

Ein Lösungsverfahren für Schrödinger-Gleichungen mit gedämpfter Propagation

Als Diplomarbeit vorgelegt

von

Yaovi FOLLY

Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

15. Februar 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Formulierung des Problems	7
1.1	Matrixform der Bindungsgleichung	7
1.2	Lösung durch Integraltransformation	8
1.3	Berechnung der Gewichtsfunktionen $\sigma_f'(\mu)$ und $\sigma_g'(\mu)$	11
1.4	Einige Symmetrien und Beobachtungen	13
2	Anwendung der Resultate auf das Yukawa-Potential	15
2.1	Der Fall der Nullenergiezustände bei $\Lambda = 0$	17
2.2	Der Fall der Zustände mit $\Lambda > 0$ und $E \neq 0$	18
3	Resultate	23
3.1	η -Variation	23
3.2	Λ -Variation	23
3.3	Die Abbildungen	24
A	Berechnungen zum Kapitel 1	33
B	Lösung der Schrödinger-Gleichung (A.10)	35
B.1	Grenzübergänge	35
B.1.1	Diagonalisierung der Matrix	36
C	Der Trick zum Lösen der Gleichung (B.3)	39
D	Die Ableitung der Gleichungen für die Gewichtsfunktionen	49
E	Rechnungen zu den Formeln im Kapitel 2	61
E.1	Rechnungen zu (2.3) bzw. (2.4)	61
E.1.1	Rechnungen zu (2.7)	62
E.1.2	Rechnungen zu (2.9)	63
E.1.3	Rechnungen zu (2.10)	64
E.2	Einige nützliche logarithmische und algebraische Funktionen	65
E.2.1	Rechnungen zum Fall der Nullenergiezustände bei $\Lambda = 0$	79
E.2.2	Rechnungen zu (2.17)	83
E.2.3	Rechnungen zu (2.18)	84
E.2.4	Rechnungen zu (2.21) und (2.22)	84
E.2.5	Rechnungen zu (2.24)	86
E.2.6	Rechnungen zu (2.25) – (2.27)	87
E.2.7	Rechnungen zu (2.29)	89
E.2.8	Rechnungen zu (2.33)	90
E.2.9	Rechnungen zu (2.34)	90
E.2.10	Rechnungen zu (2.38)	92

F	Laplace-Transformation und Volterra-Integralgleichung	93
F.1	Überblick über die Laplace-Transformation (siehe [3], [6] und [15])	93
F.1.1	Grunddefinitionen	93
F.1.2	Die Grundformel	93
F.1.3	Die Inversionsformel $f(t) = L^{-1}\{\varphi(p)\}$	93
F.1.4	Die Klasse K_γ zulässiger Funktionen	94
F.1.5	Existenzsatz	94
F.1.6	Eindeutigkeitssatz	94
F.1.7	Faltung	94
F.1.8	Die Grundregeln	94
F.1.9	Weitere Rechenregeln	95
F.1.10	Anwendungen auf Differentialgleichungen	96
F.2	Überblick über die Integralgleichung vom Typ Volterra (siehe [4] und [5])	96
G	Natürliche Einheiten	97
G.1	$c = 1$	97
G.1.1	$\hbar = 1$	97
G.1.2	Zur Erinnerung	98
H	Anmerkung zum Rechenprogramm	99

Einleitung

Die Quarkonia, die Teilchen-Antiteilchen ($q\bar{q}$)-Zustände der schweren *charm- und bottom-Quarks*, stellen interessante Studienobjekte zur Untersuchung der starken Wechselwirkung dar. Der Grund hierfür liegt in ihrer kleinen Bindungsenergie bzgl. ihrer Ruhemasse (so beträgt z.B. die Bindungsenergie des Bottomiums im Grundzustand ca. 0.46 GeV, die effektive Masse des bottom-Quarks ca. 4.5 GeV), weswegen Quarkonia als nichtrelativistische, dem Positronium ähnliche, $q\bar{q}$ -Bindungszustände beschrieben werden können. So schätzt man z.B. für das Charmonium

$$\langle \frac{v^2}{c^2} \rangle \approx 0.25$$

bzw. für das Bottomium

$$\langle \frac{v^2}{c^2} \rangle \approx 0.08$$

ab, wobei letzteres offensichtlich in sehr guter Näherung als nichtrelativistisches System betrachtet werden kann. Darauf basierend sind viele Potentialmodelle für diese Mesonen entwickelt worden, die sich typischerweise für kleine Abstände coulombartig verhalten (“asymptotische Freiheit”) und mit zunehmendem Abstand mindestens logarithmisch anwachsen, um so das *confinement* zu gewährleisten. Das Unbefriedigende an diesen Ansätzen ist unter anderem die Tatsache, daß diese Potentiale nicht aus **der QCD** hergeleitet, sondern von außen in die Theorie eingeführt werden. So werden erst nach Anpassung von bestimmten äußeren Parametern an das Experiment gute Ergebnisse erzielt. Die zentrale Bewegungsgleichung der Quantenmechanik ist die Schrödinger-Gleichung, die allerdings für diese Systeme nicht mathematisch streng aus ersten Prinzipien abgeleitet werden kann, sondern mehr oder weniger approximativ eingeführt werden muß. Die Schrödinger-Gleichung ist für die Quantenmechanik ebenso fundamental wie die Newtonsche Gleichung $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ für die klassische Mechanik oder die Maxwell’schen Gleichungen für den Elektromagnetismus. Im allgemeinen hängt die Lösung der Schrödinger-Gleichung von der Form der Potentialenergie des betreffenden Teilchens ab.

In dieser Arbeit wird eine andere Methode für die Beschreibung der Quarkonia verwendet, die ebenfalls mit einer Schrödinger-Gleichung arbeitet. Im Gegensatz zu den Potentialmodellen wird hier jedoch das *confinement* dadurch beschrieben, daß die beiden Konstituenten, Quark und Antiquark, als kurzlebige Elementaranregungen behandelt werden, wie es durch die heute allgemein akzeptierte Interpretation der Jet-Ereignisse in der hochenergetischen $e^- - e^+ - \text{Annihilation}$ nahegelegt wird. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, daß die Gleichung eine unkonventionelle freie Greensche Funktion für die Relativbewegung des $q\bar{q} - \text{Paares}$ enthält, welche eine *gedämpfte Propagation* beschreibt. Dagegen braucht das Potential für große Abstände nicht unendlich anzuwachsen, sondern kann wie üblich auf Null abfallen. (In dieser Arbeit wird, um das “asymptotische freie” Verhalten bei kleinen Abständen zu berücksichtigen, ein Yukawa-Potential verwendet). Die modifizierte Propagation allein sorgt bereits dafür, daß diese Gleichung keine $q - \bar{q}$ -Streulösungen bei reellen Energien mehr besitzt, und realisiert insofern das *confinement*. Dagegen kann sie, sofern die Dämpfung nicht zu stark, d.h. die Lebensdauer der Konstituenten nicht zu kurz ist, eine endliche und meist kleine Zahl von stationären gebundenen Zuständen mit reellen Energieeigenwerten besitzen, die sich zur Modellierung der Quarkonia eignen.

Eine derartige Schrödinger-Gleichung mit gedämpfter Propagation kann im Rahmen eines Lösungsverfahrens für die **QCD**, welches die Berücksichtigung der nichtperturbativen Massenskala Λ_{QCD} gestattet, im Prinzip hergeleitet werden [13, 14]. Ausgangspunkt ist dabei die mit den nichtperturbativen Propagatoren und Vertexfunktionen aufgestellte feldtheoretische Bindungsgleichung (Bethe-Salpeter-Gleichung) für das $q-\bar{q}$ -System. Durch nichtrelativistische Näherung des dort auftretenden nichtperturbativen Propagatorenpaares ergibt sich eine Greensche Funktion $G_\Lambda(E)$ der freien Relativbewegung von der Form

$$[G_\Lambda(E)]^{-1} = E - T + \frac{\Lambda^2}{E - T}$$

im Gegensatz zur freien Greenschen Funktion $G_0(E)^{-1} = E - T$ der “normalen” Schrödinger-Gleichung. Hierbei ist Λ eine Massenskala der Form $c \cdot \Lambda_{QCD}$ mit einem Zahlenfaktor c der Größenordnung eins; sie stellt (im natürlichen Einheitensystem der Teilchenphysik, vgl. Anhang G) die inverse Lebensdauer der kurzlebigen Anregungen des Quarkfeldes dar. Eine entsprechende nichtrelativistische Näherung für den “irreduziblen Kern” der Bethe-Salpeter-Gleichung, der die Wechselwirkung zwischen diesen Anregungen durch Austausch virtueller Gluonen beschreibt, ergibt ein kugelsymmetrisches statisches Potential $V(r)$, das in größter Näherung durch ein Yukawa-Potential ersetzt werden kann. Mit diesen beiden Ingredienzien ergibt sich als approximative nichtrelativistische Bindungsgleichung die Schrödinger-artige Gleichung

$$\left[G_\Lambda(E)^{-1} - V(r) \right] \psi(\vec{x}) = 0$$

und damit die Gl. (1.1), die den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet. Wir diskutieren hier eine Methode zum Lösen der Schrödinger-Gleichung mit gedämpfter Propagation und sphärischen Potentialen. Die Methode ist eine Abwandlung der von Poliatzky [12] für die Lösung gewöhnlicher Schrödingergleichung angegeben und beruht auf der Ausnutzung einer Integraltransformation für die radiale Wellenfunktion, nämlich der Laplace-Transformation. In der durch diese Transformation definierten Darstellung wird die Schrödinger-Gleichung eine Integralgleichung des Volterraschen Typs. In vielen Fällen kann diese Gleichung ohne Hilfe von Störungsmethoden exakt gelöst werden. Die sich ergebende Lösung ist dargestellt durch eine endliche Summe von Funktionen, die leicht berechnet werden können, da sie durch Integrale, die einfache algebraische Funktionen beinhalten, bestimmt werden. Aus diesem Grund ist diese Methode gut für praktische Berechnungen geeignet. In dieser Arbeit werden wir exakte Lösungen für das Yukawa-Potential herleiten. Als Anwendung werden wir die gebundenen Zustände durch die Variation der Kopplungskonstante η und der Energieskala Λ untersuchen.

Kapitel 1

Formulierung des Problems

1.1 Matrixform der Bindungsgleichung

Wir gehen von einer Schrödinger-Gleichung mit gedämpfter Propagation des Typs

$$\left[\left(T - \frac{\Lambda^2}{E - T} \right) + V(r) \right] \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (1.1)$$

aus, wobei T die kinetische Energie, E die gesamte Energie, $V(r)$ das Potential, das nur vom Abstand r abhängt und Λ eine positive Energieskala bedeuten. Durch Definition einer Hilfsamplitude χ [23] gemäß

$$\chi(\vec{x}) := \frac{\Lambda}{E - T} \psi(\vec{x}) \quad (1.2)$$

erhalten wir eine Matrix-Gleichung der Form

$$\begin{bmatrix} T + V(r) & -\Lambda \\ \Lambda & T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Mit den Separationsansätzen

$$\begin{pmatrix} \psi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} Y_{lm}(\hat{x}), \quad \left(\hat{x} = \frac{\vec{x}}{r} = \hat{x}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (1.4)$$

wobei $Y_{lm}(\hat{x})$ die Kugelflächenfunktionen sind, und mit

$$T = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (1.5)$$

wobei μ die reduzierte Masse eines Zwei-Teilchensystems ist, bekommen wir

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(r) - E & 0 \\ 0 & -E \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Der $\Lambda - Term$ enthält eine antihermitesche Matrix und zeigt, daß Gl. (1.1) einem *nichthermiteschen Eigenwertproblem* äquivalent ist. Dies verstößt nicht gegen grundlegende Prinzipien, denn Gl. (1.1) oder (1.6) beschreibt ja nicht den Zustand des gesamten Quark-Gluon-Feldsystems, sondern ist nur eine effektive Gleichung für die Projektion dieses Gesamtzustandes auf den von Ein-Quark-Ein-Antiquark-Zuständen aufgespannten Teilraum, bei der der restliche Zustandsraum (wenn auch in sehr einfacher Approximation) formal eliminiert ist. Solche effektiven Gleichungen enthalten stets Nichthermitizitäten, die den Umstand beschreiben, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit im betreffenden Teilraum in der Regel nicht erhalten bleibt, weil das System in den Restraum

übergehen kann. Im vorliegenden Fall beschreibt der nichthermitesche Λ -Term die Tatsache, daß *ungebundene* Quark-Antiquark-Zustände nur für eine endliche Lebenszeit der Größenordnung Λ^{-1} existieren können und dann ihren Anteil an der Gesamtwahrscheinlichkeit an andere, nicht explizit beschriebene Sektoren des Feldsystems abgeben müssen (confinement). Trotzdem wird sich zeigen, daß dieses nichthermitesche Problem eine *endliche* kleine Zahl (kein vollständiges System!) von stationären Eigenzuständen mit reellen Energieeigenwerten aufweisen kann; bei diesen und nur diesen kann die Gesamtwahrscheinlichkeit permanent im $q - \bar{q}$ -Teilraum verbleiben, also erhalten sein.

1.2 Lösung durch Integraltransformation

(*) Das Verhalten dieser Gleichung am Ursprung, d.h., bei $r \rightarrow 0$ ergibt sich zu

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

Die Lösung dieser Gleichung hat die übliche Form

$$\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} \rightarrow Ar^l + Br^{-l-1}. \quad (1.8)$$

Für die physikalische Radialwellenfunktion $F_l(r)$ verschwindet auf Grund der Randbedingung $rF_l(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow 0$ der B-Term. Für $G_l(r)$, den Radialteil der unphysikalischen Hilfsamplitude (1.2), ist dies zunächst nicht klar; wir werden jedoch aus Gründen einer symmetrischeren Schreibweise auch sie zunächst proportional zu r^l ansetzen:

$$\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} \propto r^l, \quad (1.9)$$

wir schließen jedoch nicht aus, daß die Restfunktion sich später als $\propto r^{-2l-1}$ bei $r \rightarrow 0$ erweist.

(*) Das Verhalten der Gleichung (1.6) im Unendlichen, d.h. bei $r \rightarrow \infty$, ergibt sich, da $V(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$, zu

$$\left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \Lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Nach Diagonalisierung der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, geht die Gleichung (1.10) über in die folgende Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

mit

$$\begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} = U^+ \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

wobei U^+ die adjungierte Matrix zu U und U die 2×2 -Matrix, gebildet durch die Eigenvektoren der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ist. Die Matrix U ist eine unitäre Matrix, die die folgende Form hat:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Mit der Identität

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \quad (1.14)$$

erhalten wir für $r \rightarrow \infty$ aus der Gleichung (1.11) die folgenden beiden Gleichungen für $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) \right\} F_l'(r) \rightarrow 0 \quad (1.15)$$

und

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \right\} G_l'(r) \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

Das Lösen dieser Gleichungen ergibt

$$F_l'(r) \propto e^{(-\gamma + i\kappa)r} \quad (1.17)$$

und

$$G_l'(r) \propto e^{-(\gamma + i\kappa)r} \quad (1.18)$$

mit

$$\gamma = \gamma(E) := \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} \quad (1.19)$$

und

$$\kappa = \kappa(E) := \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}. \quad (1.20)$$

Da die Transformation (1.12) den Vorteil hat, den wichtigen Λ -Term diagonal (mit natürlich imaginären Eigenwerten) zu machen, werden wir sie von nun an nicht nur für die Diskussion der asymptotischen Gl. (1.10/1.11), sondern auch für die Behandlung der vollen Gl. (1.6) verwenden. Dazu ist es nicht notwendig, die transformierte Gl. (1.6) vollständig aufzuschreiben; es genügt, wenn wir die Transformation der Wellenfunktionen angeben und in Gl. (1.6) verwenden. Da die Matrix U unitär ist, erhalten wir nach der Gleichung (1.12) die Beziehung

$$\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} F_l'(r) \\ G_l'(r) \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Nach dem expliziten Einsetzen der Matrix U bekommen wir

$$F_l(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ F_l'(r) + G_l'(r) \right\} \quad (1.22)$$

und

$$G_l(r) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ F_l'(r) - G_l'(r) \right\}. \quad (1.23)$$

Wir könnten die üblichen Ansätze für die resultierenden Funktionen, die dem Verhalten sowohl am Ursprung als auch im Unendlichen, der Funktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ entsprechen, verwenden:

$$F_l(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ F_l'(r) + G_l'(r) \right\} = \frac{r^l}{\sqrt{2}} \left\{ f_l(r) e^{(-\gamma + i\kappa)r} + g_l(r) e^{-(\gamma + i\kappa)r} \right\} \quad (1.24)$$

und

$$G_l(r) = \frac{i}{\sqrt{2}} \{F_l'(r) - G_l'(r)\} = i \frac{r^l}{\sqrt{2}} \{f_l(r)e^{-(\gamma+i\kappa)r} - g_l(r)e^{-(\gamma+i\kappa)r}\}, \quad (1.25)$$

nachdem wir

$$F_l'(r) = r^l f_l(r) e^{-(\gamma+i\kappa)r} \quad (1.26)$$

und

$$G_l'(r) = r^l g_l(r) e^{-(\gamma+i\kappa)r} \quad (1.27)$$

angesetzt haben. Die Funktionen $f_l(r)$ und $g_l(r)$ hängen nur vom Abstand r zwischen den Teilchen ab. Wir könnten diesen Weg weiter verfolgen, indem wir einen Potenzreihenansatz der Form

$$\begin{pmatrix} f_l(r) \\ g_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

für $f_l(r)$ und $g_l(r)$ vornehmen und durch Einsetzen in die Differentialgleichungen einen Ausdruck für die beiden Funktionen berechnen. Aber wir werden diesen Weg verlassen, und statt dessen eine Verallgemeinerung der Methode von Poliatzky [12] entwickeln. Dazu machen wir die folgenden Ansätze:

$$F_l'(r) = r^l f_l'(r) e^{-\gamma r} \quad (1.29)$$

und

$$G_l'(r) = r^l g_l'(r) e^{-\gamma r} \quad (1.30)$$

mit den Darstellungen als Laplace-Transformierte:

$$f_l'(r) = \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^l \sigma_f'(\mu) \quad (1.31)$$

und

$$g_l'(r) = \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma + i\kappa)(\mu - i\kappa)]^l \sigma_g'(\mu), \quad (1.32)$$

wobei $\sigma_f'(\mu)$ und $\sigma_g'(\mu)$ Gewichtsfunktionen sind. (Für eine Zusammenstellung allgemeiner Eigenschaften der Laplace-Transformation vgl. Anhang F). Daß wir in Gln. (1.29/1.30) nur den *gemeinsamen* Faktor $e^{-\gamma r}$ und nicht die unterschiedlichen Faktoren $e^{\pm i\kappa r}$ abspalten können, rührt daher, daß nur so aus dem gekoppelten Differentialgleichungssystem (1.6) sich ein Gleichungssystem für diese Gewichtsfunktionen ableiten läßt. Es ist daher zweckmäßig, auch eine entsprechende Laplacedarstellung des Potentials $V(r)$ zu benutzen. Wir werden ein Potential der folgenden Form benutzen:

$$V(r) = \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} \nu(\mu), \quad (1.33)$$

wobei $\nu(\mu)$ die inverse Laplacetransformierte von $V(r)$ ist. Nach den Gleichungen (1.22/1.23) und (1.29) – (1.32) haben die ursprünglichen Radialfunktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ die folgenden Formen:

$$F_l(r) = \frac{r^l e^{-\gamma r}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} \left\{ [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^l \sigma_f'(\mu) + [(\mu + 2\gamma + i\kappa)(\mu - i\kappa)]^l \sigma_g'(\mu) \right\} \quad (1.34)$$

und

$$G_l(r) = i \frac{r^l e^{-\gamma r}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \left\{ [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^l \sigma'_f(\mu) - [(\mu + 2\gamma + i\kappa)(\mu - i\kappa)]^l \sigma'_g(\mu) \right\} \quad (1.35)$$

oder

$$F_l(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ F'_l(r) + G'_l(r) \right\}$$

und

$$G_l(r) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ F'_l(r) - G'_l(r) \right\}$$

mit

$$F'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^l \sigma'_f(\mu) \quad (1.36)$$

und

$$G'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma + i\kappa)(\mu - i\kappa)]^l \sigma'_g(\mu). \quad (1.37)$$

Es zeigt sich, daß $f'_l(r)$ und $g'_l(r)$ zueinander komplex-konjugiert sind, d.h.,

$$f'_l(r)^* = g'_l(r). \quad (1.38)$$

1.3 Berechnung der Gewichtsfunktionen $\sigma'_f(\mu)$ und $\sigma'_g(\mu)$

Da die Funktionen $f'_l(r)$ und $g'_l(r)$ zueinander komplex-konjugiert sind, müssen wir nur $f'_l(r)$ weiter bearbeiten und erhalten daraus die Resultate für $g'_l(r)$ durch Konjugation. Wir werden die Funktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ in die Gleichung (1.6) wiederum einsetzen. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.22) – (1.23) und (1.29) – (1.30) erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa \right] f'_l(r) = \frac{m}{\hbar^2} V(r) \left(f'_l(r) + g'_l(r) \right) \quad (1.39)$$

und

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 - 2i\gamma\kappa \right] g'_l(r) = \frac{m}{\hbar^2} V(r) \left(f'_l(r) + g'_l(r) \right). \quad (1.40)$$

Hier haben wir die reduzierte Masse $\mu = m$ gesetzt, um eine Verwechslung mit der Integrationsvariablen μ zu vermeiden.

Wir werden also die Gleichung (1.39) weiter bearbeiten, indem wir $f'_l(r)$, $g'_l(r)$ und $V(r)$ nach den Gleichungen (1.31) – (1.33) in sie einsetzen. (Für Einzelheiten der Rechnungen vgl. die Anhänge C und D). Nach einer partiellen Integration erhalten wir aus der Gleichung (1.39) die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
& [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^{l+1} \sigma'_f(\mu) \\
& = 2(l+1) \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu') \\
& \quad + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') \left\{ \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu') \right. \\
& \quad \left. + \left[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu') \right\}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Wenn wir die beiden Seiten der obigen Gleichung nach μ differenzieren, anschließend durch $[(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^{l+1}$ dividieren und wiederum integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sigma'_f(\mu) & = \sigma'_f(0) + \\
& \quad \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') * \\
& \quad \left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \right. \\
& \quad \left. \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

In dieser Gleichung ist die komplexe Konstante $\sigma'_f(0)$ - entsprechend zwei reellen Konstanten - noch frei wählbar (zur Anzahl der Integrationskonstanten vgl. die Bemerkungen zur Gl. (D.33) im Anhang D). Wir bemerken auch daß es keine nichttriviale Lösung für die Gleichung (1.39) gibt, wenn $\sigma'_f(0)$ Null ist. Die Wahl von $\sigma'_f(0)$ ist also willkürlich und die einfachste Wahl ist

$$\sigma'_f(0) = 1. \tag{1.43}$$

Trotz ihrer besonderen Form, ist die Gleichung (1.39) eine konventionelle inhomogene Volterra'sche Gleichung zweiter Art. Dies können wir explizit sehen, wenn wir die Gleichung (1.39) in die folgende Form bringen (siehe Anhang F)

$$\sigma'_f(\mu) = 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_+(\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') + K_\mp(\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') \right\} \tag{1.44}$$

mit den Integralkernen

$$K_+(\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} d\mu'' \frac{\nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)]^{l+1}} \tag{1.45}$$

und

$$K_\mp(\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} d\mu'' \frac{\nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)]^{l+1}}. \tag{1.46}$$

Dies ist nur möglich, wenn $\nu(0) = 0$ ist. Nach der von Poliatzky [12] gegebenen Diskussion (siehe auch Anhang D) zeigt dies, daß die notwendige und ausreichende Bedingung, die Regularität der Gleichung (1.39) zu gewährleisten ist, daß das Potential $V(r)$ im Unendlichen schneller als r^{-1} verschwindet. Daher ist die Gleichung (1.39) regulär für das Yukawa-Potential und singulär für

das Coulomb-Potential. Der einzige bekannte *analytisch lösbar*e Grenzfall, das Coulomb-Potential mit $\Lambda = 0$, kann also leider als Test der Methode nicht herangezogen werden.

Die selben Berechnungen mit der Gleichung (1.40) führen zu

$$\begin{aligned} \sigma'_g(\mu) &= \sigma'_g(0) + \\ &\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') * \\ &\left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right. \\ &\left. + \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \right\} \end{aligned} \quad (1.47)$$

oder

$$\sigma'_g(\mu) = 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_- (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') + K_\pm (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') \right\} \quad (1.48)$$

mit der Wahl

$$\sigma'_g(0) = 1 \quad (1.49)$$

und den Kernen

$$K_- (\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} d\mu'' \frac{\nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa)]^{l+1}} \quad (1.50)$$

und

$$K_\pm (\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} d\mu'' \frac{\nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa)]^{l+1}}. \quad (1.51)$$

1.4 Einige Symmetrien und Beobachtungen

Wir erhalten aus den Gleichungen (1.44) – (1.46) und (1.48) – (1.51) und aus der Tatsache, daß $\nu(\mu)$ reell ist, folgende Symmetrien

$$\begin{aligned} \sigma'_f(\mu)^* &= \sigma'_g(\mu) \\ F'_l(r)^* &= G'_l(r) \\ K_+^* (\mu, \mu') &= K_- (\mu, \mu') \\ K_\mp^* (\mu, \mu') &= K_\pm (\mu, \mu') \end{aligned} \quad (1.52)$$

(*) Für den wechselwirkungsfreien Fall, d.h., für $V(r) = 0$ bzw. $\nu(\mu) = 0$, sind die $K_k(\mu, \mu')$ gleich *Null* mit $k = +, -, \pm, \mp$. In diesem Fall gilt

$$\sigma'_f(\mu) = \sigma'_g(\mu) = 1 \quad (1.53)$$

und die Funktionen $F'_l(r)$ und $G'_l(r)$ haben die folgende Form

$$F'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^l \quad (1.54)$$

und

$$G'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma + i\kappa)(\mu - i\kappa)]^l. \quad (1.55)$$

Diese Funktionen verhalten sich wie $\frac{1}{r^{l+1}}$ am Ursprung. Wir haben nach Substitution $\mu r = x$ und Grenzübergang $r \rightarrow 0$ in den Gleichungen (1.54) und (1.55) folgendes erhalten

$$\lim_{r \rightarrow 0} F'_l(r) = \lim_{r \rightarrow 0} G'_l(r) = \frac{\Gamma(2l+1)}{r^{l+1}} = \frac{(2l)!}{r^{l+1}}, \quad (1.56)$$

wobei Γ die *Gammafunktion* bedeutet. Die Funktion $F_l(r)$ verhält sich auch wie $\frac{1}{r^{l+1}}$ am Ursprung und $G_l(r)$ ist *Null* am Ursprung, da sie Linearkombinationen von $F'_l(r)$ und $G'_l(r)$ gemäß (1.22/1.23) sind. Daher gibt es keine physikalischen Lösungen für $F_l(r)$. Dies ist ein Grenzfall des in [14] allgemeiner diskutierten Resultats, daß die Gl. (1.1) keine physikalisch akzeptablen Lösungen der kontinuierlichen Spektrums (Quark-Antiquark-Streuzustände) bei reellen E besitzt. (*) Für $V(r) \neq 0$, d.h. für den wechselwirkenden Fall, nach den Gleichungen (1.36) – (1.37), verhalten sich $F'_l(r)$ und $G'_l(r)$ am Ursprung wieder wie $\frac{1}{r^{l+1}}$. In diesem Fall ergibt sich

$$\lim_{r \rightarrow 0} F'_l(r) = \frac{(2l)!}{r^{l+1}} \sigma'_f(\infty) \quad (1.57)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow 0} G'_l(r) = \frac{(2l)!}{r^{l+1}} \sigma'_g(\infty). \quad (1.58)$$

Da $F_l(r)$ und $G_l(r)$ Linearkombinationen von $F'_l(r)$ und $G'_l(r)$ sind, verhalten sie sich auch wie $\frac{1}{r^{l+1}}$ am Ursprung. Daher ist die notwendige Bedingung dafür, daß sich $F_l(r)$ wie r^l am Ursprung verhält, die folgende Gleichung

$$Re [\sigma'_f(\infty)] = 0. \quad (1.59)$$

Falls diese Bedingung bei gewissen Energien E erfüllt ist, existiert dort ein physikalisch akzeptabler gebundener Zustand. Dies kann sowohl für $E < 0$ (wie im Falle $\Lambda = 0$) als auch für $E > 0$ der Fall sein, da für die Gleichung mit $\Lambda \neq 0$ die Energie $E = 0$ keine ausgezeichnete Rolle (als "Schwelle" eines kontinuierlichen Spektrums) mehr spielt. Wir werden in dem weiteren Verlauf dieser Arbeit dieses Resultat am Beispiel des Yukawa-Potentials anwenden.

