1805(\tilde{x}_3 - 6)} \\
 &\quad \cdot \frac{-7679736576 + 10405729280\tilde{x}_3 - 3776370328\tilde{x}_3^2 + 589187674\tilde{x}_3^3 - 42628145\tilde{x}_3^4 + 1189400\tilde{x}_3^5}{(78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2)^2} \\
 \tilde{Z}_1 &= \frac{1}{32} \cdot \frac{-175232 + 185656\tilde{x}_3 - 40495\tilde{x}_3^2 + 2450\tilde{x}_3^3}{-542 + 149\tilde{x}_3 - 10\tilde{x}_3^2} \\
 \tilde{Z}_2 &= \frac{81\tilde{x}_3}{608} \cdot \frac{5328 - 4780\tilde{x}_3 + 475\tilde{x}_3^2}{542 - 149\tilde{x}_3 + 10\tilde{x}_3^2} \cdot \frac{135616 - 37336\tilde{x}_3 + 2465\tilde{x}_3^2}{78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2} \tag{7.4}
 \end{aligned}$$

\tilde{Z}_1 und \tilde{Z}_2 schränken die Lösungen des Gleichungssystems der 4-Gluon-Vertex Parameter ein.

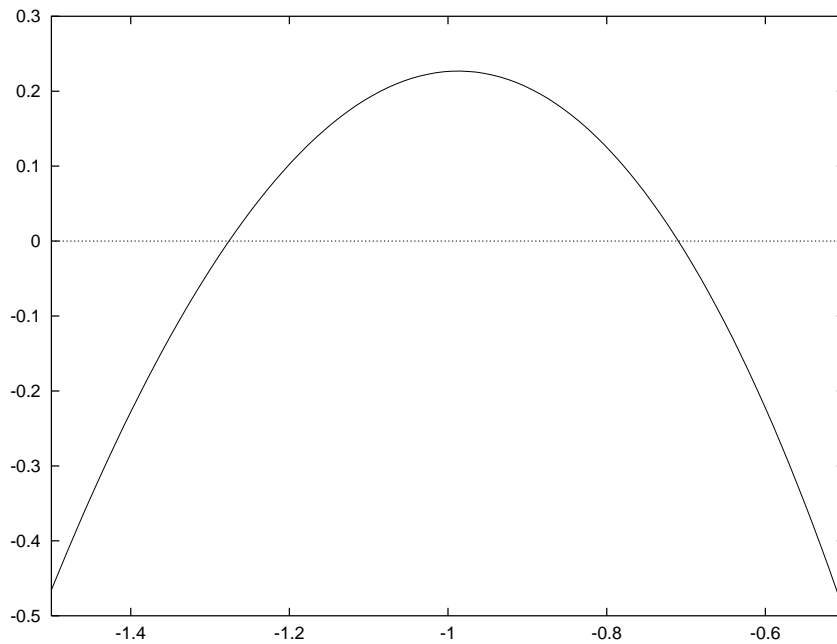


Abbildung 7.1: Der Gluon-Confinement-Bereich: $u_I^2/(x_1^2\Lambda^4)$ ist gegen \tilde{x}_3 aufgetragen.

Die Skalierungseigenschaft hat grundsätzliche Bedeutung und ist aus folgendem Grunde zu erwarten: da in das SK-Problem der verallgemeinerten Feynmanregeln nur die schemunabhängige Renormierungsgruppenkonstante β_0 eingeht, legt dieses System noch nicht fest, auf welches Schema die Λ -Skala bezogen ist. (In welchem Schema man sich bewegt, „merkt“ man erst bei der Berechnung der perturbativen Korrekturen). Deshalb kann Λ nur bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt werden.

Der Parameter \tilde{x}_3 ist nicht frei wählbar, wenn man die Forderung nach komplexen Polstellen im Gluon-Propagator berücksichtigt:

$$u_I^2 = u_3 - \left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)^2 > 0. \quad (7.5)$$

Diese Ungleichung, im weiteren Verlauf als Confinement-Bedingung bezeichnet, ist eine quadratische Gleichung in \tilde{x}_3 und nur für $-1.3 \lesssim \tilde{x}_3 \lesssim -0.7$ erfüllt (Abb. 7.1).

Die Analyse des Gleichungssystems zeigt, daß mit

$$\{u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, Z_1, Z_2\}$$

auch

$$\{-u_1, -u_2, u_3, -x_1, x_2, -x_3, x_4, -x_5, -Z_1, Z_2\}$$

eine Lösung darstellt. Die in anderen Approximationsschemata wie Gittereichtheorien berechneten euklidischen Gluon-Propagatoren [NAK 95] haben keine Nullstellen³. Da eine

³Mehr zu dieser Arbeit und ein Fit mit unseren Ansätzen ist in [FRO 96] zu finden.

Lösung mit positivem x_1 , also — nach Glg. (7.4) gilt im Confinement-Bereich $\tilde{u}_2 < 0$ — negativem u_2 , eine Propagatornullstelle hervorrufen würde, entscheiden wir uns für die Lösung mit negativem x_1 , also positivem $(u_1 + u_2)/2$.

7.1.2 Lösung der fermionischen Gleichungen

Aus den fermionischen Gleichungen läßt sich x_1 ebenfalls durch Definition neuer Parameter eliminieren ($x_1 < 0$):

Fermion-Propagator	$F\bar{F}V$ -Vertex
$\tilde{w}_1 := \frac{w_1}{\sqrt{-x_1}}$	$\tilde{z}_{01} := \frac{z_{01}}{\sqrt{-x_1}}$
$\tilde{w}_2 := \frac{w_2}{\sqrt{-x_1}}$	$\tilde{z}_{04} := \frac{z_{04}}{(-x_1)}$
$\tilde{\kappa}_3 := \frac{\hat{\kappa}_3}{(-x_1)}$	$\tilde{z}_{10} := \frac{z_{10}}{x_1}$
	$\tilde{z}_{11} := \frac{z_{11}}{x_1 \sqrt{-x_1}}$
	$\tilde{z}_{14} := \frac{z_{14}}{(-x_1^2)}$

Der Massenparameter \hat{x} wird durch

$$\tilde{x} := \frac{\hat{x}}{\sqrt{-x_1}} \quad (7.6)$$

umgeschrieben. Damit gilt:

$$\hat{m} = \hat{x}\Lambda = \tilde{x}\sqrt{|x_1|}\Lambda. \quad (7.7)$$

Durch die Skalierungseigenschaft tritt der spontane Massenparameter Λ in den Ansätzen ausschließlich als $\sqrt{|x_1|}\Lambda$ auf.

Die Lösung der fermionischen Gleichungen (6 Gleichungen für 7 Parameter) läßt sich in Abhängigkeit von \tilde{w}_1 und \tilde{x}_3 angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_3 &= \frac{243}{-2163 + 380\tilde{x}_3} \tilde{w}_1 (\tilde{w}_1 + \tilde{x}) \\ \tilde{z}_{01} &= -\frac{3}{4} \tilde{w}_1 \\ \tilde{z}_{04} &= 57 \frac{-21 + 5\tilde{x}_3}{2163 - 380\tilde{x}_3} \tilde{w}_1 (\tilde{w}_1 + \tilde{x}) \\ \tilde{z}_{10} &= 72\tilde{x}_3 \frac{542 - 149\tilde{x}_3 + 10\tilde{x}_3^2}{78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2} \\ \tilde{z}_{11} &= 54\tilde{x}_3 \frac{542 - 149\tilde{x}_3 + 10\tilde{x}_3^2}{-78784 + 21496\tilde{x}_3 - 1565\tilde{x}_3^2} \tilde{w}_1 \\ \tilde{z}_{14} &= \frac{27}{190} \cdot \frac{\tilde{x}_3}{6 - \tilde{x}_3} \cdot \frac{542 - 149\tilde{x}_3 + 10\tilde{x}_3^2}{-2163 + 380\tilde{x}_3} \\ &\quad \cdot \frac{(4681593 - 1688340\tilde{x}_3 + 144400\tilde{x}_3^2) \tilde{w}_1 + (4155984 - 1596000\tilde{x}_3 + 144400\tilde{x}_3^2) \tilde{x}}{78784 - 21496\tilde{x}_3 + 1565\tilde{x}_3^2} \end{aligned}$$

Die Confinementbedingung erfordert die Gültigkeit der Ungleichung:

$$\tilde{\kappa}_3 - \left(\frac{\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2}{2} \right)^2 > 0. \quad (7.8)$$

Es folgt:

$$\frac{243\tilde{w}_1(\tilde{w}_1 + \tilde{x})}{-2163 + 380\tilde{x}_3} - \frac{(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)^2}{4} > 0, \quad (7.9)$$

und da $\tilde{x}_3 < 0$, ergibt sich die notwendige Bedingung $-\tilde{x} < \tilde{w}_1 < 0$, d.h. sowohl der freie gluonische Parameter \tilde{x}_3 als auch der freie fermionische Parameter \tilde{w}_1 sind eingeschränkt. Der Parameter \tilde{w}_2 tritt nur in den Nebenbedingungen auf und kann durch diese bestimmt werden.

7.2 Festlegung der Parameter durch ST-Identitäten

Für die weitere Lösung der Selbstkonsistenzgleichungen verwenden wir eine zusätzliche Gleichung mit nichtperturbativem Charakter, die aus der ST-Identität für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex (5.52) folgt⁴:

$$\tilde{z}_{01}^2 = \frac{\tilde{z}_{04}^2}{\tilde{\kappa}_3} - \frac{4\beta_0}{9}\tilde{\kappa}_3. \quad (7.10)$$

Diese Gleichung legt den freien fermionischen Parameter \tilde{w}_1 in Abhängigkeit vom freien gluonischen Parameter \tilde{x}_3 und der relativen Quarkmasse \tilde{x} fest:

$$\tilde{w}_1 = -16 \frac{138789 - 75810\tilde{x}_3 + 9025\tilde{x}_3^2}{2746233 - 1305300\tilde{x}_3 + 144400\tilde{x}_3^2} \tilde{x}. \quad (7.11)$$

Der vor der spontanen Masse Λ stehende Parameter w_1 ist somit proportional zu der nichtspontanen Quarkmasse. Dieses unerwartete Verhalten ist auf der Approximationsstufe $r = 1$ nicht zu vermeiden.

Entscheidend und wiederum nicht trivial ist, daß im Gluon-Confinement-Bereich $-1.3 \lesssim \tilde{x}_3 \lesssim -0.7$ der Quotient \tilde{w}_1/\tilde{x} bei -0.85 ± 0.01 liegt (vgl. Abb. 7.2) und somit für geeignetes \tilde{w}_2 die Beschreibung von Quark-Confinement möglich ist.

Die ST-Identität zum 3-Gluon-Vertex, die in [DRI 97] berechnet wurde, läßt sich auf unseren Fall übertragen⁵ und ergibt dann:

$$\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{u_3} \left(-\frac{1}{2}x_2x_4 + 2x_4^2 \right) \right) = u_3. \quad (7.12)$$

Diese Gleichung liefert nach Einsetzen der Ausdrücke aus (7.4) eine Gleichung 6. Grades für \tilde{x}_3 mit den Lösungen:

$$\{-1.2046, 0, 5.9274, 7.3727 - 1.9149i, 7.3727 + 1.9149i, 8.3632\}. \quad (7.13)$$

⁴Will man, anstatt (5.52) zu erfüllen, den Defekttterm in (5.53) zum Verschwinden bringen, so verläßt man automatisch den Gluon-Confinement-Bereich.

⁵Durch Hinzunahme der Nebenbedingung: $0 = \sum_f \left(-\frac{2}{3}z_{1,0}^2 + \frac{1}{\tilde{\kappa}_3} \frac{2}{3}z_{1,1}^2 \right)$.

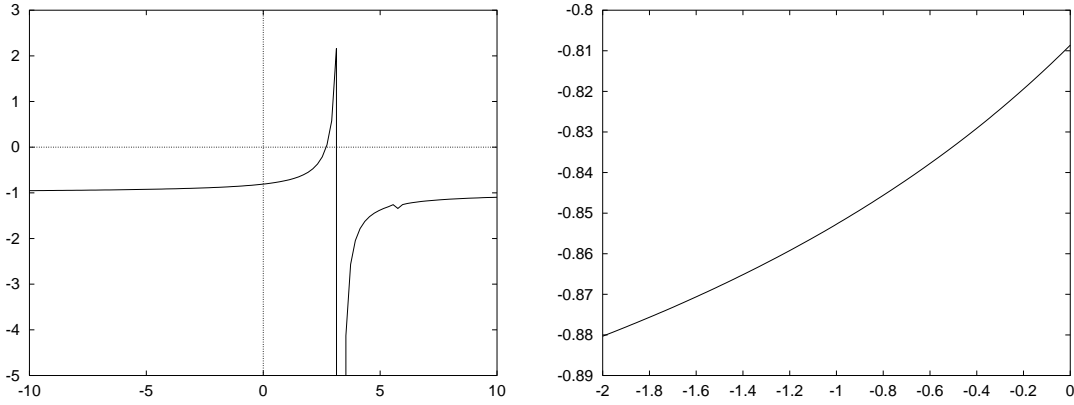


Abbildung 7.2: Der Quark-Confinement-Bereich: \tilde{w}_1/\tilde{x} ist gegen \tilde{x}_3 aufgetragen.

Es ist bemerkenswert, daß überhaupt eine Lösung existiert, die unserer Gluon-Confinement Bedingung genügt, nämlich

$$\tilde{x}_3 = -1.2046. \quad (7.14)$$

Damit sind 9 gluonische Parameter und die in den SK-Gleichungen auftretenden fermionischen Parameter in Abhängigkeit von der relativen Quarkmasse \tilde{x} bestimmt (Tabelle 7.1).

Mit Hilfe der in [DRI 97] berechneten 47 SK-Gleichungen für den 4-Gluon-Vertex können ebenfalls die 4-Gluon-Vertex-Parameter bestimmt werden. Da Z_1 und Z_2 bereits festgelegt sind, liegt eine Überbestimmung der Parameter vor. Bei der verwendeten Methode — Minimierung der Summe der Fehlerquadrate mit starker Gewichtung der beiden Gleichungen, die Z_1 und Z_2 enthalten — ergibt sich genau eine Lösung (Tabelle 7.2).

Die Nebenbedingungen wurden bisher nicht berücksichtigt. Um aber den Parameter w_2 festlegen zu können, benötigen wir die Nebenbedingung NB G2.1. Unter der Voraussetzung, daß die Flavour-Abhängigkeit von \tilde{w}_2 dieselbe ist wie die von \tilde{w}_1 , d.h. \tilde{w}_2/\tilde{x} ist unabhängig vom Flavour, kann \tilde{w}_2 durch die Nebenbedingung NB G2.1 berechnet werden:

$$\frac{\tilde{w}_1^{(f)} - \tilde{w}_2^{(f)}}{\tilde{x}^f} \sum_f \tilde{z}_{11}^f \tilde{x}^f = \sum_f \left(\tilde{z}_{14}^f - \tilde{z}_{10}^f \left(\frac{1}{3} \tilde{u}_2 - \tilde{\kappa}_3^{(f)} \right) \right). \quad (7.15)$$

Hierbei müssen die fermionischen Parameter zunächst für N_F Flavours in Abhängigkeit von der relativen Quarkmasse \tilde{x} bestimmt werden. Da damit bereits sämtliche Parameter bestimmt sind, können die übrigen Nebenbedingungen und Defekte als ein Maß für die Güte unserer Approximation angesehen werden (Kapitel 7.3.1).

7.3 Quarkmassen und Propagatoren

Wie zu erwarten war, hat die Quarkmasse erheblichen Einfluß auf die Größe der fermionischen Parameter. Für geeignete \tilde{x} geben wir die fermionischen Parameter an und durch Gleichung (7.15) wird dann \tilde{w}_2 bestimmt.

gluonische	Parameter	fermionische	Parameter
\tilde{u}_1	$= -3.7907$	\tilde{w}_1	$= -0.85936 \tilde{x}$
\tilde{u}_2	$= -4.6525$	$\tilde{\kappa}_3$	$= 0.011206 \tilde{x}^2$
\tilde{u}_3	$= 0.28273$	\tilde{z}_{01}	$= 0.64452 \tilde{x}$
\tilde{x}_2	$= -0.87442$	\tilde{z}_{04}	$= 0.071034 \tilde{x}^2$
\tilde{x}_3	$= -1.2046$	\tilde{z}_{10}	$= -0.59687$
\tilde{x}_4	$= -0.30899$	\tilde{z}_{11}	$= -0.38470 \tilde{x}$
\tilde{x}_5	$= 0.25430$	\tilde{z}_{14}	$= -0.018073 \tilde{x}^2$
\tilde{Z}_1	$= 19.613$		
\tilde{Z}_2	$= -4.4215$		

Tabelle 7.1: Die gluonischen und fermionischen Parameter in Abhängigkeit von der relativen Quarkmasse \tilde{x} .