Kapitel 2

Anwendung der Resultate auf das Yukawa-Potential

Das Yukawa-Potential, auch abgeschirmtes Coulombpotential genannt, wurde im Jahr 1935 von dem japanischen Physiker Hideki Yukawa in die Kernphysik eingeführt. Yukawa war sogar in der Lage aus der bekannten Reichweite der Kernkräfte die Masse des π -Mesons vorherzusagen. Dieses galt danach lange Zeit als die stärkste Kraft im Kern, die die Wechselwirkung zwischen Nukleonen als einen Pionenaustausch beschreibt. Heutzutage wissen wir, daß der Pionenaustausch in der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung nur bei großen Entfernungen gültig ist, während bei kürzeren Entfernungen andere Teilchen (meistens die Spin-1-Teilchen) in den Austauschmechanismus treten. Trotz allem ist das Yukawa-Potential ein grundlegendes Potential in der Quantenmechanik geblieben. Der Austausch eines Teilchens ist der wesentliche Wechselwirkungsmechanismus in der modernen Quantenphysik. Es wurden viele Versuche unternommen mit Hilfe des Yukawa-Potentials exakte Lösungen der Schrödinger-Gleichung zu finden, aber infolge mangelnder Fortschritte sind nur wenige veröffentlicht.

Das anziehende Yukawa-Potential hat die folgende Form

$$V(r) = -\frac{f^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu_0 r}}{r}, \quad (2.1)$$

wobei $\frac{f^2}{4\pi}$ die Kopplungsstärke und μ_0 die inverse Wellenlänge oder den Betrag des Wellenzahlvektors des Austauschteilchens bezeichnen. Die inverse Laplace-Transformierte von $\frac{e^{-\mu_0 r}}{r}$ ist $\theta(\mu - \mu_0)$, mit

$$\theta(\mu - \mu_0) = \begin{cases} 1, & \text{für } \mu > \mu_0 \\ 0, & \text{wenn sonst} \end{cases},$$

wie man leicht nachrechnet. Damit ist die inverse Laplace-Transformierte des Yukawa-Potentials also

$$\nu(\mu) = -\frac{f^2}{4\pi} \theta(\mu - \mu_0). \quad (2.2)$$

Wenn wir diese Gleichung in die Gleichungen (1.42) und (1.47) einsetzen, erhalten wir (vgl. Anhang E.1):

$$\begin{aligned} \sigma'_f(\mu) = 1 - \eta \theta(\mu - \mu_0) \frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' & \left\{ \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa)(\mu' - \mu_0 + i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_f(\mu' - \mu_0) + \right. \\ & \left. \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - \mu_0 - i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_g(\mu' - \mu_0) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma'_g(\mu) = 1 - \eta\theta(\mu - \mu_0) \frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' \left\{ \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - \mu_0 - i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_g(\mu' - \mu_0) + \right. \\ \left. \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa)(\mu' - \mu_0 + i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_f(\mu' - \mu_0) \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei

$$\eta = \frac{2mf^2}{4\pi\hbar^2} \quad (2.5)$$

die Kopplungskonstante ist. Da $\sigma'_f(\mu)^* = \sigma'_g(\mu)$, genügt es nur $\sigma'_f(\mu)$ weiter zu behandeln. Um die Rechnungen zu vereinfachen führen wir die folgenden Variablen ein

$$\begin{aligned} s &= \frac{\mu}{\mu_0}, \\ R'_{\nu\lambda}(s) &= \sigma'_f(\mu), \\ i\nu(E) &= i\frac{\kappa(E)}{\mu_0}, \\ \lambda(E) &= \frac{2\gamma(E)}{\mu_0}, \\ \eta_0 &= \frac{\eta}{\mu_0} = \frac{2mf^2}{4\pi\mu_0\hbar^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Gleichung (2.3) wird also

$$\begin{aligned} R'_{\nu\lambda}(s) = 1 - \eta_0\theta(s - 1) \frac{1}{2} \int_1^s dt \left\{ \frac{[(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1) + \right. \\ \left. \frac{[(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1)^* \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ein geeigneter Ansatz um diese Gleichung zu lösen, ist ebenso wie in [21]

$$R'_{\nu\lambda}(s) = \sum_{n=0}^{[s]} (-\eta_0)^n \varphi_n(s - n, \nu, \lambda), \quad (2.8)$$

wobei $[s]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner als oder gleich s ist, ist. Man beachte, daß die rechte Seite dieses Ansatzes für endliches s eine endliche Summe ist. Die Gleichung (2.8) kann auch in der folgenden Form geschrieben werden

$$R'_{\nu\lambda}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \theta(s - n) \varphi_n(s - n, \nu, \lambda). \quad (2.9)$$

Wenn wir diesen Ansatz für $R'_{\nu\lambda}(s)$ in die Gleichung (2.7) einsetzen, und die Terme der gleichen Potenzen von η_0 vergleichen, erhalten wir mit $s - n = y$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(y, \nu, \lambda) = 1, \quad \varphi_n(y, \nu, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^y dt \left\{ \frac{[(t+n-1+\lambda-i\nu)(t+n-1+i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + \right. \\ \left. \frac{[(t+n-1+\lambda+i\nu)(t+n-1-i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

und dies garantiert die Gültigkeit des Ansatzes (2.8).

Aus dieser rekursiven Beziehung wird klar, daß die Funktionen $\varphi_n(y, \nu, \lambda)$ analytische Funktionen sind. Es ist zu beachten, daß der Ansatz (2.8) so gewählt ist, daß die Kopplungskonstante η_0 nicht in der rekursiven Beziehung erscheint. Daher ist das Problem für alle Werte der Kopplungskonstante im Grunde genommen gelöst, wenn die Funktionen $\varphi_n(y, \nu, \lambda)$ einmal berechnet sind. Dies ist ein wichtiger Vorteil, verglichen zu einer rein numerischen Lösung, die nur für spezifische Werte dieses Parameters ausgeführt werden kann.

2.1 Der Fall der Nullenergiezustände bei $\Lambda = 0$

Um eine Vorstellung von den Funktionen φ_n zu bekommen, ist es sehr instruktiv, den Nullenergiezustandsfall mit $\Lambda = 0$ zu betrachten (vgl. Anhang E.1.1). In diesem Fall können die ersten wenigen Funktionen φ_n in logarithmischen und algebraischen Funktionstermen ausgedrückt werden, während die anderen, mit ziemlicher Genauigkeit angenähert werden können. Solche Annäherungen sind ab dem Zeitpunkt, ab dem der Integrand in der Gleichung (2.10) eine einfache algebraische Funktion ist, leicht zu finden. Zum Beispiel ist die folgende Funktion

$$\varphi_n(y, 0, 0) \cong \frac{1}{n! (2l+1)_n} \left(\frac{y}{y+n} \right)^{2l} \frac{y^n}{(y+1)_n} \quad (2.11)$$

eine Annäherung, die für $n = 0$ und $n = 1$ exakt ist, und sich dem exakten Wert von φ_n für $l \rightarrow \infty$ annähert. Hier bedeutet $(a)_n$ das Pochhammersymbol, das wie folgt definiert ist:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1, \quad (2.12)$$

wobei $a = 2l + 1$ bzw. $a = y + 1$ ist. Mit Hilfe dieser Annäherung können wir die Werte der Kopplungskonstante η_0 für die Nullenergiezustände schätzen. Aus der Gleichung (1.63) folgt die Bedingung der gebundenen Nullenergiezustände, nämlich

$$R'_{\nu\lambda}(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \varphi_n(\infty, 0, 0) = 0. \quad (2.13)$$

Wenn wir die Gleichung (2.11) in (2.13) einsetzen, erhalten wir $J_{2l}(2\sqrt{\eta_0}) = 0$. Es sollen nun die Nullstellen der obigen Gleichung für die großen Werte von l , die auch große Werte von η_0 liefern, berechnet werden. Die großen Nullstellen der Bessel-Funktionen sind asymptotisch gegeben durch $2\sqrt{\eta_0} = (n_r + l - \frac{1}{4})\pi$, wobei n_r die radiale Quantenzahl ist. Für einen festen Wert der Hauptquantenzahl n ($n = n_r + l$) erhält man den maximalen Wert der Nebenquantenzahl l bei $n_r = 1$. Daher ist die Kopplungskonstante, bei der sich ein stationärer Nullenergie-Zustand mit diesem l bildet, näherungsweise gegeben durch

$$\frac{\pi^2}{4} \left(n - \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{f^2}{4\pi} \frac{2m}{\mu_0 \hbar^2} = \eta_0, \quad l = l_{max} = n - 1. \quad (2.14)$$

Diese Gleichung stellt näherungsweise die Beziehung zwischen der Masse μ_0 des ausgetauschten Teilchens und der maximalen Drehimpulsquantenzahl l_{max} dar, die ein gebundener Zustand erhalten kann.

Aus der Gleichung (2.11) wird klar, daß die Geschwindigkeit der Konvergenz der Reihe (2.13) ähnlich wie die einer Bessel-Funktion sein muß, d.h. schnell. Wenn wir die Gleichung (2.13) erneut wie folgt schreiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R'_{\nu\lambda}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-\eta_0)^k \varphi_k(n-k, 0, 0) = 0, \quad (2.15)$$

nimmt die Geschwindigkeit der Konvergenz bedeutsam zu. Wir können dies durch Abbrechen des obigen Limes bei $n = 4$ illustrieren. Wir werden nur drei Funktionen für diese Illustrierung

gebrauchen und zwar $\varphi_1(3, 0, 0)$, $\varphi_2(2, 0, 0)$, $\varphi_3(1, 0, 0)$. Wenn wir die im Anhang (E2) berechneten Funktionen ($\varphi_1(y, 0, 0)$, $\varphi_2(y, 0, 0)$, $\varphi_3(y, 0, 0)$) einsetzen erhalten wir

$$R'_{00}(4) = 1 - \frac{3}{4}\eta_0 + \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right)\eta_0^2 - \left(\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}\right)\eta_0^3 = 0. \quad (2.16)$$

Wenn wir diese Gleichung nach η_0 lösen, erhalten wir für die kleinste Lösung (aus den drei Lösungen) den Wert 1.680344993. (Die drei Lösungen sind mit Hilfe von Maple die folgenden: 1.680344993, 7.259747907, 58.34795670). Für diesen Kopplungswert liegt der tiefste Zustand mit $l = 0$ gerade bei $E = 0$. Der exakte (mit $n = 21$ berechnete) Wert ([12], p.13, Table 1) ist 1.6798077, d.h. die Näherung besitzt bereits eine relative Genauigkeit von 3.10^{-4} .

2.2 Der Fall der Zustände mit $\Lambda > 0$ und $E \neq 0$

Im folgenden werden wir den Fall der gebundenen Zustände behandeln. (Für Details zu allen Rechnungen siehe die Anhänge E.1.1 bis E.1.10). Aus der Gleichung (1.63) folgt die Bedingung der gebundenen Energiezustände, nämlich

$$Re \left\{ R'_{\nu\lambda}(\infty) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n Re \left\{ \varphi_n(\infty, \nu, \lambda) \right\} = 0. \quad (2.17)$$

Die Geschwindigkeit der Konvergenz dieser Reihe ist schnell und wenn wir sie neu schreiben als

$$Re \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} R'_{\nu\lambda}(n) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-\eta_0)^k Re \left\{ \varphi_k(n-k, \nu, \lambda) \right\} = 0, \quad (2.18)$$

wird die Geschwindigkeit der Konvergenz nochmals verbessert.

Für die Berechnung der Funktionen φ_n werden wir einen für die Anwendungen geeigneten effizienten Algorithmus entwickeln. Die leitende Idee ist dabei die rekursive Beziehung, die Gleichung (2.10), durch eine geeignete Näherung in eine algebraische umzuformen. Als ersten Schritt führen wir eine neue Variable z ein,

$$z = \frac{y}{1 + \alpha y} \quad \text{oder} \quad y = \frac{z}{1 - \alpha z}, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (2.19)$$

wobei α eine beliebige positive reelle Zahl ist. Man beachte, daß die Variable z endlich bleibt, selbst wenn $y = \infty$ ist. Um diese rekursive Beziehung umzuformen, führen wir die neuen Funktionen Φ_n ein.

$$\varphi_n(y, \nu, \lambda) = \frac{\Phi_n(z, \nu, \lambda)}{n! (1 + \lambda)_n [(n + \lambda - i\nu)(n + i\nu)]^l} \quad (2.20)$$

Die besondere Form des Nenners in der Gleichung (2.20) spiegelt die starke Abhängigkeit der Funktionen φ_n von n wider. Die restliche Abhängigkeit ist relativ geringfügig. Die rekursive Beziehung (2.10) nimmt jetzt die folgende Form an

$$\begin{aligned} \Phi_0(z, \nu, \lambda) &= 1, \\ \Phi_n(z, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \int_0^z dt \left\{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\}, \\ &n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.21)$$

dabei wurden die Funktionen

$$\begin{aligned}
f_n(t, \nu, \lambda) &= \frac{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n-1+i\nu}t)]^t}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n+i\nu}t)]^{t+1}} \\
g_n(t, \nu, \lambda) &= \frac{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-1-i\nu}t)]^t}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n+i\nu}t)]^{t+1}}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

verwendet mit der Abkürzung

$$a_k = \frac{1}{k} - \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{2.23}$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir z durch $z+x$ und bringen die rekursive Beziehung in die folgende Form:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z+x, \nu, \lambda) &= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \\
&\frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \int_0^x dt \{ f_n(t+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t+z, \nu, \lambda) + \\
&g_n(t+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t+z, \nu, \lambda) \}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Einmal iteriert sieht die Gleichung (2.24) folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z+x, \nu, \lambda) &= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \{ \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) + \\
&\frac{(n-1)(n-1+\lambda)}{2(n-1+i\nu)(n-1+\lambda-i\nu)} \left[\int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) + \right. \\
&\left. \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \right] + \\
&\Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) + \\
&\frac{(n-1)(n-1+\lambda)}{2(n-1-i\nu)(n-1+\lambda+i\nu)} \left[\int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) + \right. \\
&\left. \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \right] \}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Wir könnten so fortfahren, aber für unsere Zwecke reicht die obige Form. Um die Rechnungen zu vereinfachen, definieren wir die folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned}
A(n, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \\
B(n, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)(n-1)(n-1+\lambda)}{4(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)(n-1+\lambda-i\nu)} \\
C(n, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)(n-1)(n-1+\lambda)}{4(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)(n-1-i\nu)(n-1+\lambda+i\nu)}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Gleichung (2.24) lautet also:

$$\begin{aligned}
& \Phi_n(z+x, \nu, \lambda) = \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \\
& A(n, \nu, \lambda) \left\{ \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \right\} + \\
& B(n, \nu, \lambda) \left\{ \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) + \right. \\
& \quad \left. \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \right\} + \\
& C(n, \nu, \lambda) \left\{ \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) + \right. \\
& \quad \left. \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \right\}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Wir machen jetzt einige Abschätzungen für die weiteren Rechnungen, indem wir schreiben

$$\begin{aligned}
& B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) = \epsilon_1(x) + \\
& \frac{1}{2} \{ \Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda) \} B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(z+t, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(z+t', \nu, \lambda) \\
& B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) = \epsilon_2(x) + \\
& \frac{1}{2} \{ \Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda) \} B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \\
& C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) = \epsilon_3(x) + \\
& \frac{1}{2} \{ \Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda) \} C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
& C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) = \epsilon_4(x) + \\
& \frac{1}{2} \{ \Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda) \} C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Gleichung (2.27) wird also bis auf einen Fehlerterm $\epsilon(x)$ zu einer rein algebraischen Rekursionsbeziehung:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z+x, \nu, \lambda) &= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) F_{nx}(z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) G_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
&+ \frac{1}{2} \{ [\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)] [I_{nx}(z, \nu, \lambda) + K_{nx}(z, \nu, \lambda)] + \\
& \quad [\Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda)] [H_{nx}(z, \nu, \lambda) + J_{nx}(z, \nu, \lambda)] \} \\
&+ \epsilon(x),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

wobei wir die folgenden Funktionen eingeführt haben:

$$\begin{aligned}
F_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t + z, \nu, \lambda) \\
G_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t + z, \nu, \lambda) \\
I_{nx}(z, \nu, \lambda) &= B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t + z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t' + z, \nu, \lambda) \\
H_{nx}(z, \nu, \lambda) &= B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t + z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t' + z, \nu, \lambda) \\
J_{nx}(z, \nu, \lambda) &= C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t + z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t' + z, \nu, \lambda) \\
K_{nx}(z, \nu, \lambda) &= C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t + z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t' + z, \nu, \lambda) \\
\epsilon(x) &= \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \epsilon_3(x) + \epsilon_4(x)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Es ist auch sehr nützlich, die Funktionen $F_{nx}(z, \nu, \lambda)$ und $G_{nx}(z, \nu, \lambda)$ folgendermaßen zu zerlegen:

$$\begin{aligned}
F_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \widetilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
G_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \widetilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt f_n(t + z, \nu, \lambda) \\
\widetilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt g_n(t + z, \nu, \lambda)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

sind.

Wenn $x \rightarrow 0$, wird die Funktion $\epsilon(x)$ verglichen mit den anderen Termen verschwindend klein. Die Gleichung (2.29) ist die gewünschte algebraische rekursive Beziehung. Um die Größe oder den Beitrag von $\epsilon(x)$ abzuschätzen, können wir für reelle ν und λ bemerken, daß die Funktionen $|f_n|$ und $|g_n|$ streng positive Funktionen sind, und daher ist die Funktion $|\Phi_n(z, \nu, \lambda)|$ untere Grenze einer mit z monoton wachsenden Funktion $R_n(z + x, \nu, \lambda)$, d.h.

$$|\Phi_n(z, \nu, \lambda)| \leq R_n(z + x, z, \nu, \lambda) \tag{2.33}$$

mit

$$R_n(z, \nu, \lambda) = |A(n, \nu, \lambda) \int_0^z dt \{ |f_n(t, \nu, \lambda)| + |g_n(t, \nu, \lambda)| \} | \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) |$$

Aus den Gleichungen (2.30) und (2.33), erhalten wir eine Abschätzung von $|\epsilon(x)|$ nach oben, und zwar (siehe Anhang E.1.9)

$$|\epsilon(x)| \leq 2R_{n-2}(z + x, \nu, \lambda) S_n(z + x, z, \nu, \lambda) \tag{2.34}$$

mit

$$S_n(z + x, z, \nu, \lambda) = \sum_{i=1}^4 S_n^i(z + x, z, \nu, \lambda) \tag{2.35}$$

und für die Funktionen S_n^i vgl. Anhang E.1.9

Wenn wir die folgenden Abkürzungen benutzen,

$$\begin{aligned}
(I + K)_{nx}(z, \nu, \lambda) &:= I_{nx}(z, \nu, \lambda) + K_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
(H + J)_{nx}(z, \nu, \lambda) &:= H_{nx}(z, \nu, \lambda) + J_{nx}(z, \nu, \lambda)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

wird die Gleichung (2.29)

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z + x, \nu, \lambda) = & \Phi_n(z, \nu, \lambda) + A(n, \nu, \lambda) \left\{ \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) \tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) + \right. \\
& \left. \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) \tilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \{ [\Phi_{n-2}(z + x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)] (I + K)_{nx}(z, \nu, \lambda) + \\
& [\Phi_{n-2}^*(z + x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda)] (H + J)_{nx}(z, \nu, \lambda) \} + \epsilon(x)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

In diesem iterativen Verfahren ist x hinreichend klein zu wählen, um den Beitrag von $\epsilon(x)$ unerheblich zu machen. Die Iteration beginnt mit $z = 0$, $z + x = x$ und $\Phi_0(z, \nu, \lambda) = 1$, $\Phi_n(0, \nu, \lambda) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\Phi_{-1}(z, \nu, \lambda) = 0$ und mit Iterationen für n von $n = 1$ bis $n = n_{max}$. Das Ergebnis ist eine große Anzahl von Funktionen $\Phi_n(z + x, \nu, \lambda)$, $n = 1, 2, \dots, n_{max}$. Neue Werte von z und $z + x$ werden durch das Einsetzen eines neuen Wertes für z (gleich dem vorherigen Wert von $z + x$) generiert, und die Iterationen werden für n wiederholt. Diese Operationen werden fortgesetzt bis z den gewünschten Wert erreicht. Das Resultat des ganzen Verfahrens ist eine große Anzahl von Funktionen $\Phi_n(z, \nu, \lambda)$, $n = 1, 2, \dots, n_{max}$. Man beachte, daß, da die Gleichung (2.29) eine inhomogene, rekursive zwei-Term Beziehung ist, ihre Lösung eindeutig ist und es gibt keine Instabilitätsgefahr, verursacht durch einen Abrundungsfehler [12]. Selbst wenn die Funktionen F_{nx} , G_{nx} , H_{nx} , I_{nx} , J_{nx} und K_{nx} in elementaren oder transzendenten Termen ausgedrückt werden können, führt es zu besserer Effizienz, einige leichte Näherungen in algebraischen Funktionstermen zu machen. Eine Auswahl dieser algebraischen Funktionen befindet sich im Anhang E.1. Eine Anwendung ergibt sich im gebundenen Energiezustandsspektrum, d.h. in der Beziehung zwischen der Kopplungskonstanten $\eta_0 = \frac{2mf^2}{4\pi\mu_0\hbar^2}$ und der Bindungszustandsenergie E , oder gleichbedeutend, zwischen η_0 und $\lambda = \frac{2}{\mu_0} \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)}$ oder zwischen η_0 und $\nu = -\frac{2}{\mu_0} \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}$. Formal erhält man diese Beziehungen durch das Lösen der Gleichung (2.17) bzw. (2.18) bezüglich η_0 . In der Praxis wird natürlich nur eine endliche Zahl der Terme berücksichtigt, wenn der Beitrag der höheren Terme außerhalb der gewünschten Genauigkeit liegt. Daher ist die Gleichung, die das gebundene Energiezustandsspektrum bestimmt, die folgende:

$$\sum_{k=0}^{n_{max}} (-\eta_0)^k Re \{ \varphi_k(1 + n_{max} - k, \nu, \lambda) \} = 0 \tag{2.38}$$

Wenn wir gemäß Gl. (2.20) φ_n durch Φ_n ersetzen, erhalten wir die folgende nützliche Gleichung:

$$Re \left\{ R'_{\nu\lambda}(E, n_{max}) \right\} = \sum_{n=0}^{n_{max}} (-\eta_0)^n Re \left\{ \frac{\Phi_n \left(\frac{1 + n_{max} - n}{1 + \alpha(1 + n_{max} - n)}, \nu, \lambda \right)}{n! (1 + \lambda)_n [(n + \lambda - i\nu)(n + i\nu)]^t} \right\} = 0. \tag{2.39}$$

Mit Hilfe der im Anhang berechneten algebraischen Funktionen und der rekursiven Beziehung (2.29), werden wir diese Gleichung (2.39) für bestimmte Werte von η_0 , n_{max} , α , Λ und Energie E lösen, und die Bindungszustandsenergien E daraus bestimmen.

Kapitel 3

Resultate

Als Anwendung betrachten wir die Gleichung (2.39), die das gebundene Energiezustandsspektrum bestimmt. Mit Hilfe eines C^{++} -Programms werden wir für $l = 0$, $n_{max} = 40$, $\alpha = 1$ und $-1GeV \leq E \leq 1GeV$ durch Variation der Kopplungskonstante η und der Energieskala Λ die Existenz der gebundenen Zustände untersuchen. Für die Berechnungen werden wir natürliche Einheiten benutzen um die Resultate zu vereinfachen, d.h. wir setzen $c = \hbar = 1$ in die Schrödinger-Gleichung ein, wobei c die Lichtgeschwindigkeit und \hbar die durch 2π dividierte Planck-Konstante ist. Wir werden für die Masse m , die Bottommasse $m_b = 4.5GeV$ und für die inverse Wellenlänge μ_0 den Wert $0.6GeV$ nehmen. Die folgenden Kurven zeigen die Untersuchung der gebundenen Zustände nach der Variation von η oder von Λ in einem Energiebereich von $-1GeV$ bis $1GeV$. Die erste Bilderserie (Abb. 3.1-3.6) zeigt die Untersuchung der gebundenen Zustände nach der Variation von η mit einem festem Wert von $\Lambda = 0.225GeV$, die zweite die Untersuchung der gebundenen Zustände nach der Variation von Λ mit einem festen Wert von $\eta = 10$ aufgeführt. Aufgetragen wird der Realteil der Gleichung (2.39) über E . Aus der Betrachtung der beiden Variationstypen folgt, daß sie in entgegengesetzten Richtungen wirken.

3.1 η -Variation

Mit wachsendem η zieht sich das Minimum der Kurven nach unten. Wenn $\eta < 9$ ist, befindet sich das Minimum oberhalb der horizontalen *Null-Achse*, d.h. es existiert noch kein gebundener Zustand. Ab $\eta = 9$ befindet es sich unter der *Null-Achse*, und wir erhalten zwei Nullstellen, die erwarteten gebundenen Zustände. Wenn η sehr groß wird, kann es vorkommen, daß wir vier Nullstellen erhalten, aber da dann die alternierende Reihe nach Potenzen von η_0 in (2.39) schon langsamer konvergiert und starke "cancellation" zeigt, ergeben sich hier bereits Probleme mit der endlichen Rechnergenauigkeit, die ein numerisch stabiles Resultat unmöglich machen. Man sieht allenfalls noch, wie im Bild mit $\eta = 15$ (Abb. 3.6), den Beginn der Ausbildung des zweiten Minimums, noch oberhalb der horizontalen Null-Achse. Aus den Bildern ist klar, daß außer in den Grenzfällen, wo eine Kurve gerade die Nullachse berührt, die Bindungszustände sich stets paarweise ausbilden, wie es bereits in [14] beobachtet wurde. Außerdem sieht man, daß die Bindungszustands-Energien sowohl bei $E < 0$ als auch bei $E > 0$ auftreten: wie schon betont, spielt im System mit $\Lambda > 0$ die Energie $E = 0$ keine ausgezeichnete Rolle mehr.

3.2 Λ -Variation

Bei der Variation von Λ , im Gegensatz zu der von η , ziehen sich die beiden Minima der Kurven nach oben, wenn Λ wächst. Für $0GeV < \Lambda < 0.073GeV$ erhalten wir vier gebundene Zustände, d.h. zwei Minima liegen unterhalb der *Null-Achse*. Die Zahl der gebundenen Zustände verkleinert sich bei $\Lambda = 0.073GeV$ auf drei. Für $0.073GeV < \Lambda < 0.257GeV$ gibt es zwei gebundene Zustände

und für $\Lambda > 0.257\text{GeV}$ keinen, d.h. das Minimum der Kurven befindet sich für Werte größer als $\Lambda = 0.257\text{GeV}$ oberhalb der *Null – Achse*. In diesem Bereich sind die beiden Konstituenten bereits so kurzlebig, daß das Potential bei der gegebenen Kopplungsstärke $\eta = 10$ sie nicht mehr in einem stabilen gebundenen Komplex zusammenhalten kann. Bei kleinen Λ nähert sich die Situation dagegen mehr derjenigen eines gewöhnlichen Schrödinger-Problems mit Yukawa-Potential, das bei dieser Kopplungsstärke eine endliche (und kleine) Zahl von Bindungszuständen in der s-Welle besitzt.

3.3 Die Abbildungen

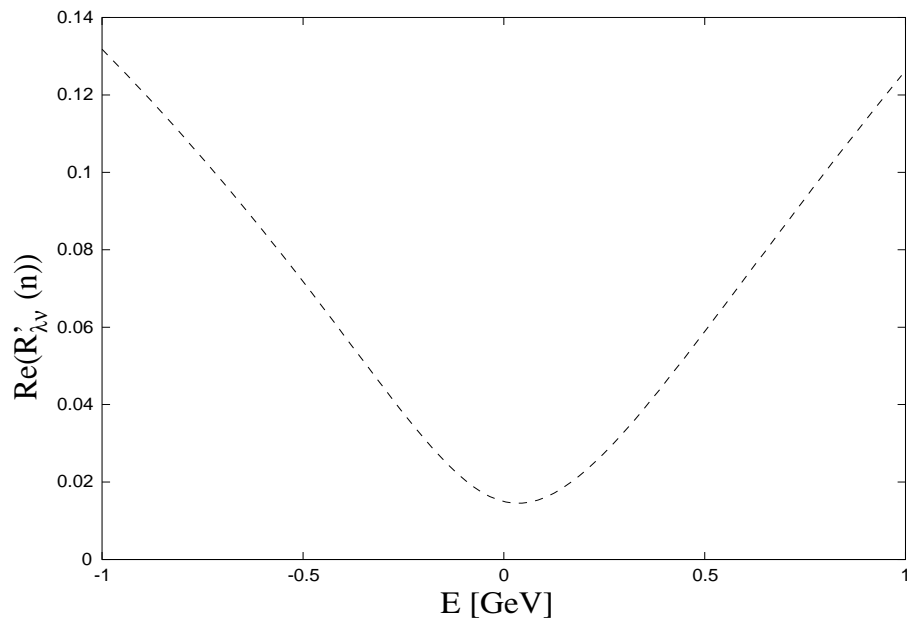
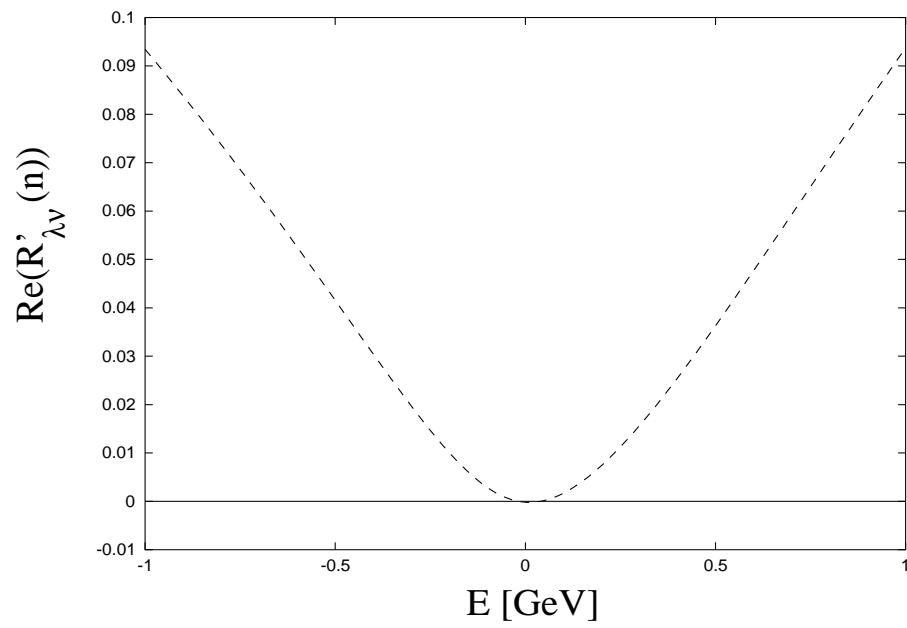
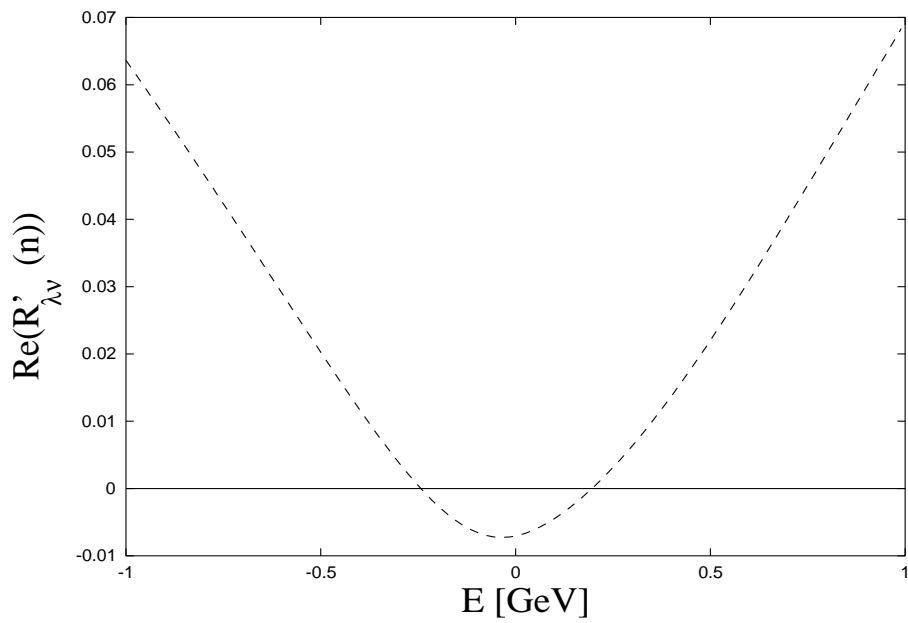
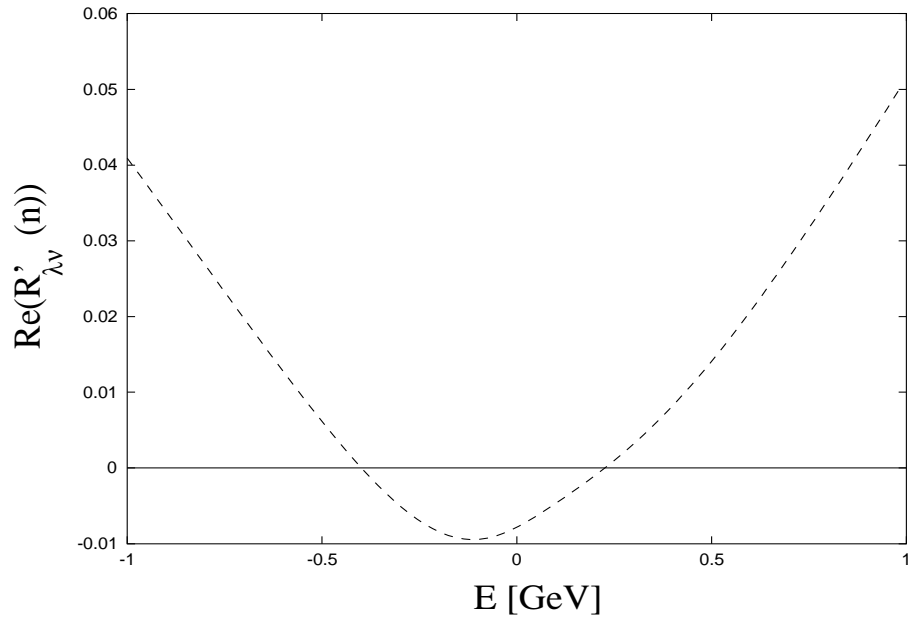
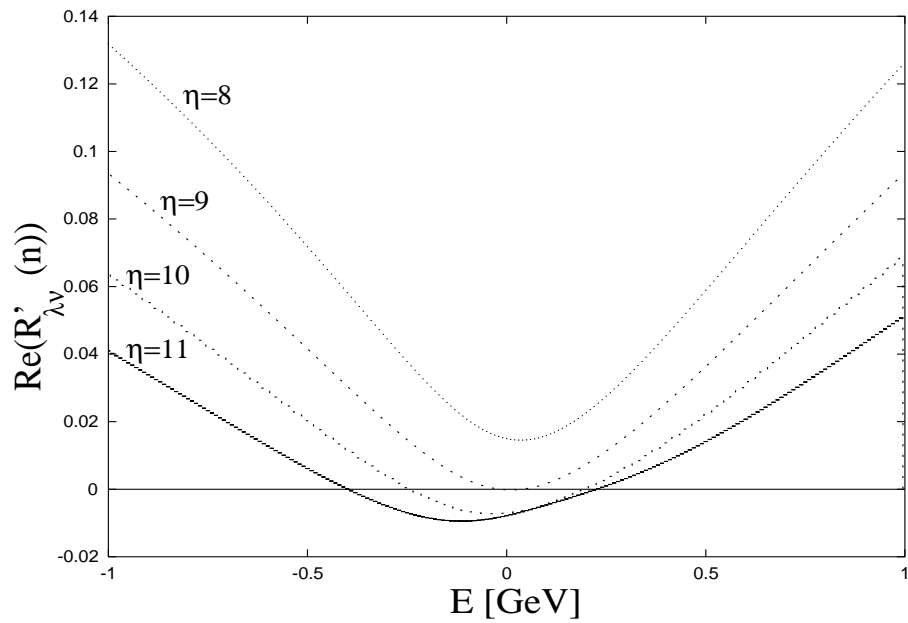
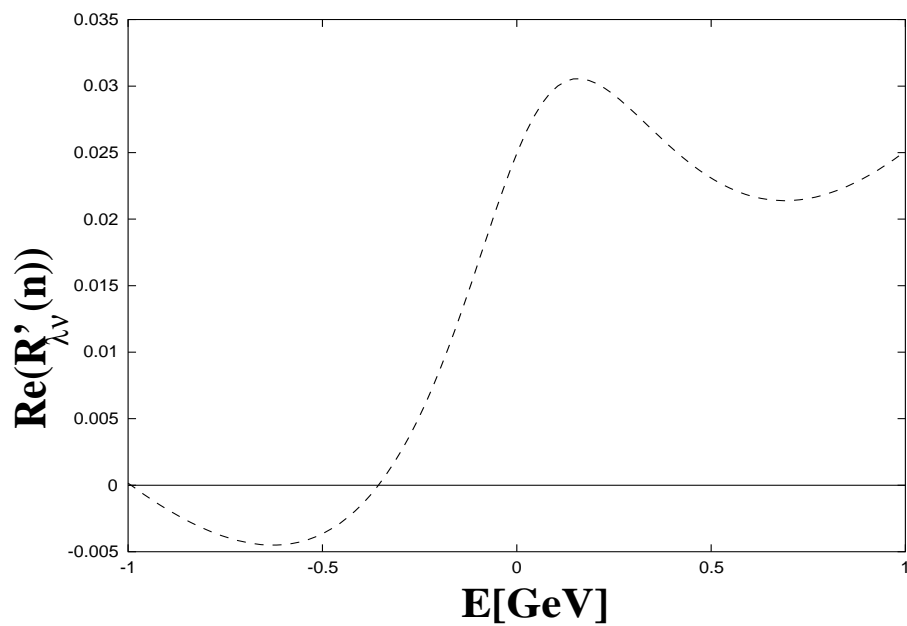
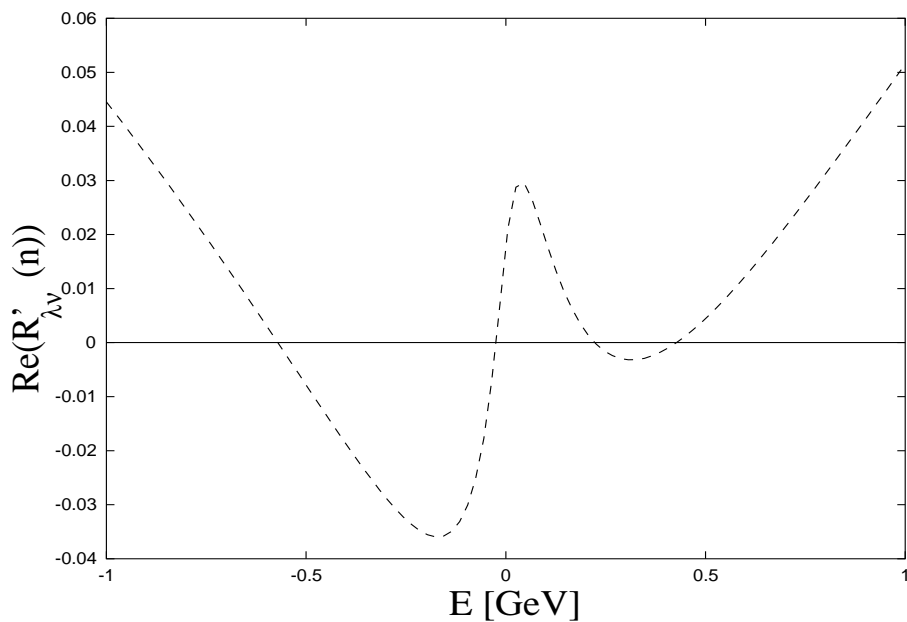
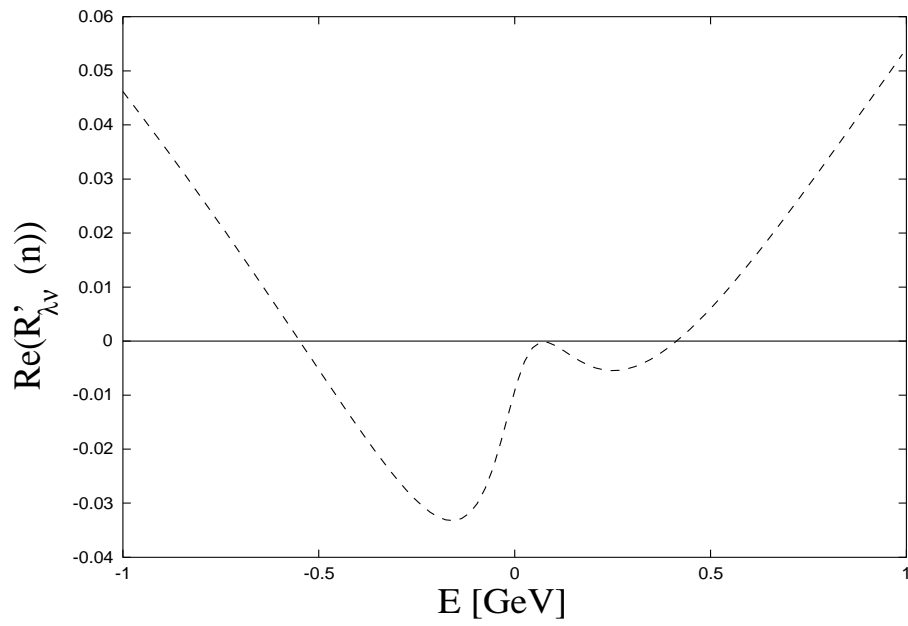
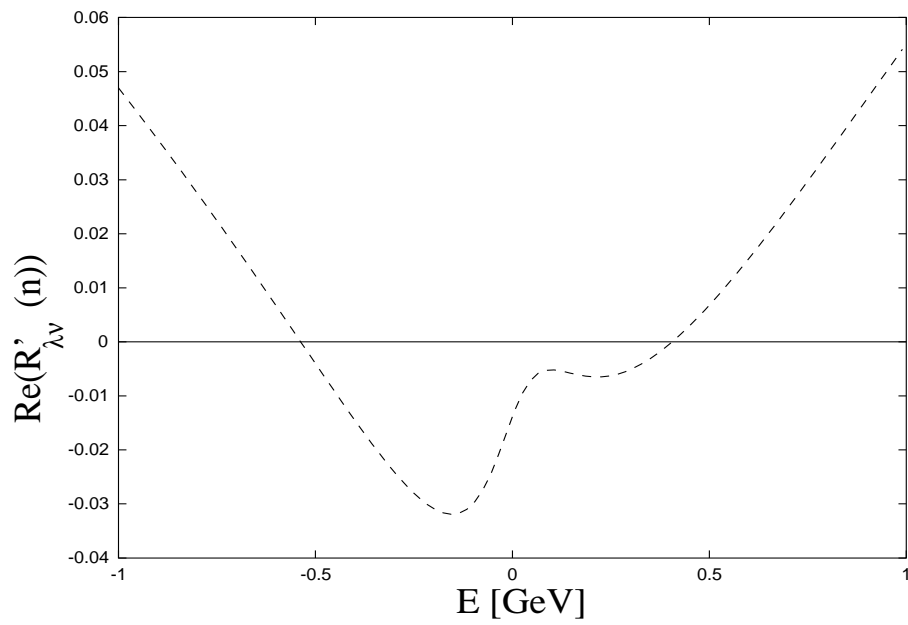


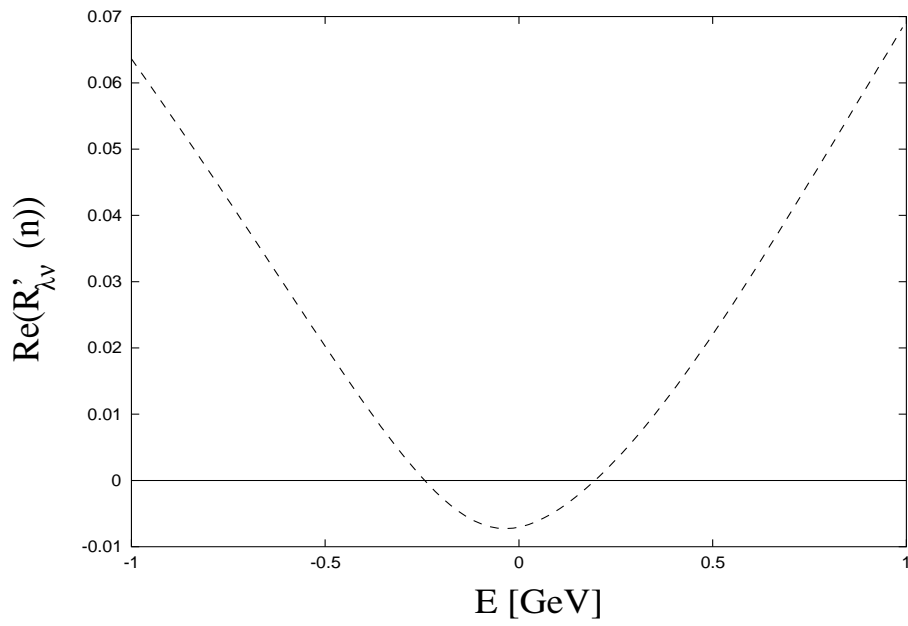
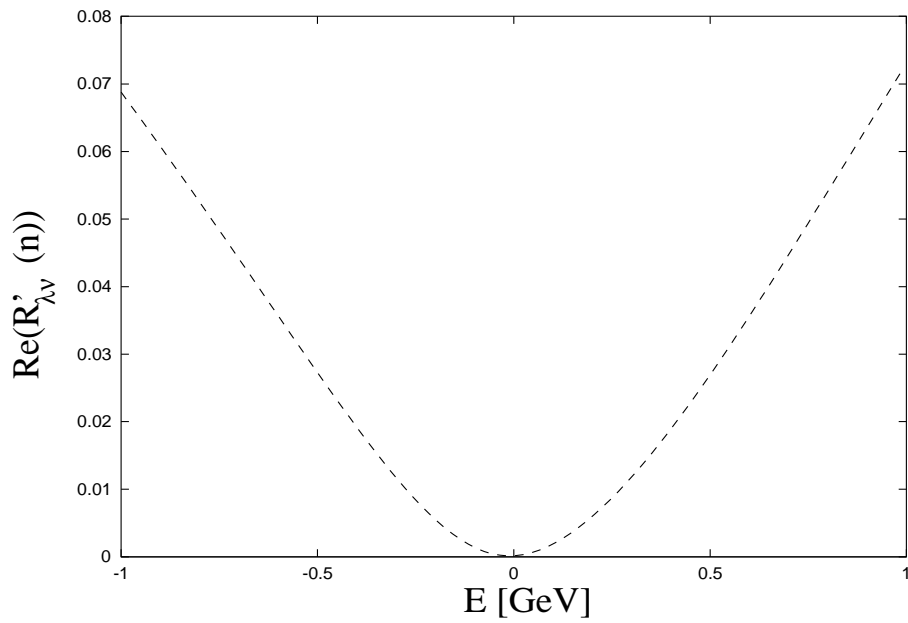
Abbildung 3.1: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\eta = 8$

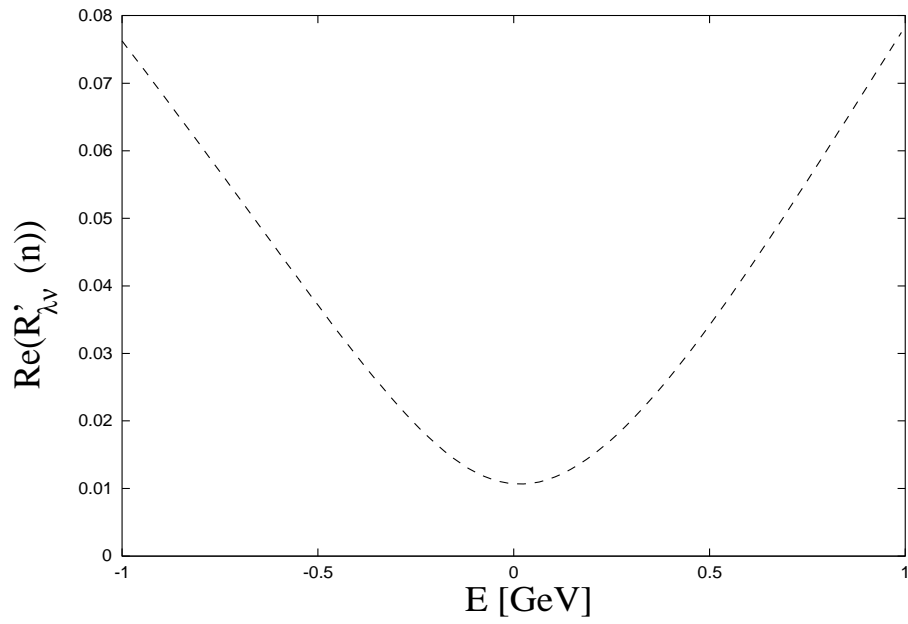
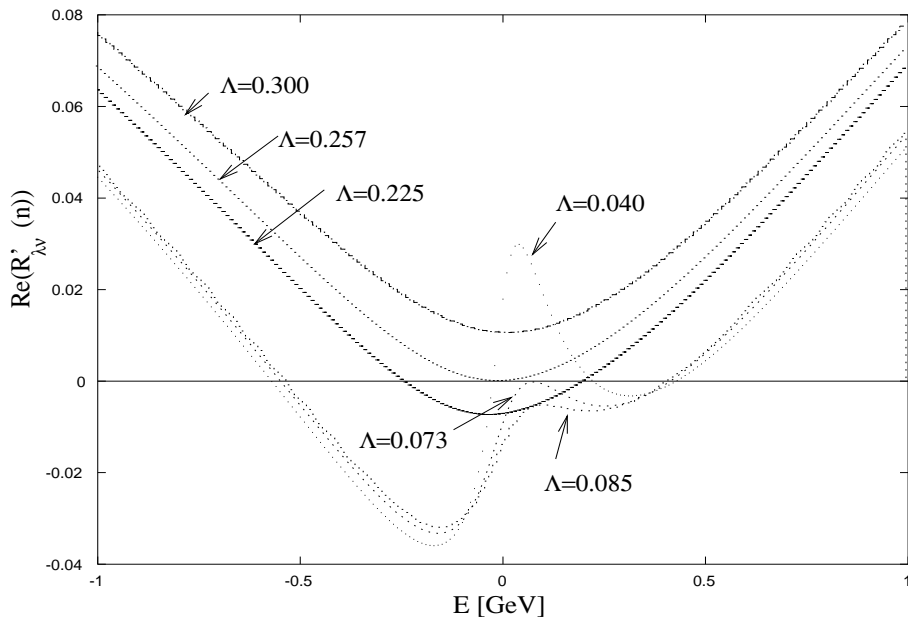
Abbildung 3.2: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\eta = 9$ Abbildung 3.3: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\eta = 10$

Abbildung 3.4: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\eta = 11$ Abbildung 3.5: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei verschiedenen Werten von η und $\Lambda = 0.225$ GeV im Vergleich

Abbildung 3.6: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\eta = 15$ Abbildung 3.7: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\Lambda = 0.040 \text{ GeV}$

Abbildung 3.8: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\Lambda = 0.073\text{GeV}$ Abbildung 3.9: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\Lambda = 0.085\text{GeV}$

Abbildung 3.10: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\Lambda = 0.225\text{GeV}$ Abbildung 3.11: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\Lambda = 0.257\text{GeV}$

Abbildung 3.12: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei $\Lambda = 0.300\text{GeV}$ Abbildung 3.13: $\text{Re}(R'_{\lambda\nu}(n))$ bei verschiedenen Werten von Λ und $\eta = 10$

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Versuch unternommen im Rahmen einer Schrödinger-Gleichung mit gedämpfter Propagation einen Mechanismus zu etablieren, der die Ausbildung gebundener Zustände ermöglicht.

Wir sind von einer Differentialgleichung in der Form

$$\left[\left(T - \frac{\Lambda^2}{E-T} \right) + V \right] \psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t)$$

ausgegangen und durch die Definition einer Hilfsamplitude in der Form $\chi := \frac{\Lambda}{E-T}$ haben wir eine Matrix-Gleichung aufgestellt. Das Lösen dieser Gleichung erforderte zunächst die Diagonalisierung der erhaltenen Matrix. Statt diese Art von Gleichungen mit Hilfe des üblichen Reihenansatzes zu lösen, haben wir einen Integralansatz gebraucht. Um die Kompatibilität der Gleichung zu gewährleisten mußten wir ein integralförmiges Potential benutzen, das durch die Inverse Laplace-Transformation des Potentials ausgedrückt wurde. Nachdem wir diese Ansätze in die Differentialgleichung eingesetzt hatten, erhielten wir ein Gleichungssystem für die Gewichtsfunktionen $\sigma'_f(\mu)$ und $\sigma'_g(\mu)$, die wir in die Integralansätze eingeführt haben. Die Methode führt so zur Ersetzung der obigen Schrödinger-Differentialgleichung durch die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \sigma'_f(\mu) = & 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') * \\ & \left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma'_g(\mu) = & 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') * \\ & \left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') + \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \right\}. \end{aligned}$$

Der Vorteil dieser Methode ist, daß die Kerne der obigen Gleichungen nur aus einfachen algebraischen Funktionen bestehen und sie daher relativ einfache Integralgleichungen und effiziente Werkzeuge für praktische Rechnungen sind. Dies haben wir hier illustriert, indem wir exakte Lösungen für das Yukawa-Potential hergeleitet haben. Diese Lösungen sind für endliches μ gegeben durch eine endliche Summe, für $r \rightarrow 0$, d.h. $\mu \rightarrow \infty$, durch eine konvergente Reihe von Funktionen (Gl.2.39), die leicht berechnet werden können. Als Anwendung haben wir das gebundene Zustandsspektrum untersucht, bei dem die Kopplungskonstante η und die Energieskala Λ variiert wurden. Die Variation der Energieskala hat gezeigt, daß es bei der typischen Kopplungsstärke $\eta = 10$ gebundene Zustände nur für den Bereich $0 \text{ GeV} < \Lambda < 0.257 \text{ GeV}$ geben kann. Dieses Ergebnis impliziert eine Λ -Skala in der von der QCD her zu erwartenden Größenordnung und bestätigt qualitativ die in [14] -dort allerdings für den Fall eines Coulombpotentials - erhaltenen Resultate. Das Verfahren funktioniert, wie sich gezeigt hat, am besten bei nicht zu großen

Potentialstärken η . Bei großen Werten von η verhindern wachsende Genauigkeitsverluste in der alternierenden Reihe (2.39) ein numerisch stabiles Resultat; man muß dann entweder -bei erheblich höherem Speicherplatz - und Rechenzeitbedarf - mit mehrfacher Genauigkeit rechnen oder alternative Lösungsverfahren entwickeln.