Wenn $\sqrt{|x_1|}\Lambda$ bekannt ist, können wir \tilde{x} so vorgeben, daß der Massenparameter \hat{m} für die verschiedenen Flavours den in [PDG 96] angegebenen Quarkmassen entspricht. Die Größe $\sqrt{|x_1|}\Lambda$ kann durch Vergleich des Gluonkondensats in [STR 96], das sich in 1-Schleifen-Ordnung auf das abelsche Gluonkondensat reduziert, mit phänomenologischen Resultaten aus QCD-Summenregeln [SVZ 79] bestimmt werden:

$$0.015 \text{ GeV}^4 = \frac{6}{\beta_0 \pi^2} (u_1^2 - u_3) \Lambda^4 \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow \sqrt{|x_1|}\Lambda = (335 \pm 3) \text{ MeV} \text{ für } \tilde{x}_3 \in [-1.3, -0.7].$$

An dieser Stelle ist eine Bemerkung zu den Bewegungsgleichungs-Kondensaten notwendig. Nach [DRI 97] liefern die Bewegungsgleichungs-Kondensate der Geistfelder die Bedingung $u_1^2 = u_3$, die wir für rein reelle \tilde{x}_3 nicht erfüllen können. Da die Bewegungsgleichungs-Kondensate 2-Schleifen-Terme enthalten, wir aber unsere Rechnung bisher auf die 1-Schleifenordnung beschränkt haben, berücksichtigen wir in diesem Lösungsverfahren die Bewegungsgleichungs-Kondensate nicht.

ζ_1	$-14.182 \cdot x_1$
ζ_2	$-7.6803 \cdot x_1^2$
ζ_3	$11.753 \cdot x_1^2$
ζ_4	$-2.3116 \cdot x_1^3$
ζ_5	$0.59094 \cdot x_1^4$
ζ_6	$9.9722 \cdot x_1^2$
ζ_7	$-0.70479 \cdot x_1$
ζ_8	$3.1951 \cdot x_1^2$
ζ_9	$-0.41074 \cdot x_1^2$
ζ_{10}	$0.65626 \cdot x_1^3$
ζ_{11}	$-1.6846 \cdot x_1^4$
ζ_{12}	$-1.2699 \cdot x_1^2$
ζ_{13}	$7.2570 \cdot x_1$
ζ_{14}	$8.6372 \cdot x_1^2$
ζ_{15}	$-0.23944 \cdot x_1^3$
ζ_{16}	$1.0019 \cdot x_1^4$
ζ_{17}	$13.665 \cdot x_1^2$

Tabelle 7.2: Eine Lösung für die 4-Gluon-Vertex Parameter.

Mit der Gluonkondensat-Beziehung (7.16) fixieren wir zunächst

$$\sqrt{|x_1|}\Lambda = 333 \text{ MeV} \quad \text{für } \tilde{x}_3 = -1.2046. \quad (7.17)$$

Die neuesten Resultate zu Λ_{QCD} im $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungsschema sind in [SCH 96] angegeben. Der gewichtete Mittelwert lautet:

$$\Lambda_{QCD}^{\overline{\text{MS}}} = (287 \pm 31) \text{ MeV}. \quad (7.18)$$

Unser dimensionelles Regularisierungsschema ist nicht festgelegt, da für das Aufstellen der SK-Gleichungen keine endlichen Anteile berechnet werden. Außerdem ist im Moment nicht abzusehen, wie stark unser Renormierungsschema von den gängigen $\text{MS}/\overline{\text{MS}}$ -Schemata abweicht, und ob neben der modifizierten Massenrenormierung (vgl. Kapitel 3) weitere Modifikationen notwendig werden. Die für verschiedene Quarkmassen resultierenden Parameter werden in Tabelle 7.3 angegeben.

Interessant ist der Parameter, der die impulsunabhängige DCSB beschreibt:

$$\kappa_1 = w_1 \Lambda + \hat{m} \approx 0.15 \hat{m}.$$

Durch den nichtperturbativen Term $w_1 \Lambda$ wird also die explizite chirale Symmetriebrechung verkleinert.

Flavour:	up	down	strange	charm	bottom	top
\tilde{x}	0.015	0.03	0.6	4	13	540
\hat{m}/GeV	$5 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$	0.2	1.3	4.3	180
\tilde{w}_1	-0.0129	-0.0258	-0.516	-3.44	-11.2	-464
\tilde{w}_2	-0.0139	-0.0277	-0.554	-3.70	-12.0	-499
$\tilde{\kappa}_3$	$2.52 \cdot 10^{-6}$	$10.1 \cdot 10^{-6}$	0.00403	0.179	1.89	3270
\tilde{z}_{01}	0.00967	0.0193	0.387	2.58	8.38	348
\tilde{z}_{04}	$16.0 \cdot 10^{-6}$	$63.9 \cdot 10^{-6}$	0.0256	1.14	12.0	20700
\tilde{z}_{10}	-0.597	-0.597	-0.597	-0.597	-0.597	-0.597
\tilde{z}_{11}	-0.00577	-0.0115	-0.231	-1.54	-5.00	-207
\tilde{z}_{14}	$-4.07 \cdot 10^{-6}$	$-16.3 \cdot 10^{-6}$	-0.00651	-0.289	-3.05	-5270

Tabelle 7.3: Die fermionischen Parameter für verschiedene Quark-Flavours.

7.3.1 Nebenbedingungen und Störungen

Für die gefundenen Parameter geben wir die rechten Seiten der Nebenbedingungen und die Defekterme an.

$$\begin{array}{ll}
\text{NB G3.1:} & -N_F \cdot 8.925 \\
\text{NB G3.2:} & N_F \cdot 15.58 \\
\text{NB G3.3:} & N_F \cdot 14.79 \\
\text{NB F3.1:} & N_F \cdot 0.02544 \cdot \hat{x}^2 \\
\text{NB F3.1:} & N_F \cdot 0.5414 \cdot \hat{x} \\
\text{DT G2.A:} & -11884 \cdot x_1 \\
\text{DT G3.A:} & 47.14 \\
\text{DT G3.B:} & -47.55 \\
\text{DT F3.A:} & 4.750 \\
\text{DT F3.B:} & -59.36
\end{array} \tag{7.19}$$

Außer der expliziten Abhängigkeit in NB F3.1/2 wird allein DT G2.A durch die Quarkmassen beeinflusst. Dieser natürlich unerwünscht große Defekt rührt hauptsächlich von der sehr großen Top-Masse her.

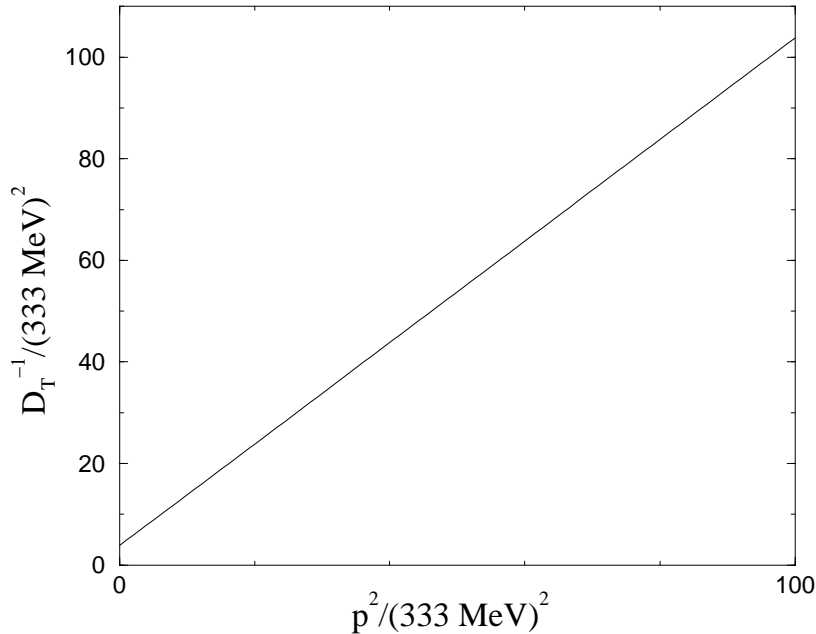


Abbildung 7.3: Der inverse transversale Gluon-Propagator $D_T^{-1}(p^2)$.

7.3.2 Propagatoren und Lebensdauern

Nachdem wir eine Lösung ermittelt haben, betrachten wir nun die komplexen Propagator-Polpositionen:

$$\begin{aligned}
 u_R \Lambda^2 \pm i u_I \Lambda^2 &= \frac{u_1 \Lambda^2 + u_2 \Lambda^2}{2} \pm i \sqrt{u_3 \Lambda^4 - \left(\frac{u_1 \Lambda^2 - u_2 \Lambda^2}{2} \right)^2} \\
 &= (4.2216 \pm 0.31156i) \cdot |x_1| \Lambda^2.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

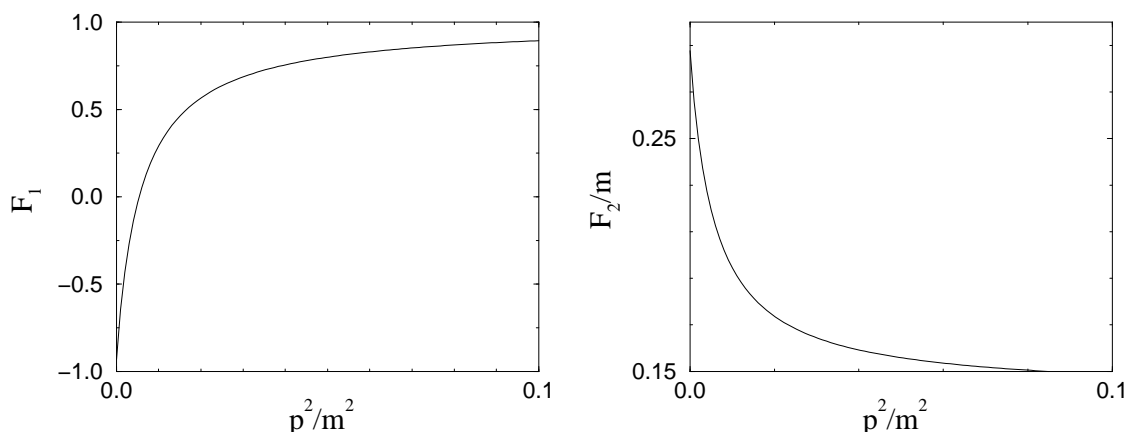
Mit diesen Werten haben wir den inversen Gluon-Propagator im euklidischen Impulsraum in Abbildung 7.3 dargestellt. Wie bereits in Kapitel 2.2 angedeutet, zeigt der transversale Gluon-Propagator keinen Pol im Euklidischen.

Für die komplexen Pole des Quark-Propagators gilt:

$$\begin{aligned}
 \kappa_R \pm i \kappa_I &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \pm i \sqrt{\kappa_3^2 - \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right)^2} \\
 &= (0.1406 \pm 0.1059i) \hat{m},
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

sowie

$$\kappa_{\pm}^2 = (0.008554 \pm 0.02978i) \hat{m}^2. \tag{7.22}$$

Abbildung 7.4: Die invarianten Funktionen F_1 und F_2 des Quark-Propagators.

Der Quark-Propagator lässt sich schreiben als

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}F_1(p^2) + F_2(p^2)} \quad (7.23)$$

mit

$$F_1(p^2) = \left(1 - \frac{\kappa_3^2}{p^2 + \kappa_2^2}\right), \quad (7.24)$$

$$F_2(p^2) = \left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2 \kappa_3^2}{p^2 + \kappa_2^2}\right). \quad (7.25)$$

Diese beiden Funktionen haben wir in Abbildung 7.4 dargestellt.

Teilchen, die durch Propagatoren mit komplexen Polen beschrieben werden, besitzen eine endliche Lebensdauer, die proportional zum Impulsbetrag zunimmt. Um diese Lebensdauer zu berechnen, setzen wir gemäß Abbildung 7.5 zunächst unseren euklidischen Propagator in den minkowskischen Impulsraum fort, führen dann eine Fouriertransformation der p_0 -Komponente durch und erhalten eine Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten $\exp(\omega(|\mathbf{p}|)|x_0|)$. Aus der komplexen Dispersionsrelation

$$\omega(|\mathbf{p}|) = \varepsilon(|\mathbf{p}|) - \frac{i}{2} \frac{1}{\tau(|\mathbf{p}|)} \quad (7.26)$$

bestimmen wir die Lebensdauern $\tau(|\mathbf{p}|)$ für Gluonen und Quarks⁶:

$$\tau_G(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + u_R \Lambda^2)^2 + (u_I \Lambda^2)^2} - |\mathbf{p}|^2 - u_R \Lambda^2 \right)^{-1/2} \quad \text{für } u_I > 0 \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| \rightarrow \infty \quad & \frac{|\mathbf{p}|}{u_I \Lambda^2} = 3.210 \frac{|\mathbf{p}|}{|x_1| \Lambda^2}, \\ \rightarrow & \end{aligned} \quad (7.28)$$

⁶Die Lebensdauern für vereinfachte Propagatoren wurden bereits in [STI 86, WIG 89] angegeben.

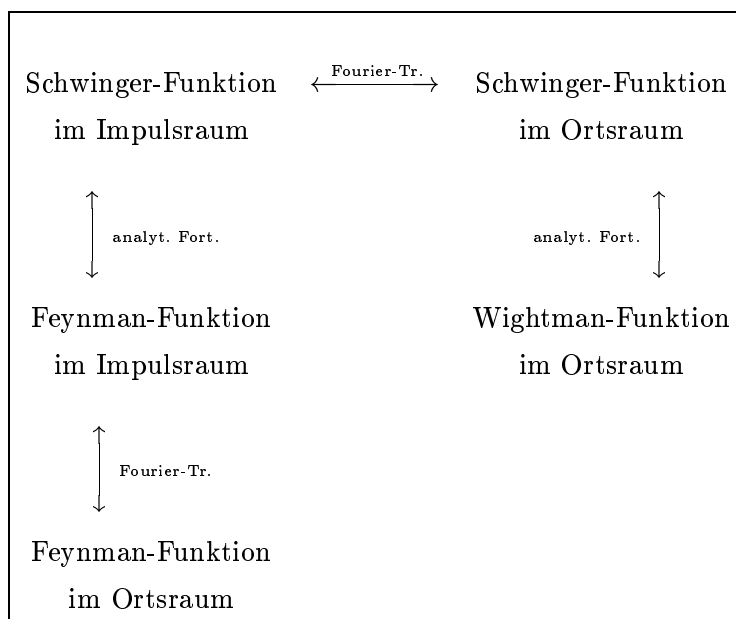


Abbildung 7.5: Von der euklidischen Green-Funktion (Schwinger-Funktion) im Impulsraum zur minkowskischen Green-Funktion (Feynman-Funktion) im Ortsraum (nach [ROE 91]).

$$\tau_Q(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + \kappa_R^2 - \kappa_I^2)^2 + (2\kappa_R\kappa_I)^2} - |\mathbf{p}|^2 - \kappa_R^2 + \kappa_I^2 \right)^{-1/2} \quad \text{für } \kappa_R\kappa_I > 0 \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| \rightarrow \infty \quad \frac{|\mathbf{p}|}{2\kappa_R\kappa_I} &= 33.58 \frac{|\mathbf{p}|}{\hat{m}^2}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Dieses Verhalten kann für große Impulse als teilchenartige Anregung interpretiert werden und entspricht den experimentellen Beobachtungen bei der Entstehung von Quark- und Gluon-Jets.

Bevor wir im folgenden Abschnitt das Fermion-Kondensat berechnen, einige zusammenfassende Bemerkungen zu der bestimmten Lösung der SK-Gleichungen:

- Es existieren Lösungen der SK-Gleichungen, die für *beide* elementaren Feldanregungen Confinement zeigen. Dieses Resultat ist nichttrivial.
- Die ST-Identitäten sind geeignet, die bei der Lösung des SK-Problems in $r = 1$ verbleibende Restfreiheit festzulegen, und zwar so, daß die Confinement-Bereiche für Gluonen und Quarks nicht verlassen werden.
- Die Nebenbedingung legt w_2 ebenso fest, ohne daß der Quark-Confinement-Bereich verlassen wird.
- Es liegt DCSB vor.

Dieses Verfahren der Lösungsbestimmung zeigt, daß die angegebene Lösung die wesentlichen Eigenschaften der erwarteten physikalischen Lösung hat. Im Prinzip sind auch andere Lösungsverfahren möglich, z.B. eignet sich zur Lösungsfindung im chiralen Fall die Verwendung der Bewegungsgleichungs-Kondensate [DRI 97].

7.4 Das Fermion-Kondensat

In [STR 96] wurde das Quark-Kondensat inklusive aller endlichen Beiträge berechnet und durch eine Verallgemeinerung der aus der Störungstheorie bekannten Normalordnungsvorschrift renormiert. Dieses lautet für $r = 1$:

$$\bar{F}F = -\frac{N_C}{(2\pi)^2} \left(\mu^3 \ln \frac{\mu^2}{|\kappa_+|^2} + 2i \arg(\kappa_+) \left(\kappa_+ \kappa_- \kappa_2 \frac{\kappa_+^2 + \kappa_-^2}{\kappa_+^2 - \kappa_-^2} - (\kappa_+ + \kappa_- - \kappa_2) \frac{\kappa_+^4 + \kappa_-^4}{\kappa_+^2 - \kappa_-^2} \right) \right) \quad (7.31)$$

mit $\mu^3 = (\kappa_+ + \kappa_- - \kappa_2)(\kappa_+^2 + \kappa_-^2) - \kappa_+ \kappa_- \kappa_2$.