Anhang A

Berechnungen zum Kapitel 1

Die Schrödinger-Gleichung mit gedämpfter Propagation für ein einfaches Modell lautet:

$$\left[\left(T - \frac{\Lambda^2}{E - T} \right) + V \right] \psi = E \psi \quad (\text{A.1})$$

oder

$$\left(E - T + \frac{\Lambda^2}{E - T} \right) \psi = V \psi,$$

wobei Λ eine positive Energieskala ist. Wir definieren eine Hilfsamplitude χ folgendermaßen:

$$\chi := \frac{\Lambda}{E - T} \psi \quad (\text{A.2})$$

oder

$$(E - T)\chi = \Lambda\psi.$$

Wenn wir χ in die Gleichung (A.1) einsetzen, erhalten wir die folgende Gleichung:

$$(T + V)\psi - \Lambda\chi = E\psi. \quad (\text{A.3})$$

Die Kombination der beiden Gleichungen (A.2) und (A.3) ergibt eine Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} T + V & -\Lambda \\ \Lambda & T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Da $V(r)$ nur von dem Abstand r abhängt, sind die geeigneten Lösungen von ψ und χ Drehimpulseigenfunktionen. Wir können also folgende Ansätze machen:

$$\begin{bmatrix} \psi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} Y_{lm}(\hat{x}) \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\hat{x} = \frac{\vec{x}}{r} = \hat{x}(\vartheta, \varphi) \right)$$

Der Hamilton-Operator eines kräftefreien Systems enthält nur die kinetische Energie T

$$T\psi = E\psi$$

mit

$$T = \frac{\vec{P}^2}{2\mu} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{r}},$$

$\Delta_{\vec{r}}$ ist der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten der Form

$$\Delta_{\vec{r}} = \Delta_r + \Delta_{\vartheta\varphi}$$

mit

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \quad (\text{A.6})$$

und

$$\Delta_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} := -\frac{\vec{L}^2}{2r^2}, \quad (\text{A.7})$$

wobei \vec{L} der Drehimpulsvektor ist. Unter Berücksichtigung der Drehimpulseigenwertgleichung, d.h.

$$\vec{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1),$$

erhalten wir

$$\Delta_{\vec{r}} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

und

$$T = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (\text{A.8})$$

wobei μ die reduzierte Masse des Zweikörpersystems und l die Drehimpulsquantenzahl ist.

Die Gleichung (A.4) kann als Matrizensumme zerlegt werden, indem wir die 2×2 -*Matrix* als Matrizensumme darstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T & -\Lambda \\ \Lambda & T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Lambda \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix} \\ &= T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Gleichung (A.4) hat also die folgende Form:

$$\left\{ T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

oder

$$\left\{ T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(r) - E & 0 \\ 0 & -E \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zu lösende Schrödinger Differentialgleichung lautet also

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

Lösung der Schrödinger-Gleichung (A.10)

B.1 Grenzübergänge

Wir werden zuerst das Verhalten der Wellenfunktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ für verschwindend kleine Abstände, d.h. für $(r \rightarrow 0)$ studieren, anschließend werden wir deren Verhalten für sehr große Abstände, d.h. für $(r \rightarrow \infty)$ untersuchen.

Das Verhalten bei $r \rightarrow 0$

Bei $r \rightarrow 0$ ist T gegenüber Λ und $V(r) - E$ sehr groß. Die Gleichung (A.10) geht also über in

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Wie üblich besitzt diese Differentialgleichung zweiter Ordnung die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = Ar^l + Br^{-l-1}.$$

Aufgrund der Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} rF_l(r \rightarrow 0) \\ rG_l(r \rightarrow 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist der B-Term nicht zulässig und wir können allgemein im Grenzübergang $r \rightarrow 0$ setzen

$$\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} \propto r^l. \quad (\text{B.2})$$

Das Verhalten bei $r \rightarrow \infty$

Bei $r \rightarrow \infty$ sind die Terme $\frac{l(l+1)}{r^2}$ und $V(r)$ gegenüber Λ von zu vernachlässigender Größe. Die Gleichung (A.10) geht also über in

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \Lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Um diese Gleichung, d.h. die Gleichung (B.3) zu lösen, müssen wir die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ diagonalisieren.

B.1.1 Diagonalisierung der Matrix

Um die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ zu diagonalisieren, müssen wir zuerst das Eigenwertproblem untersuchen.

Eigenwertproblem

Die Eigenwerte von $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sind Lösungen des charakteristischen Polynoms $\det \left(x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$, d.h.

$$\det \left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm i.$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$.

Es sei nun $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu λ_i ($i = 1, 2$), dann ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = i$

Wenn wir λ_i durch i ersetzen, wird die obige Gleichung also

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -ix_1 + x_2 \\ -x_1 - ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = ix_1$$

Der Vektor $c \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathfrak{R}$ ist also ein Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda_1 = i$. Im folgenden werden wir die normierte Form dieses Vektors benutzen, d.h. den normierten Eigenvektor mit $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also den Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -i$

Wenn wir nun λ_i durch $-i$ ersetzen, lautet die obige Gleichung:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ix_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + ix_2 &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x_2 &= -ix_1. \end{aligned}$$

Der Vektor $c \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathfrak{R}$ ist also ein Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda_2 = -i$ und der normierte Eigenvektor ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Die Diagonalmatrix

Die Diagonalmatrix zu $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ist zu erhalten durch die Gleichung

$$\begin{aligned} U^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei U die invertierbare 2×2 -Matrix mit dem Spaltensystem $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ist.

Die Matrix U hat also die Gestalt

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Die adjungierte Matrix U^+ zu U hat die Gestalt

$$\begin{aligned} U^+ &= (U^*)^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

wobei U^* die konjugierte Matrix und U^T die transponierte Matrix zu U sind. U ist eine unitäre Matrix, da sie die folgende Beziehung erfüllt

$$\begin{aligned} UU^+ = U^+U &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U^+ = U^{-1}$$

Wir haben also

$$U^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U = U^+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

In der Sprache der Spintheorie handelt es sich um die Überführung des Operators $i\sigma_2$ in den Operator $i\sigma_3$ durch eine Drehung um die 1-Achse.

Anhang C

Der Trick zum Lösen der Gleichung (B.3)

Wir multiplizieren die Gleichung (B.3) von links mit U^+ und fügen $UU^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ zwischen

dem Hamilton-Operator und der Matrix $\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix}$ ein. Wir erhalten dadurch

$$U^+ \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \Lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \underbrace{U U^+ \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus wird

$$\left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right) U^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U + \frac{2\mu}{\hbar^2} \Lambda U^+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U \right\} \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und nach der Diagonalisierung von $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ entsteht

$$\left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \begin{bmatrix} i\Lambda & 0 \\ 0 & -i\Lambda \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können dies in folgende kompakte Form bringen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

In der obigen Rechnung wurde die folgende Bezeichnung eingesetzt

$$U^+ \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Es ist auch leicht zu zeigen, daß

$$U^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U = U^+ U = U U^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$U^+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Wir haben also nach der Gleichung (C.1) die beiden folgenden Gleichungen zu lösen:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) \right\} F_l'(r) = 0 \quad (\text{C.3})$$

und

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \right\} G_l'(r) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Es gilt

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$$

und für

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \rightarrow \frac{d^2}{dr^2}$$

Die Gleichungen (C.3) und (C.4) werden also für $r \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) \right\} F_l'(r) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \right\} G_l'(r) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Gesucht sind nun die Nichtstreulösungen, d.h. die Lösungen zu den gebundenen Zuständen, wobei deren Wellenzahlvektorquadrat negativ sein muss.

Lösung zur Gleichung (C.5)

Wir suchen die Basislösungen der Gleichung

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) \right\} F_l'(r) = 0,$$

in der Form $\exp(Kr)$, wobei K die folgende Beziehung erfüllt:

$$-K^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) \quad (\text{C.7})$$

oder

$$K^2 = i^2 \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda)$$

oder

$$K_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \sqrt{E + i\Lambda}$$

oder in rationaler Form

$$\begin{aligned} K_{\pm} &= \pm i \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)} + i \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} \right\} \\ &\Leftrightarrow K_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} \pm i \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}. \end{aligned}$$

In der obigen Gleichung haben wir uns die Tatsache zu Nutze gemacht, daß die komplexe Gleichung der Form

$$Z^2 = C$$

in der Z und C komplexe Zahlen sind, die folgende Lösung hat

$$Z = \operatorname{Re}(Z) + i\operatorname{Im}(Z),$$

wobei

$$\operatorname{Re}(Z) = \sqrt{\frac{|C| + \operatorname{Re}(C)}{2}}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \sigma \sqrt{\frac{|C| - \operatorname{Re}(C)}{2}}$$

mit

$$\sigma = \begin{cases} +1, & \text{falls } \operatorname{Im}(C) \geq 0 \\ -1, & \text{falls } \operatorname{Im}(C) < 0 \end{cases}$$

der reelle und der imaginäre Anteil sind. Daher ist

$$\sqrt{E + i\Lambda} = \sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E}{2}}.$$

Die Lösung $\propto \exp(K_- r)$ mit $K_- = \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} - i\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}$ ist auszuschließen, da sie exponentiell wachsend ist. Die physikalische, d.h. die einen exponentiellen Abfall liefernde Lösung ist also gegeben durch

$$K_+ = -\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} + i\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}$$

$$:= -\gamma(E) + i\kappa(E) \tag{C.8}$$

mit

$$\gamma(E) := \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)}$$

$$\kappa(E) := \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}, \tag{C.9}$$

Die gesuchte Lösung zu der Gleichung (C.5) lautet also

$$F_l'(r) \propto e^{(-\gamma + i\kappa)r}. \tag{C.10}$$

Lösung der Gleichung (C.6)

Wir suchen die Lösungen zu der Gleichung

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \right\} G_l'(r) = 0,$$

die die folgende Beziehung erfüllen

$$-K'^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda)$$

$$\Leftrightarrow K'_\pm = \pm i\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \sqrt{E - i\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow K'_\pm = \pm i \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)} - i\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} \right\}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} \pm i\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}. \tag{C.11}$$

Hier haben wir die Beziehung

$$\sqrt{E - i\Lambda} = \sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E}{2}}$$

benutzt. Aus denselben Gründen wie bei K scheidet die Lösung mit $K'_+ = \sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2}(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} + i\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2}(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)}$ aus. Die exponentiell abfallende Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} K'_- &= -\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2}(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} - i\sqrt{\frac{\mu}{\hbar^2}(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)} \\ &:= -\gamma(E) - i\kappa(E). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Die gesuchte Lösung der Gleichung (C.6) lautet also

$$G'_l(r) \propto e^{-(\gamma+i\kappa)r}. \quad (\text{C.13})$$

Gemäß der Gleichung (C.2) und wegen der Unitarität der Matrix U erhalten wir folgende Beziehung zwischen $\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F'_l(r) \\ G'_l(r) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F'_l(r) + G'_l(r) \\ i(F'_l(r) - G'_l(r)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} F_l(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{F'_l(r) + G'_l(r)\} \\ G_l(r) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \{F'_l(r) - G'_l(r)\} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

und mit Hilfe der Gleichungen (C.10) und (C.13) erhalten wir für $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F_l(r) &\propto \frac{e^{-\gamma r}}{\sqrt{2}} \{e^{i\kappa r} + e^{-i\kappa r}\} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\gamma r} \cos(\kappa r) \\ G_l(r) &\propto i \frac{e^{-\gamma r}}{\sqrt{2}} \{e^{i\kappa r} - e^{-i\kappa r}\} = -\frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\gamma r} \sin(\kappa r). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Die resultierenden Wellenfunktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ müssen sowohl das asymptotische Verhalten bei $r \rightarrow 0$, als auch das asymptotische Verhalten bei $r \rightarrow \infty$ enthalten. Die Ansätze für die beiden Funktionen können also die folgenden Formen haben

$$\begin{aligned} F_l(r) &= \sqrt{2} f_l(r) r^l e^{-\gamma r} \cos(\kappa r) \\ G_l(r) &= -\sqrt{2} g_l(r) r^l e^{-\gamma r} \sin(\kappa r), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

wobei $f_l(r)$ und $g_l(r)$ nur vom Abstand r abhängige Funktionen sind. Diese Funktionen könnten nun in die Gleichung (B.3) eingesetzt und auf ein geeignetes Potential weiter durchgearbeitet werden. Für unsere Berechnungen lohnt es sich nicht diesen Weg weiterzuverfolgen. Wir benutzen

hier andere Lösungsansätze für $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$. Wir werden Integralansätze (die sog. Laplace-Transformation) sowohl für $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$, als auch für das Potential benutzen. Wir schreiben $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$ zunächst in der Form

$$\begin{aligned} F_l'(r) &= r^l e^{-\gamma r} f_l'(r) \\ G_l'(r) &= r^l e^{-\gamma r} g_l'(r) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

und für $f_l'(r)$ und $g_l'(r)$ soll in den folgenden Integralformen gelten:

$$\begin{aligned} f_l'(r) &= \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma_f'(\mu) \\ g_l'(r) &= \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + a')(\mu + b')]^l \sigma_g'(\mu), \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

wobei a, a', b, b' , komplexe Zahlen und $\sigma_f'(\mu), \sigma_g'(\mu)$ Gewichtsfunktionen sind. Das Potential setzen wir in der folgenden Integralform

$$V(r) = \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \nu(\mu), \quad (\text{C.20})$$

wobei $\nu(\mu)$ die inverse Laplacetransformation von $V(r)$ ist. Die Funktionen $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$ haben also die folgenden Formen:

$$\begin{aligned} F_l'(r) &= r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma_f'(\mu) \\ G_l'(r) &= r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + a')(\mu + b')]^l \sigma_g'(\mu). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Darüberhinaus haben die resultierenden Wellenfunktionen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} F_l(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ F_l'(r) + G_l'(r) \} \\ G_l(r) &= i \frac{1}{\sqrt{2}} \{ F_l'(r) - G_l'(r) \} \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

mit F_l' und G_l' gemäß (C.21). Jetzt können wir die resultierenden Wellenfunktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ wieder in die Gleichung (A.10) einsetzen und erhalten

$$\begin{bmatrix} \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - E + V(r) & -\Lambda \\ \Lambda & \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_l(r) \\ G_l(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{cases} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - E + V(r) \right] F_l(r) - \Lambda G_l(r) = 0 \\ \Lambda F_l(r) + \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - E \right] G_l(r) = 0 \end{cases}$$

oder

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] F_l(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \Lambda G_l(r) = 0 \quad (\text{C.23})$$

und

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right] G_l(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \Lambda F_l(r) = 0. \quad (\text{C.24})$$

Wenn wir die Funktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ durch die auftretenden Formen in der Gleichung (C.22) ersetzen, erhalten wir, wenn $\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$ gilt, die folgenden Gleichungen:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] \left(F_l'(r) + G_l'(r) \right) + i\Lambda \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(F_l'(r) - G_l'(r) \right) = 0 \quad (C.25)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \right] \left(F_l'(r) - G_l'(r) \right) + i\Lambda \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(F_l'(r) + G_l'(r) \right) = 0 \quad (C.26)$$

Für das Lösen der beiden letzten Gleichungen benutzen wir die Formen der Funktionen $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$, die in den Gleichungen (C.18) und (C.21) dargestellt sind d.h.:

$$F_l'(r) = r^l e^{-\gamma r} f_l'(r)$$

$$G_l'(r) = r^l e^{-\gamma r} g_l'(r).$$

Es ist also leicht zu zeigen, daß

$$\frac{d}{dr} F_l'(r) = r^l e^{-\gamma r} \left[\frac{l}{r} + \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) \right] f_l'(r) \quad (C.27)$$

und daß

$$\frac{d^2}{dr^2} F_l'(r) = r^l e^{-\gamma r} \left[\frac{d^2}{dr^2} + 2 \left(\frac{l}{r} - \gamma \right) \frac{d}{dr} + \frac{l(l-1)}{r^2} - 2\gamma \frac{l}{r} + \gamma^2 \right] f_l'(r). \quad (C.28)$$

Dasselbe gilt auch für $G_l'(r)$.

Wenn wir die Gleichungen (C.27) und (C.28) in die Gleichungen (C.25) und (C.26) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \gamma^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r) + i\Lambda) \right] f_l'(r) \\ & + \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \gamma^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r) - i\Lambda) \right] g_l'(r) = 0 \end{aligned} \quad (C.29)$$

und

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \gamma^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + i\Lambda) \right] f_l'(r) \\ & - \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \gamma^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - i\Lambda) \right] g_l'(r) = 0. \end{aligned} \quad (C.30)$$

Im folgenden setzen wir für die reduzierte Masse $\mu := m$ ein, um mögliche Verwechslungen mit der Integralvariable μ zu vermeiden. Gemäß der Gleichung (C.9) haben wir also

$$\gamma^2 = \frac{m}{\hbar^2} \left(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E \right).$$

Eingesetzt in die Gleichungen (C.30) und (C.31) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} \left(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E - 2V(r) + 2i\Lambda \right) \right] f_l'(r) \\ & + \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} \left(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E - 2V(r) - 2i\Lambda \right) \right] g_l'(r) = 0 \end{aligned} \quad (C.31)$$

und

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i\Lambda) \right] f_l'(r) \\ & - \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E - 2i\Lambda) \right] g_l'(r) = 0. \end{aligned} \quad (C.32)$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i\Lambda) \right] f_l'(r) \\ & = \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E - 2i\Lambda) \right] g_l'(r). \end{aligned} \quad (C.33)$$

Aus der Gleichung (C.32) erhalten wir nach "Aussummieren" der Potentialterme

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i\Lambda) \right] f_l'(r) \\ & + \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E - 2i\Lambda) \right] g_l'(r) \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \left(f_l'(r) + g_l'(r) \right). \end{aligned} \quad (C.34)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \kappa^2 + 2i\gamma\kappa &= \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E) + 2i\sqrt{\frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)} \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)} \\ &= \frac{m}{\hbar^2} \left(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i\sqrt{(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} - E)(\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E)} \right) \\ &= \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i\sqrt{E^2 + \Lambda^2 - E^2}) \\ &= \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i|\Lambda|) \\ (\Lambda > 0) &= \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E + 2i\Lambda) \end{aligned}$$

und

$$\kappa^2 - 2i\gamma\kappa = \frac{m}{\hbar^2} (\sqrt{E^2 + \Lambda^2} + E - 2i\Lambda)$$

Daher erhalten wir aus den Gleichungen (C.34) und (C.35) die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa \right] f_l'(r) \\ & + \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 - 2i\gamma\kappa \right] g_l'(r) \\ & = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \left(f_l'(r) + g_l'(r) \right) \end{aligned} \quad (C.35)$$

oder

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa \right] f_l'(r) = \frac{m}{\hbar^2} V(r) \left(f_l'(r) + g_l'(r) \right) \quad (C.36)$$

oder

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 - 2i\gamma\kappa \right] g'_l(r) = \frac{m}{\hbar^2} V(r) (f'_l(r) + g'_l(r)). \quad (C.37)$$

Als Ergebnis der letzten beiden Gleichungen läßt sich festhalten, daß die beiden Funktionen $f'_l(r)$ und $g'_l(r)$ zueinander komplexkonjugiert sind, d.h.

$$f'_l(r)^* = g'_l(r) \quad (C.38)$$

und vice versa. Es genügt also eine der beiden Gleichungen (C.36) oder (C.37) weiter zu betrachten. Wir betrachten also zunächst die Gleichung (C.36) genauer und erhalten die Lösung zu (C.37) nach (C.38). Nach den Gleichungen (C.19), (C.20) und (C.36) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} - 2\gamma \frac{d}{dr} \right) + 2 \frac{(l+1)}{r} \left(\frac{d}{dr} - \gamma \right) + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa \right] \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu+a)(\mu+b)]^l \sigma'_f(\mu) \\ &= \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau r} \nu(\tau) \left\{ \int_0^\infty d\mu' e^{-\mu' r} [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') \right. \\ & \quad \left. + \int_0^\infty d\mu' e^{-\mu' r} [(\mu'+a')(\mu'+b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\ & \Leftrightarrow \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \left[\mu^2 + 2\gamma\mu + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa - 2 \frac{(l+1)}{r} (\mu + \gamma) \right] [(\mu+a)(\mu+b)]^l \sigma'_f(\mu) \\ &= \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \nu(\tau) \int_0^\infty d\mu' e^{-(\mu'+\tau)r} \left\{ [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu'+a')(\mu'+b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\}. \end{aligned} \quad (C.39)$$

Umformung des Integrals $\int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} (\mu + \gamma) [(\mu+a)(\mu+b)]^l \sigma'_f(\mu)$

Wir werden zuerst die Identität

$$(\mu + \gamma) [(\mu+a)(\mu+b)]^l \sigma'_f(\mu) = \frac{d}{d\mu} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu')$$

benutzen und diese dann später partiell integrieren. Es gilt also:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \underbrace{(\mu + \gamma) [(\mu+a)(\mu+b)]^l \sigma'_f(\mu)}_{= \frac{d}{d\mu} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu')} \\ &= \left[e^{-\mu r} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') \right]_0^\infty \\ &+ r \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') \\ &= r \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu'), \end{aligned}$$

da $\lim_{\mu \rightarrow \infty} e^{-\mu r} = 0$ und $\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') = 0$ sind.

Umformung des Integrals $\int_0^\infty d\tau \nu(\tau) \int_0^\infty d\mu' e^{-(\mu'+\tau)r} [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu')$
Wir setzen

$$\mu = \mu' + \tau \Rightarrow \tau = \mu - \mu' \Rightarrow d\tau = d\mu,$$

da $\tau \geq 0$ kann μ' bei gegebenem μ nur noch von 0 bis μ laufen. Es gilt also

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\tau \nu(\tau) \int_0^\infty d\mu' e^{-(\mu'+\tau)r} [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') \\ &= \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') [(\mu'+a)(\mu'+b)]^l \sigma'_f(\mu') \quad . \end{aligned}$$

Außerdem können wir sagen:

$$\begin{aligned} \mu^2 + 2\gamma\mu + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa &= \mu^2 + 2\gamma\mu + \gamma^2 - \gamma^2 + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa \\ &= (\mu + \gamma)^2 - (\gamma^2 - 2i\gamma\kappa - \kappa^2) \\ &= (\mu + \gamma)^2 - (\gamma^2 - 2i\gamma\kappa + (i\kappa)^2) \\ &= (\mu + \gamma)^2 - (\gamma - i\kappa)^2 \\ &= (\mu + \gamma + \gamma - i\kappa)(\mu + \gamma - \gamma + i\kappa) \\ &= (\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa). \end{aligned}$$

Die Gleichung (C.39) wird also

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \left\{ (\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) \right. \\ & \quad \left. - 2(l+1) \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') \right\} \\ &= \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \end{aligned}$$

Diese Gleichung zwischen zwei Laplace-Transformierten gilt genau dann wenn deren Gewichtsfunktionen gleich sind. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) \\ &= 2(l+1) \int_0^\infty d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') \quad (C.40) \\ &+ \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\}. \end{aligned}$$

Anhang D

Die Ableitung der Gleichungen für die Gewichtsfunktionen

Wir differenzieren zuerst die beiden Seiten der Gleichung (C.40) und dividieren sie dann durch $[(\mu + a)(\mu + b)]^l$. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (\mu^2 + 2\mu\gamma + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) \right\} \\
 &= 2(l+1) \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' (\mu' + \gamma) [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') \\
 &+ \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' \nu (\mu - \mu') \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\
 \\
 &\Leftrightarrow 2(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) + (\mu^2 + 2\mu\gamma + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) \right\} \\
 &= 2(l+1)(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) + \\
 &\frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' \nu (\mu - \mu') \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\
 \\
 &\Leftrightarrow 2(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) + (\mu^2 + 2\gamma\mu + \kappa^2 + 2i\gamma\kappa) * \\
 &\left\{ (2\mu + a + b) l [(\mu + a)(\mu + b)]^{l-1} \sigma'_f(\mu) + [(\mu + a)(\mu + b)]^l \frac{\partial}{\partial \mu} \sigma'_f(\mu) \right\} \\
 &= 2(l+1)(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) + \\
 &\frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' \nu (\mu - \mu') \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow [(\mu + a)(\mu + b)]^l \frac{\partial}{\partial \mu} \sigma'_f(\mu) \\
 & = -(2\mu + a + b) l [(\mu + a)(\mu + b)]^{l-1} \sigma'_f(\mu) + \\
 & \quad \frac{1}{(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)} \left\{ -2(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) \right. \\
 & \quad \left. + 2(l + 1)(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) + \right. \\
 & \quad \left. \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') \left([(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
 & [(\mu + a)(\mu + b)]^l \frac{\partial}{\partial \mu} \sigma'_f(\mu) \\
 & = -(2\mu + a + b) l [(\mu + a)(\mu + b)]^{l-1} \sigma'_f(\mu) \\
 & \quad + \frac{1}{(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)} \left\{ 2l(\mu + \gamma) [(\mu + a)(\mu + b)]^l \sigma'_f(\mu) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') \left([(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right) \right\} \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

Die Division durch $[(\mu + a)(\mu + b)]^l$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mu} \sigma'_f(\mu) & = -\frac{(2\mu + a + b)l}{(\mu + a)(\mu + b)} \sigma'_f(\mu) + \frac{1}{(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)} * \\
 & \quad \left\{ 2l(\mu + \gamma) \sigma'_f(\mu) + \frac{m}{\hbar^2 [(\mu + a)(\mu + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu d\mu' \nu(\mu - \mu') * \right. \\
 & \quad \left. \left([(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right) \right\} \quad (D.2)
 \end{aligned}$$

Nun integrieren wir die beiden Seiten der Gleichung (D.2) von 0 bis μ wieder. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\int_0^\mu d\mu' \frac{\partial}{\partial \mu'} \sigma_f'(\mu') &= -l \int_0^\mu \frac{d\mu' (2\mu' + a + b)}{(\mu' + a)(\mu' + b)} \sigma_f'(\mu') + \int_0^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)} * \\
&\left\{ 2l (\mu' + \gamma) \sigma_f'(\mu') + \frac{m}{\hbar^2 [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu (\mu' - \mu'') * \right. \\
&\left. \left([(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right) \right\} \\
\Leftrightarrow \sigma_f'(\mu) &= \sigma_f'(0) + l \int_0^\mu d\mu' \sigma_f'(\mu') \left\{ \frac{2(\mu' + \gamma)}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)} - \frac{(2\mu' + a + b)}{(\mu' + a)(\mu' + b)} \right\} \\
&+ \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu (\mu - \mu'') \\
&\left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right\}.
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x dy f(x, y) g(y) = f(x, x) g(x) + \int_{x_0}^x dy g(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \tag{D.4}$$

Demnach können wir folgende Gleichung formulieren:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu (\mu' - \mu'') \left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right\} \\
&= \underbrace{\nu(0) \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma_f'(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma_g'(\mu') \right\}}_{=0 \text{ wegen } \nu(0)=0} \\
&+ \int_0^{\mu'} d\mu'' \left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right\} \frac{\partial}{\partial \mu'} \nu (\mu' - \mu'') \\
&= \int_0^{\mu'} d\mu'' \left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right\} \frac{\partial}{\partial \mu'} \nu (\mu' - \mu'') \\
&\Rightarrow \int_0^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu (\mu' - \mu'') * \\
&\left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right\} \\
&= \int_0^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} * \\
&\int_0^{\mu'} d\mu'' \left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma_f'(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma_g'(\mu'') \right\} \frac{\partial}{\partial \mu'} \nu (\mu' - \mu'')
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der letzten Gleichung haben wir in der $\mu' - \mu''$ - Ebene über das Dreieck $\mu' = 0 \dots \mu$ (horizontal) und $\mu'' = 0 \dots \mu'$ (vertikal bis zur Diagonale) integriert, wie es die folgende

Abb. D.1 zeigt. Dasselbe Dreiecksgebiet erfaßt man offenbar, indem man zuerst $\mu'' = 0 \dots \mu$ (vertikal) und dann jeweils $\mu' = \mu'' \dots \mu$ (horizontal von der Diagonalen bis μ) integriert.

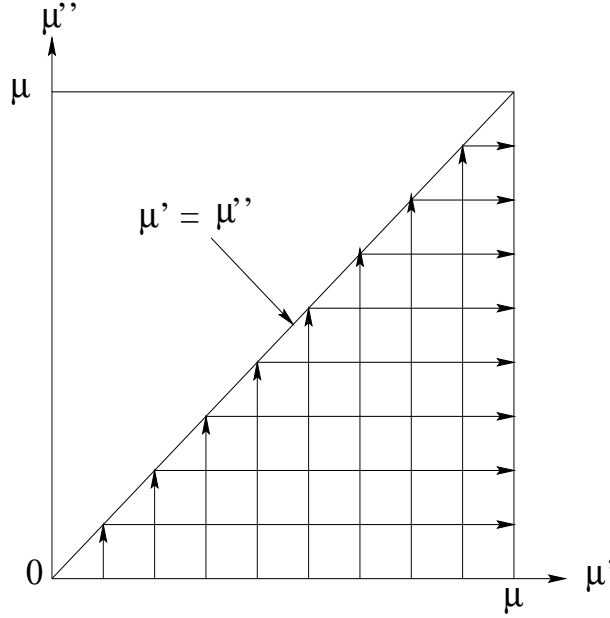


Abbildung D.1: Zur Berechnung des obigen Integrals

Es gilt also

$$\int_0^\mu d\mu' \int_0^{\mu'} d\mu'' \dots = \int_0^\mu d\mu'' \int_{\mu''}^\mu d\mu' \dots \quad (\text{D.5})$$

Der letzte Schritt der obigen Rechnung ist also

$$\int_0^\mu d\mu'' \left\{ \left[(\mu'' + a) (\mu'' + b) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + a') (\mu'' + b') \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} * \\ \int_{\mu''}^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)[(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \nu(\mu' - \mu'').$$

Wir haben also

$$\frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^\mu d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') \left\{ \left[(\mu'' + a) (\mu'' + b) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + a') (\mu'' + b') \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} \\ = \int_0^\mu d\mu'' \left\{ \left[(\mu'' + a) (\mu'' + b) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + a') (\mu'' + b') \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} * \\ \int_{\mu''}^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)[(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \nu(\mu' - \mu'').$$

Wenn wir die Integrationsvariablen nun umbenennen, d.h. $\mu'' \Leftrightarrow \mu'$, können wir sagen

$$\begin{aligned}
& \int_0^\mu d\mu'' \left\{ [(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l \sigma'_f(\mu'') + [(\mu'' + a')(\mu'' + b')]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} * \\
& \quad \int_{\mu'}^\mu \frac{d\mu'}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)[(\mu' + a)(\mu' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu'} \nu(\mu' - \mu'') \\
& = \int_0^\mu d\mu' \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} * \\
& \quad \int_{\mu'}^\mu \frac{d\mu''}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)[(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu''} \nu(\mu'' - \mu').
\end{aligned}$$

Es sei $\Delta := \mu'' - \mu' = \Delta(\mu'', \mu')$, folglich gilt $\nu(\mu'' - \mu') = \nu(\Delta)$ und

$$\frac{\partial}{\partial \mu''} \nu(\Delta) = \frac{d}{d\Delta} \nu(\Delta) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mu''} \Delta(\mu'', \mu')}_{=\frac{\partial}{\partial \mu''}(\mu'' - \mu')=1} = \frac{d}{d\Delta} \nu(\Delta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu'} \nu(\Delta) = \frac{d}{d\Delta} \nu(\Delta) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mu'} \Delta(\mu'', \mu')}_{=\frac{\partial}{\partial \mu'}(\mu'' - \mu')=-1} = -\frac{d}{d\Delta} \nu(\Delta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu''} \nu(\mu'' - \mu') = -\frac{\partial}{\partial \mu'} \nu(\mu'' - \mu'). \quad (\text{D.6})$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned}
& \int_0^\mu d\mu' \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\
& \quad * \int_{\mu'}^\mu \frac{d\mu''}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)[(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu''} \nu(\mu'' - \mu') \\
GL.(D.6) & = - \int_0^\mu d\mu' \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\
& \quad * \int_{\mu'}^\mu \frac{d\mu''}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)[(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu''} \nu(\mu'' - \mu') \\
& = \int_0^\mu d\mu' \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\
& \quad * \int_{\mu'}^{\mu'} \frac{d\mu''}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)[(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l} \frac{\partial}{\partial \mu''} \nu(\mu'' - \mu') \\
wg.GL.(D.4) & = \int_0^\mu d\mu' \left\{ [(\mu' + a)(\mu' + b)]^l \sigma'_f(\mu') + [(\mu' + a')(\mu' + b')]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \\
& \quad * \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_{\mu'}^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu(\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)[(\mu'' + a)(\mu'' + b)]^l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\mu d\mu' \left\{ \underbrace{\left[(\mu' + a) (\mu' + b) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu (\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa) (\mu'' + i\kappa) [(\mu'' + a) (\mu'' + b)]^l}}_{:=K_+(\mu, \mu')} \sigma'_f (\mu') \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left[(\mu' + a') (\mu' + b') \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu (\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa) (\mu'' + i\kappa) [(\mu'' + a) (\mu'' + b)]^l}}_{:=K_\mp(\mu, \mu')} \sigma'_g (\mu') \right\} \\
 &= \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_+ (\mu, \mu') \sigma'_f (\mu') + K_\mp (\mu, \mu') \sigma'_g (\mu') \right\}
 \end{aligned}$$

mit

$$K_+ (\mu, \mu') = \left[(\mu' + a) (\mu' + b) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu (\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa) (\mu'' + i\kappa) [(\mu'' + a) (\mu'' + b)]^l} \quad (D.7)$$

und

$$K_\mp (\mu, \mu') = \left[(\mu' + a') (\mu' + b') \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu (\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma - i\kappa) (\mu'' + i\kappa) [(\mu'' + a) (\mu'' + b)]^l}. \quad (D.8)$$

Unsere vorherige Gleichung mit $\sigma'_f(\mu)$, d.h. die Gleichung (D.3) sieht also nun folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_f(\mu) &= \sigma'_f(0) + l \int_0^\mu d\mu' \left\{ \frac{2(\mu' + \gamma)}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)} - \frac{(2\mu' + a + b)}{(\mu' + a)(\mu' + b)} \right\} \sigma'_f(\mu') \\
 &\quad + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_+ (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') + K_\mp (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') \right\}.
 \end{aligned} \quad (D.9)$$

Für den wechselwirkungsfreien Fall, d.h. für $V(r) = 0$ bzw. für $\nu(\mu) = 0$, verschwinden $K_+ (\mu, \mu')$ und $K_\mp (\mu, \mu')$ und die Gleichung (D.9) lautet nun.

$$\sigma'_f(\mu) = \sigma'_f(0) + l \int_0^\mu d\mu' \left\{ \frac{2(\mu' + \gamma)}{(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)} - \frac{(2\mu' + a + b)}{(\mu' + a)(\mu' + b)} \right\} \sigma'_f(\mu'). \quad (D.10)$$

Führt man dieselben Rechnungen mit der Gleichung (C.38) durch, so bekommt man:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_g(\mu) &= \sigma'_g(0) + l \int_0^\mu d\mu' \left\{ \frac{2(\mu' + \gamma)}{(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)} - \frac{(2\mu' + a' + b')}{(\mu' + a')(\mu' + b')} \right\} \sigma'_g(\mu') \\
 &\quad + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_- (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') + K_\pm (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') \right\}
 \end{aligned} \quad (D.11)$$

mit

$$K_- (\mu, \mu') = \left[(\mu' + a') (\mu' + b') \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_{\mu}^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu (\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma + i\kappa) (\mu'' - i\kappa) [(\mu'' + a') (\mu'' + b')]^l} \quad (\text{D.12})$$

und

$$K_{\pm} (\mu, \mu') = \left[(\mu' + a) (\mu' + b) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_{\mu}^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu (\mu'' - \mu')}{(\mu'' + 2\gamma + i\kappa) (\mu'' - i\kappa) [(\mu'' + a') (\mu'' + b')]^l}. \quad (\text{D.13})$$

Für $V(r) = 0$ bzw. $\nu(\mu) = 0$ verschwinden $K_- (\mu, \mu')$ und $K_{\pm} (\mu, \mu')$ und die Gleichung (D.11) lautet

$$\sigma'_g(\mu) = \sigma'_g(0) + l \int_0^{\mu} d\mu' \left\{ \frac{2(\mu' + \gamma)}{(\mu' + 2\gamma + i\kappa) (\mu' - i\kappa)} - \frac{(2\mu' + a' + b')}{(\mu' + a') (\mu' + b')} \right\} \sigma'_g(\mu'). \quad (\text{D.14})$$

Offenbar ist die weitaus einfachste Wahl der Konstanten a, b, a', b' in den Ansätzen (C.19), (C.21) diejenige, die der Integralterm in (D.10), (D.14) für *alle* l zum Verschwinden bringt. Die komplexen Zahlen a, b, a', b' gehorchen also den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} a = 2\gamma - i\kappa, \quad a' = 2\gamma + i\kappa &\Rightarrow a' = a^* \\ b = i\kappa, \quad b' = -i\kappa &\Rightarrow b' = b^* \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Gemäß der Gleichungen (C.19) und (C.21) bekommen wir

$$F'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} f'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma - i\kappa) (\mu + i\kappa)]^l \sigma'_f(\mu) \quad (\text{D.16})$$

$$G'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} g'_l(r) = r^l e^{-\gamma r} \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma + i\kappa) (\mu - i\kappa)]^l \sigma'_g(\mu)$$

und die Funktionen $F_l(r)$ und $G_l(r)$ werden nach den Gleichungen (C.22) also

$$F_l(r) = \frac{r^l e^{-\gamma r}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} \left\{ [(\mu + 2\gamma - i\kappa) (\mu + i\kappa)]^l \sigma'_f(\mu) + [(\mu + 2\gamma + i\kappa) (\mu - i\kappa)]^l \sigma'_g(\mu) \right\} \quad (\text{D.17})$$

und

$$G_l(r) = i \frac{r^l e^{-\gamma r}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} d\mu e^{-\mu r} \left\{ [(\mu + 2\gamma - i\kappa) (\mu + i\kappa)]^l \sigma'_f(\mu) - [(\mu + 2\gamma + i\kappa) (\mu - i\kappa)]^l \sigma'_g(\mu) \right\}. \quad (\text{D.18})$$

Aus der Gleichung (C.41) erhalten wir

$$\begin{aligned} [(\mu + 2\gamma - i\kappa) (\mu + i\kappa)]^{l+1} \sigma'_f(\mu) &= 2(l+1) \int_0^{\mu} d\mu' (\mu' + \gamma) \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa) (\mu' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu') \\ &\quad + \frac{m}{\hbar^2} \left\{ \int_0^{\mu} d\mu' \nu (\mu - \mu') \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa) (\mu' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu') \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\mu} d\mu' \nu (\mu - \mu') \left[(\mu' + 2\gamma + i\kappa) (\mu' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu') \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Die Gleichung (D.3) wird also

$$\begin{aligned} \sigma'_f(\mu) &= \sigma'_f(0) + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') * \\ &\left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} \end{aligned} \quad (D.20)$$

oder nach der Gleichung (D.5)

$$\sigma'_f(\mu) = \sigma'_f(0) + \frac{m}{\hbar^2} \left\{ \int_0^\mu d\mu' K_+ (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') + \int_0^\mu d\mu' K_\mp (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') \right\} \quad (D.21)$$

mit

$$K_+ (\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)]^{l+1}} \quad (D.22)$$

und

$$K_\mp (\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa)]^{l+1}}. \quad (D.23)$$

Für $V(r) = 0$ bzw. $\nu(\mu) = 0$ gilt:

$$\sigma'_f(\mu) = \sigma'_f(0). \quad (D.24)$$

Dieselben Rechnungen für $\sigma'_g(\mu)$ ergeben

$$\begin{aligned} \sigma'_g(\mu) &= \sigma'_g(0) + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') * \\ &\left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} \end{aligned} \quad (D.25)$$

oder

$$\sigma'_g(\mu) = \sigma'_g(0) + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_- (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') + K_\pm (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') \right\} \quad (D.26)$$

mit

$$K_- (\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa)]^{l+1}} \quad (D.27)$$

und

$$K_\pm (\mu, \mu') = \left[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa) \right]^l \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_\mu^{\mu'} \frac{d\mu'' \nu(\mu'' - \mu')}{[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa)]^{l+1}}. \quad (D.28)$$

Für $V(r) = 0$ bzw. $\nu(\mu) = 0$ haben wir also

$$\sigma'_g(\mu) = \sigma'_g(0). \quad (\text{D.29})$$

Wenn $\nu(\mu)$ reell ist, erhalten wir

$$K_+^* (\mu, \mu') = K_- (\mu, \mu'), \quad K_\pm^* (\mu, \mu') = K_\mp (\mu, \mu') \quad (\text{D.30})$$

und wenn zusätzlich gilt

$$\sigma'_f(0)^* = \sigma'_g(0) \quad (\text{D.31})$$

dann gilt

$$\sigma'_f{}^*(\mu) = \sigma'_g(\mu), \quad F_l'(r)^* = G_l'(r). \quad (\text{D.32})$$

und genau dann werden die Funktionen F_l und G_l nach (D.17/18) reell, wie für die Lösungen eines ursprünglich reellen Dgl.-Systems zu erwarten. Bei zwei reellen Dgl. zweiter Ordnung erwartet man 4 reelle Integrationskonstanten, von denen hier freilich nur noch zwei verfügbar sind, da wir durch die Ansätze (C.21) die exponentiell ansteigenden Basislösungen bereits endgültig ausgeschlossen haben. Diese beiden entsprechen dem Real- und dem Imaginärteil von $\sigma'_f(0)$. Da es für $\sigma'_f(0) = \sigma'_g(0) = 0$ nur die triviale Lösung der Gleichungen (D.20) und (D.24) gibt, sind $\sigma'_f(0)$ und $\sigma'_g(0)$ von Null verschieden zu wählen und die geeignetste Wahl in unserem Fall ist

$$\sigma'_f(0) = \sigma'_g(0) = 1. \quad (\text{D.33})$$

Damit haben wir nach den Gleichungen (D.20) und (D.25)

$$\begin{aligned} \sigma'_f(\mu) = 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'')^* \\ \left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') + \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

und

$$\begin{aligned} \sigma'_g(\mu) = 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma + i\kappa)(\mu' - i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'')^* \\ \left\{ \left[(\mu'' + 2\gamma + i\kappa)(\mu'' - i\kappa) \right]^l \sigma'_g(\mu'') + \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

oder in kürzerer Form

$$\sigma'_f(\mu) = 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_+ (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') + K_\mp (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') \right\} \quad (\text{D.36})$$

und

$$\sigma'_g(\mu) = 1 + \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu d\mu' \left\{ K_- (\mu, \mu') \sigma'_g(\mu') + K_\pm (\mu, \mu') \sigma'_f(\mu') \right\}. \quad (\text{D.37})$$

Dies sind die endgültigen linearen Integralgleichungen für σ'_f und σ'_g ; für die Behandlung des Yukawa-Potentials kann man auch die äquivalenten Gln. (D.20/25) mit (D.33) als Ausgangspunkt nehmen.

Der Beweis von $\nu(0) = 0$

Der Grund dafür, daß für kurzreichweitige Potentiale $\nu(0) = 0$ ist, ist folgender:

Wir integrieren die Integralform des Potentials partiell und berechnen den Limes im Unendlichen $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 V(r) &= \int_0^\infty d\mu \underbrace{e^{-\mu r}}_{= \frac{d}{d\mu}(-\frac{1}{r}e^{-\mu r})} \nu(\mu) \\
 &= \left[-\frac{1}{r}e^{-\mu r}\nu(\mu)\right]_0^\infty + \frac{1}{r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \frac{d}{d\mu}\nu(\mu) \\
 &= \frac{\nu(0)}{r} + \frac{1}{r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \frac{d}{d\mu}\nu(\mu) \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ \nu(0) + \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \frac{d}{d\mu}\nu(\mu) \right\} \\
 \Leftrightarrow rV(r) &= \nu(0) + \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \frac{d}{d\mu}\nu(\mu) . \tag{D.38}
 \end{aligned}$$

Da das Potential im Unendlichen schneller als r^{-1} verschwindet, muß der Limes der Terme auf beiden Seiten der Gleichung (D.38) im Unendlichen *Null* sein. Daher haben wir also

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = \nu(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \frac{d}{d\mu}\nu(\mu) = 0. \tag{D.39}$$

Da $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} \frac{d}{d\mu}\nu(\mu) = 0$ ist, folgt daraus, daß

$$\nu(0) = \lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = 0 \tag{D.40}$$

ist. Die Gleichung (D.40) ist für die Regularität der Gleichungen (D.34) und (D.35), bzw. (D.36) und (D.37), eine notwendige und ausreichende Bedingung. Folglich sind diese Gleichungen regulär für das Yukawa-Potential und singular für das Coulomb-Potential.

Der Fall der freien Teilchen

Für den Fall der freien Teilchen, d.h. für $V(r) = 0$ bzw. $\nu(\mu) = 0$, erhalten wir nach den Gleichungen (D.16), (D.24), (D.29) und (D.33)

$$\begin{aligned}
 F'_l(r) &= r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma - i\kappa)(\mu + i\kappa)]^l \\
 G'_l(r) &= r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty d\mu e^{-\mu r} [(\mu + 2\gamma + i\kappa)(\mu - i\kappa)]^l. \tag{D.41}
 \end{aligned}$$

Diese Funktionen verhalten sich am Ursprung wie $\frac{1}{r^{l+1}}$. Wenn wir nun mit der Substitution

$$X = \mu r \Leftrightarrow \mu = \frac{X}{r} \Leftrightarrow d\mu = \frac{dX}{r}$$

arbeiten, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 F'_l(r) &= r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty \frac{dX}{r} e^{-X} \left[\left(\frac{X}{r} + 2\gamma - i\kappa \right) \left(\frac{X}{r} + i\kappa \right) \right]^l \\
 &= r^l e^{-\gamma r} \int_0^\infty \frac{dX e^{-X}}{r^{2l+1}} [(X + (2\gamma - i\kappa)r)(X + i\kappa r)]^l \\
 &= \frac{e^{-\gamma r}}{r^{l+1}} \int_0^\infty dX e^{-X} [(X + (2\gamma - i\kappa)r)(X + i\kappa r)]^l.
 \end{aligned}$$

Ebenso gilt für $G'_l(r)$

$$G'_l(r) = \frac{e^{-\gamma r}}{r^{l+1}} \int_0^\infty dX e^{-X} [(X + (2\gamma + i\kappa)r)(X - i\kappa r)]^l.$$

Am Ursprung gilt also

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_l'(r) = \lim_{r \rightarrow 0} G_l'(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int_0^\infty dX e^{-X} X^{2l}}_{=\Gamma(2l+1)} = \frac{\Gamma(2l+1)}{r^{l+1}} = \frac{(2l)!}{r^{l+1}}, \quad (\text{D.42})$$

wobei Γ die gamma-Funktion bedeutet. Nach den Gleichungen (C.22) gibt es daher keine physikalischen Lösungen für $F_l(r)$ und $G_l(r)$ am Ursprung für freie Teilchen. Zwar wird nach Linearkombination von F_l' und G_l' gemäß (C.15) die Hilfsfunktion $G_l(r)$ am Ursprung Null, aber die physikalische Wellenfunktion $F_l(r)$ wird singulär wie $\frac{1}{r^{l+1}}$. Will man ein bei $r \rightarrow 0$ reguläres F_l erzielen, so muß man die bei (C.8/12) ausgeschlossenen Lösungen wieder beimischen, die aber bei $\Lambda > 0$ für $r \rightarrow \infty$ exponentiell anwachsen und daher wieder unphysikalisch sind. Erst für $\Lambda = 0$ wird eine physikalische Kontinuumslösung möglich, die für $r \rightarrow \infty$ nur noch ungedämpft oszilliert.

Der Fall der wechselwirkenden Teilchen, d.h. $V(r) \neq 0$

Für $V(r) \neq 0$ behalten die Funktionen $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$ in den Gleichungen (D.16) ihre Gestalt. Dieselben Überlegungen wie bei den wechselwirkungsfreien Teilchen führen hier zu demselben Ergebnis, d.h. sie verhalten sich am Ursprung wie $\frac{1}{r^{l+1}}$. Das Verhalten für $r \rightarrow 0$ wird durch die Gewichtsfunktion bei $\mu = \infty$ bestimmt und ergibt sich zusammen mit dem Limes am Ursprung von $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$ zu

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_l'(r) = \frac{\sigma_f'(\infty)}{r^{l+1}} \int_0^\infty dX e^{-X} X^{2l} = \frac{(2l)!}{r^{l+1}} \sigma_f'(\infty) \quad (\text{D.43})$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} G_l'(r) = \frac{\sigma_g'(\infty)}{r^{l+1}} \int_0^\infty dX e^{-X} X^{2l} = \frac{(2l)!}{r^{l+1}} \sigma_g'(\infty). \quad (\text{D.44})$$

Da $F_l(r)$ und $G_l(r)$ Linearkombinationen von $F_l'(r)$ und $G_l'(r)$ sind, verhalten sie sich auch am Ursprung genauso wie $\frac{1}{r^{l+1}}$. Daher ist also die notwendige Bedingung dafür, daß sich die Funktion $F_l(r)$ am Ursprung wie r^l verhält, folgende:

$$\text{Re} \left\{ \sigma_f'(\infty) \right\} = 0. \quad (\text{D.45})$$

60 ANHANG D. DIE ABLEITUNG DER GLEICHUNGEN FÜR DIE GEWICHTSFUNKTIONEN

Anhang E

Rechnungen zu den Formeln im Kapitel 2

E.1 Rechnungen zu (2.3) bzw. (2.4)

Es reicht nach den Gleichungen (1.47) bzw. (1.52) zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} & \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu'+2\gamma-i\kappa)(\mu'+i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \\ &= -\frac{\eta}{2} \theta(\mu - \mu_0) \int_{\mu_0}^\mu d\mu' \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa)(\mu' - \mu_0 + i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_f(\mu' - \mu_0) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

ist. Wenn wir $\nu(\mu)$ gemäß der Gleichung (2.2), auf der linken Seite der obigen Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu'+2\gamma-i\kappa)(\mu'+i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \nu(\mu' - \mu'') \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \\ &= -\frac{f^2 m}{4\pi \hbar^2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu'+2\gamma-i\kappa)(\mu'+i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu''). \end{aligned}$$

Wir erweitern nun diese Gleichung mit 2 und erhalten so

$$\begin{aligned} & -\underbrace{\frac{f^2 2m}{4\pi \hbar^2}}_{:=\eta} \frac{1}{2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu'+2\gamma-i\kappa)(\mu'+i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l * \\ & \qquad \qquad \qquad \sigma'_f(\mu'') \\ &= -\frac{\eta}{2} \int_0^\mu \frac{d\mu'}{[(\mu'+2\gamma-i\kappa)(\mu'+i\kappa)]^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu''). \end{aligned}$$

Nach der Gleichung (D.4) gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \\ &= \int_0^{\mu'} d\mu'' \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \frac{\partial}{\partial \mu'} \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0), \end{aligned}$$

da $\mu_0 > 0$ ist. Außerdem gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mu'} \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) = \delta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \stackrel{\delta(x)=\delta(-x)}{=} \delta(\mu'' - (\mu' - \mu_0)). \quad (\text{E.2})$$

Daher können wir sagen:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \\ &= \int_0^{\mu'} d\mu'' \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \delta(\mu'' - (\mu' - \mu_0)) \\ &= \theta(\mu' - \mu_0) \left[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa)(\mu' - \mu_0 + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu' - \mu_0), \end{aligned}$$

da

$$\int_{\mathbb{R}} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (f \text{ stetig in } x_0) \quad (\text{E.3})$$

ist, wobei δ die *Diracsche delta-Funktion* bedeutet. Wir haben also

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2} \int_0^{\mu} \frac{d\mu'}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \\ & \frac{\partial}{\partial \mu'} \int_0^{\mu'} d\mu'' \theta(\mu' - \mu'' - \mu_0) \left[(\mu'' + 2\gamma - i\kappa)(\mu'' + i\kappa) \right]^l \sigma'_f(\mu'') \\ &= -\frac{\eta}{2} \int_0^{\mu} d\mu' \theta(\mu' - \mu_0) \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa)(\mu' - \mu_0 + i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_f(\mu' - \mu_0) \\ &= -\frac{\eta}{2} \theta(\mu - \mu_0) \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' \frac{[(\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa)(\mu' - \mu_0 + i\kappa)]^l}{[(\mu' + 2\gamma - i\kappa)(\mu' + i\kappa)]^{l+1}} \sigma'_f(\mu' - \mu_0). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht der Gleichung (E.1) sowie den Gleichungen (2.3) bzw. (2.4).