Für dieses Quark-Kondensat haben wir im vorangehenden Abschnitt alle auftretenden Parameter berechnet:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0.1406 \hat{m}, \\ \kappa_2 &= 0.0762 \hat{m}, \\ \kappa_3^2 &= 0.01121 \hat{m}^2, \end{aligned}$$

und es folgt direkt:

$$\bar{F}F = -(0.10633 \hat{m})^3. \quad (7.32)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem für leichte Quarks in [SVZ 79] angegebenen

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle \simeq -(250 \text{ MeV})^3, \quad (7.33)$$

so fällt zunächst positiv auf, daß das negative Vorzeichen mit unseren Ergebnissen übereinstimmt. Diese Bestimmung ist für eine feste Kopplung durchgeführt worden. Bestimmt man hieraus durch Vergleich den renormierungsgruppeninvarianten Massenparameter, so ergibt sich:

$$\hat{m}_{(u/d)} \simeq 2.35 \text{ GeV}. \quad (7.34)$$

Dieser Wert liegt um die Größenordnung 10^3 über den von uns entsprechend [PDG 96] gewählten Quarkmassen. Für diese Diskrepanz können neben der niedrigen rationalen Approximationsstufe $r = 1$ und der Beschränkung auf die 1-Schleifen-Ordnung auch andere Ursachen vorliegen. Zum einen sind die von uns vorgegebenen Werte für \hat{m} willkürlich

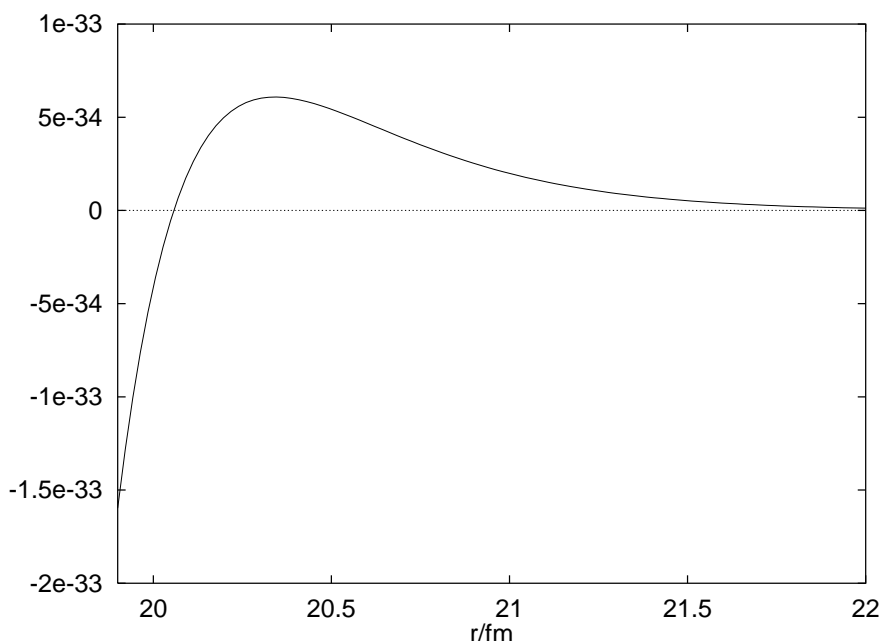


Abbildung 7.6: Der dimensionslose ortsabhängige Anteil des Potentials (7.36).

gewählt und müssen nicht den richtigen renormierungsgruppeninvarianten Quarkmassen entsprechen, und zum anderen ist bei der Kondensatberechnung in [STR 96] ein im Vergleich zur Störungstheorie modifiziertes, *subtraktives* Renormierungsverfahren verwendet worden, von dem begrifflich nicht klar ist, ob es dieselbe Größe liefert wie die semiempirischen Bestimmungen von [SVZ 79].

7.5 Schwere Quarkonia

In der Arbeit [BEC 91] wurden mit den Ansätzen aus [HÄB 90] Bindungszustände schwerer Quarkonia berechnet. Verwendet wurde ein statisches, Coulomb-artiges Potential, mit dem numerisch eine endliche Anzahl gebundener Zustände gefunden wurde. Mit den in dieser Arbeit verwendeten Ansätzen und bestimmten Parametern berechnen wir dieses Potential für große Quarkmassen. Der Zugang ist „straightforward“: man betrachtet den BS-Kern in erster Ordnung, also den 1-Gluon-Austauschgraphen, anschließend geht man zu der Minkowskischen Theorie über und führt eine nichtrelativistische Näherung durch, indem man die Nullkomponenten der Impulse auf Null setzt. Wir erhalten für die reine Impulsabhängigkeit:

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \propto \frac{\mathbf{q}^2 + u_2 \Lambda^2 + 2z_{10} \Lambda^2 + \frac{z_{10}^2}{u_3} (\mathbf{q}^2 + u_1 \Lambda^2)}{(\mathbf{q}^2 + u_+ \Lambda^2)(\mathbf{q}^2 + u_- \Lambda^2)}. \quad (7.35)$$

Der wesentliche Unterschied zu der Rechnung in [BEC 91] ist, daß hier der kompensierende Pol berücksichtigt wird und kein reeller Gluon-Pol vorliegt. Die Fourier-Transformation dieses Kerns kann analytisch mit Hilfe des Residuensatzes ausgeführt werden, und das

Resultat ist ein oszillierendes Yukawa-Potential (vgl. Abb. 7.6):

$$V(r) \propto \frac{\exp(-2.0561\sqrt{|x_1|}\Lambda r)}{\sqrt{|x_1|}\Lambda r} 1.2907 \sin(0.57706 + 0.075767\sqrt{|x_1|}\Lambda r). \quad (7.36)$$

Die ersten beiden Nullstellen liegen bei 20 bzw. 45 fm . Sie sind erheblich größer als die mittleren Radien schwerer Quarkonia ($\simeq 0.5 fm$), und es zeigt sich, daß der oszillierende Anteil des Potentials keinen großen Einfluß auf die Quarkonium-Bindungszustände hat. Dieses Potential könnte analog zu [BEC 91] als Input verwendet werden, um Bindungszustände numerisch zu beschreiben.

Unsere Confinement-Interpretation, in der die Quarks und Gluonen als kurzlebige Elementaranregungen angesehen werden, führt *nicht* auf ein für große Abstände linear ansteigendes Potential. Mit einem solchen wird (vgl. z.B. [BC 88]) Confinement zumeist beschrieben; es besitzt unendlich viele gebundene Zustände, von denen die niedrigsten an beobachtete Quarkonium-Zustände gefittet werden, während von den höheren Niveaus angenommen wird, daß sie in hadronische Kanäle zerfallen. Es sei betont, daß die hier verwendete Auffassung von Confinement als einer bereits der *einzelnen* Elementaranregung zukommenden Eigenschaft von diesem Bild unendlich hoher Potentiale grundsätzlich verschieden ist. Confinement in mesonischen Systemen ist, wie z.B. die Rechnungen von [BEC 91] zeigen, im Rahmen dieser Auffassung allein auf Grund der Eigenschaften der Propagatoren und ohne unendlich hohe Potentiale konsistent beschreibbar.

7.6 Der Quark-Antiquark-Photon-Vertex

Im Standardmodell tritt der Quark-Antiquark-Photon-Vertex auf. Nimmt man an, daß die Abhängigkeit vom Photonimpuls auf der Approximationsstufe $[1, 0]$ ihre störungstheoretische Form beibehält (d.h. gar nicht auftritt), so lautet der Ansatz für den transversalen Teil des Vertex

$$\Gamma_{Q\bar{Q}T}^{[1,0]}{}^\mu(-p_1, p_2, k) = \gamma^\mu + z_{0,1} \left(\frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right) + z_{0,4} \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}}. \quad (7.37)$$

Das Photon soll trotz nichtperturbativer Modifikation der Quarks masselos bleiben. Ein Beitrag zur DS-Gleichung des inversen Photon-Propagators ist die Quark-Schleife. Als einzige enthält diese nichtperturbative Modifikationen, die allerdings wegen der Nebenbedingungen NB G2.2, vgl. Kapitel 4, nicht zum Photon-Propagator beitragen. Dadurch wird die in [MEY 94] gefundene Bedingung für die Masselosigkeit des Photons bestätigt.

Die DS-Gleichung für den Quark-Antiquark-Photon-Vertex enthält in 1-Schleifen-Ordnung nur „abelsche“ Dreiecksdiagramme, die in Landau-Eichung keine Divergenzen ausbilden können. „Nichtabelsche“ Dreiecksdiagramme existieren für den Quark-Antiquark-Photon-Vertex nicht, so daß, um die nichtperturbativen Modifikationen selbstkonsistent reproduzieren zu können, die 2-Schleifen-Diagramme herangezogen werden müssen.

Zusammenfassung und Ausblick

Die relevanten Terme der Fermion-Selbstenergie als Beitrag zur Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Fermion-Propagator wurden im Rahmen der nichtperturbativ erweiterten Störungstheorie berechnet und die Selbstkonsistenzgleichungen für beliebigen ungeraden Approximationsgrad r aufgestellt. Daß dies trotz Vorhandensein externer Strommassen durch eine geeignete Bestimmung der nichtperturbativen divergenten Anteile möglich ist, stellt ein wesentliches Resultat der vorliegenden Arbeit dar.

Der kompensierende Pol erforderte die Berechnung der Schleifenbeiträge zur Dyson-Schwinger-Gleichung des inversen Gluon-Propagators. Bei der Berechnung der Fermion-Schleife ergaben sich im massiven Fall unvermeidbare Nebenbedingungen. Dieses Verhalten führte zu einem unstetigen chiralen Limes $\hat{m} \rightarrow 0$.

Eine entsprechende Diagrammberechnung ist für die Dyson-Schwinger-Gleichung der Fermion-Gluon-Antifermion-Vertex-Gleichung erfolgt, und die Selbstkonsistenzgleichungen wurden für beliebigen ungeraden Approximationsgrad r aufgestellt. Das Problem der Extraktion der SK-Gleichungen für beliebigen ungeraden Approximationsgrad r konnte gelöst werden, da der Mechanismus des kompensierenden Pols die Zählerpolynome der Ansätze so eingeschränkt hat, daß die SK-Gleichungen durch Residuenbildungen gewonnen werden konnten. Damit ist das Aufstellen von SK-Gleichungen im Prinzip für sämtliche DS-Gleichungen auf beliebiger Approximationsstufe r möglich, und wurde hier für die fermionischen Gleichungen erstmals im einzelnen demonstriert.

Außerdem wurden Berechnungen der fermionischen Beiträge zum Selbstkonsistenzproblem des 3-Gluon-Vertex durchgeführt. Diese Diagramme führen im Fall vorhandener externer Strommassen auf Nebenbedingungen zu den Selbstkonsistenzgleichungen, d.h. analog zum inversen Gluon-Propagator sind diese Diagramme nur für den Fall der masselosen Quantenchromodynamik als Beiträge zu den entsprechenden Selbstkonsistenzgleichungen relevant.

Diese in Abschnitt 4.1 schon hervorgehobene Unstetigkeit für $\hat{m} \rightarrow 0$ in der Rückwirkung des Fermion-Sektors auf den Gluon-Sektor ist ein erratischer Zug des hier durchgeführten SK-Verfahrens. Sie kann noch nicht als voll verstanden gelten. Das einzige analoge Phänomen in anderen nichtperturbativen Zugängen zur QCD dürfte derzeit das Resultat von 't Hooft [THO 76] sein, wonach die Wechselwirkung von Fermionen mit einem Hintergrund-Eichfeld vom Instantontyp für Fermionen mit kleiner, endlicher und mit ex-

akt verschwindender Masse qualitativ verschieden ist. Der Sachverhalt steht insofern nicht völlig isoliert da; dennoch ist natürlich nicht auszuschließen, daß bessere, derzeit noch nicht erkennbare Methoden für das SK-Problem existieren, die diese Unstetigkeit beheben.

Mit den Ergebnissen aus [DRI 97] waren sämtliche Selbstkonsistenzgleichungen, die sich aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen der oberflächlich divergenten Vertexfunktionen ergeben, für den Approximationsgrad $r = 1$ bestimmt, und es konnten reelle Lösungen dieses nichtlinearen, polynomialen Gleichungssystems gefunden werden, die neben der dynamischen Brechung der chiralen Symmetrie auch die Ausbildung kurzreichweitiger Propagatoren für beide elementaren Anregungen — Gluonen *und* Quarks — zeigen. Daß solche Lösungen möglich sind, war keineswegs von vornherein erkennbar und ist ein Hauptresultat der vorliegenden Arbeit.

Die Diagrammberechnungen auf beliebiger ungerader Approximationsstufe im Gluon-Sektor, insbesondere für den technisch komplizierten Fall des 4-Gluon-Vertex, stehen noch aus. Eine interessante Aufgabe ist dann die Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems mit algebraischen oder/und numerischen Methoden. Problematisch ist hier die durch den Mechanismus des kompensierenden Poles entstandene Unterbestimmung des Gleichungssystems. In der Bethe-Salpeter-resummierten Form der Dyson-Schwinger-Gleichungen tritt diese Unterbestimmung nicht auf, so daß künftige Untersuchungen voraussichtlich diese Form des Gleichungssystems bevorzugen werden. Die fermionischen Diagrammberechnungen, das Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichung und deren numerische Lösung für den Approximationsgrad $r = 1$ wurden durchgeführt.

Das Problem der zusätzlichen Unterbestimmung durch das Fehlen von Bestimmungsgleichungen für die Parameter $u_{r,2s}$ und $\kappa_{r,2s}$, die in den Polfaktoren enthalten sind, wurde auf der Approximationsstufe $r = 1$ durch zusätzliche Gleichungen aus ST-Identitäten gelöst. Es besteht aber auch die Möglichkeit, Bewegungsgleichungs-Kondensate, d.h. Matrixelemente *zusammengesetzter*, lokaler Operatoren, heranzuziehen. Hier fehlt zur Zeit eine klare Einsicht bzw. Entscheidung, welche dieser Typen von Zusatzinformationen für ein systematisches, auch bei beliebigem r anwendbares Verfahren am besten geeignet sind.

Es muß betont werden, daß in einer Theorie mit Confinement, in der S-Matrixelemente mit äußeren Gluon- und Quarklinien verschwinden, die selbstkonsistent etablierten, erweiterten Feynman-Regeln zunächst nur die diagrammatische Berechnung von *off-shell-Green-Funktionen der elementaren Felder* ermöglichen. Die Berechnung von S-Matrixelementen, deren äußere Linien stets *Hadronen* sind, würde zusätzlich die Bereitstellung von Hadron-Quark-Vertizes, d.h. die Bestimmung gewisser Bethe-Salpeter-Amplituden für Mesonen und Baryonen, erfordern, die mit den Feynman-Regeln konsistent sind. Diese Aufgabe wäre die natürliche Fortsetzung der vorliegenden Arbeit und kann prinzipiell im Rahmen der erweiterten Störungstheorie formuliert und gelöst werden.