E.1.1 Rechnungen zu (2.7)

Wir gehen von der Gleichung (2.3) aus. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu - \mu_0 &= \mu_0 \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \\ (\text{Gl. (2.6)}) &= \mu_0 (s - 1) \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\theta(\mu - \mu_0) = \theta(s - 1)$$

und

$$\begin{aligned} \eta \theta(\mu - \mu_0) &= \eta \theta(s - 1) \\ &= \frac{\eta}{\mu_0} \mu_0 \theta(s - 1) \\ (\text{Gl. (2.6)}) &= \eta_0 \mu_0 \theta(s - 1). \end{aligned}$$

Im folgenden substituieren wir $\frac{\mu}{\mu_0}$ durch t . Man erhält daher

$$\begin{aligned}
\mu' - \mu_0 + 2\gamma - i\kappa &= \mu_0 \left(\frac{\mu'}{\mu_0} - 1 + \frac{2\gamma}{\mu_0} - i \frac{\kappa}{\mu_0} \right) \stackrel{Gl.(2.6)}{=} \mu_0 (t - 1 + \lambda - i\nu) \\
\mu' - \mu_0 + i\kappa &= \mu_0 \left(\frac{\mu'}{\mu_0} - 1 + i \frac{\kappa}{\mu_0} \right) = \mu_0 (t - 1 + i\nu) \\
\mu' + 2\gamma - i\kappa &= \mu_0 \left(\frac{\mu'}{\mu_0} + \frac{2\gamma}{\mu_0} - i \frac{\kappa}{\mu_0} \right) = \mu_0 (t + \lambda - i\nu) \\
\mu' + i\kappa &= \mu_0 \left(\frac{\mu'}{\mu_0} + i \frac{\kappa}{\mu_0} \right) = \mu_0 (t + i\nu)
\end{aligned}$$

Da $t = \frac{\mu'}{\mu_0}$ ist, gilt also $d\mu' = \mu_0 dt$ und die Gleichung (2.3) wird also

$$\begin{aligned}
\sigma'_f(\mu) &= 1 - \eta_0 \mu_0 \theta(s-1) \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\mu'}{\mu_0}} \mu_0 dt \left\{ \frac{[\mu_0^2(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[\mu_0^2(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} \sigma'_f(t-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{[\mu_0^2(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[\mu_0^2(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} \sigma'_f(t-1)^* \right\} \\
\Rightarrow^{Gl.(2.6)} R'_{\nu\lambda}(s) &= 1 - \eta_0 \mu_0 \theta(s-1) \frac{1}{2} \int_1^s dt \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{[(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} \underbrace{\sigma'_f(\mu_0(t-1))}_{:=R'_{\nu\lambda}(t-1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} \underbrace{\sigma'_f(\mu_0(t-1))^*}_{:=R'_{\nu\lambda}(t-1)^*} \right\} \\
\Rightarrow R'_{\nu\lambda}(s) &= 1 - \eta_0 \theta(s-1) \frac{1}{2} \int_1^s dt \left\{ \frac{[(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{[(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1)^* \right\}.
\end{aligned}$$

E.1.2 Rechnungen zu (2.9)

Wir wollen hier zeigen, daß die Gleichungen (2.8) und (2.9) äquivalent sind. Nach den Eigenschaften der *theta-Funktion*, d.h.

$$\theta(s-n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } s > n \\ 0, & \text{wenn } s < n, \end{cases}$$

haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \theta(s-n) \varphi_n(s-n, \nu, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda), & \text{wenn } s > n \\ 0, & \text{wenn } s < n \end{cases} \\
(s \rightarrow \infty) &= \sum_{n=0}^{[s]} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda)
\end{aligned}$$

mit $[s] \in \mathbb{N}$ und $[s] \leq s$. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{[s]} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda) &= \sum_{n=0}^s \begin{cases} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda), & \text{wenn } [s] \leq s < n \\ 0, & \text{wenn } s < n \end{cases} \\ (s \rightarrow \infty) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \theta(s-n) \varphi_n(s-n, \nu, \lambda). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R'_{\nu\lambda}(s) = \sum_{n=0}^{[s]} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda) \stackrel{s \rightarrow \infty}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \theta(s-n) \varphi_n(s-n, \nu, \lambda).$$

E.1.3 Rechnungen zu (2.10)

Nach den Gleichungen (2.7) und (2.8) bzw. (2.9) gilt

$$\begin{aligned} R'_{\nu\lambda}(s) &= 1 - \frac{\eta_0}{2} \int_1^s dt \left\{ \frac{[(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1) + \frac{[(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}{}^*(t-1) \right\} \\ &= \varphi_0(s, \nu, \lambda) + \sum_{n=1}^{[s]} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda) \\ &\Rightarrow \varphi_0(s, \nu, \lambda) = 1. \end{aligned} \tag{E.4}$$

Die Relation ist also für $n=0$ erfüllt. Wir entwickeln jetzt für $n=1$ die Reihe (2.8) bzw. (2.9) und vergleichen dann das Resultat mit der Integralgleichung (2.7) bzw. (E.4). Die Entwicklung der Reihe ergibt sich zu

$$R'_{\nu\lambda}(s) \stackrel{n=1}{=} 1 - \eta_0 \theta(s-1) \varphi_1(s-1, \nu, \lambda). \tag{E.5}$$

Wenn wir nun die beiden letzten Gleichungen nach den Potenzen von η_0 vergleichen, erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} \varphi_1(s-1, \nu, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_1^s dt \left\{ \frac{[(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}{}^*(t-1) \right\}_{\eta_0=0} \end{aligned} \tag{E.6}$$

y soll jetzt folgendermaßen definiert werden:

$$y := s-1 \quad \text{oder} \quad s = y+1. \tag{E.7}$$

Die Gleichung (E.6) wird also zu

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, \nu, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_1^{y+1} dt \left\{ \frac{[(t-1+\lambda-i\nu)(t-1+i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}(t-1) + \frac{[(t-1+\lambda+i\nu)(t-1-i\nu)]^l}{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^{l+1}} R'_{\nu\lambda}{}^*(t-1) \right\}_{\eta_0=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^y dt \left\{ \frac{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^l}{[(t+1+\lambda-i\nu)(t+1+i\nu)]^{l+1}} \underbrace{R'_{\nu\lambda}(t)}_{:=\varphi_0(t, \nu, \lambda)} + \frac{[(t+\lambda+i\nu)(t-i\nu)]^l}{[(t+1+\lambda-i\nu)(t+1+i\nu)]^{l+1}} \underbrace{R'_{\nu\lambda}{}^*(t)}_{:=\varphi_0^*(t, \nu, \lambda)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^y dt \left\{ \frac{[(t+\lambda-i\nu)(t+i\nu)]^l}{[(t+1+\lambda-i\nu)(t+1+i\nu)]^{l+1}} \varphi_0(t, \nu, \lambda) + \frac{[(t+\lambda+i\nu)(t-i\nu)]^l}{[(t+1+\lambda-i\nu)(t+1+i\nu)]^{l+1}} \varphi_0^*(t, \nu, \lambda) \right\}. \end{aligned} \tag{E.8}$$

Nach demselben Schema erhält man für $n \geq 2$ die rekursive Relation

$$\begin{aligned} \varphi_n(y, \nu, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^y dt \left\{ \frac{[(t+n-1+\lambda-i\nu)(t+n-1+i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + \right. \\ \left. \frac{[(t+n-1+\lambda+i\nu)(t+n-1-i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (E.9)$$

Aus den Gleichungen (E.4) und (E.9) folgt der Beweis der Gleichung (2.10).

E.2 Einige nützliche logarithmische und algebraische Funktionen

Die ersten Funktionen φ_n haben eine relativ einfache Struktur. Hier sollen aus der Gleichung (2.10) mit $E = 0$ und mit $\nu = \lambda = 0$ und mit $l = 0$ die ersten drei Funktionen $\varphi_1(y, 0, 0)$, $\varphi_2(y, 0, 0)$, $\varphi_3(y, 0, 0)$ berechnet werden. Die Gleichung (2.10) lautet also

$$\varphi_n(y, 0, 0) = \int_0^y \frac{dt}{(t+n)^2} \varphi_{n-1}(t, 0, 0), \quad l = 0, \quad (E.10)$$

da $\varphi_n^* = \varphi_n$. Wir haben also für $n = 1$

$$\varphi_1(y, 0, 0) = \int_0^y \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{y}{1+y} \quad (E.11)$$

und für $n = 2$

$$\varphi_2(y, 0, 0) = \int_0^y \frac{dt}{(t+2)^2} \varphi_1(t, 0, 0) = \int_0^y \frac{dt}{(t+2)^2} \frac{t}{t+1}.$$

Nach Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{t}{(t+2)^2(t+1)} = \frac{A}{(t+2)^2} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t+1} = f(t). \quad (E.12)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -2} (t+2)^2 f(t) &= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t}{t+1} = 2 = A \\ \lim_{t \rightarrow -1} (t+1) f(t) &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{(t+2)^2} = -1 = C \\ f(0) &= \frac{1}{2} + \frac{B}{2} - 1 = 0 \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\frac{t}{(t+2)^2(t+1)} = \frac{2}{(t+2)^2} + \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+1}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^y dt \frac{t}{(t+2)^2(t+1)} &= 2 \int_0^y \frac{dt}{(t+2)^2} + \int_0^y \frac{dt}{(t+2)} - \int_0^y \frac{dt}{(t+1)} \\
&= \frac{2y}{2(2+y)} + [\ln(t+2)]_0^y - [\ln(t+1)]_0^y \\
&= \frac{y}{2+y} + \{\ln(2+y) - \ln 2\} - \ln(1+y) \\
&= \frac{y}{2+y} + \ln \frac{2+y}{2} - \ln(1+y) \\
&= \frac{y}{2+y} + \ln(2+y) - \{\ln 2 + \ln(1+y)\} \\
&= \frac{y}{2+y} + \ln(y+2) - \ln\{2(1+y)\} \\
&= \frac{y}{2+y} + \ln\left(\frac{2+y}{2(1+y)}\right) \\
&= \frac{y}{2+y} - \ln\left(2\frac{1+y}{2+y}\right).
\end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\varphi_2(y, 0, 0) = \frac{y}{2+y} - \ln\left(2\frac{1+y}{2+y}\right). \quad (\text{E.13})$$

Für $n = 3$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_3(y, 0, 0) &= \int_0^y \frac{dt}{(t+3)^2} \varphi_2(t, 0, 0) \\
&= \int_0^y \frac{dt}{(t+3)^2} \left\{ \frac{t}{2+t} - \ln\left(2\frac{1+t}{2+t}\right) \right\} \\
&= \int_0^y dt \frac{t}{(t+3)^2(2+t)} - \int_0^y \frac{dt}{(t+3)^2} \left\{ \ln 2 + \ln \frac{1+t}{2+t} \right\} \\
&= \int_0^y \frac{t dt}{(t+3)^2(t+2)} - \int_0^y \frac{\ln 2 dt}{(t+3)^2} - \int_0^y \frac{dt}{(t+3)^2} \{ \ln(1+t) - \ln(2+t) \} \\
&= \int_0^y \frac{t dt}{(t+3)^2(t+2)} - \ln 2 \int_0^y \frac{dt}{(t+3)^2} - \int_0^y \frac{dt \ln(1+t)}{(t+3)^2} + \int_0^y \frac{dt \ln(2+t)}{(t+3)^2}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{t dt}{(t+3)^2(t+2)} &= \frac{y}{3+y} - 2 \ln\left(\frac{3}{2}\frac{2+y}{3+y}\right) \\
\int_0^y \frac{dt}{(t+3)^2} &= \frac{y}{3(3+y)}.
\end{aligned}$$

Die Berechnung der restlichen Integrale ist etwas komplizierter. Durch Partialintegration erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_0^y \frac{\ln(1+t)}{(3+t)^2} dt &= \int_0^y \underbrace{\ln(1+t)}_{=f(t)} \underbrace{\frac{dt}{(3+t)^2}}_{=g'(t)} \\
 &= [f(t) g(t)]_0^y - \int_0^y f'(t) g(t) dt \\
 &= \left[-\frac{\ln(1+t)}{3+t} \right]_0^y + \int_0^y \frac{dt}{(1+t)(3+t)} \\
 &= -\frac{\ln(1+y)}{3+y} + \int_0^y \frac{dt}{(1+t)(3+t)} \\
 (\text{Pbzerl.}) &= -\frac{\ln(1+y)}{3+y} + \frac{1}{2} \int_0^y dt \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{3+t} \right) \\
 &= -\frac{\ln(1+y)}{3+y} + \frac{1}{2} [\ln(1+t) - \ln(3+t)]_0^y \\
 &= -\frac{\ln(1+y)}{3+y} + \frac{1}{2} \{ \ln(1+y) - \ln(3+y) + \ln 3 \} \\
 &= -\frac{\ln(1+y)}{3+y} + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{1+y}{3+y} \right) + \ln 3 \right\} \\
 &= -\frac{\ln(1+y)}{3+y} + \frac{1}{2} \ln \left(3 \frac{1+y}{3+y} \right).
 \end{aligned}$$

Durch dieselben Rechnungen erhalten wir

$$\int_0^y dt \frac{\ln(2+t)}{(3+t)^2} = \frac{\ln 2}{3} + \ln \left(\frac{3}{2} \frac{2+y}{3+y} \right) - \frac{\ln(2+y)}{3+y}.$$

Die Summe aller diese Terme lautet

$$\varphi_3(y, 0, 0) = \frac{y}{3+y} - \ln \left(\frac{3}{2} \frac{2+y}{3+y} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(3 \frac{1+y}{3+y} \right) + \frac{1}{3+y} \ln \left(2 \frac{1+y}{2+y} \right). \quad (\text{E.14})$$

Um den Funktionen F_{nx} , G_{nx} , H_{nx} , I_{nx} , J_{nx} , K_{nx} eine näherungsweise algebraische Form zu geben, müssen wir einige Abschätzungen machen, wofür wir insbesondere den Mittelwertsatz nutzen.

Die Funktionen F_{nx} und \tilde{F}_{nx}

Wir haben

$$\begin{aligned}
 F_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \\
 &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt \frac{[(1+a_{n-1}+\lambda-i\nu(t+z))(1+a_{n-1}+i\nu(t+z))]^l}{[(1+a_{n+\lambda}-i\nu(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^{l+1}} \\
 &= A(n, \nu, \lambda) \tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda).
 \end{aligned}$$

Es reicht also $\tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda)$ abzuschätzen. Wir haben also

$$\tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) = \int_0^x dt \frac{[(1+a_{n-1}+\lambda-i\nu(t+z))(1+a_{n-1}+i\nu(t+z))]^l}{[(1+a_{n+\lambda}-i\nu(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^{l+1}}. \quad (\text{E.15})$$

Wenn wir die Funktion $\hat{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \frac{1}{l+1} \left(\frac{[(1+a_{n-1}+\lambda-i\nu(t+z))(1+a_{n-1}+i\nu(t+z))]^{l+1}}{[(1+a_{n+\lambda}-i\nu(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^{l+1}} \right)$ differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_{nx}(z, \nu, \lambda)' &= \frac{1}{l+1} \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\
&= \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))} \right]^l \frac{1}{[(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))]^2} * \\
&\quad \{ [a_{n-1+\lambda-iv}(1+a_{n-1+iv}(t+z)) + a_{n-1+iv}(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))] * \\
&\quad \quad (1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z)) \\
&\quad \quad - [a_{n+\lambda-iv}(1+a_{n+iv}(t+z)) + a_{n+iv}(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))] * \\
&\quad \quad (1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))] \} \\
&= \frac{[(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))]^l}{[(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))]^{l+1}} \{ a_{n-1+\lambda-iv}(1+a_{n-1+iv}(t+z)) + \\
&\quad a_{n-1+iv}(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z)) - \frac{(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))} * \\
&\quad \quad [a_{n+\lambda-iv}(1+a_{n+iv}(t+z)) + a_{n+iv}(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))] \} \\
&= \frac{f_n(t+z, \nu, \lambda)}{(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))} \{ (1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z)) * \\
&\quad [a_{n-1+\lambda-iv}(1+a_{n-1+iv}(t+z)) + a_{n-1+iv}(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))] \\
&\quad - [a_{n+\lambda-iv}(1+a_{n+iv}(t+z)) + a_{n+iv}(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))] * \\
&\quad \quad (1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))] \} \\
&= f_n(t+z, \nu, \lambda) (\omega_n(t+z, \nu, \lambda))^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir können also sagen

$$\begin{aligned}
f_n(t+z, \nu, \lambda) &= \frac{\omega_n^f(t+z, \nu, \lambda)}{l+1} \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n-1+iv}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\
\omega_n^f(t+z, \nu, \lambda) &= \frac{(1+a_{n+\lambda-iv}(t+z))(1+a_{n+iv}(t+z))}{\Delta_n^f(t+z, \nu, \lambda)}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Delta_n^f(t+z, \nu, \lambda) &= \{ a_{n-1+\lambda-iv} [1+a_{n-1+iv}(t+z)] + a_{n-1+iv} [1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z)] \} \\
&\quad * [1+a_{n+\lambda-iv}(t+z)] [1+a_{n+iv}(t+z)] \\
&\quad - \{ a_{n+\lambda-iv} [1+a_{n+iv}(t+z)] + a_{n+iv} [1+a_{n+\lambda-iv}(t+z)] \} \\
&\quad * [1+a_{n-1+\lambda-iv}(t+z)] [1+a_{n-1+iv}(t+z)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv} + 2a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv} (t+z)] * \\
 &\quad \left\{ 1 + [a_{n+iv} + a_{n+\lambda-iv}] (t+z) + a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (t+z)^2 \right\} \\
 &\quad - [a_{n+\lambda-iv} + a_{n+iv} + 2a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (t+z)] * \\
 &\quad \left\{ 1 + [a_{n-1+iv} + a_{n-1+\lambda-iv}] (t+z) + a_{n-1+\lambda-iv}a_{n-1+iv} (t+z)^2 \right\} \\
 &= a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv} + \\
 &\quad [(a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv}) (a_{n+iv} + a_{n+\lambda-iv}) \\
 &\quad + 2a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv}] (t+z) \\
 &\quad + [a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv}) + \\
 &\quad 2a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv} (a_{n+iv} + a_{n+\lambda-iv})] (t+z)^2 \\
 &\quad + 2a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv}a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (t+z)^3 \\
 &\quad - \{ a_{n+\lambda-iv} + a_{n+iv} + \\
 &\quad [(a_{n+\lambda-iv} + a_{n+iv}) (a_{n-1+iv} + a_{n-1+\lambda-iv}) \\
 &\quad + 2a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv}] (t+z) \\
 &\quad + [a_{n-1+\lambda-iv}a_{n-1+iv} (a_{n+\lambda-iv} + a_{n+iv}) \\
 &\quad + 2a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (a_{n-1+iv} + a_{n-1+\lambda-iv})] (t+z)^2 \\
 &\quad + 2a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv}a_{n-1+\lambda-iv}a_{n-1+iv} (t+z)^3 \} \\
 &= a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv} - a_{n+\lambda-iv} - a_{n+iv} \\
 &\quad + 2 (a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv} - a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv}) (t+z) \\
 &\quad + [a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv}) \\
 &\quad - a_{n-1+\lambda-iv}a_{n-1+iv} (a_{n+\lambda-iv} + a_{n+iv}) \\
 &\quad + 2a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv} (a_{n+iv} + a_{n+\lambda-iv}) \\
 &\quad - 2a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (a_{n-1+iv} + a_{n-1+\lambda-iv})] (t+z)^2 \\
 &= a_{n-1+\lambda-iv} + a_{n-1+iv} - a_{n+\lambda-iv} - a_{n+iv} \\
 &\quad + 2 (a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv} - a_{n+\lambda-iv} - a_{n+iv}) (t+z) \\
 &\quad + [a_{n-1+iv}a_{n-1+\lambda-iv} (a_{n+iv} + a_{n+\lambda-iv}) \\
 &\quad - a_{n+\lambda-iv}a_{n+iv} (a_{n-1+iv} + a_{n-1+\lambda-iv})] (t+z)^2 \\
 &= Q_n^f + R_n^f (t+z) + S_n^f (t+z)^2,
 \end{aligned}$$

d.h.

$$\Delta_n^f(t+z, \nu, \lambda) = Q_n^f + R_n^f(t+z) + S_n^f(t+z)^2 \quad (\text{E.17})$$

und die Funktion ω_n^f wird nun

$$\omega_n^f(t+z, \nu, \lambda) = \frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))}{Q_n^f + R_n^f(t+z) + S_n^f(t+z)^2} \quad (\text{E.18})$$

mit

$$\begin{aligned} Q_n^f &= a_{n-1+\lambda-i\nu} + a_{n-1+i\nu} - a_{n+\lambda-i\nu} - a_{n+i\nu} \\ R_n^f &= 2(a_{n-1+i\nu}a_{n-1+\lambda-i\nu} - a_{n+\lambda-i\nu}a_{n+i\nu}) \\ S_n^f &= a_{n-1+i\nu}a_{n-1+\lambda-i\nu}(a_{n+i\nu} + a_{n+\lambda-i\nu}) - a_{n+\lambda-i\nu}a_{n+i\nu}(a_{n-1+i\nu} + a_{n-1+\lambda-i\nu}). \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Wir setzen

$$\Omega_n^f(t+z, \nu, \lambda) := \frac{\omega_n^f(t+z, \nu, \lambda)}{l+1}. \quad (\text{E.20})$$

Die Gleichung (E.16) wird also

$$f_n(t+z, \nu, \lambda) = \Omega_n^f(t+z, \nu, \lambda) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n-1+i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}', \quad (\text{E.21})$$

wobei der Strich die Ableitung nach t bedeutet. Wir haben also

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \\ \tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt \Omega_n^f(t+z, \nu, \lambda) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n-1+i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\ (M.W.S., \frac{x}{2} \in [0, x]) &\cong \Omega_n^f\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \int_0^x dt \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n-1+i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\ &= \Omega_n^f\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n-1+i\nu}(x+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n+i\nu}(x+z))} \right]^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n-1+i\nu}z)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n+i\nu}z)} \right]^{l+1} \right\} \end{aligned}$$

Die Gleichung (E.15) lautet jetzt

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{nx}(z, \nu, \lambda) &\cong \Omega_n^f\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n-1+i\nu}(x+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n+i\nu}(x+z))} \right]^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n-1+i\nu}z)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n+i\nu}z)} \right]^{l+1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

und die Funktion F_{nx} wird zu

$$\begin{aligned}
 F_{nx}(z, \nu, \lambda) \cong A(n, \nu, \lambda) \Omega_n^f\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) & \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n-1+i\nu}(x+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n+i\nu}(x+z))} \right]^{l+1} \right. \\
 & \left. - \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n-1+i\nu}z)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n+i\nu}z)} \right]^{l+1} \right\}.
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

Die Funktionen G_{nx} und \tilde{G}_{nx}

Wir haben

$$\begin{aligned}
 G_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \\
 &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt \frac{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))]^l}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^{l+1}} \\
 &= A(n, \nu, \lambda) \tilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda),
 \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \int_0^x dt \frac{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))]^l}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^{l+1}}. \tag{E.24}$$

Wenn wir die Funktion $\hat{G}_{nx}(t+z, \nu, \lambda) = \frac{1}{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1}$ nach t differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{nx}(z, \nu, \lambda)' &= \frac{1}{l+1} \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\
&= \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^l \frac{1}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^2} * \\
&\quad \{ [a_{n-1+\lambda+i\nu}(1+a_{n-1-i\nu}(t+z)) + a_{n-1-i\nu}(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))] * \\
&\quad \quad (1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z)) \\
&\quad - [a_{n+\lambda-i\nu}(1+a_{n+i\nu}(t+z)) + a_{n+i\nu}(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))] * \\
&\quad \quad (1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z)) \} \\
&= \frac{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))]^l}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))]^{l+1}} \{ a_{n-1+\lambda+i\nu}(1+a_{n-1-i\nu}(t+z)) \\
&\quad + a_{n-1-i\nu}(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z)) - \frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} * \\
&\quad \quad [a_{n+\lambda-i\nu}(1+a_{n+i\nu}(t+z)) + a_{n+i\nu}(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))] \} \\
&= \frac{g_n(t+z, \nu, \lambda)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \{ (1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z)) * \\
&\quad [a_{n-1+\lambda+i\nu}(1+a_{n-1-i\nu}(t+z)) + a_{n-1-i\nu}(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))] \\
&\quad - [a_{n+\lambda-i\nu}(1+a_{n+i\nu}(t+z)) + a_{n+i\nu}(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))] * \\
&\quad \quad (1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z)) \} \\
&= g_n(t+z, \nu, \lambda) (\omega_n^g(t+z, \nu, \lambda))^{-1}.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$g_n(t+z, \nu, \lambda) = \frac{\omega_n^g(t+z, \nu, \lambda)}{l+1} \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \quad (\text{E.25})$$

mit

$$\omega_n^g(t+z, \nu, \lambda) = \frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))}{\Delta_n^g(t+z, \nu, \lambda)} \quad (\text{E.26})$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta_n^g(t+z, \nu, \lambda) &= \{ a_{n-1+\lambda+i\nu} [1+a_{n-1-i\nu}(t+z)] + a_{n-1-i\nu} [1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z)] \} \\
&\quad * [1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z)] [1+a_{n+i\nu}(t+z)] \\
&\quad - \{ a_{n+\lambda-i\nu} [1+a_{n+i\nu}(t+z)] + a_{n+i\nu} [1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z)] \} \\
&\quad * [1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z)] [1+a_{n-1-i\nu}(t+z)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ 1 + [a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu}] (t+z) + a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} (t+z)^2 \right\} * \\
 &\quad [a_{n-1+\lambda+i\nu} + a_{n-1-i\nu} + 2a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} (t+z)] \\
 &- \left\{ 1 + [a_{n-1-i\nu} + a_{n-1+\lambda+i\nu}] (t+z) + a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} (t+z)^2 \right\} \\
 &\quad * [a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu} + 2a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} (t+z)] \\
 &= \{ a_{n-1+\lambda+i\nu} + a_{n-1-i\nu} + \\
 &[(a_{n-1+\lambda+i\nu} + a_{n-1-i\nu}) (a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu}) + 2a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu}] (t+z) \\
 &\quad + [a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} (a_{n-1+\lambda+i\nu} + a_{n-1-i\nu}) \\
 &\quad + a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} (a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu})] (t+z)^2 \\
 &\quad + 2a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} (t+z)^3 \} \\
 &\quad - \{ a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu} + \\
 &[(a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu}) (a_{n-1-i\nu} + a_{n-1+\lambda+i\nu}) + 2a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu}] (t+z) \\
 &\quad + [a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} (a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu}) + \\
 &\quad 2a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} (a_{n-1-i\nu} + a_{n-1+\lambda+i\nu})] (t+z)^2 \\
 &\quad + 2a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} (t+z)^3 \} \\
 &= (a_{n-1+\lambda+i\nu} + a_{n-1-i\nu} - a_{n+\lambda-i\nu} - a_{n+i\nu}) \\
 &\quad + 2 [a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} - a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu}] (t+z) \\
 &\quad + [a_{n-1+\lambda+i\nu} a_{n-1-i\nu} (a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu}) \\
 &\quad - a_{n+\lambda-i\nu} a_{n+i\nu} (a_{n-1+\lambda-i\nu} + a_{n-1-i\nu})] (t+z)^2 \\
 &= Q_n^g + R_n^g (t+z) + S_n^g (t+z)^2 .
 \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\Delta_n^g(t+z, \nu, \lambda) = Q_n^g + R_n^g(t+z) + S_n^g(t+z)^2 \quad (\text{E.27})$$

und

$$\omega_n^g(t+z, \nu, \lambda) = \frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))}{Q_n^g + R_n^g(t+z) + S_n^g(t+z)^2} \quad (\text{E.28})$$

mit

$$\begin{aligned}
Q_n^g &= a_{n-1+\lambda-i\nu} + a_{n-1-i\nu} - a_{n+\lambda-i\nu} - a_{n+i\nu} \\
R_n^g &= 2(a_{n-1+\lambda+i\nu}a_{n-1-i\nu} - a_{n+\lambda-i\nu}a_{n+i\nu}) \\
S_n^g &= a_{n-1+\lambda+i\nu}a_{n-1-i\nu}(a_{n+\lambda-i\nu} + a_{n+i\nu}) - a_{n+\lambda-i\nu}a_{n+i\nu}(a_{n-1+\lambda+i\nu} + a_{n-1-i\nu}).
\end{aligned} \tag{E.29}$$

Wir setzen nun

$$\Omega_n^g(t+z, \nu, \lambda) = \frac{\omega_n^g(t+z, \nu, \lambda)}{l+1}. \tag{E.30}$$