Anhang A

Feynman-Regeln und DS-Gleichungen der QCD

A.1 Die störungstheoretischen Basisvertizes

A.1.1 Die Wirkung

Die euklidische QCD-Wirkung im Ortsraum lautet:

$$\begin{aligned}
 S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = & \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu}(x) F_a^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_a^\mu(x))^2 \right. \\
 & + (\partial^\mu \bar{c}_a(x)) [\partial^\mu \delta_{ab} + \bar{g}_0 f_{abc} A_c^\mu(x)] c_b(x) \\
 & \left. + \sum_f \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \left[-i \not{\partial} \delta^{ij} + m_0^{(f)} \delta^{ij} + \bar{g}_0 T_a^{ij} \gamma^\mu A_a^\mu(x) \right] \psi_{(f)}^j(x) \right).
 \end{aligned}$$

Die Matrizen

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a \quad (\text{A.1})$$

sind die Erzeuger der fundamentalen Darstellung der $SU(3)$. Die nackte, dimensionell regularisierte ($D = 4 - 2\epsilon$), euklidische QCD-Wirkung im Impulsraum hat die Form:

$$\begin{aligned}
 S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = & \\
 & - \frac{1}{2} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{VV a_1 a_2}^{(0) \mu_1 \mu_2}(q_2) A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) \\
 & + \frac{1}{3!} g_0 \nu_0^\epsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
 & \quad \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3}(q_1, q_2, q_3) A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
 & - \frac{1}{4!} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_4}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
 & \quad \Gamma_{4V a_1 a_2 a_3 a_4}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3) A_{a_4}^{\mu_4}(q_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{G\bar{G}a_1 a_2}^{(0)}(q_2^2) \bar{c}_{a_1}(q_1) c_{a_2}(q_2) \\
& + g_0 \nu_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{(0)\mu_3}(q_1) \bar{c}_{a_1}(q_1) c_{a_2}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
& - \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \sum_f \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}(f)}^{(0)}(q_2) \psi_{(f)}^j(q_2) \\
& + g_0 \nu_0^\varepsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
& \quad \sum_f \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \Gamma_{F\bar{F}(f)}^{(0)}(q_2) \psi_{a_3}^{ij\mu_3}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3)
\end{aligned}$$

mit den Vertexfunktionen 0. Ordnung, durch die die Wirkung eine positiv definite Form annimmt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{VV a_1 a_2}^{(0)\mu_1 \mu_2}(p) &= -\delta_{a_1 a_2} \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} p^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^{\mu_1} p^{\mu_2} \right) \\
\Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{(0)\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) &= i f_{a_1 a_2 a_3} (\delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} \\
&\quad + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \\
&\quad + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2}) \\
\Gamma_{4V a_1 a_2 a_3 a_4}^{(0)\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= f_{a_1 a_2 b} f_{a_3 a_4 b} (\delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4}) \\
&\quad + f_{a_1 a_3 b} f_{a_4 a_2 b} (\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3}) \\
&\quad + f_{a_1 a_4 b} f_{a_2 a_3 b} (\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4}) \\
\Gamma_{G\bar{G} a_1 a_2}^{(0)}(p^2) &= -\delta_{a_1 a_2} p^2 \\
\Gamma_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{(0)\mu_3}(p) &= i f_{a_1 a_2 a_3} p^{\mu_3} \\
\Gamma_{F\bar{F}(f)}^{(0)ij}(p) &= -\delta^{ij} (\not{p} + m_0^{(f)}) \\
\Gamma_{F\bar{F}V(f) a_3}^{(0)ij\mu_3} &= T_{a_3}^{ij} \gamma^{\mu_3}
\end{aligned}$$

A.1.2 Feynman-Regeln

Nackter Gluon-Propagator:

$$D_{a_1 a_2}^{(0)\mu_1 \mu_2}(p) = \delta_{a_1 a_2} (\delta^{\mu_1 \mu_2} p^2 - (1 - \xi) p^{\mu_1} p^{\mu_2}) \frac{1}{p^4} \quad \text{---}$$

Nackter Geist-Propagator:

$$\bar{D}_{a_1 a_2}^{(0)}(p^2) = \delta_{a_1 a_2} \frac{1}{p^2} \quad \text{---} \blacktriangleleft \text{---}$$

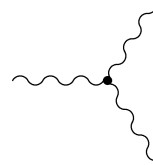
Nackter Fermion-Propagator:

$$S^{(0)ij}(p) = \delta^{ij} \frac{1}{(\not{p} + m_0)}$$



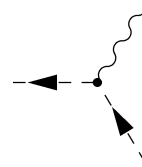
Nackter 3-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_{3V a_1 a_2 a_3}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) = & i f_{a_1 a_2 a_3} (\delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} \\ & + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} \\ & + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2}) \end{aligned}$$



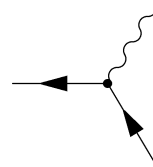
Nackter Geist-Antigeist-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{GV a_1 a_2 a_3}^{(0) \mu_3}(p) = i f_{a_1 a_2 a_3} p^{\mu_3}$$



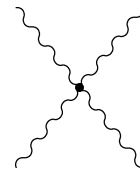
Nackter Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{F\bar{F}V a_3}^{(0) ij \mu_3} = T_{a_3}^{ij} \gamma^{\mu_3}$$



Nackter 4-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4V a_1 a_2 a_3 a_4}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = & f_{a_1 a_2 b} f_{a_3 a_4 b} (\delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4}) \\ & + f_{a_1 a_3 b} f_{a_4 a_2 b} (\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3}) \\ & + f_{a_1 a_4 b} f_{a_2 a_3 b} (\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4}) \end{aligned}$$



Die Pfeilrichtung der Fermion- und Geist-Linien gibt die Richtung des Impulses an. Die Impulse der Vertizes mit äußeren Gluonbeinen sind als einlaufend zu betrachten. Geist- und Fermion-Schleifen erhalten ein Vorzeichen und Diagramme mit Gluon-Beinen einen Symmetriefaktor. Bei den fermionischen Graphen haben wir den Flavour-Index vernachlässigt.

A.2 Euklidische Green- und Vertexfunktionen

A.2.1 Definition durch erzeugende Funktionale

Erzeugendes Funktional für die euklidischen Green-Funktionen:

$$Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{Z_E [0, 0, 0, 0, 0]} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[- S_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(J_a^\mu(-q) A_a^\mu(q) + \bar{c}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) c_a(q) + \sum_f \left(\bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\eta}_{(f)}^i(-q) \psi_{(f)}^i(q) \right) \right) \right]$$

Erzeugendes Funktional für die zusammenhängenden Green-Funktionen:

$$W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] = \ln Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]$$

Erzeugendes Funktional für die Vertexfunktionen durch Legendretransformation:

$$\Gamma_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(J_a^\mu(-q) A_a^\mu(q) + \bar{c}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) c_a(q) + \sum_f \left(\bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\eta}_{(f)}^i(-q) \psi_{(f)}^i(q) \right) \right)$$

Im weiteren Verlauf vernachlässigen wir den Flavourindex f . Wir definieren die zusammenhängenden (connected) Green-Funktionen:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^n W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta J_{a_1}^{\mu_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) G_{nV(c)}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(p_1, \cdots, p_n) \\ & \frac{\delta^n W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \omega_{a_2}(p_2) \delta \bar{\omega}_{a_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) G_{G\bar{G}(n-2)V(c)}^{\mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \cdots, p_n) \\ & \frac{\delta^n W_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \eta^{l_2}(p_2) \delta \bar{\eta}^{l_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) G_{F\bar{F}(n-2)V(c)}^{l_1 l_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \cdots, p_n), \end{aligned}$$

und Vertexfunktionen:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^n \Gamma_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]}{\delta A_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta A_{a_1}^{\mu_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) (g_0 \nu_0^\varepsilon)^{n-2} \Gamma_{nV_{a_1 \cdots a_n}^{\mu_1 \cdots \mu_n}}(p_1, \cdots, p_n) \\ & \frac{\delta^n \Gamma_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]}{\delta A_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta A_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta c_{a_2}(p_2) \delta \bar{c}_{a_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) (g_0 \nu_0^\varepsilon)^{n-2} \Gamma_{G\bar{G}(n-2)V_{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}^{\mu_3 \cdots \mu_n}}(p_1, \cdots, p_n) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta^n \Gamma_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi]}{\delta A_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta A_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \psi^{l_2}(p_2) \delta \bar{\psi}^{l_1}(p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} = (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) (g_0 \nu_0^\varepsilon)^{n-2} \Gamma_{F\bar{F}(n-2)V}^{l_1 l_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \cdots, p_n).$$

Bei der Funktionalableitung nach den grassmannwertigen Feldern ist zu beachten, daß in dieser Arbeit alle Ableitungen als Linksdifferentiationen zu lesen sind.

Für die Propagatoren und die inversen Propagatoren verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\delta_{a_1 a_2} D^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := D_{a_1 a_2}^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := G_{VV(c)}^{\mu_1 \mu_2}(p_1, p_2) \quad (\text{A.2})$$

$$\delta_{a_1 a_2} \tilde{D}(p_2^2) := \tilde{D}_{a_1 a_2}(p_2^2) := G_{G\bar{G}(c)}_{a_1 a_2}(p_1, p_2) \quad (\text{A.3})$$

$$\delta^{ij} S(p_2) := S^{ij}(p_2) := G_{F\bar{F}(c)}^{l_1 l_2}(p_1, p_2) \quad (\text{A.4})$$

$$\delta_{a_1 a_2} \Gamma_{VV}^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := \Gamma_{VV}^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := \Gamma_{VV}^{\mu_1 \mu_2}(p_1, p_2) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_{a_1 a_2} \Gamma_{G\bar{G}}(p_2^2) := \Gamma_{G\bar{G}}(p_2^2) := \Gamma_{G\bar{G}}(p_1, p_2) \quad (\text{A.6})$$

$$\delta^{l_1 l_2} \Gamma_{F\bar{F}}(p_2) := \Gamma_{F\bar{F}}^{l_1 l_2}(p_2) := \Gamma_{F\bar{F}}^{l_1 l_2}(p_1, p_2) \quad (\text{A.7})$$

Der Zusammenhang zwischen zusammenhängenden Green-Funktionen und den Vertexfunktionen (in abgekürzter Schreibweise, ohne Indizes) lautet:

$$D(p) \cdot \Gamma_{VV}(p) = -1 \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{D}(p^2) \cdot \Gamma_{G\bar{G}}(p^2) = -1 \quad (\text{A.9})$$

$$S(p) \cdot \Gamma_{F\bar{F}}(p) = -1 \quad (\text{A.10})$$

$$G_{3V(c)}(p_1, p_2, p_3) = g_0 \nu_0^\varepsilon \Gamma_{3V}(p_1, p_2, p_3) D(p_1) D(p_2) D(p_3) \quad (\text{A.11})$$

$$G_{G\bar{G}V(c)}(p_1, p_2, p_3) = g_0 \nu_0^\varepsilon \tilde{D}(p_1^2) \Gamma_{G\bar{G}V}(p_1, p_2, p_3) \tilde{D}(p_2^2) D(p_3) \quad (\text{A.12})$$

$$G_{F\bar{F}V(c)}(p_1, p_2, p_3) = g_0 \nu_0^\varepsilon S(-p_1) \Gamma_{F\bar{F}V}(p_1, p_2, p_3) S(p_2) D(p_3) \quad (\text{A.13})$$

$$G_{4V(c)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 T_{4V}(p_1, p_2, p_3, p_4) D(p_1) D(p_2) D(p_3) D(p_4). \quad (\text{A.14})$$

A.2.2 Feynman-Regeln

Mit den Vorschriften aus Anhang A.1.2 definieren wir Diagramme für die Propagatoren durch fettgedruckte Linien und für die Vertexfunktionen mit mehr als 2 äußeren Beinen durch Kreise, in die Linien einlaufen, die nicht mit den Propagatoren zu verwechseln sind, sondern die zum Vertex gehören.

Gluon-Propagator:



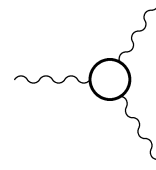
Geist-Propagator:



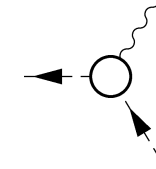
Fermion-Propagator:



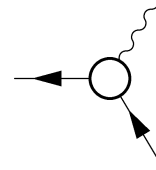
3-Gluon-Vertex:



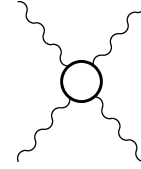
Geist-Antigeist-Gluon-Vertex:



Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex:



4-Gluon-Vertex:



Mit diesen Regeln können die DS-Gleichungen, die im nächsten Abschnitt hergeleitet werden, in diagrammatischer Form angegeben werden.

A.3 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Wir benötigen zunächst die gluonische und die fermionische Dyson-Schwinger-Gleichung in funktionaler Form.

Der gluonische Kanal:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta A_{b_1}^{\nu_1}(-p_1)} \exp \left[-S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(J_a^\mu(-q) A_a^\mu(q) + \dots \right) \right] \\
&= (-1) \left[\Gamma_{VV b_1 a_2}^{(0) \nu_1 \mu_2}(p_1) \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-p_1)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \Gamma_{3V b_1 a_2 a_3}^{(0) \nu_1 \mu_2 \mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \\
&\quad + \frac{1}{6} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_2 \int d^D q_3 \Gamma_{4V b_1 a_2 a_3 a_4}^{(0) \nu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(-q_3)} \frac{\delta}{\delta J_{a_4}^{\mu_4}(q_2 + q_3 - p_1)} \\
&\quad \left. - (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \Gamma_{GV a_1 a_2 b_1}^{(0) \nu_1}(q_1) \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(-q_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_{a_2}(q_1 - p_1)} \right]
\end{aligned}$$

$$-(g_0\nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \sum_f \frac{\delta}{\delta\eta^i(-q_1)} \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)ij\nu_1} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j(q_1-p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} J_{b_1}^{\nu_1}(p_1) \Big] \underbrace{e^{W_E[J,\omega,\bar{\omega},\eta,\bar{\eta}]}}_{=Z_E[J,\omega,\bar{\omega},\eta,\bar{\eta}]}$$

Der fermionische Kanal:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{Z_E[0,0,0,0,0]} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}^{l_1}(-p_1)} \exp \left[-S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(J_a^\mu(-q) A_a^\mu(q) + \dots \right) \right] \\ &= (-1) \left[\bar{\Gamma}_2^{(0)l_1j}(p_1) \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j(-p_1)} \right. \\ &\quad \left. + (g_0\nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \bar{\Gamma}_3^{(0)l_1j\mu_3} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j(-q_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2-p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} \eta^{l_1}(p_1) \right] \underbrace{e^{W_E[J,\omega,\bar{\omega},\eta,\bar{\eta}]}}_{=Z_E[J,\omega,\bar{\omega},\eta,\bar{\eta}]} \end{aligned}$$

DS-Gleichung für den inversen Gluon-Propagator:

Nach Anwendung der Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta J_{b_2}^{\nu_2}(p_2)}$, Nullsetzen der Quellen und Abspalten der Deltafunktion $\delta^D(p_2 - p_1)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \delta^{\nu_1\nu_2} \delta_{b_1b_2} &= -\Gamma_{VV}^{(0)\nu_1\mu_2}(p_1) D^{\mu_2\nu_2}(p_1) \delta_{b_1b_2} \\ &\quad - \frac{1}{2} (g_0\nu_0^\varepsilon) \int d^D q_2 \Gamma_{3Vb_1a_2a_3}^{(0)\nu_1\mu_2\mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) G_{3V(c)}^{\mu_3\mu_2\nu_2}(q_2 - p_1, -q_2, p_1) \\ &\quad - \frac{1}{6} (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_2 \int d^D q_3 \Gamma_{4Vb_1a_2a_3a_4}^{(0)\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} G_{4V(c)}^{\mu_4\mu_3\mu_2\nu_2}(q_2 + q_3 - p_1, -q_3, -q_2, p_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int d^D q_3 \Gamma_{4Vb_1b_2a_3a_3}^{(0)\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} D^{\nu_2\mu_2}(p_1) D^{\mu_3\mu_4}(q_3) \\ &\quad + (g_0\nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)\nu_1}(q_1) G_{G\bar{G}V(c)}^{\nu_2}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) \\ &\quad + (g_0\nu_0^\varepsilon) \int d^D q_1 \sum_f \text{Tr} \left[\Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)ij\nu_1} G_{F\bar{F}V(c)}^{ji\nu_2}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) \right] \end{aligned}$$

Durch Entwicklung nach Vertexfunktionen (vgl. Kapitel A.2.1) ergibt sich die Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Gluon-Propagator:

$$\begin{aligned} \Gamma_{VV}^{\nu_1\nu_1'}(p_1) \delta_{b_1b_2} &= \Gamma_{VV}^{(0)\nu_1\nu_1'}(p_1) \delta_{b_1b_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{3Vb_1a_2a_3}^{(0)\nu_1\mu_2\mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) \\ &\quad \quad \quad D^{\mu_3\mu_3'}(q_2 - p_1) D^{\mu_2\mu_2'}(-q_2) \Gamma_{3V}^{\mu_3'\mu_2'\nu_1'}(q_2 - p_1, -q_2, p_1) \\ &\quad + \frac{1}{6} (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \Gamma_{4Vb_1a_2a_3a_4}^{(0)\nu_1\mu_2\mu_3\mu_4} D^{\mu_4\mu_4'}(q_2 + q_3 - p_1) \\ &\quad \quad \quad D^{\mu_3\mu_3'}(-q_3) D^{\mu_2\mu_2'}(-q_2) T_{s(4V)}^{\mu_4'\mu_3'\mu_2'\nu_2'}(q_2 + q_3 - p_1, -q_3, -q_2, p_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \Gamma_{4Vb_1b_2a_3a_3}^{(0)\nu_1\nu_1'\mu_3\mu_4} D^{\mu_3\mu_4}(q_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{a_1 a_2 b_1}{}^{\nu_1}(q_1) \tilde{D}(q_1^2) \tilde{D}((q_1 - p_1)^2) \Gamma_{G\bar{G}V}{}_{a_2 a_1 b_2}{}^{\nu'_1}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) \\
& - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \sum_f Tr \left[\Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)}{}^{ij}{}_{b_1}{}^{\nu_1} S(q_1 - p_1) \Gamma_{F\bar{F}V}{}^{ji}{}_{b_2}{}^{\nu'_1}(q_1 - p_1, -q_1, p_1) S(-q_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\text{---})^{-1} = - (\text{---})^{-1} + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{(A)} \\
& + \frac{1}{6} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^4 \text{(B)} + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{(C)} \\
& - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{(D)} - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{(E)}
\end{aligned}$$

(A.15)

Nochmalige Funktionalableitung ergibt die DS-Gleichung für den 3-Gluon-Vertex, die in [DRI 96] angegeben ist.

DS-Gleichung für den inversen Quark-Propagator:

Nach Anwendung der Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta \eta^{l_2}(p_2)}$, Nullsetzen der Quellen und Abspalten der Deltafunktion $\delta^D(p_2 - p_1)$ erhält man:

$$\delta^{l_1 l_2} = -\delta^{l_1 l_2} \Gamma_{F\bar{F}}^{(0)}{}^{l_1 j}(p_1) S(p_1) - (g_0 \nu_0^\varepsilon) \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)}{}^{l_1 j}{}_{a_3}{}^{\mu_3} G_{F\bar{F}V(c)}{}^{j l_2}{}_{a_3}{}^{\mu_3}(-q_2, p_1, q_2 - p_1)$$

Durch Entwicklung nach Vertexfunktionen (vgl. A.13) ergibt sich die Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Quark-Propagator:

$$\begin{aligned}
\delta^{l_1 l_2} \Gamma_{F\bar{F}}(p_1) &= \delta^{l_1 l_2} \Gamma_{F\bar{F}}^{(0)}(p_1) + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0)}{}^{l_1 j}{}_{a_3}{}^{\mu_3} S(q_2) \\
&\quad \cdot D^{\mu_3 \mu'_3}(q_2 - p_1) \Gamma_{F\bar{F}V}{}^{j l_2}{}_{a_3}{}^{\mu'_3}(-q_2, p_1, q_2 - p_1)
\end{aligned}
\tag{A.16}$$

$$- (\text{---})^{-1} = - (\text{---})^{-1} + (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \text{(Diagram)}$$

Eine ähnliche Dyson-Schwinger-Gleichung läßt sich herleiten, wenn man nicht mit der Funktionalableitung nach $\bar{\psi}$ sondern mit der Funktionalableitung nach ψ beginnt:

$$-(\text{---}\leftarrow\text{---})^{-1} = -(\text{---}\leftarrow\text{---})^{-1} + (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{---}\leftarrow\text{---} \right]^{-1}$$

Daraus kann man durch $p \rightarrow -p$ und anschließender Ladungskonjugationstransformation, vermittelt durch $U(\mathcal{C}) = i\gamma_2\gamma_0$, folgende Identität für den Quark-Gluon-Vertex herleiten:

$$U(\mathcal{C}) (\Gamma_{F\bar{F}V}(p, -q, q - p))^T U(\mathcal{C})^{-1} = -\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}(-q, p, q - p) \quad (\text{A.17})$$

DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Vertex im fermionischen Kanal:

Nach Anwendung der Funktionalableitungen $\frac{\delta}{\delta\eta^{l_2}(p_2)} \frac{\delta}{\delta J_b^{\nu}(p_3)}$, Nullsetzen der Quellen und Abspalten der Deltafunktion $\delta^D(p_2 - p_1)$ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0) l_1 j}(p_1) G_{F\bar{F}V(c)}^{j l_2 \nu}(-p_1, p_2, p_1 - p_2) \\ &+ (g_0\nu_0^\varepsilon) \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0) l_1 j \mu_3} G_{F\bar{F}VV(c)}^{j l_2 \mu_3 \nu}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_1 - p_2) \\ &+ (g_0\nu_0^\varepsilon) \bar{\Gamma}_3^{(0) l_1 l_2 \mu_3} D_{a_3 b}^{\mu_3 \nu}(p_1 - p_2) S(p_2) \end{aligned}$$

Entwicklung nach Vertexfunktionen, insbesondere $T'_s(F\bar{F}VV) = T_s(F\bar{F}VV) - \Gamma_{F\bar{F}V} S \Gamma_{F\bar{F}V}$, und Ausnutzen der Dyson-Schwinger-Gleichung für den inversen Quark-Propagator ergibt eine Dyson-Schwinger-Gleichung für den Quark-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_{F\bar{F}V}^{l_1 l_2 \nu}(-p_1, p_2, p_1 - p_2) &= \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0) l_1 l_2 \nu} + (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{F\bar{F}V}^{(0) l_1 j \mu_3} S(q_2) \\ &\cdot D^{\mu_3 \mu'_3}(q_2 - p_1) T'_s(F\bar{F}VV)^{j l_2 \mu'_3 \nu}(-q_2, p_2, q_2 - p_1, p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

In diagrammatischer Form folgt:

$$\begin{aligned} \left[\text{---}\leftarrow\text{---} \right]^{-1} &= \left[\text{---}\leftarrow\text{---} \right]^{-1} + (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{---}\leftarrow\text{---} \right]^{-1} \\ &= \left[\text{---}\leftarrow\text{---} \right]^{-1} + (g_0\nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{---}\leftarrow\text{---} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$+ (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{Diagram: a loop with a wavy line and a fermion line} \right] + \dots \quad (\text{A.20})$$

mit Skelettgraphenentwicklung von $T'_{s(F\bar{F}VV)}$ in niedrigster Ordnung, d.h. Beiträge in 1-Schleifenordnung zum Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex.

DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex im gluonischen Kanal:

$$\begin{aligned}
 & \left[\text{Diagram: vertex with wavy line and fermion lines} \right] = \left[\text{Diagram: vertex with dot and fermion lines} \right] + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{Diagram: loop with wavy line and vertex } T'_s \right] \\
 & \quad - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{Diagram: loop with fermion line and vertex } T'_s \right] \\
 & \quad - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{Diagram: loop with dashed line and vertex } T'_s \right] \quad (\text{A.21})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\text{Diagram: vertex with dot and fermion lines} \right] = \left[\text{Diagram: loop with wavy line and vertex } T'_s \right] \\
 & \quad - (g_0 \nu_0^\varepsilon)^2 \left[\text{Diagram: loop with fermion line and vertex } T'_s \right] + \dots \quad (\text{A.22})
 \end{aligned}$$

Anhang B

Wichtige Ergänzungen

B.1 Partialbruchzerlegung der 3-Punkt-Vertizes für $r = 1$

Der Ansatz für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex lautet unter Berücksichtigung aller Einschränkungen, insbesondere durch das Auftreten kompensierender Pole [STI 94]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{F\bar{F}V}^{[1,0]\mu}(-p_1, p_2, k) = & \frac{1}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \frac{1}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \left(C_{0100}^{[1]} \gamma^\mu k^2 \hat{m}^2 \right. \\
 & + C_{0110}^{[1]} (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) k^2 \hat{m} \\
 & + C_{0111}^{[1]} \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 k^2 \\
 & + C_{1000}^{[1]} \gamma^\mu \Lambda \hat{m} \\
 & + C_{1010}^{[1]} (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \Lambda \hat{m}^2 \\
 & + C_{1011}^{[1]} \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \Lambda \hat{m} \\
 & + C_{1100}^{[1]} \gamma^\mu k^2 \Lambda \hat{m} \\
 & + C_{1110}^{[1]} (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) k^2 \Lambda \\
 & + C_{2000}^{[1]} \gamma^\mu \Lambda^2 \hat{m}^2 \\
 & + C_{2010}^{[1]} (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \Lambda^2 \hat{m} \\
 & + C_{2011}^{[1]} \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \Lambda^2 \\
 & + C_{2100}^{[1]} \gamma^\mu k^2 \Lambda^2 \\
 & + C_{3000}^{[1]} \gamma^\mu \Lambda^3 \hat{m} \\
 & + C_{3010}^{[1]} (\not{p}_1 \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}_2) \Lambda^3 \\
 & \left. + C_{4000}^{[1]} \gamma^\mu \Lambda^4 \right) \frac{1}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}}, \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

und in partialbruchzerlegter Form [STI 96]:

$$\Gamma_{F\bar{F}V}^{[1,0]\mu}(-p_1, p_2, k) = \gamma^\mu + z_{0,1} \left(\frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}} \right) + z_{0,4} \frac{\Lambda}{\not{p}_1 + \kappa_{1,2}} \gamma^\mu \frac{\Lambda}{\not{p}_2 + \kappa_{1,2}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Lambda^2}{k^2 + u_{1,2}\Lambda^2} \left(z_{1,0}\gamma^\mu + z_{1,1} \left(\frac{\Lambda}{p_1 + \kappa_{1,2}}\gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\Lambda}{p_2 + \kappa_{1,2}} \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + z_{1,4} \frac{\Lambda}{p_1 + \kappa_{1,2}}\gamma^\mu \frac{\Lambda}{p_2 + \kappa_{1,2}} \right).
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\Rightarrow z_{0,1} = C_{1110}^{[1]} - w_{1,2} \tag{B.3}$$

$$z_{0,4} = C_{2100}^{[1]} + C_{1100}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + w_{1,2}^2 - 2C_{1110}^{[1]} \left(w_{1,2} + w'_{1,2} \frac{\hat{m}}{\Lambda} \right) \tag{B.4}$$

$$z_{1,0} = C_{2011}^{[1]} + C_{1011}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} - u_{1,2} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 z_{1,1} &= C_{3010}^{[1]} + C_{2010}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{1010}^{[1]} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda} \right)^2 \\
 & - \left(w_{1,2} + w'_{1,2} \frac{\hat{m}}{\Lambda} \right) \left(C_{2011}^{[1]} + C_{1011}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} \right) - u_{1,2} \left(C_{1110}^{[1]} - w_{1,2} \right)
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 z_{1,4} &= C_{4000}^{[1]} + C_{3000}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{2000}^{[1]} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda} \right)^2 + C_{1000}^{[1]} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda} \right)^3 \\
 & - 2 \left(w_{1,2} + w'_{1,2} \frac{\hat{m}}{\Lambda} \right) \left(C_{3010}^{[1]} + C_{2010}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + C_{1010}^{[1]} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda} \right)^2 - C_{1110}^{[1]} u_{1,2} \right) \\
 & + \left(w_{1,2} + w'_{1,2} \frac{\hat{m}}{\Lambda} \right)^2 \left(C_{2011}^{[1]} + C_{1011}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} \right) - u_{1,2} \left(C_{2100}^{[1]} + C_{1100}^{[1]} \frac{\hat{m}}{\Lambda} + w_{1,2}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Auch die in Kapitel 2 definierten Parameter $\bar{C}_{mnn}^{[r]}$ lassen sich für $r = 1$ durch die z -Parameter ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{111}^{[1]} &= 1 \quad (\text{pert. Limes}) \\
 \bar{C}_{110}^{[1]} &= \bar{C}_{101}^{[1]} = z_{0,1} + \frac{\kappa_2}{\Lambda} \\
 \bar{C}_{100}^{[1]} &= z_{0,4} + 2 \frac{\kappa_2}{\Lambda} z_{0,1} + \left(\frac{\kappa_2}{\Lambda} \right)^2 \\
 \bar{C}_{011}^{[1]} &= z_{1,0} + u_2 \\
 \bar{C}_{010}^{[1]} &= \bar{C}_{001}^{[1]} = z_{1,1} + u_2 z_{0,1} + \frac{\kappa_2}{\Lambda} (z_{1,0} + u_2) \\
 \bar{C}_{000}^{[1]} &= z_{1,4} + u_2 z_{0,4} + 2 \frac{\kappa_2}{\Lambda} (z_{1,1} + u_2 z_{0,1}) + \left(\frac{\kappa_2}{\Lambda} \right)^2 (z_{1,0} + u_2)
 \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen für die Parameter des 3-Gluon-Vertex ergibt:

$$\begin{aligned}
 F_0^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{\sum_{m_1, m_2, m_3=0}^r C_{m_1, m_2, m_3}^{0[r]} p_1^{2m_1} p_2^{2m_2} p_3^{2m_3} (\Lambda^2)^{3r - m_1 - m_2 - m_3}}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 & \stackrel{(r=1)}{=} 1 + x_1 \left(\frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} \right) + x_2 \frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} + x_3 \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2} \\
 & \quad + x_4 \left(\frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} \right) \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2} + x_5 \frac{\Lambda^2}{p_1^2 + u_2\Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{p_2^2 + u_2\Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{p_3^2 + u_2\Lambda^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow C_{111}^{0[1]} &= 1 \quad (\text{pert. Limes}) \\
 C_{110}^{0[1]} &= x_3 + u_2 \\
 C_{101}^{0[1]} &= C_{011}^{0[1]} = x_1 + u_2 \\
 C_{100}^{0[1]} &= C_{010}^{0[1]} = x_4 + u_2(x_1 + x_3) + u_2^2 \\
 C_{001}^{0[1]} &= x_2 + 2u_2x_1 + u_2^2 \\
 C_{000}^{0[1]} &= x_5 + u_2(x_2 + 2x_4) + u_2^2(2x_1 + x_3) + u_2^3
 \end{aligned}$$

B.2 Der 4-Gluon-Vertex

Die Verarbeitung des allgemeinsten 4-Gluon-Vertex mit mehreren hundert verschiedenen Farb-Lorentz-Tensorstrukturen ist mit den derzeitigen Hilfsmitteln nicht möglich. Der folgende, erheblich vereinfachte Ansatz für den reduzierten, transversalen 4-Gluon-Vertex V_{4T} ist jedoch insofern theoretisch motiviert und ausgezeichnet, als er die *minimale* Form darstellt, die dynamisch — d.h. sowohl unter Bethe-Salpeter-Iteration in jedem Kanal als auch unter den Crossing-Operationen — selbstkonsistent ist und zugleich noch den perturbativen Limes enthält. Die Zerlegung, vgl. [STI 96, DRI 96, DRI 97],

$$\begin{aligned}
 V_{4T}^{[r,0] \mu'_1 \mu'_2 \mu'_3 \mu'_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= t^{\mu'_1 \mu_1}(p_1) t^{\mu'_2 \mu_2}(p_2) t^{\mu'_3 \mu_3}(p_3) t^{\mu'_4 \mu_4}(p_4) \\
 &\cdot \left(\Gamma_{4V}^{(0) \text{pert} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4} + \sum_{i=1}^{17} \zeta_i W_{(i)}^{[r,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \right), \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

in der die $W_{(i)}$ im perturbativen Limes $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden, enthält die Farbtensoren

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) := \text{Tr}(T_{a_1} T_{a_2} T_{a_3} T_{a_4}) \quad \text{und} \quad (a_1 a_2) := \text{Tr}(T_{a_1} T_{a_2})$$

$$\left(T_a : \text{Generatoren der } SU(N_C) \right)$$

und die drei dimensionslosen Lorentz-Tensoren, die aus der perturbativen nullten Ordnung bekannt sind. Nach Definition der Bausteine für die Polstruktur

$$\Pi_i := \frac{\Lambda^2}{p_i^2 + u_2 \Lambda^2} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{B.9})$$

können wir die siebzehn Terme auf der Approximationsstufe $r = 1$ angeben:

$$\begin{aligned}
 W_{(1)}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4} &= \left((a_1 a_2 a_3 a_4) + (a_1 a_4 a_3 a_2) \right) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(2) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2 a_3 a_4) + (a_1 a_4 a_3 a_2) \right) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 &+ [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(3) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2 a_3 a_4) + (a_1 a_4 a_3 a_2) \right) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 - 2\Pi_1 \Pi_3 - 2\Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 &+ [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(4) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2 a_3 a_4) + (a_1 a_4 a_3 a_2) \right) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
 &+ [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(5) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2 a_3 a_4) + (a_1 a_4 a_3 a_2) \right) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - 2\delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(6) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2 a_3 a_4) + (a_1 a_4 a_3 a_2) \right) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 - 2\Pi_1 \Pi_3 - 2\Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 &+ [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(7) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \left(-2\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(8) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \left(-2\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 &+ [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(9) \ a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \left(-2\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\cdot \left(-2\Pi_1 \Pi_2 - 2\Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 &+ [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{(10) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \left(-2\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
 &\quad + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)] \\
 \\
 W_{(11) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \left(-2\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)] \\
 \\
 W_{(12) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\quad \cdot \left(-2\Pi_1 \Pi_2 - 2\Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 &\quad + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)] \\
 \\
 W_{(13) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2)(a_3 a_4) + (a_1 a_3)(a_4 a_2) + (a_1 a_4)(a_2 a_3) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \left(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \right) \\
 \\
 W_{(14) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2)(a_3 a_4) + (a_1 a_3)(a_4 a_2) + (a_1 a_4)(a_2 a_3) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \right) \\
 \\
 W_{(15) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2)(a_3 a_4) + (a_1 a_3)(a_4 a_2) + (a_1 a_4)(a_2 a_3) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_1 \Pi_3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
 \\
 W_{(16) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2)(a_3 a_4) + (a_1 a_3)(a_4 a_2) + (a_1 a_4)(a_2 a_3) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \left(\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
 \\
 W_{(17) a_1 a_2 a_3 a_4}^{[1,0] \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \left((a_1 a_2)(a_3 a_4) + (a_1 a_3)(a_4 a_2) + (a_1 a_4)(a_2 a_3) \right) \\
 &\quad \cdot \left(-2\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \left(\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_3 \Pi_4 \right) \\
 &\quad + [2 \text{ zyklische Permutationen von } (2, 3, 4)].
 \end{aligned}$$