Die Gleichung (E.25) wird daher zu

$$g_n(t+z, \nu, \lambda) = \Omega_n^g(t+z, \nu, \lambda) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}'. \tag{E.31}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt \Omega_n^g(t+z, \nu, \lambda) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\
(M.W.S, \frac{x}{2} \in [0, x]) &\cong \Omega_n^g\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \int_0^x dt \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(t+z))(1+a_{n-1-i\nu}(t+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(t+z))(1+a_{n+i\nu}(t+z))} \right]^{l+1} \right\}' \\
&= \Omega_n^g\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(x+z))(1+a_{n-1-i\nu}(x+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n+i\nu}(x+z))} \right]^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}z)(1+a_{n-1-i\nu}z)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n+i\nu}z)} \right]^{l+1} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Funktionen \tilde{G}_{nx} und G_{nx} haben also die folgenden Formen

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \Omega_n^g\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(x+z))(1+a_{n-1-i\nu}(x+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n+i\nu}(x+z))} \right]^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}z)(1+a_{n-1-i\nu}z)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n+i\nu}z)} \right]^{l+1} \right\}
\end{aligned} \tag{E.32}$$

und

$$\begin{aligned}
G_{nx}(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \Omega_n^g\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}(x+z))(1+a_{n-1-i\nu}(x+z))}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}(x+z))(1+a_{n+i\nu}(x+z))} \right]^{l+1} \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}z)(1+a_{n-1-i\nu}z)}{(1+a_{n+\lambda-i\nu}z)(1+a_{n+i\nu}z)} \right]^{l+1} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.33}$$

Die Funktion I_{nx}

Wir schreiben $I_{nx}(z, \nu, \lambda)$ in der Form

$$\begin{aligned}
I_{nx}(z, \nu, \lambda) &= B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \\
&= B(n, \nu, \lambda) \tilde{I}_{nx}(z, \nu, \lambda).
\end{aligned} \tag{E.34}$$

Die Funktion $\frac{f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)}{f_n(t'+z, \nu, \lambda)}$ sei auf $t' \in [0, t]$ stetig, dann können wir nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung schreiben

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \\
 &= \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' \frac{f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)}{f_n(t'+z, \nu, \lambda)} f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 (\epsilon t \in [0, t']) &\cong \int_0^x dt \frac{f_{n-1}(\epsilon t+z, \nu, \lambda)}{f_n(\epsilon t+z, \nu, \lambda)} f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 (\epsilon \in [0, 1]) &\cong \frac{f_{n-1}(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)}{f_n(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)} \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 (O.B.d.A. \epsilon = \frac{1}{2}) &= \frac{f_{n-1}(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)}{f_n(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)} \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 &:= \xi_{in}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 &= \xi_{in}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda).
 \end{aligned}$$

Wir haben also nach der Gleichung (E.34)

$$\tilde{I}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) = \xi_{in}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda), \quad (\text{E.35})$$

und

$$I_{nx}(z, \nu, \lambda) = B(n, \nu, \lambda) \xi_{in}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda). \quad (\text{E.36})$$

Dabei haben wir verwendet:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x dt \underbrace{f_n(t+z, \nu, \lambda)}_{=\tilde{F}'_{nt}(z, \nu, \lambda)} \underbrace{\int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)}_{=\tilde{F}_{nt}(z, \nu, \lambda)} &= \int_0^x dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \tilde{F}_{nt}^2(z, \nu, \lambda) \right) \\
 &= \left[\frac{1}{2} \tilde{F}_{nt}^2(z, \nu, \lambda) \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda) - \frac{1}{2} \tilde{F}_{n0}^2(z, \nu, \lambda) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda),
 \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

also

$$\int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) = \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda), \quad (\text{E.38})$$

da nach der Gleichung (E.22) gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{n0}(z, \nu, \lambda) &\propto \left\{ \left[\frac{(1+a_{n-1}+\lambda-i\nu z)(1+a_{n-1}+i\nu z)}{(1+a_n+\lambda-i\nu z)(1+a_n+i\nu z)} \right]^{l+1} - \left[\frac{(1+a_{n-1}+\lambda-i\nu z)(1+a_{n-1}+i\nu z)}{(1+a_n+\lambda-i\nu z)(1+a_n+i\nu z)} \right]^{l+1} \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Für die Funktion ξ_{in} haben wir

$$\begin{aligned}\xi_{in}(t, \nu, \lambda) &= \frac{f_{n-1}(t, \nu, \lambda)}{f_n(t, \nu, \lambda)} \\ &= \frac{[(1+a_{n-2+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-2+i\nu t})]^l}{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})]^{l+1}} \frac{[(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})]^{l+1}}{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})]^l} \\ &= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-2+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^l,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\xi_{in}(t, \nu, \lambda) &= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-2+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^l \\ &= \frac{f_{n-1}(t, \nu, \lambda)}{f_n(t, \nu, \lambda)}.\end{aligned}\tag{E.39}$$

Die Funktion H_{nx}

Wir schreiben $H_{nx}(z, \nu, \lambda)$ in der Form

$$\begin{aligned}H_{nx}(z, \nu, \lambda) &= B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \\ &= B(n, \nu, \lambda) \tilde{H}_{nx}(z, \nu, \lambda).\end{aligned}\tag{E.40}$$

Aufgrund derselben Überlegungen, die wir schon in den obigen Rechnungen angestellt haben, gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \\ &= \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' \frac{g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)}{f_n(t'+z, \nu, \lambda)} f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\ (M.W.S.) &\cong \frac{g_{n-1}(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)}{f_n(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)} \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\ &:= \xi_{hn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_n(t'+z, \nu, \lambda) \\ (Gl.(A.139)) &= \xi_{hn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda),\end{aligned}$$

also

$$\tilde{H}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) = \xi_{hn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda),\tag{E.41}$$

und die Gleichung (E.39) wird zu

$$H_{nx}(z, \nu, \lambda) = B(n, \nu, \lambda) \tilde{H}_{nx}(z, \nu, \lambda) = B(n, \nu, \lambda) \xi_{hn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda).\tag{E.42}$$

Für die Funktion ξ_{hn} gilt

$$\begin{aligned}
 \xi_{hn}(t, \nu, \lambda) &= \frac{g_{n-1}(t, \nu, \lambda)}{f_n(t, \nu, \lambda)} \\
 &= \frac{[(1+a_{n-2+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-2-i\nu t})]^l}{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})]^{l+1}} \frac{[(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})]^{l+1}}{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})]^l} \\
 &= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-2-i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^l,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \xi_{hn}(t, \nu, \lambda) &= \frac{g_{n-1}(t, \nu, \lambda)}{f_n(t, \nu, \lambda)} \\
 &= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-2-i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-1+i\nu t})} \right]^l.
 \end{aligned} \tag{E.43}$$

Die Funktion J_{nx}

Wir schreiben $J_{nx}(z, \nu, \lambda)$ in der Form

$$\begin{aligned}
 J_{nx}(z, \nu, \lambda) &= C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dtg_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
 &= C(n, \nu, \lambda) \tilde{J}_{nx}(z, \nu, \lambda),
 \end{aligned} \tag{E.44}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dtg_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
 &= \int_0^x dtg_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' \frac{f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda)}{g_n(t'+z, \nu, \lambda)} g_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 (M.W.S., \text{ siehe oben}) &\cong \frac{f_{n-1}^*(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)}{g_n(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)} \int_0^x dtg_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
 (\text{siehe Gl. (A.139)}) &= \xi_{jn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda),
 \end{aligned}$$

d.h.

$$\tilde{J}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \int_0^x dtg_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) = \xi_{jn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda), \tag{E.45}$$

und

$$J_{nx}(z, \nu, \lambda) = C(n, \nu, \lambda) \tilde{J}_{nx}(z, \nu, \lambda) = C(n, \nu, \lambda) \xi_{jn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda). \tag{E.46}$$

Wie in der Gleichung (E.37) haben wir

$$\int_0^x dtg_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_n(t'+z, \nu, \lambda) = \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda). \tag{E.47}$$

Für die Funktion ξ_{jn} gilt

$$\begin{aligned}
\xi_{jn}(t, \nu, \lambda) &= \frac{f_{n-1}^*(t, \nu, \lambda)}{g_n(t, \nu, \lambda)} \\
&= \frac{[(1+a_{n-2+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-2-i\nu t})]^l}{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})]^{l+1}} \frac{[(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})]^{l+1}}{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})]^l} \\
&= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-2-i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})} \right]^l,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\xi_{jn}(t, \nu, \lambda) &= \frac{f_{n-1}^*(t, \nu, \lambda)}{g_n(t, \nu, \lambda)} \\
&= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-2-i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})} \right]^l.
\end{aligned} \tag{E.48}$$

Die Funktion K_{nx}

Wir schreiben $K_{nx}(z, \nu, \lambda)$ in der Form

$$\begin{aligned}
K_{nx}(z, \nu, \lambda) &= C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
&= C(n, \nu, \lambda) \tilde{K}_{nx}(z, \nu, \lambda),
\end{aligned} \tag{E.49}$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{nx}(z, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
&= \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' \frac{g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda)}{g_n(t'+z, \nu, \lambda)} g_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
(M.W.S.) \quad &\cong \frac{g_{n-1}^*(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)}{g_n(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda)} \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
&:= \xi_{kn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_n(t'+z, \nu, \lambda) \\
&= \xi_{kn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\tilde{K}_{nx}(z, \nu, \lambda) = \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) = \xi_{kn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda), \tag{E.50}$$

und

$$K_{nx}(z, \nu, \lambda) = C(n, \nu, \lambda) \tilde{K}_{nx}(z, \nu, \lambda) = C(n, \nu, \lambda) \xi_{kn}\left(\frac{x}{2}+z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda). \tag{E.51}$$

Für die Funktion ξ_{kn} gilt

$$\begin{aligned}
\xi_{kn}(t, \nu, \lambda) &= \frac{g_{n-1}^*(t, \nu, \lambda)}{g_n(t, \nu, \lambda)} \\
&= \frac{[(1+a_{n-2+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-2+i\nu t})]^l}{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})]^{l+1}} \frac{[(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})]^{l+1}}{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})]^l} \\
&= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu t})(1+a_{n+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda-i\nu t})(1+a_{n-2+i\nu t})}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu t})(1+a_{n-1-i\nu t})} \right]^l,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \xi_{kn}(t, \nu, \lambda) &= \frac{g_{n-1}^*(t, \nu, \lambda)}{g_n(t, \nu, \lambda)} \\
 &= \left[\frac{(1+a_{n+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n+i\nu}t)}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-1-i\nu}t)} \right]^{l+1} \left[\frac{(1+a_{n-2+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n-2+i\nu}t)}{(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-1-i\nu}t)} \right]^l.
 \end{aligned} \tag{E.52}$$

Die Funktionen $(I + K)_{nx}$ und $(H + J)_{nx}$

Wir setzen

$$\begin{aligned}
 (I + K)_{nx}(z, \nu, \lambda) &:= I_{nx}(z, \nu, \lambda) + K_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
 &= B(n, \nu, \lambda) \xi_{in}\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda) \\
 &\quad + C(n, \nu, \lambda) \xi_{kn}\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda),
 \end{aligned} \tag{E.53}$$

und

$$\begin{aligned}
 (H + J)_{nx}(z, \nu, \lambda) &:= H_{nx}(z, \nu, \lambda) + J_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
 &= B(n, \nu, \lambda) \xi_{hn}\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{F}_{nx}^2(z, \nu, \lambda) \\
 &\quad + C(n, \nu, \lambda) \xi_{jn}\left(\frac{x}{2} + z, \nu, \lambda\right) \frac{1}{2} \tilde{G}_{nx}^2(z, \nu, \lambda).
 \end{aligned} \tag{E.54}$$

E.2.1 Rechnungen zum Fall der Nullenergiezustände bei $\Lambda = 0$

Hier möchten wir zeigen, daß die Gleichung (2.11) ein guter Ansatz für die Lösung der Gleichung (2.10) ist. Wir bemerken, daß dann wenn $E = 0$ und $\Lambda = 0$ ist, auch $\lambda = \nu = 0$ sind. Dies kann man aus den Gleichungen (C.9) und (2.6) entnehmen. Wir werden für $n = 1$ zeigen, daß die Gleichung (2.10) die Relation (2.11) erfüllt, und werden schließlich die Rekurrenz für irgendein n abschätzen. Für $\lambda = \nu = 0$ ist $\varphi_n(y, 0, 0) = \varphi_n^*(y, 0, 0)$ und die Gleichung (2.10) wird also zu

$$\varphi_n(y, 0, 0) = \int_0^y dt \frac{(t+n-1)^{2l}}{(t+n)^{2(l+1)}} \varphi_{n-1}(t, 0, 0). \tag{E.55}$$

Für $n = 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y, 0, 0) &= \int_0^y dt \frac{t^{2l}}{(t+1)^{2(l+1)}} \underbrace{\varphi_0(y, 0, 0)}_{=1} \\
&= \int_0^y dt \frac{t^{2l}}{(t+1)^{2(l+1)}} \\
&= \int_0^y \frac{dt}{(t+1)^2} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{2l} \\
&= \int_0^y dt \left(\frac{t}{t+1}\right)^{2l} \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+1}\right) \\
&= \frac{1}{2l+1} \left[\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2l+1} \right]_0^y \\
&= \frac{1}{2l+1} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{2l+1} \\
&= \frac{1}{2l+1} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{2l} \left(\frac{y}{y+1}\right) \\
&= \frac{1}{1!(2l+1)_1} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{2l} \frac{y^1}{(y+1)_1}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß für $n-1$ gilt

$$\varphi_{n-1}(y, 0, 0) = \frac{1}{(n-1)!(2l+1)_{n-1}} \left(\frac{y}{y+n-1}\right)^{2l} \frac{y^{n-1}}{(y+1)_{n-1}},$$

dann haben wir für irgendein n

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(y, 0, 0) &= \frac{1}{(n-1)!(2l+1)_{n-1}} \int_0^y dt \frac{(t+n-1)^{2l}}{(t+n)^{2(l+1)}} \left(\frac{t}{t+n-1}\right)^{2l} \frac{t^{n-1}}{(t+1)_{n-1}} \\
 &= \frac{1}{(n-1)!(2l+1)_{n-1}} \int_0^y dt \frac{(t)^{2l}}{(t+n)^{2(l+1)}} \frac{t^{n-1}}{(t+1)_{n-1}} \\
 &= \frac{1}{(n-1)!(2l+1)_{n-1}} \int_0^y dt \frac{1}{(t+n)^2} \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l} \frac{t^{n-1}}{(t+1)_{n-1}} \\
 &= \frac{1}{n(n-1)!(2l+1)_{n-1}} \int_0^y dt \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+n}\right)\right)}_{=\frac{n}{(t+n)^2}} \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l} \frac{t^{n-1}}{(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_{n-1}} * \\
 &\quad \int_0^y dt \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+n}\right)\right) \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l} \left(\frac{t}{t+n}\right) \left(\frac{t+n}{t+1}\right) \left(\frac{t}{t+n}\right) \left(\frac{t+n}{t+2}\right) \dots \left(\frac{t}{t+n}\right) \left(\frac{t+n}{t+n-1}\right) \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_{n-1}} \int_0^y dt \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+n}\right)\right) \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l+n-1} \frac{(t+n)^{n-1}}{(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_{n-1}} \int_0^y dt \frac{1}{(2l+n)} \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l+n} \frac{(t+n)^{n-1}}{(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_{n-1} (2l+n)} \int_0^y dt \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l+n} \frac{(t+n)^{n-1}}{(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)} \\
 &\quad = \underbrace{(2l+1)_n}_{= (2l+1)_n} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_n} \int_0^y dt \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l+n} \frac{(t+n)^{n-1}}{(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_n} * \\
 &\quad \left\{ \left[\left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l+n} \frac{(t+n)^{n-1}}{(t+1)\dots(t+n-1)} \right]_0^y - \int_0^y dt \left(\frac{t}{t+n}\right)^{2l+n} \frac{d}{dt} \left(\frac{(t+n)^{n-1}}{(t+1)\dots(t+n-1)}\right) \right\} \\
 &\stackrel{\mathbb{R}}{=} \frac{1}{n!(2l+1)_n} \left\{ \left(\frac{y}{y+n}\right)^{2l+n} \frac{(y+n)^{n-1}}{(y+1)(y+2)\dots(y+n-1)} - o\left(\frac{y}{y+n}\right)^{2l+n+1} \right\} \\
 &\stackrel{\mathbb{R}}{=} \frac{1}{n!(2l+1)_n} \left(\frac{y}{y+n}\right)^{2l+n} \underbrace{\frac{(y+n)^n}{(y+1)(y+2)\dots(y+n)}}_{=(y+1)_n} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_n} \left(\frac{y}{y+n}\right)^{2l} \left(\frac{y}{y+n}\right)^n \frac{(y+n)^n}{(y+1)_n} \\
 &= \frac{1}{n!(2l+1)_n} \left(\frac{y}{y+n}\right)^{2l} \frac{y^n}{(y+1)_n}
 \end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt $\varphi_n(\infty, 0, 0)$ und setzen das Ergebnis in die Gleichung (2.13) ein. Man sieht, daß

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_n(y, 0, 0) = \frac{1}{n! (2l+1)_n} \quad (\text{E.56})$$

ist. Wenn wir diese Gleichung in die Gleichung (2.13) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} R'_{00}(\infty) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \varphi_n(\infty, 0, 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta_0)^n}{n! (2l+1)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\eta_0^n}{n! \underbrace{(2l+1)_n}_{= \frac{(2l+n)!}{(2l)!} = \frac{\Gamma(2l+n+1)}{(2l)!}}} \\ &= (2l)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2l+n+1)} \left(\frac{2\sqrt{\eta_0}}{2} \right)^{2(n+l)} \\ &= (2l)! J_{2l}(2\sqrt{\eta_0}) \\ &= 0 \\ \Leftrightarrow J_{2l}(2\sqrt{\eta_0}) &= 0, \end{aligned}$$

denn

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2(k+\frac{p}{2})}. \quad (\text{E.57})$$

Die Bessel-Funktion $J_p(x)$ hat im Unendlichen die folgende Form

$$J_p(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + o \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right). \quad (\text{E.58})$$

Für $J_p(x) = 0$ gilt daher asymptotisch

$$\begin{aligned} x - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathfrak{S} \\ \Leftrightarrow x &= \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + k \right) \pi \\ &= \left(\frac{p}{2} + \frac{3}{4} + k \right) \pi. \end{aligned}$$

Es sei $k := n_r - 1 = l_{max}$, dann haben wir $x = \left(\frac{p}{2} + n_r - \frac{1}{4} \right) \pi$. Wenn wir jetzt x durch $2\sqrt{\eta_0}$ und p durch $2l$ ersetzen, erhalten wir das erwartete Resultat d.h. $2\sqrt{\eta_0} = \left(l + n_r - \frac{1}{4} \right) \pi$. Wenn $n = n_r + l$ die Hauptquantenzahl ist, muß also $n_r = 1$ sein, da $l = l_{max} = n - 1$ sein soll. Daher haben wir also

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\eta_0} &= \left(l + n_r - \frac{1}{4} \right) \pi = {}^{n_r+l=n} \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \\ \Leftrightarrow \sqrt{\eta_0} &= \left(n - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \eta_0 &= \left(n - \frac{1}{4} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} \stackrel{Gl.(2.6)}{=} \frac{\hbar^2}{4\pi} \frac{2m}{\mu_0 \hbar^2}, \quad l = l_{max} = n - 1 \end{aligned}$$

Um die Gleichung (2.16) zu erhalten, setzen wir die $\varphi_{k(k=1,2,3)}(4-k, 0, 0)$ in die Gleichung (2.15) ein. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
 R'_{00}(4) &= \sum_{k=0}^3 (-\eta_0)^k \varphi_k(4-k, 0, 0) \\
 &= \varphi_0(4, 0, 0) - \eta_0 \varphi_1(3, 0, 0) + \eta_0^2 \varphi_2(2, 0, 0) - \eta_0^3 \varphi_3(1, 0, 0) \\
 \text{(s.A.2.5)} &= 1 - \frac{3}{4}\eta_0 + \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right) \eta_0^2 - \left(\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}\right) \eta_0^3 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wir können nun sagen

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}\right) \eta_0^3 &= \left\{\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}(2\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3})\right\} \eta_0^3 \\
 &= \left\{\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}(\ln\frac{9}{4} - \ln\frac{4}{3})\right\} \eta_0^3 \\
 &= \left\{\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}(\ln\frac{9}{4} + \ln\frac{4}{3})\right\} \eta_0^3 \\
 &= \left\{\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{9}{4}\frac{3}{4}\right)\right\} \eta_0^3 \\
 &= \left\{\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}\right\} \eta_0^3 \\
 \Rightarrow R'_{00}(4) &= 1 - \frac{3}{4}\eta_0 + \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right) \eta_0^2 - \left(\frac{1}{4} - \ln\frac{9}{8} - \frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}\right) \eta_0^3 = 0.
 \end{aligned}$$

E.2.2 Rechnungen zu (2.17)

Wir haben nach der Gleichung (1.63), d.h. nach

$$Re \left\{ \sigma'_f(\infty) \right\} = 0,$$

und nach der Gleichung (2.6) die Gleichung

$$R'_{\nu\lambda}(s) = R'_{\nu\lambda}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) := \sigma'_f(\mu). \quad (\text{E.59})$$

Wenn wir den Limes im Unendlichen auf den beiden Seiten der obigen Gleichung nehmen, erhalten wir

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R'_{\nu\lambda}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) = R'_{\nu\lambda}(\infty) = \sigma'_f(\infty) \stackrel{(1.63)}{=} 0. \quad (\text{E.60})$$

Wenn die rechte Seite der Gleichung (2.11) *Null* ist, muß ihre linke Seite auch *Null* sein. Daraus folgt

$$R'_{\nu\lambda}(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \varphi_n(\infty, \nu, \lambda) = 0.$$

Man erhält das mittlere Glied der obigen Gleichung aus der Gleichung (2.9). Für $s \rightarrow \infty$ ist $\theta(s-n) = 1$ und der Limes im Unendlichen der beiden Seiten der Gleichung (2.9) ergibt sich zu

$$\lim_{s \rightarrow \infty} R'_{\nu\lambda}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \theta(s-n) \varphi_n(s-n, \nu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta_0)^n \varphi_n(\infty, \nu, \lambda) = 0. \quad (\text{E.61})$$

E.2.3 Rechnungen zu (2.18)

Wir gehen von der Gleichung (2.8) aus, und machen $s \rightarrow n$ von unten her und $[s] \rightarrow n-1$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} R'_{\nu\lambda}(s) &= \sum_{n=0}^{[s]} (-\eta_0)^n \varphi_n(s-n, \nu, \lambda) \\ \Rightarrow R'_{\nu\lambda}(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-\eta_0)^k \varphi_k(n-k, \nu, \lambda) \end{aligned}$$

In dem bei [12] behandelten Fall $\Lambda = 0$ konvergiert diese Reihe besser als (2.17). Im vorliegenden Fall ist dies nicht ohne weiteres zu sehen, erweist sich aber numerisch trotzdem als zutreffend.

E.2.4 Rechnungen zu (2.21) und (2.22)

Aus der Gleichung (2.20), d.h. aus

$$\varphi_n(y, \nu, \lambda) = \frac{\Phi_n(z, \nu, \lambda)}{n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}$$

folgt

$$\Phi_n(z, \nu, \lambda) = n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l \varphi_n(y, \nu, \lambda)$$

Wenn wir die Gleichung (2.10) auf die Funktionen Φ_n umrechnen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_n(z, \nu, \lambda) &= n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l \frac{1}{2} \int_0^{y(z)} dt \left\{ \frac{[(t+n-1+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}(t, \nu, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(t+n-1+\lambda+i\nu)(t+n-1-i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \\ (Gl.(2.19)) &= n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l \frac{1}{2} \int_0^{\frac{z}{1-\alpha z}} dt \left\{ \frac{[(t+n-1+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}(t, \nu, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(t+n-1+\lambda+i\nu)(t+n-1-i\nu)]^l}{[(t+n+\lambda-i\nu)(t+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \\ \left(t \rightarrow \frac{t}{1-\alpha t}\right) &= n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l \frac{1}{2} \int_0^z \frac{dt}{(1-\alpha t)^2} \left\{ \frac{[(\frac{t}{1-\alpha t}+n-1+\lambda-i\nu)(\frac{t}{1-\alpha t}+n+i\nu)]^l}{[(\frac{t}{1-\alpha t}+n+\lambda-i\nu)(\frac{t}{1-\alpha t}+n+i\nu)]^{l+1}} \right. \\ &\quad \left. \varphi_{n-1}\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) + \frac{[(\frac{t}{1-\alpha t}+n-1+\lambda+i\nu)(\frac{t}{1-\alpha t}+n-1-i\nu)]^l}{[(\frac{t}{1-\alpha t}+n+\lambda-i\nu)(\frac{t}{1-\alpha t}+n+i\nu)]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) \right\} \\ &= n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l \frac{1}{2} \int_0^z \frac{dt}{(1-\alpha t)^2} \left\{ \frac{[(\frac{1}{1-\alpha t})^2 \{t+(n-1+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n-1+i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[(\frac{1}{1-\alpha t})^2 \{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \varphi_{n-1}\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(\frac{1}{1-\alpha t})^2 \{t+(n-1+\lambda+i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n-1-i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[(\frac{1}{1-\alpha t})^2 \{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) \right\} \\ &= n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l \frac{1}{2} \int_0^z dt \left\{ \frac{[\{t+(n-1+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n-1+i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[\{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \right. \\ &\quad \left. \varphi_{n-1}\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) + \frac{[\{t+(n-1+\lambda+i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n-1-i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[\{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\} \{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \varphi_{n-1}^*\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben nach den Gleichungen (2.19) und (2.20) folgendes:

$$\begin{aligned}\varphi_{n-1}\left(\frac{t}{1-\alpha}, \nu, \lambda\right) &= \frac{\Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda)}{(n-1)!(1+\lambda)_{n-1}[(n-1+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)]^l} \\ \varphi_{n-1}^*\left(\frac{t}{1-\alpha t}, \nu, \lambda\right) &= \frac{\Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda)}{(n-1)!(1+\lambda)_{n-1}[(n-1+\lambda+i\nu)(n-1-i\nu)]^l}\end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned}\Phi_n(z, \nu, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^z dt \left\{ \frac{n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}{(n-1)!(1+\lambda)_{n-1} [(n-1+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)]^l} * \right. \\ &\quad \frac{[\{t+(n-1+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n-1+i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[\{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) \\ &\quad + \frac{n!(1+\lambda)_n [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}{(n-1)!(1+\lambda)_{n-1} [(n-1+\lambda+i\nu)(n-1-i\nu)]^l} * \\ &\quad \left. \frac{[\{t+(n-1+\lambda+i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n-1-i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[\{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z dt \left\{ \frac{n(n+\lambda)[(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}{[(n-1+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)]^l} * \right. \\ &\quad \frac{[\{t+(n-1+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n-1+i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[\{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) \\ &\quad + \frac{n(n+\lambda)[(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}{[(n-1+\lambda+i\nu)(n-1-i\nu)]^l} * \\ &\quad \left. \frac{[\{t+(n-1+\lambda+i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n-1-i\nu)(1-\alpha t)\}]^l}{[\{t+(n+\lambda-i\nu)(1-\alpha t)\}\{t+(n+i\nu)(1-\alpha t)\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z dt \left\{ \frac{n(n+\lambda)[(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}{[(n-1+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)]^l} * \right. \\ &\quad \frac{[\{n-1+\lambda-i\nu+[1-\alpha(n-1+\lambda-i\nu)]t\}\{n-1+i\nu+[1-\alpha(n-1+i\nu)]t\}]^l}{[\{n+\lambda-i\nu+[1-\alpha(n+\lambda-i\nu)]t\}\{n+i\nu+[1-\alpha(n+i\nu)]t\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) \\ &\quad + \frac{n(n+\lambda)[(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l}{[(n-1+\lambda+i\nu)(n-1-i\nu)]^l} * \\ &\quad \left. \frac{[\{n-1+\lambda+i\nu+[1-\alpha(n-1+\lambda+i\nu)]t\}\{n-1-i\nu+[1-\alpha(n-1-i\nu)]t\}]^l}{[\{n+\lambda-i\nu+[1-\alpha(n+\lambda-i\nu)]t\}\{n+i\nu+[1-\alpha(n+i\nu)]t\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z dt \left\{ \frac{n(n+\lambda)[(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l [(n-1+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)]^l}{[(n-1+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)]^l [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^{l+1}} * \right. \\ &\quad \frac{[\{1+(\frac{1}{n-1+\lambda-i\nu}-\alpha)t\}\{1+(\frac{1}{n-1+i\nu}-\alpha)t\}]^l}{[\{1+(\frac{1}{n+\lambda-i\nu}-\alpha)t\}\{1+(\frac{1}{n+i\nu}-\alpha)t\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) \\ &\quad + \frac{n(n+\lambda)[(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^l [(n-1+\lambda+i\nu)(n-1-i\nu)]^l}{[(n-1+\lambda+i\nu)(n-1-i\nu)]^l [(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)]^{l+1}} * \\ &\quad \left. \frac{[\{1+(\frac{1}{n-1+\lambda+i\nu}-\alpha)t\}\{1+(\frac{1}{n-1-i\nu}-\alpha)t\}]^l}{[\{1+(\frac{1}{n+\lambda-i\nu}-\alpha)t\}\{1+(\frac{1}{n+i\nu}-\alpha)t\}]^{l+1}} \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Gl. (2.23)) &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \int_0^z dt \left\{ \underbrace{\frac{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n-1+i\nu}t)]^l}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n+i\nu}t)]^{l+1}}}_{=f_n(t,\nu,\lambda)} \Phi_{n-1}(t,\nu,\lambda) \right. \\
&\quad \left. + \frac{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-1-i\nu}t)]^l}{[(1+a_{n+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n+i\nu}t)]^{l+1}} \Phi_{n-1}^*(t,\nu,\lambda) \right\} \\
&= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+\lambda-i\nu)(n+i\nu)} \int_0^z dt \{ f_n(t,\nu,\lambda) \Phi_{n-1}(t,\nu,\lambda) + g_n(t,\nu,\lambda) \Phi_{n-1}^*(t,\nu,\lambda) \}.
\end{aligned}$$

E.2.5 Rechnungen zu (2.24)

Wenn wir in der Gleichung (2.22) z durch $z+x$ ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z+x, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} * \\
&\quad \int_0^{z+x} dt \{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \} \\
(\forall z \in]0, z+x[) &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} * \\
&\quad \int_0^z dt \{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \} \\
&\quad + \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} * \\
&\quad \int_z^{z+x} dt \{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \} \\
&= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} * \\
&\quad \int_0^z dt \{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \} \\
&\quad + \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} * \\
&\quad \int_0^x dt \{ f_n(t+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t+z, \nu, \lambda) + g_n(t+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t+z, \nu, \lambda) \} \\
&= \Phi_n(z, \nu, \lambda) \\
&\quad + \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} * \\
&\quad \int_0^x dt \{ f_n(t+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t+z, \nu, \lambda) + g_n(t+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t+z, \nu, \lambda) \},
\end{aligned}$$

hierbei haben wir die Substitution $t' = t - z$ benutzt, indem wir folgendermaßen fortfahren sind.