B.3 Ergänzung zu den entschärften Diagrammen

Bei Berechnungen, die den kompensierenden Pol enthalten, tritt folgender Ausdruck auf:

$$Z = \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p + x_s)} \left(p^n - \sum_{t=1}^r \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{p + x_s}{x_s - x_t} (-x_t)^n \right) \quad (\text{B.10})$$

$$= a\delta_{nr} + \sum_{s=1}^r \frac{C_s(n)}{p + x_s} \quad \text{Partialbruchzerlegung für } n \leq r \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_{s'}(n) &= [(p + x_{s'}) \cdot Z]_{p=-x_{s'}} \\ &= \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq s')}}^r (x_s - x_{s'})} \left((-x_{s'})^n - \underbrace{\sum_{t=1}^r \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{x_s - x_{s'}}{x_s - x_t}}_{=\delta_{s't}} (-x_t)^n \right) \\ &= \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq s')}}^r (x_s - x_{s'})} \left((-x_{s'})^n - (-x_{s'})^n \right) \\ &= 0 \quad \forall s' \leq r \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\Rightarrow Z = a\delta_{nr},$$

d.h. Z hat keinen Pol in p . Da der Nenner von Z für $n = r$ von derselben Ordnung in p ist wie der Zähler, gilt $a = 1$ und es folgt das einfache Resultat:

$$\Rightarrow Z = \delta_{nr}. \quad (\text{B.13})$$

Jetzt können wir zeigen, daß der entschärfte 1-Teilchen-Austauschgraph keinen reellen Pol enthält (vgl. Kapitel 2.4):

$$\begin{aligned} &\dots \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq s')}}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s})} \left(\frac{\not{q}^n}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} - \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t})^n}{\kappa_{r,2t+1}^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{(\not{q} + \kappa_{r,2s})}{(\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \right) \dots \\ &= \dots \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq s')}}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \left(\not{q}^n \right. \\ &\quad \left. - \prod_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}) \left(\not{q} + \kappa_{r,1} + \sum_{s=1}^r \frac{\kappa_{r,2s+1}^2}{\not{q} + \kappa_{r,2s}} \right) \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t})^n}{\kappa_{r,2t+1}^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{(\not{q} + \kappa_{r,2s})}{(\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \right) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dots \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq s')}}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \left(\not{q}^n \right. \\
 &\quad - \sum_{s=1}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}) \left(\not{q} + \kappa_{r,1} + \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{\kappa_{r,2s+1}^2}{\not{q} + \kappa_{r,2s}} \right) \frac{(-\kappa_{r,2t})^n}{\kappa_{r,2t+1}^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{(\not{q} + \kappa_{r,2s})}{(\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \\
 &\quad \left. - \sum_{t=1}^r \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r \frac{(\not{q} + \kappa_{r,2s})^2}{(\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \right) \dots \\
 &= \dots \frac{1}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{q} + \kappa_{r,s+})(\not{q} + \kappa_{r,s-})} \left(\delta_{nr} - \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t})^n}{\kappa_{r,2t+1}^2} \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^{-2} \right. \\
 &\quad \left. \left((\not{q} + \kappa_{r,1}) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}) + \sum_{\substack{s'=1 \\ (s' \neq t)}}^r \kappa_{r,2s'+1}^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq s')}}^r (\not{q} + \kappa_{r,2s}) \right) \right) \dots
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält nur noch die komplex-konjugierten Pole. Mit diesen Umformungen erhalten wir sofort die kompakte Form (2.57) für das entschärfte Einteilchen-Austauschdiagramm.

Anhang C

Feynmanparametrisierungen

C.1 Feynmanparametrisierung $F_{(01)}$

Bei der Schleifenberechnung zum inversen Fermion-Propagator tritt folgende Nennerstruktur auf:

$$N_{(01)}(q) = \frac{1}{(q-p)^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} ((q-p)^2 + u_s \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \kappa_s^2)}. \quad (\text{C.1})$$

Durch Anwendung der Standardformel für Feynmanparametrisierungen

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(b + x(a-b))^{\alpha+\beta}} \quad (\text{C.2})$$

können wir die Produkte zusammenfassen:

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (q^2 + \kappa_s^2)} = \Gamma(r+1) \int_0^1 dy_1 \dots dy_r \frac{y_2 \dots y_r^{r-1}}{\left(q^2 + \kappa_{r+1}^2 + \sum_{s=1}^r (\kappa_{r+1-s}^2 - \kappa_{r+2-s}^2) \prod_{i=r+1-s}^r y_i \right)^{r+1}} \quad (\text{C.3})$$

sowie

$$\frac{1}{(q-p)^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} ((q-p)^2 + u_s \Lambda^2)} = \Gamma(r+2) \int_0^1 dx_1 \dots dx_{r+1} \frac{x_2 \dots x_{r+1}^r}{\left((q-p)^2 + x_{r+1} (u_{r+1} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^r (u_{r+1-s} - u_{r+2-s}) \Lambda^2 \prod_{i=r+1-s}^r x_i) \right)^{r+2}}. \quad (\text{C.4})$$

Diese beiden Nennerfaktoren fassen wir durch eine weitere Feynmanparametrisierung zusammen:

$$N_{(01)} = \int dF_{(01)}(z) \frac{1}{\left((q-zp)^2 + R_{(01)}^2(z) \right)^{2r+3}} \quad (\text{C.5})$$

mit

$$\int dF_{01}(z) = \Gamma(2r+3) \int_0^1 dx_1 \dots dx_{r+1} dy_1 \dots dy_r dz x_2 \dots x_{r+1}^r y_2 \dots y_r^{r-1} z^{r+1} (1-z)^r \quad (\text{C.6})$$

und

$$R_{(01)}^2(z) = z(1-z)p^2 + (1-z) \left(\kappa_{r+1}^2 + \sum_{s=1}^r (\kappa_{r+1-s}^2 - \kappa_{r+2-s}^2) \prod_{i=r+1-s}^r y_i \right) + z x_{r+1} \left(u_{r+1} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^r (u_{r+1-s} - u_{r+2-s}) \Lambda^2 \prod_{i=r+1-s}^r x_i \right). \quad (\text{C.7})$$

Da das zu berechnende Integral linear divergent ist, werden folgende Integrale benötigt:

$$\int dF_{(01)}(z) = 1 \quad \text{und} \quad \int dF_{(01)}(z) \cdot z = \frac{r+2}{2r+3}. \quad (\text{C.8})$$

C.2 Feynmanparametrisierungen $F_{(02)}$ und $F_{(03)}$

Für die Fermion-Schleife benötigen wir

$$N_{(02)}(p) = \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + \kappa_s^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} ((p+k)^2 + \kappa_s^2)} \quad (\text{C.9})$$

$$= \int dF_{(02)}(z) \frac{1}{\left((p+zk)^2 + R_{(02)}^2(z) \right)^{2r+2}} \quad (\text{C.10})$$

mit

$$\int dF_{(02)}(z) = 1, \quad (\text{C.11})$$

$$\int dF_{(02)}(z) \cdot z = \frac{1}{2}, \quad (\text{C.12})$$

$$\int dF_{(02)}(z) \cdot z^2 = \frac{r+2}{2(2r+3)}, \quad (\text{C.13})$$

$$\int dF_{(02)}(z) \cdot R_{(02)}^2(z) = \frac{r+1}{2(2r+3)} k^2 + \frac{1}{r+1} \sum_{s=1}^{r+1} \kappa_s^2 \quad (\text{C.14})$$

sowie für die Gluon-Schleife

$$N_{(03)}(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} (p^2 + u_s \Lambda^2)} \frac{1}{(p+k)^2} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r+1} ((p+k)^2 + u_s \Lambda^2)} \quad (\text{C.15})$$

$$= \int dF_{(03)}(z) \frac{1}{\left((p+zk)^2 + R_{(03)}^2(z) \right)^{2r+4}} \quad (\text{C.16})$$

mit

$$\int dF_{(03)}(z) = 1, \quad (\text{C.17})$$

$$\int dF_{(03)}(z) \cdot z = \frac{1}{2}, \quad (\text{C.18})$$

$$\int dF_{(03)}(z) \cdot z^2 = \frac{r+3}{2(2r+5)}, \quad (\text{C.19})$$

$$\int dF_{(03)}(z) \cdot R_{(02)}^2(z) = \frac{r+2}{2(2r+5)} k^2 + \frac{1}{r+2} \sum_{s=1}^{r+1} u_s \Lambda^2. \quad (\text{C.20})$$

C.3 Standardintegrale in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + R^2)^{\alpha+2}} = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} R^{-2\epsilon} \quad (\text{C.21})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + R^2)^{\alpha+1}} = -(\alpha+1) \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} R^{2-2\epsilon} \quad (\text{C.22})$$

Symmetrische Integration:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^\mu p^\nu f(p^2) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^2 f(p^2) \quad (\text{C.23})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma f(p^2) = \frac{\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\sigma\nu} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}}{D(D+2)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^4 f(p^2) \quad (\text{C.24})$$

Spezielle Integrale, die Gammamatrizen enthalten:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + R^2)^{\alpha+4}} (p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) p^\rho p^\sigma \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} R^{-2\epsilon} \left(1 - \frac{1}{D}\right) \gamma^\rho \quad (\text{C.25})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^{\alpha+1}}{(p^2 + R^2)^{\alpha+4}} (p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} R^{-2\epsilon} \left(1 - \frac{1}{D}\right) (D-2) \gamma^\rho \quad (\text{C.26})$$

Konventionen für die Gammamatrizen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu} \Rightarrow \not{p}\not{p} = -p^2 \quad (\text{C.27})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\mu = -D \quad (\text{C.28})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (D-2) \gamma^\nu \quad (\text{C.29})$$

$$\not{p} \gamma^\mu \not{p} = \gamma^\mu p^2 - 2p^\mu \not{p} \quad (\text{C.30})$$

Anhang D

SK-Gleichungen durch Residuenbildung

In diesem Abschnitt werden die Beiträge zu den SK-Gleichungen am Beispiel des 3-Gluon-Vertex für die Lorentzstruktur $\delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3}$ hergeleitet. Die SK-Gleichungen für sämtliche andere 3-Punkt-Vertizes ergeben sich auf gleiche Weise. Wir reduzieren die DS-Gleichung durch Residuenbildung und anschließendes Abziehen dieser Pole in mehreren Schritten.

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \\ = & \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t} \Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t} \Lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

(R1) Residuenbildung bzgl. (p_1, p_2, p_3) :

$$\begin{aligned} & \frac{N^{[r]}(-u_{r,2t} \Lambda^2, -u_{r,2t'} \Lambda^2, -u_{r,2t''} \Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t}) \Lambda^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'}) \Lambda^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''}) \Lambda^2} \\ = & \dots - N_F \frac{I_1(-u_{r,2t} \Lambda^2, -u_{r,2t'} \Lambda^2, -u_{r,2t''} \Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'}) \Lambda^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''}) \Lambda^2} \\ \Leftrightarrow & L_{t,t',t''}^{(1)} = \dots - N_F R_{t,t',t''}^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& = \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
& + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \tag{D.3}
\end{aligned}$$

(R2) Residuenbildung bzgl. (p_1, p_2) :

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(-u_{r,2t}\Lambda^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, p_3^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})\Lambda^2 \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} - \sum_{t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& = \dots \frac{-N_F}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})\Lambda^2 \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2, p_3^2) \\
& + N_F \sum_{t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& \Leftrightarrow L_{t,t'}^{(2)} = \dots - N_F R_{t,t'}^{(2)} \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Da die Zählerpolynome von der Ordnung p_3^{2r} sind, fallen sämtliche Impulsabhängigkeiten durch den Abzug der r Residuen heraus.

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
& = \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
& + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \tag{D.5}
\end{aligned}$$

(R3) Residuenbildung bzgl. (p_1, p_3) :

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_2^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2 \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})\Lambda^2} - \sum_{t'=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
&= \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})\Lambda^2} \cdot I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, -u_{r,2t}\Lambda^2, p_2^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2) \\
& \quad + N_F \sum_{t'=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
& \Leftrightarrow: L_{t,t''}^{(3)} = \dots - N_F R_{t,t''}^{(3)} \tag{D.6}
\end{aligned}$$

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t''=1}^r \frac{L_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
&= \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
& \quad + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& \quad + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t,t''=1}^r \frac{R_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \tag{D.7}
\end{aligned}$$

(R4) Residuenbildung bzgl. (p_2, p_3) :

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})\Lambda^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})\Lambda^2} - \sum_{t=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \\
&= \dots \frac{-N_F}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})\Lambda^2 \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})\Lambda^2} \\
& \quad \cdot \left(I_0(p_1^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2)}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \Big) + N_F \sum_{t=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \\
\Leftrightarrow: L_{t',t''}^{(4)} = \dots - N_F R_{t',t''}^{(4)}
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t''=1}^r \frac{L_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t',t''=1}^r \frac{L_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
= & \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
& + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t,t''=1}^r \frac{R_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t',t''=1}^r \frac{R_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)}
\end{aligned} \tag{D.9}$$

(R5) Residuenbildung bzgl. (p_1) :

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})\Lambda^2 \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} - \sum_{t''=1}^r \frac{L_{t,t''}^{(3)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
= & \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, -u_{r,2t}\Lambda^2, p_2^2, p_3^2) \\
& + N_F \sum_{t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t''=1}^r \frac{R_{t,t''}^{(3)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
\Leftrightarrow: L_t^{(5)} = \dots - N_F R_t^{(5)}
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t''=1}^r \frac{L_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t',t''=1}^r \frac{L_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t=1}^r \frac{L_t^{(5)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \\
& = \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
& + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t,t''=1}^r \frac{R_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t',t''=1}^r \frac{R_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t=1}^r \frac{R_t^{(5)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \tag{D.11}
\end{aligned}$$

(R6) Residuenbildung bzgl. (p_2) :

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})\Lambda^2 \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t''=1}^r \frac{L_{t,t'',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t=1}^r \frac{L_{t,t}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} - \sum_{t''=1}^r \frac{L_{t'',t''}^{(4)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& = \dots \frac{-N_F}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})\Lambda^2 \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, p_3^2) \right. \\
& \left. + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, -u_{r,2t'}\Lambda^2, p_3^2)}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \right) + N_F \sum_{t,t''=1}^r \frac{R_{t,t'',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t=1}^r \frac{R_{t,t}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t''=1}^r \frac{R_{t'',t''}^{(4)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& \Leftrightarrow: L_{t'}^{(6)} = \dots - N_F R_{t'}^{(6)} \tag{D.12}
\end{aligned}$$

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
 & - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
 & - \sum_{t,t''=1}^r \frac{L_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t',t''=1}^r \frac{L_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
 & - \sum_{t=1}^r \frac{L_t^{(5)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} - \sum_{t'=1}^r \frac{L_{t'}^{(6)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
 = & \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
 & + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
 & + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t,t''=1}^r \frac{R_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
 & + N_F \sum_{t',t''=1}^r \frac{R_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t=1}^r \frac{R_t^{(5)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t'=1}^r \frac{R_{t'}^{(6)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
 & \tag{D.13}
 \end{aligned}$$

 (R7) Residuumsbildung bzgl. (p_3) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})\Lambda^2} \\
 & - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} - \sum_{t=1}^r \frac{L_t^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} - \sum_{t'=1}^r \frac{L_{t'}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
 = & \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})\Lambda^2} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2) \right. \\
 & + \sum_{t=1}^r \frac{I_0(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, -u_{r,2t''}\Lambda^2)}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \left. \right) + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
 & + N_F \sum_{t=1}^r \frac{R_t^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t'=1}^r \frac{R_{t'}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
 \Leftrightarrow & L_{t''}^{(7)} = \dots - N_F R_{t''}^{(7)} \\
 & \tag{D.14}
 \end{aligned}$$

Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{N^{[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{L_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t,t'=1}^r \frac{L_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t,t''=1}^r \frac{L_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} - \sum_{t',t''=1}^r \frac{L_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& - \sum_{t=1}^r \frac{L_t^{(5)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} - \sum_{t'=1}^r \frac{L_{t'}^{(6)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} - \sum_{t''=1}^r \frac{L_{t''}^{(7)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& = \dots \frac{-N_F}{\prod_{s=1}^r (p_2^2 + u_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)} \cdot \left(I_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \sum_{t=1}^r \frac{I_1(-u_{r,2t}\Lambda^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2} \right) \\
& + N_F \sum_{t,t',t''=1}^r \frac{R_{t,t',t''}^{(1)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t,t'=1}^r \frac{R_{t,t'}^{(2)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t,t''=1}^r \frac{R_{t,t''}^{(3)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t',t''=1}^r \frac{R_{t',t''}^{(4)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t=1}^r \frac{R_t^{(5)}}{(p_1^2 + u_{r,2t}\Lambda^2)} \\
& + N_F \sum_{t'=1}^r \frac{R_{t'}^{(6)}}{(p_2^2 + u_{r,2t'}\Lambda^2)} + N_F \sum_{t''=1}^r \frac{R_{t''}^{(7)}}{(p_3^2 + u_{r,2t''}\Lambda^2)} \tag{D.15}
\end{aligned}$$

Die Residuenbildungen (R1), (R2), (R3) und (R5) führen auf die SK-Gleichungen des inversen Gluon-Propagators (Kapitel 4).

Die Residuenbildung (R4) liefert r^2 , (R6) und (R7) jeweils r SK-Gleichungen.

Anhang E

BS-resummierte DS-Gleichung für den $F\bar{F}V$ -Vertex

In der Zerlegung

$$T' = K_s + X_s + C_s \quad (\text{E.1})$$

enthalte der Kern K_s — über die übliche Definition hinausgehend — nur Graphen, die im s-Kanal sowohl bzgl. der üblichen Gluon- und Quark-Linien als auch bzgl. der Schattenlinien 1- und 2-Teilchen-irreduzibel sind. C_s enthält alle in dem erweiterten Sinne 1-Teilchen-reduziblen Graphen im s-Kanal. Durch die bekannte Herleitung folgt direkt die Bethe-Salpeter-Gleichung:

$$T'_s = K_s + \text{Loop}(T'_s, K_s) \quad (\text{E.2})$$

Das auftretende Schleifen-Diagramm enthält zwei entschärfte Linien, die jeweils die Summe von Propagator und kompensierendem Pol darstellen. In der Diagrammschreibweise mit kompensierendem Pol wird diese Schleife durch vier Terme dargestellt. In der zweckmäßigeren Notation mit entschärfte Linien setzen wir diese BS-Gleichung in die DS-Gleichung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex ein, und es folgt die BS-resummierte DS-Gleichung ausgehend von:

$$\text{Vertex} = \text{Vertex with dot} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{Loop}(T'_s) \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{tree-level vertex} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ [one-loop gluon loop with } K_s \text{]} \\
 &+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ [two-loop gluon loop with } T_s \text{ and } K_s \text{]} \\
 &+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ [one-loop ghost loop with } K_s \text{]} \quad . \quad (E.4)
 \end{aligned}$$

Die Herleitung dieser BS-Gleichung ist „straightforward“, wenn man die entschärfte(n) Linien zunächst in Propagatoren und Schattenpole zerlegt. Die 1-Schleifenbeiträge sind identisch mit den Diagrammen, die aus der BS-resummierten DS-Gleichung im gluonischen Kanal entstehen:

$$\begin{aligned}
 &= \text{tree-level vertex} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ [diagram } A^{res} \text{]} \\
 &+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ [diagram } B^{res} \text{]} \quad . \quad (E.5)
 \end{aligned}$$

E.1 Diagrammberechnungen

Wir berechnen die Schleifenintegrale in Gleichung (E.5). Die abelschen Diagramme (A^{res}) liefern in Landau-Eichung keinen Beitrag. Im Prinzip sind für (B^{res}) 8 Diagramme zu berechnen. Die Berechnung verläuft analog zu Kapitel 5, und für die DS-Gleichung folgt:

$$\Gamma_{F\bar{F}T}^\mu(p_1, p_2, p_3) = \gamma^\mu + \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa_{r,2s})} \frac{t^{\mu\bar{\mu}}(p_3) I^{(13)\bar{\mu}}(\not{p}_1, \not{p}_2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + u_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa_{r,2s})} \quad (E.6)$$

mit

$$\begin{aligned}
 I^{(13)\mu}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3^2) &= \Pi(\epsilon) \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \sum_{\bar{n}, \bar{n}', m_3}^r \boldsymbol{p}_1^{\bar{n}} \gamma^\mu \boldsymbol{p}_2^{n'} \boldsymbol{p}_3^{2m_3} \Lambda^{4r-\bar{n}-n'-m_3} \left(\bar{C}_{r\bar{n}r}^{[r]} \bar{C}_{r\bar{n}n'}^{[r]} C_{rrm_3}^{0[r]} \right. \\
 &+ \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{m, m_1=0}^r \bar{C}_{r\bar{n}r}^{[r]} \bar{C}_{m\bar{r}n'}^{[r]} C_{m_1 r m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{m+m_1} \\
 &+ \sum_{t=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2t+1}^2)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t})^2} \sum_{n, \bar{n}'=0}^r \bar{C}_{r\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \bar{C}_{rnn'}^{[r]} C_{rrm_3}^{0[r]} \Lambda^{2r-n-\bar{n}'} (-\kappa_{r,2t})^{n+\bar{n}'} \\
 &+ \sum_{t=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \sum_{\bar{m}, m_2=0}^r \bar{C}_{\bar{m}\bar{n}r}^{[r]} \bar{C}_{r\bar{r}n'}^{[r]} C_{r\bar{m}_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t})^{\bar{m}+m_2} \\
 &+ \sum_{t, t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
 &\quad \cdot \sum_{n, \bar{m}, \bar{n}', m_2=0}^r \bar{C}_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \bar{C}_{rnn'}^{[r]} C_{r\bar{m}_2 m_3}^{0[r]} \Lambda^{2r-n-\bar{n}'} (-\kappa_{r,2t'})^{n+\bar{n}'} (-u_{r,2t})^{\bar{m}+m_2} \\
 &+ \sum_{t, t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \frac{(-u_{r,2t'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t'})^2} \\
 &\quad \cdot \sum_{m, n', m_1, m_2=0}^r \bar{C}_{\bar{m}\bar{n}r}^{[r]} \bar{C}_{m\bar{r}n'}^{[r]} C_{m_1 m_2 m_3}^{0[r]} (-u_{r,2t'})^{m+m_1} (-u_{r,2t})^{\bar{m}+m_2} \\
 &+ \sum_{t, t'=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \\
 &\quad \cdot \sum_{m, n, \bar{n}', m_1=0}^r \bar{C}_{r\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \bar{C}_{mnn'}^{[r]} C_{m_1 r m_3}^{0[r]} \Lambda^{2r-n-\bar{n}'} (-\kappa_{r,2t'})^{n+\bar{n}'} (-u_{r,2t})^{\bar{m}+m_1} \\
 &+ \sum_{t, t', t''=1}^r \frac{(-u_{r,2t+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t)}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t})^2} \frac{(-\kappa_{r,2t'+1}^2)^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2t'})^2} \frac{(-u_{r,2t''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq t'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2t''})^2} \\
 &\quad \cdot \sum_{m, n, \bar{m}, \bar{n}', m_1, m_2=0}^r \bar{C}_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}'}^{[r]} \bar{C}_{mnn'}^{[r]} C_{m_1 m_2 m_3}^{0[r]} \Lambda^{2r-n-\bar{n}'} (-\kappa_{r,2t'})^{n+\bar{n}'} (-u_{r,2t})^{\bar{m}+m_2} (-u_{r,2t''})^{m+m_1} \Big).
 \end{aligned}$$

(E.7)

E.2 Die Selbstkonsistenzgleichungen

Nach der Transversalprojektion werden die SK-Gleichungen durch Residuenbildung bestimmt (vgl. Anhang D). Im Gegensatz zu den reinen DS-Gleichungen liefert hier jede Residuenbildung eine SK-Gleichung:

(R1):

$$\begin{aligned}
 z_{1,4}(t, t', t'') &= \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1}(t') z_{0,1}(t'') x_3(t) + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} z_{0,4}(t', \bar{t}) z_{0,4}(\bar{t}, t'') x_3(t) \right. \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} (z_{0,1}(t') z_{1,1}(t'', \bar{t}) + z_{1,1}(t', \bar{t}) z_{0,1}(t'')) x_4(\bar{t}, t) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,1}(t', \bar{t}) z_{1,1}(t'', \bar{t}') x_5(\bar{t}', \bar{t}, t) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} (z_{1,4}(\bar{t}, t', \bar{t}') z_{0,4}(\bar{t}', t'') + z_{0,4}(t', \bar{t}') z_{1,4}(\bar{t}, \bar{t}', t'')) x_4(\bar{t}, t) \\
 &\quad \left. + \sum_{\bar{t}, \bar{t}', \bar{t}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}'')}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}''})} z_{1,4}(\bar{t}, t', \bar{t}') z_{1,4}(\bar{t}'', \bar{t}', t'') x_5(\bar{t}'', \bar{t}, t) \right)
 \end{aligned} \tag{E.8}$$

(R2): ($m_3 = r$)

$$\begin{aligned}
 z_{0,4}(t, t'') &= \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1}(t') z_{0,1}(t'') + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} z_{0,4}(t', \bar{t}) z_{0,4}(\bar{t}, t'') \right. \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} (z_{0,1}(t') z_{1,1}(t'', \bar{t}) + z_{1,1}(t', \bar{t}) z_{0,1}(t'')) x_1(\bar{t}) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,1}(t', \bar{t}) z_{1,1}(t'', \bar{t}') x_2(\bar{t}', \bar{t}) \\
 &\quad \left. + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} (z_{1,4}(\bar{t}, t', \bar{t}') z_{0,4}(\bar{t}', t'') + z_{0,4}(t', \bar{t}') z_{1,4}(\bar{t}, \bar{t}', t'')) x_1(\bar{t}) \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\bar{t}, \bar{t}', \bar{t}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}''})} z_{1,4(\bar{t}, t', \bar{t}')} z_{1,4(\bar{t}', \bar{t}, t'')} x_2(\bar{t}', \bar{t}) \quad (\text{E.9})$$

(R3): ($n' = r$)

$$\begin{aligned}
 z_{1,1}(t', t) &= \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1}(t') x_3(t) + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} z_{0,4}(t', \bar{t}) z_{0,1}(\bar{t}) x_3(t) \right. \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} (z_{0,1}(t') z_{1,0}(\bar{t}) + z_{1,1}(t', \bar{t})) x_4(\bar{t}, t) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,1}(t', \bar{t}) z_{1,0}(\bar{t}') x_5(\bar{t}', \bar{t}, t) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} (z_{1,4}(\bar{t}, t', \bar{t}') z_{0,1}(\bar{t}') + z_{0,4}(t', \bar{t}') z_{1,1}(\bar{t}', \bar{t})) x_4(\bar{t}, t) \\
 &\quad \left. + \sum_{\bar{t}, \bar{t}', \bar{t}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}''})} z_{1,4}(\bar{t}, t', \bar{t}') z_{1,1}(\bar{t}', \bar{t}'') x_5(\bar{t}'', \bar{t}, t) \right) \quad (\text{E.10})
 \end{aligned}$$

(R4): ($\bar{n} = r$)

$$\begin{aligned}
 z_{1,1}(t, t'') &= \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1}(t'') x_3(t) + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} z_{0,1}(\bar{t}) z_{0,4}(\bar{t}, t'') x_3(t) \right. \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} (z_{1,1}(t'', \bar{t}) + z_{1,0}(\bar{t}) z_{0,1}(t'')) x_4(\bar{t}, t) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,0}(\bar{t}) z_{1,1}(t'', \bar{t}') x_5(\bar{t}', \bar{t}, t) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} (z_{1,1}(\bar{t}', \bar{t}) z_{0,4}(\bar{t}', t'') + z_{0,1}(\bar{t}') z_{1,4}(\bar{t}, \bar{t}', t'')) x_4(\bar{t}, t)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\bar{t}, \bar{t}', \bar{t}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,1(\bar{t}, \bar{t})} z_{1,4(\bar{t}', \bar{t}', \bar{t}'')} x_5(\bar{t}', \bar{t}, \bar{t}'')$$

(E.11)

(R5): ($m_3 = n' = r$)

$$\begin{aligned}
 z_{0,1(t')} &= \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t')} + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} z_{0,4(t', \bar{t})} z_{0,1(\bar{t})} \right. \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} (z_{0,1(t')} z_{1,0(\bar{t})} + z_{1,1(t', \bar{t})}) x_1(\bar{t}) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,1(t', \bar{t})} z_{1,0(\bar{t}')} x_2(\bar{t}, \bar{t}') \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} (z_{1,4(\bar{t}, t', \bar{t}')} z_{0,1(\bar{t}')} + z_{0,4(t', \bar{t}')} z_{1,1(\bar{t}, \bar{t}')}) x_1(\bar{t}') \\
 &\quad \left. + \sum_{\bar{t}, \bar{t}', \bar{t}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}''})} z_{1,4(\bar{t}, t', \bar{t}')} z_{1,1(\bar{t}', \bar{t}'')} x_2(\bar{t}', \bar{t}'') \right)
 \end{aligned}$$

(E.12)

(R6): ($m_3 = \bar{n} = r$)

$$\begin{aligned}
 z_{0,1(t'')} &= \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(z_{0,1(t'')} + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}})} z_{0,1(\bar{t})} z_{0,4(\bar{t}, t'')} \right. \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} (z_{1,1(t'', \bar{t})} + z_{1,0(\bar{t})} z_{0,1(t'')}) x_1(\bar{t}) \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-u_{r,2\bar{t}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}'})} z_{1,0(\bar{t})} z_{1,1(t'', \bar{t}')} x_2(\bar{t}, \bar{t}') \\
 &\quad + \sum_{\bar{t}, \bar{t}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{t}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{t}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{t}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{t}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{t}'})} (z_{1,1(\bar{t}, \bar{t}')} z_{0,4(\bar{t}', t'')} + z_{0,1(\bar{t}')} z_{1,4(\bar{t}, \bar{t}', t'')}) x_1(\bar{t}')
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\bar{i}, \bar{i}', \bar{i}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{i}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}''})} z_{1,1(\bar{i}, \bar{i})} z_{1,4(\bar{i}', \bar{i}', \bar{i}'')} x_{2(\bar{i}'', \bar{i})} \quad (\text{E.13})$$

(R7): ($n' = \bar{n} = r$)

$$\begin{aligned}
 z_{1,0}(t) = & \frac{1}{\beta_0} \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(x_3(t) + \sum_{\bar{i}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}})} z_{0,1(\bar{i})} z_{0,1(\bar{i})} x_3(t) \right. \\
 & + \sum_{\bar{i}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} (z_{1,0(\bar{i})} + z_{1,0(\bar{i})}) x_{4(\bar{i}, t)} \\
 & + \sum_{\bar{i}, \bar{i}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-u_{r,2\bar{i}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}'})} z_{1,0(\bar{i})} z_{1,0(\bar{i}')} x_{5(\bar{i}', \bar{i}, t)} \\
 & + \sum_{\bar{i}, \bar{i}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}'})} (z_{1,1(\bar{i}', \bar{i})} z_{0,1(\bar{i}')} + z_{0,1(\bar{i}')} z_{1,1(\bar{i}', \bar{i})}) x_{4(\bar{i}, t)} \\
 & \left. + \sum_{\bar{i}, \bar{i}', \bar{i}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{i}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}''})} z_{1,1(\bar{i}', \bar{i})} z_{1,1(\bar{i}', \bar{i}'')} x_{5(\bar{i}'', \bar{i}, t)} \right) \quad (\text{E.14})
 \end{aligned}$$

Rest der DS-Gleichung: ($m_3 = n' = \bar{n} = r$)

An dieser Stelle bleiben neben der störungstheoretischen Divergenz Störterme stehen:

$$\begin{aligned}
 1 = & 1 + \Pi(\epsilon) \frac{N_C}{2} \frac{3}{2} \left(1 + \sum_{\bar{i}=1}^r \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}})} z_{0,1(\bar{i})} z_{0,1(\bar{i})} \right. \\
 & + \sum_{\bar{i}=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} (z_{1,0(\bar{i})} + z_{1,0(\bar{i})}) x_{1(\bar{i})} \\
 & + \sum_{\bar{i}, \bar{i}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-u_{r,2\bar{i}'+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}'})} z_{1,0(\bar{i})} z_{1,0(\bar{i}')} x_{2(\bar{i}', \bar{i})} \\
 & \left. + \sum_{\bar{i}, \bar{i}'=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}'+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}'})} (z_{1,1(\bar{i}', \bar{i})} z_{0,1(\bar{i}')} + z_{0,1(\bar{i}')} z_{1,1(\bar{i}', \bar{i})}) x_{1(\bar{i})} \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\bar{i}, \bar{i}', \bar{i}''=1}^r \frac{(-u_{r,2\bar{i}+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i})}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}})} \frac{(-\kappa_{r,2\bar{i}+1}^2)^{-1} \Lambda^{2r}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}')}}^r (\kappa_{r,2s} - \kappa_{r,2\bar{i}'})} \frac{(-u_{r,2\bar{i}''+1})^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq \bar{i}'')}}^r (u_{r,2s} - u_{r,2\bar{i}''})} z_{1,1(\bar{i}, \bar{i}')} z_{1,1(\bar{i}', \bar{i}'')} x_{2(\bar{i}'', \bar{i})} \quad (\text{E.15})$$

Die SK-Gleichungen, die aus (R3) und (R4) folgen, sowie die Gleichungen, die aus (R5) und (R6) folgen, sind jeweils identisch, d.h. es bleibt für jeden Parameter des Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex eine SK-Gleichung. Auf der Approximationsstufe $r = 1$ sind das 5 Gleichungen für 5 Parameter.

E.3 Lösung der SK-Gleichungen für $r = 1$

Die Gleichungen im gluonischen Sektor, in denen keine 4-Gluon-Parameter auftreten, wurden in [DRI 97] auf der Approximationsstufe $r = 1$ berechnet und lauten:

$$\begin{aligned}
 \text{SK BS G3.1: } \beta_0 u_3^3 x_1 &= -\frac{9}{4} u_3^3 x_1 + \frac{15}{16} u_3^3 x_3 \\
 &\quad - u_3^2 \left(\frac{1}{4} x_1 x_2 + \frac{1}{4} x_1 x_4 + \frac{1}{4} x_3 x_4 + \frac{7}{4} x_1^2 x_3 - \frac{1}{2} x_1 x_3^2 \right) \\
 &\quad - u_3 \left(-\frac{5}{4} x_1^2 x_5 - \frac{13}{4} x_1 x_2 x_4 + \frac{1}{4} x_2 x_3 x_4 - \frac{1}{4} x_1 x_3 x_5 \right) - \frac{3}{2} x_2^2 x_5 \\
 \text{SK BS G3.2: } \beta_0 u_3^3 x_2 &= \frac{3}{2} u_3^3 x_3^2 \\
 &\quad - u_3^2 \left(\frac{1}{2} x_2 x_4 + 2x_4^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 x_3 + \frac{5}{2} x_1 x_3 x_4 \right) \\
 &\quad - u_3 \left(-\frac{1}{2} x_2^2 x_4 - x_2 x_4^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 x_5 - \frac{7}{2} x_1 x_4 x_5 \right) - \frac{3}{2} x_2 x_5^2 \\
 \text{SK BS G3.3: } \beta_0 u_3^3 x_3 &= \frac{3}{2} u_3^3 x_3 \\
 &\quad - u_3^2 \left(\frac{7}{2} x_1 x_4 - \frac{1}{2} x_3 x_4 + x_1^2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_3^2 \right) \\
 &\quad - u_3 \left(-2x_1^2 x_5 - \frac{5}{2} x_1 x_2 x_4 - \frac{1}{2} x_2 x_3 x_4 + \frac{1}{2} x_1 x_3 x_5 \right) - \frac{3}{2} x_2^2 x_5 \\
 \text{SK BS G3.4: } \beta_0 u_3^3 x_4 &= \frac{3}{2} u_3^3 x_3^2 \\
 &\quad - u_3^2 \left(\frac{1}{4} x_2 x_4 + \frac{5}{4} x_4^2 - \frac{1}{4} x_1 x_2 x_3 + \frac{13}{4} x_1 x_3 x_4 \right) \\
 &\quad - u_3 \left(\frac{1}{4} x_2^2 x_4 - \frac{7}{4} x_2 x_4^2 - \frac{1}{4} x_1 x_2 x_5 - \frac{11}{4} x_1 x_4 x_5 \right) - \frac{3}{2} x_2 x_5^2 \\
 \text{SK BS G3.5: } \beta_0 u_3^3 x_5 &= \frac{3}{2} u_3^3 x_3^3 - \frac{9}{2} u_3^2 x_3 x_4^2 + \frac{9}{2} u_3 x_4^2 x_5 - \frac{3}{2} x_5^3
 \end{aligned}$$

Dazu kommt eine Störung des perturbativen Limes:

$$\text{DT BS G3.A: } \quad 0 = -\frac{9}{2} u_3^2 x_1^2 + \frac{9}{2} u_3 x_1^2 x_2 - \frac{3}{2} x_2^3.$$

Zusammen mit den Propagatorgleichungen SK G2.1/2 lassen sich nach Elimination von x_1 Lösungen dieses Gleichungssystems bestimmen. Aus SK BS G3.1 und 3.3 können x_4 und x_5 in Abhängigkeit der anderen Parameter angegeben werden. Anschließend kann durch numerische Minimierung der Quadrate der Summen der Differenzen der rechten und linken Seiten der Gleichungen SK BS G3.2, 3.4 und 3.5 eine Lösung gefunden werden, die die

Confinement-Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1 &= -4.7763088 \\
 \tilde{u}_2 &= -7.9108538 \\
 \tilde{u}_3 &= 5.9377753 \\
 \tilde{x}_2 &= 37.193898 \\
 \tilde{x}_3 &= -4.9499733 \\
 \tilde{x}_4 &= 6.9932704 \\
 \tilde{x}_5 &= 1.9563045
 \end{aligned}$$

Ebenso betrachten wir das BS-Gleichungssystem im fermionischen Sektor. Da die Residuenbildungen (R3) und (R4) sowie (R5) und (R6) jeweils identische Gleichungen liefern, liegen für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex 5 SK-Gleichungen vor:

$$\begin{aligned}
 \text{SK BS F3.1: } \beta_0 \frac{4}{9} u_3^2 \kappa_3 z_{14} &= u_3^2 \kappa_3 x_3 z_{01}^2 - u_3^2 x_3 z_{04}^2 - 2u_3 \kappa_3 x_4 z_{01} z_{11} \\
 &\quad + 2u_3 x_4 z_{04} z_{14} + \kappa_3 x_5 z_{11}^2 - x_5 z_{14}^2 \\
 \text{SK BS F3.2: } \beta_0 \frac{4}{9} u_3^2 \kappa_3 z_{04} &= u_3^2 \kappa_3 z_{01}^2 - u_3^2 z_{04}^2 - 2u_3 \kappa_3 x_1 z_{01} z_{11} \\
 &\quad + 2u_3 x_1 z_{04} z_{14} + \kappa_3 x_2 z_{11}^2 - x_2 z_{14}^2 \\
 \text{SK BS F3.3: } \beta_0 \frac{4}{9} u_3^2 \kappa_3 z_{11} &= -u_3^2 x_3 z_{01} z_{04} + u_3^2 \kappa_3 x_3 z_{01} - u_3 \kappa_3 x_4 z_{10} z_{01} + u_3 x_4 z_{01} z_{14} \\
 &\quad + u_3 x_4 z_{11} z_{04} - u_3 \kappa_3 x_4 z_{11} + \kappa_3 x_5 z_{10} z_{11} - x_5 z_{11} z_{14} \\
 \text{SK BS F3.4: } \beta_0 \frac{4}{9} u_3^2 \kappa_3 z_{01} &= -u_3^2 z_{01} z_{04} + u_3^2 \kappa_3 z_{01} - u_3 \kappa_3 x_1 z_{10} z_{01} + u_3 x_1 z_{01} z_{14} \\
 &\quad + u_3 x_1 z_{11} z_{04} - u_3 \kappa_3 x_1 z_{11} + \kappa_3 x_2 z_{10} z_{11} - x_2 z_{11} z_{14} \\
 \text{SK BS F3.5: } \beta_0 \frac{4}{9} u_3^2 \kappa_3 z_{10} &= -u_3^2 x_3 z_{01}^2 + u_3^2 \kappa_3 x_3 - 2u_3 \kappa_3 x_4 z_{10} \\
 &\quad + 2u_3 x_4 z_{01} z_{11} + \kappa_3 x_5 z_{10}^2 - x_5 z_{11}^2
 \end{aligned}$$

Dazu kommt die Störung des perturbativen Limes:

$$\text{DT BS F3.A: } 0 = -u_3^2 z_{01}^2 + u_3^2 \kappa_3 - 2u_3 \kappa_3 x_1 z_{10} + 2u_3 x_1 z_{01} z_{11} + \kappa_3 x_2 z_{10}^2 - x_2 z_{11}^2.$$

Unter der Annahme, daß die gluonischen Parameter bekannt sind, können diese Gleichungen zusammen mit den Propagatorgleichungen SK F2.1/2 gelöst werden (x_1 wird eliminiert). \tilde{z}_{01} und \tilde{z}_{04} ergeben sich aus SK BS F2.1 und F2.2, durch $\tilde{x}_2 \tilde{z}_{14} - \tilde{x}_5 \tilde{z}_{04}$ und $\tilde{x}_2 \tilde{z}_{11} - \tilde{x}_5 \tilde{z}_{01}$ können dann \tilde{z}_{11} und \tilde{z}_{14} bestimmt werden. Übrig bleiben drei nichtlineare Gleichungen in \tilde{w}_1 , $\tilde{\kappa}_3$ und \tilde{z}_{10} . Numerische Behandlung dieser Gleichungen mit dem bereits beschriebenen Minimierungsverfahren (least squares) ergibt nach Eliminierung von \tilde{x} — die fermionischen Parameter werden mit geeigneten Potenzen von \tilde{x} skaliert —, daß

$$\tilde{z}_{1,0} = 0.895 \pm 0.003 \tag{E.16}$$

und somit wie im nichtresummierten Fall unabhängig von den fermionischen Massen ist. Für die übrigen fermionischen Parameter produziert dieses einfache Lösungsverfahren derzeit noch keine eindeutig bevorzugte Lösung. Eine Verwendung von ST-Identitäten ist hier nicht möglich, da alle Vertexfunktionen, die Gluon-Linien enthalten, transversalprojiziert sind.

Literaturverzeichnis

- [AB 88] A. Ali, F. Barreiro, *Jets in e^+e^- annihilation and QCD*, in: *High energy electron-positron physics*, eds. A. Ali, P. Söding (World Scientific 1988)
- [ASS 93] J. Ahlback, A. Streibl, M. Schaden, *Non-perturbative Solutions to the Dyson-Schwinger-Equations of Pure QCD*, in: *QCD Vacuum Structure*, eds. H.M. Fried, B. Müller (World Scientific 1993)
- [BBJ 83] P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, (Teubner 1983)
- [BC 80] J.S. Ball, T.-W. Chiu, Phys. Rev. **D22** (1980) 2542, 2550
- [BC 88] W. Buchmüller, S. Cooper, Υ *Spectroscopy*, in: *High energy electron-positron physics*, eds. A. Ali, P. Söding (World Scientific 1988)
- [BEC 91] M. Becker, G. Löffler, A. Pesch, M. Stingl, R. Rosenfelder, Phys. Lett. **B267** (1991) 261
- [BER 68] J. Bernstein, *Elementary Particles and Their Currents*, (Freeman 1968)
- [BPS 93] C. Bernard, C. Parrinello, A. Soni, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **30** (1993) 535
- [CN 73] J.M. Cornwall, R.E. Norton, Phys. Rev. **D8** (1973) 3338
- [COL 84] J.C. Collins, *Renormalization* (Cambridge 1984)
- [CJR 83] M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rep. **C95** (1983) 201
- [DRI 96] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl, *Extended QCD perturbation theory: three-point vertices*, MS-TPI-96-15, MS-TPI-97-4
- [DRI 97] L. Driesen, *Die Basisvertizes der Quantenchromodynamik und ihr Dyson-Schwinger Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation WWU Münster (1997, in Vorbereitung)
- [DS 49] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75** (1949) 1736; J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951) 452, 455

- [EF 74] E.J. Eichten, F.L. Feinberg, Phys. Rev. **D10** (1974) 3254
- [EHW 96] U. Ellwanger, M. Hirsch, A. Weber, Z. Phys. **C69** (1996) 687; *The Heavy Quark Potential from Wilson's Exact Renormalization Group*, e-print archive: hep-ph/9606468
- [FGL 73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47** (1973) 365
- [FRO 96] J. Fromm, *Dyson-Schwinger-Gleichung des Dreigluonvertex und Bestimmung des effektiven Gluonpropagators einer erweiterten Störungstheorie der Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit WWU Münster (1996)
- [GM 72] M. Gell-Mann, Acta Physica Austriaca, Suppl. 9 (1972) 733
- [GRI 78] V.N. Gribov, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1
- [GRO 93] D. Gromes, Z. Phys. **C57** (1993) 631; *More on Bethe Salpeter Wave Functions for Quark Anti-Quark Systems*, HD-THEP-93-15
- [GUT 96] F. Gutbrod, *A Study of the Gluon Propagator in SU(2) Lattice Gauge Theory*, DESY-96-252
- [GW 73] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343
- [HAB 90] U. Häbel, R. Könning, H.-G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard, Z. Physik **A336** (1990) 423, 435
- [JJ 73] R. Jackiw, K. Johnson, Phys. Rev. **D8** (1973) 2386
- [KÖN 90] R. Könning, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Quark-Quark-Gluon-Vertex der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1990)
- [KUH 94] J. Kuhrs, *Konstruktion von konsistenten Bethe-Salpeter Wellenfunktionen für angeregte Fermion-Antifermion Zustände*, Diplomarbeit Heidelberg (1994)
- [LÖF 92] G. Löffler, *Die Vier-Gluon-Amplitude im Rahmen eines nicht-störungstheoretischen Lösungsansatzes der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD*, Dissertation WWU Münster (1992)
- [LUE 94] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz, U. Wolff, Nucl. Phys. **B413** (1994) 481
- [MAR 94] P. Marenzoni, G. Martinelli, N. Stella, M. Testa, *A Lattice Study of the Gluon Propagator, in the Landau Gauge*, in: *Como: Quark Confinement 1994*, e-print archive: hep-ph/9410355
- [MEY 94] A. Meyer, *Hadronische Zwischenzustände in der e^-e^+ -Annihilation*, Diplomarbeit WWU Münster (1994)

- [MM 94] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, (Cambridge 1994)
- [MUT 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, (World Scientific 1987)
- [NAC 86] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, (Vieweg 1986)
- [NAK 95] A. Nakamura, *Gluon Propagators and Confinement*, YAMAGATA-HEP-95-10, e-print archive: hep-lat/9506024
- [PDG 96] R.M. Barnett et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. **D54**, (1996) 1
- [POL 73] H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346
- [POL 84] J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231** (1984) 269
- [PT 84] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, (Springer 1984)
- [ROE 91] G. Roepstorff, *Pfadintegrale in der Quantenmechanik*, (Vieweg 1991)
- [RW 94] C.D. Roberts, A.G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33** (1994) 477
- [SCH 91] M. Scholze, *Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgs-Feld*, Diplomarbeit WWU Münster (1991)
- [SCH 96] M. Schmelling, *Status of the strong coupling constant*, Plenary talk given at: XXVIII International Conference on High Energy Physics, Warsaw 1996, e-print archive: hep-ex/9701002
- [SPR 95] M. Spratte, *Nichtperturbative Berechnung der Gluonselfenergie in Einschleifen-Näherung*, Diplomarbeit WWU Münster (1995)
- [SS 96] D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov, *Analytic QCD running coupling with finite IR behaviour and universal $\bar{\alpha}_s(0)$ value*, e-print archive: hep-ph/9604363
- [ST 71] A.A. Slavnov, Sov. J. Particles and Nuclei **5** (1975) 303; J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33** (1971) 436
- [STI 86] M. Stingl, Phys. Rev. **D34** (1986) 3863
- [STI 94] M. Stingl, Unveröffentlichte Notizen zum Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex.
- [STI 95] M. Stingl, Persönliche Mitteilungen zu „entschärften“ 1-Teilchen-Austauschdiagrammen.
- [STI 96] M. Stingl, Z. Physik **A353** (1996) 423

- [STR 96] A. Streibl, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1996)
- [SVZ 79] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147** (1979) 385, 448
- [THO 73] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B61** (1973) 455
- [THO 76] G. 't Hooft, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432
- [TV 72] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189
- [TV 72a] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. **B50** (1972) 318
- [WIG 89] S. Wigard, *Eine nicht-störungstheoretische Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den Fermionpropagator der Quantenchromodynamik*, Dissertation WWU Münster (1989)
- [WIL 74] K.G. Wilson, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 773
- [YM 54] C.N. Yang, R. Mills, Phys. Rev. **96** (1954) 191
- [YND 93] F.J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interactions* (Springer 1993)
- [ZIM 60] W. Zimmermann, Nuovo Cim. **13** (1959) 503, **16** (1960) 690
- [ZWA 92] D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B378** (1992) 525

Schlußwort

Herrn Prof. Dr. M. Stingl danke ich für den Vorschlag zu diesem sehr interessanten Thema und für seine ständige Bereitschaft zu Gesprächen und Diskussionen.

Für die angenehme Atmosphäre in 407 danke ich Carsten Merten.

Die gute Zusammenarbeit mit Lutz Driesen hat sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Vielen Dank!

Für das Korrekturlesen bedanke ich mich herzlich bei Gudrun Pinter und Jan Pawlowski.

Ganz besonders danken möchte ich meiner Gaby sowie meinen Eltern für ihre Unterstützung.

Lebenslauf

Name	Jürgen Gerd Kuhrs
geboren	am 11.6.1968 in Lingen (Ems)
Eltern	Alfons Kuhrs Inge Kuhrs, geb. Lügering
Familienstand	ledig
1974 - 1980	Besuch der Marienschule in Lingen (Ems)
1980 - 1987	Besuch des Gymnasiums Georgianum in Lingen (Ems)
14.5.1987	Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife
1987 - 1988	Militärischer Grundwehrdienst
WS 1988/89	Aufnahme des Grundstudiums der Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
20.9.1990	Vordiplom in Physik an der WWU Münster
WS 1990/91 - SS 1991	Auslandsstudium der Physik an der University of Edinburgh (Schottland)
WS 1991/92	Aufnahme des Hauptstudiums der Physik an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Juli 1993	Beginn der Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. D. Gromes über das Thema : Konstruktion von konsistenten Bethe-Salpeter Wellenfunktionen für angeregte Fermion-Antifermion Zustände
1.4.1994 - 30.6.1994	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg
14.7.1994	Diplom in Physik an der Universität Heidelberg
August 1994	Beginn der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
15.8.1994	Einschreibung an der WWU Münster
seit 1.1.1995	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
1.7.1995 - 30.6.1997	Graduierten-Stipendium des Landes Nordrhein-Westfalen