Es sei nun

$$I(n, z, x, \nu, \lambda) = \int_z^{z+x} dt \{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \} .$$

Mit der Substitution $t' = t - z$ haben wir:

$$\begin{aligned} t' &= t - z \quad (z = cte) \\ \Rightarrow dt' &= dt \\ \Rightarrow t'(z) &= 0 \\ \Rightarrow t'(z+x) &= x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I(n, z, x, \nu, \lambda) &= \int_0^x dt' \{ f_n(t' + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t' + z, \nu, \lambda) \\ &\quad + g_n(t' + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t' + z, \nu, \lambda) \} \\ (OBdA \ t' = t) &= \int_0^x dt \{ f_n(t + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t + z, \nu, \lambda) \\ &\quad + g_n(t + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t + z, \nu, \lambda) \} \end{aligned}$$

E.2.6 Rechnungen zu (2.25) – (2.27)

Analog zur Gleichung (2.24) haben wir

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}(t+z, \nu, \lambda) &= \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) + \frac{(n-1)(n-1+\lambda)}{(n-1+i\nu)(n-1+\lambda-i\nu)} * \\ &\quad \int_0^t dt' \{ f_{n-1}(t' + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t' + z, \nu, \lambda) \\ &\quad + g_{n-1}(t' + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t' + z, \nu, \lambda) \}, \end{aligned} \quad (\text{E.62})$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}^*(t+z, \nu, \lambda) &= \frac{(n-1)(n-1+\lambda)}{(n-1-i\nu)(n-1+\lambda+i\nu)} \int_0^t dt' \{ f_{n-1}^*(t' + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t' + z, \nu, \lambda) \\ &\quad + g_{n-1}^*(t' + z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t' + z, \nu, \lambda) \}, \end{aligned} \quad (\text{E.63})$$

mit

$$\begin{aligned} f_n^*(t, \nu, \lambda) &= \frac{[(1+a_{n-1+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-1-i\nu}t)]^t}{[(1+a_{n+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-i\nu}t)]^{t+1}} \\ g_n^*(t, \nu, \lambda) &= \frac{[(1+a_{n-1+\lambda-i\nu}t)(1+a_{n-1+i\nu}t)]^t}{[(1+a_{n+\lambda+i\nu}t)(1+a_{n-i\nu}t)]^{t+1}}. \end{aligned} \quad (\text{E.64})$$

Die Gleichung (2.24) wird also zu

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z+x, \nu, \lambda) &= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \frac{n(n+\lambda)}{(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \frac{1}{2} \int_0^x dt \{f_n(t+z, \nu, \lambda) [\Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) + \\
&\quad \frac{(n-1)(n-1+\lambda)}{(n-1+i\nu)(n-1+\lambda-i\nu)} \frac{1}{2} \int_0^t dt' (f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \\
&\quad + g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda))] \\
&\quad + g_n(t+z, \nu, \lambda) \left[\Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) + \frac{(n-1)(n-1+\lambda)}{(n-1-i\nu)(n-1+\lambda+i\nu)} * \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \int_0^t dt' (f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) + \right. \\
&\quad \left. g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda)) \right] \} \\
&= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \frac{n(n+\lambda)}{(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \frac{1}{2} \int_0^x dt \{ \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) f_n(t+z, \nu, \lambda) + \\
&\quad \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) g_n(t+z, \nu, \lambda) \} \\
&\quad + \frac{n(n+\lambda)(n-1)(n-1+\lambda)}{4(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)(n-1+\lambda-i\nu)} \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) * \\
&\quad \left\{ \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) + \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \right\} \\
&\quad + \frac{n(n+\lambda)(n-1)(n-1+\lambda)}{4(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)(n-1-i\nu)(n-1+\lambda+i\nu)} \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) * \\
&\quad \left\{ \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) + \right. \\
&\quad \left. \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \right\} \\
&= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + A(n, \nu, \lambda) \{ \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \\
&\quad + \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \} \\
&\quad + B(n, \nu, \lambda) \left\{ \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \right\} \\
&\quad + C(n, \nu, \lambda) \left\{ \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \right\}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A(n, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \\
 B(n, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)(n-1)(n-1+\lambda)}{4(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)(n-1+i\nu)(n-1-i\nu)} \\
 C(n, \nu, \lambda) &= \frac{n(n+\lambda)(n-1)(n-1+\lambda)}{4(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)(n-1-i\nu)(n-1+\lambda+i\nu)}.
 \end{aligned}$$

E.2.7 Rechnungen zu (2.29)

Die Gleichungen (2.28) ergeben mit den Näherungen (2.30)

$$\begin{aligned}
 & B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \\
 & \quad = \frac{1}{2} [\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)] I_{nx}(z, \nu, \lambda) + \epsilon_1(x) \\
 & B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
 & \quad = \frac{1}{2} [\Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda)] H_{nx}(z, \nu, \lambda) + \epsilon_2(x) \\
 & C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
 & \quad = \frac{1}{2} [\Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda)] J_{nx}(z, \nu, \lambda) + \epsilon_3(x) \\
 & C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \\
 & \quad = \frac{1}{2} [\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)] K_{nx}(z, \nu, \lambda) + \epsilon_4(x).
 \end{aligned} \tag{E.65}$$

Daher wird die Gleichung (2.27) also

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z+x, \nu, \lambda) &= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) F_{nx}(z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) G_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ [\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)] \underbrace{[I_{nx}(z, \nu, \lambda) + K_{nx}(z, \nu, \lambda)]}_{:= (I+K)_{nx}(z, \nu, \lambda)} \right. \\
&\quad \left. + [\Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda)] \underbrace{[H_{nx}(z, \nu, \lambda) + J_{nx}(z, \nu, \lambda)]}_{:= (H+J)_{nx}(z, \nu, \lambda)} \right\} \\
&\quad + \underbrace{\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \epsilon_3(x) + \epsilon_4(x)}_{:= \epsilon(x)} \\
&= \Phi_n(z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}(z, \nu, \lambda) F_{nx}(z, \nu, \lambda) + \Phi_{n-1}^*(z, \nu, \lambda) G_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ [\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)] (I+K)_{nx}(z, \nu, \lambda) \\
&\quad + [\Phi_{n-2}^*(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}^*(z, \nu, \lambda)] (H+J)_{nx}(z, \nu, \lambda) \} \\
&\quad + \epsilon(x).
\end{aligned}$$

E.2.8 Rechnungen zu (2.33)

Man kann für alle Reelle ν und λ zeigen, daß die Funktion $|\Phi_n(z, \nu, \lambda)|$ untere Grenze einer mit z monoton wachsenden Funktion $R_n(z, \nu, \lambda)$ ist, d.h.

$$|\Phi_n(z, \nu, \lambda)| \leq R_n(z, \nu, \lambda), \quad \forall z \in \mathfrak{R}. \quad (\text{E.66})$$

In der Tat haben wir:

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z, \nu, \lambda) &= A(n, \nu, \lambda) \int_0^z dt \{ f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda) \} \\
\Rightarrow |\Phi_n(z, \nu, \lambda)| &\leq \underbrace{|A(n, \nu, \lambda)| \int_0^z dt \{ |f_n(t, \nu, \lambda)| + |g_n(t, \nu, \lambda)| \} |\Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda)|}_{:= R_n(z, \nu, \lambda)} \\
\Rightarrow |\Phi_n(z, \nu, \lambda)| &\leq R_n(z, \nu, \lambda)
\end{aligned}$$

E.2.9 Rechnungen zu (2.34)

Wir setzen in den Gleichungen (2.28) folgendes ein:

$$\begin{aligned}
T_1(z+x, z, \nu, \lambda) &= B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \\
T_2(z+x, z, \nu, \lambda) &= B(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt f_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda) \\
T_3(z+x, z, \nu, \lambda) &= C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda)
\end{aligned}$$

$$T_4(z+x, z, \nu, \lambda) = C(n, \nu, \lambda) \int_0^x dt g_n(t+z, \nu, \lambda) \int_0^t dt' f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda) \Phi_{n-2}^*(t'+z, \nu, \lambda)$$

Wir haben also mit Hilfe der Gleichungen (2.30) :

$$\epsilon_1(x) = T_1(z+x, z, \nu, \lambda) - \left[\frac{\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)}{2} \right] I_{nx}(z, \nu, \lambda)$$

$$\Rightarrow |\epsilon_1(x)| \leq |T_1(z+x, z, \nu, \lambda)| + \frac{1}{2} [|\Phi_{n-2}(z+x, \nu, \lambda)| + |\Phi_{n-2}(z, \nu, \lambda)|] \underbrace{|I_{nx}(z, \nu, \lambda)|}_{\leq S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda)}$$

mit

$$S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda) = |B(n, \nu, \lambda)| \int_0^x dt |f_n(t+z, \nu, \lambda)| \int_0^t dt' |f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)|$$

und

$$\begin{aligned} |T_1(z+x, z, \nu, \lambda)| &\leq |B(n, \nu, \lambda)| \int_0^x dt |f_n(t+z, \nu, \lambda)| \int_0^t dt' |f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)| * \\ &\quad |\Phi_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda)| \\ &\leq |B(n, \nu, \lambda)| \int_0^x dt |f_n(t+z, \nu, \lambda)| \int_0^t dt' |f_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)| * \\ &\quad R_{n-2}(t'+z, \nu, \lambda) \\ &\leq R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda) \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} |\epsilon_1(x)| &\leq R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda) + \frac{1}{2} \left[R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) + \underbrace{R_{n-2}(z, \nu, \lambda)}_{\leq R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda)} \right] \\ &\quad S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda) \\ &\leq 2R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) \underbrace{S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda)}_{\rightarrow 0 \text{ fuer } x \rightarrow 0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\epsilon_1(x)| \rightarrow 0 \text{ fuer } x \rightarrow 0$$

Dieselben Rechnungen ergeben für $|\epsilon_2(x)|$, $|\epsilon_3(x)|$, $|\epsilon_4(x)|$:

$$|\epsilon_2(x)| \leq 2R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) S_n^2(z+x, z, \nu, \lambda)$$

$$|\epsilon_3(x)| \leq 2R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) S_n^3(z+x, z, \nu, \lambda)$$

$$|\epsilon_4(x)| \leq 2R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) S_n^4(z+x, z, \nu, \lambda)$$

mit

$$S_n^2(z+x, z, \nu, \lambda) = |B(n, \nu, \lambda)| \int_0^x dt |f_n(t+z, \nu, \lambda)| \int_0^t dt' |g_{n-1}(t'+z, \nu, \lambda)|$$

$$S_n^3(z+x, z, \nu, \lambda) = |C(n, \nu, \lambda)| \int_0^x dt |g_n(t+z, \nu, \lambda)| \int_0^t dt' |g_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda)|$$

$$S_n^4(z+x, z, \nu, \lambda) = |C(n, \nu, \lambda)| \int_0^x dt |g_n(t+z, \nu, \lambda)| \int_0^t dt' |f_{n-1}^*(t'+z, \nu, \lambda)|.$$

Es gilt wie bei $S_n^1(z+x, z, \nu, \lambda)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_n^i(z+x, z, \nu, \lambda) \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Da

$$\epsilon(x) = \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \epsilon_3(x) + \epsilon_4(x)$$

ist, haben wir

$$|\epsilon(x)| \leq R_{n-2}(z+x, \nu, \lambda) S_n(z+x, z, \nu, \lambda)$$

mit

$$S_n(z+x, z, \nu, \lambda) = \sum_{i=1}^4 S_n^i(z+x, z, \nu, \lambda).$$

$|\epsilon(x)|$ kann also beliebig klein gemacht werden.

Für das rekursive Verfahren (2.36) ist der Anfangswert $\Phi_0(z, \nu, \lambda) = 1$ zu setzen, und für alle natürlichen ganzen Zahlen n muss $\Phi_{-n}(z, \nu, \lambda) = 0$ sein. Für $z = 0$ ist $\Phi_n(0, \nu, \lambda) = 0$, da

$$\begin{aligned} \Phi_n(0, \nu, \lambda) &= \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_n(z, \nu, \lambda) \\ &= \frac{n(n+\lambda)}{2(n+i\nu)(n+\lambda-i\nu)} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z dt \{f_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}(t, \nu, \lambda) + g_n(t, \nu, \lambda) \Phi_{n-1}^*(t, \nu, \lambda)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z dt \dots = 0. \quad (\text{E.67})$$

E.2.10 Rechnungen zu (2.38)

Da der maximale Wert den eine Drehimpulsquantenzahl annehmen darf $l_{max} = n-1$ ist, erhalten wir aus der Gleichung (2.18)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R'_{\nu\lambda}(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-\eta_0)^k \varphi_k(n-k, \nu, \lambda) \\ (n = 1 + n_{max}) &= \sum_{k=0}^{n_{max}} (-\eta_0)^k \varphi_k(1 + n_{max} - k, \nu, \lambda) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Anhang F

Laplace-Transformation und Volterra-Integralgleichung

F.1 Überblick über die Laplace-Transformation (siehe [3], [6] und [15])

F.1.1 Grunddefinitionen

Unter einer Funktionalabbildung versteht man eine Vorschrift, durch welche einer Funktion $f(t)$ ((Objektfunktion oder Originalfunktion) eine Bildfunktion $\varphi(p)$ eindeutig zugeordnet wird. Wenn eine eindeutige Umkehrung (Inverse) $\varphi \rightarrow f$ dieser Abbildung vorliegt, nennt man die Funktionalabbildung eineindeutig. Wir schreiben also

$$L\{f(t)\} = \varphi(p)$$

$$L^{-1}\{\varphi(p)\} = f(t)$$

und somit ist

$$f(t) \rightleftharpoons \varphi(p)$$

F.1.2 Die Grundformel

Läßt sich zu einer gegebenen Funktion $f(t)$ mit geeigneten Eigenschaften,

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \varphi(p) \tag{F.1}$$

bilden, so nennt man $\varphi(p)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$. Sie hat lineare Eigenschaften. Es soll hier nur $t \geq 0$ interessieren und für alle $t < 0$, $f(t) = 0$ angenommen werden und t soll reell sein. p hingegen soll komplex werden können, d.h. $p = \sigma + iw$. Für unsere Zwecke genügt es schon, daß (F.1) in einem Teil der komplexen Ebene $p = \sigma + iw$, nämlich für hinreichend große $Re(p) = \sigma$ konvergiert.

F.1.3 Die Inversionsformel $f(t) = L^{-1}\{\varphi(p)\}$

Die Inverse (Umkehrung) der Laplace-Transformation(LT) ist der zunächst schwerverständlich anmutende Ausdruck

$$f(t) = L^{-1}\{\varphi(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint dp \varphi(p) e^{pt} , \tag{F.2}$$

wobei der geschlossene Integrationsweg in der komplexen Zahlenebene um sämtliche Polstellen zu führen ist. Eine andere Form der Inversionsformel ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \varphi(p) e^{pt}, \quad (\text{F.3})$$

diese erscheint schwer auswertbar. Doch öffnen sich hier überraschende Auswertungsmöglichkeiten. Die für uns in Betracht kommenden Integranden $I(p) = \varphi(p) e^{pt}$ sind analytische Funktionen im Sinne der komplexen Analysis.

F.1.4 Die Klasse K_γ zulässiger Funktionen

γ sei eine reelle Zahl. Definitionsgemäß besteht K_γ aus allen stetigen Funktionen $f: [0, \infty] \rightarrow \wp$, die der (schwachen) Wachstumsbeschränkung

$$|f(t)| \leq \text{const.} * e^{pt}$$

für alle $t \geq 0$ genügen.

F.1.5 Existenzsatz

$H_\gamma := \{p \in \wp : \text{Re}(p) > \gamma\}$ sei ein Halbraum der komplexen Zahlenebene. Für $f \in K_\gamma$ existiert die Laplace-Transformierte $F = L\{f(t)\}$ von f , diese ist auf dem Halbraum H_γ holomorph, d.h. beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Beispielsweise gilt

$$\frac{d}{dp} F(p) = \int_0^\infty dt (-tf(t)) e^{-pt} \quad (\text{F.4})$$

für alle $p \in H_\gamma$.

F.1.6 Eindeutigkeitssatz

Stimmen für zwei Funktionen $f, g \in K_\gamma$ die Laplace-Transformierten auf H_γ überein, dann ist $f = g$.

F.1.7 Faltung

Mit R bezeichnen wir die Gesamtheit aller stetigen Funktionen $f: [0, \infty[\rightarrow \wp$. Für $f, g \in R$ definieren wir die Faltung $f * g \in R$ durch

$$(f * g)(t) := \int_0^t d\tau f(\tau) g(t - \tau) \quad (\text{F.5})$$

für alle $t \geq 0$. Für alle $f, g, h \in R$ gilt

$$\begin{array}{lll} i) & f * g & = g * f \quad (\text{Kommutativitaet}) \\ ii) & f * (g * h) & = (f * g) * h \quad (\text{Assoziativitaet}) \\ iii) & f * (g + h) & = (f * g) + (f * h) \quad (\text{Distributivitaet}) \\ iv) & \text{Aus } f * g & = 0 \quad \text{folgt } f = 0 \text{ oder } g = 0 \end{array}$$

F.1.8 Die Grundregeln

Regel 1: (Exponentialfunktion)

$$L\left\{\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, p \in H_\sigma \quad (\text{F.6})$$

Dabei ist α eine beliebige komplexe Zahl mit dem Realteil σ .

Regel 2:(Linearität)

Eine Funktionalabbildung heißt linear, wenn sie folgende Eigenschaften hat

$$\begin{aligned} i) \quad L\{\sum f_i(t)\} &= \sum L\{f_i(t)\} \\ ii) \quad L\{cf(t)\} &= cL\{f(t)\}; \quad c = const., \end{aligned} \tag{F.7}$$

d.h.

$$L\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = c_1L\{f_1(t)\} + c_2L\{f_2(t)\} .$$

Regel 3:(Differentiation)

Die Funktion $f \in K_\sigma$ sei vom Typ φ^n , $n \geq 1$. Wir setzen $F := L\{f\}$. Dann gilt für alle $p \in H_\sigma$:

$$L\{f^{(n)}\}(p) := p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \tag{F.8}$$

Regel 4:(Faltungsregel)

Für $f, g \in K_\sigma$ gilt

$$L\{f * g\} = L\{f\}L\{g\} \tag{F.9}$$

F.1.9 Weitere Rechenregeln

i) Verschiebungssatz

$$L\{f(t-b)\} = e^{-bp}L\{f(t)\} \text{ fuer } b \in \Re \tag{F.10}$$

ii) Dämpfungssatz

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\} = F(p+\alpha) \text{ fuer } \alpha \in \varphi \tag{F.11}$$

iii) Ähnlichkeitssatz

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \text{ fuer } a > 0 \tag{F.12}$$

iv) Multiplikationssatz

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p) \text{ fuer } n = 1, 2, \dots \tag{F.13}$$

v) Rücktransformation

Ist $f \in K_\gamma$, dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau F(\sigma + i\tau) e^{(\sigma+i\tau)t} \text{ fuer alle } t \geq 0, \tag{F.14}$$

wobei σ irgendeine feste Zahl ist, mit $\sigma > \gamma$ und F die Laplace-Transformierte von f bezeichnet.

F.1.10 Anwendungen auf Differentialgleichungen

Universelle Methode

Die Laplace-Transformation stellt ein universelles Hilfsmittel dar, um gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Systeme solcher Gleichungen elegant zu lösen. Derartige Gleichungen treten zum Beispiel häufig in der Regelungstechnik auf. Man benutzt die folgenden Lösungsschritte

- i) Transformation der gegebenen Differentialgleichung (D) in eine algebraische Gleichung (A) mit Hilfe der Linearitäts- und Differentiationsregel (Regeln 2 und 3)
- ii) Die Gleichung (A) ist eine lineare Gleichung oder ein lineares Gleichungssystem und läßt sich in einfacher Weise lösen. Diese Lösung ist eine gebrochene rationale Funktion und wird in Partialbrüche zerlegt.
- iii) Diese Partialbrüche werden mit Hilfe der Regel 1 (Exponentialfunktion) zurücktransformiert.
- iv) Inhomogene Terme der Differentialgleichung ergeben Produktterme im Bildraum, die mit Hilfe der Faltungsregel zurücktransformiert werden (Regel 4).

Um die Partialbruchzerlegung zu erhalten, muß man die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen, die bei der Rücktransformation den Frequenzen der Eigenschwingungen des Systems entsprechen.

F.2 Überblick über die Integralgleichung vom Typ Volterra (siehe [4] und [5])

Ein System von Integralgleichungen der Form

$$y_i(x) = b_i + \int_a^x f_i(\xi, y_1(\xi), y_2(\xi), \dots, y_n(\xi)) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{F.15})$$

aus denen die unbekanntenen Funktionen $y_i(x)$ zu bestimmen sind, ist vom Volterraschen Typ, weil die obere Grenze der Integrale variabel ist. Die Funktionen $y_i(x)$ kommen auch im Integranden vor.

Man löst diese Integralgleichungen durch sukzessive Approximationen, indem man zunächst

$$y_i^0(x) = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{F.16})$$

setzt. Die folgenden Approximationen $y_i^{\nu+1}(x)$ werden jeweils aus der vorhergehenden nach den Formeln

$$y_i^{\nu+1}(x) = b_i + \int_a^x f_i(\xi, y_1^\nu(\xi), y_2^\nu(\xi), \dots, y_n^\nu(\xi)) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n; \nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{F.17})$$

berechnet.

Anhang G

Natürliche Einheiten

In der Teilchenphysik ist es bequemer ein Einheitssystem als Grundlage zu nehmen, in dem die natürlichen Einheiten (siehe [1, 2], [7-10])

$$\hbar = c = 1 , \quad (\text{G.1})$$

gesetzt sind. Das vermeidet, daß die Faktoren c und \hbar durch die Rechnungen mitgeschleppt werden. Nur am Ende der Rechnungen ist es notwendig, die Resultate in das Internationale Einheitssystem(S.I.) zu übersetzen. Im folgenden werden die Konsequenzen dieser Setzung erklärt.

G.1 $c = 1$

In konventionellen MKS Einheiten hat c den Wert

$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1} . \quad (\text{G.2})$$

Wenn wir $c = 1$ setzen, deuten wir an, daß unsere Längen- und Zeiteinheiten numerisch gleich sind, da die Geschwindigkeit die Dimension

$$[c] = [L][T]^{-1} \quad (\text{G.3})$$

hat. In diesem Sinne sind Länge und Zeit äquivalente Dimensionen:

$$[L] = [T] \quad (\text{G.4})$$

In ähnlicher Weise kann man aus der Energie-Impuls-Relation der speziellen Relativitätstheorie ersehen

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 , \quad (\text{G.5})$$

daß die Setzung von $c = 1$ bedeutet, daß Energie, Masse und Impuls äquivalente Dimensionen sind. Man nimmt üblicherweise für die Masse und die Energie eine Einheit von $\frac{MeV}{c^2}$ oder $\frac{GeV}{c^2}$, für den Impuls eine von $\frac{MeV}{c}$ oder $\frac{GeV}{c}$. Sie werden alle MeV oder GeV , wenn $c = 1$ gesetzt wird.

G.1.1 $\hbar = 1$

Der numerische Wert der Planckschen Konstante ist

$$\hbar \simeq 6.6 \times 10^{-22} \text{MeV s} \quad (\text{G.6})$$

und \hbar ist eine Wirkung, die die Dimension Energie mal Zeit hat, so daß

$$[\hbar] = [M][L]^2 [T]^{-1} . \quad (\text{G.7})$$

Wenn wir $\hbar = 1$ setzen, dann setzen sich $[M]$, $[L]$ und $[T]$ in Beziehung. Da $[L]$ und $[T]$ beim ersten Setzen von $c = 1$ äquivalent sind, können wir $[M]$ als die einzig unabhängige Dimension unserer natürlichen Einheiten wählen:

$$[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1} \quad (\text{G.8})$$

Eine gut zu merkende Beziehung kann aus den Gleichungen (G.2) und (G.6) hergeleitet werden, nämlich

$$\hbar c \simeq 200 \text{ MeV fm} \quad (\text{G.9})$$

wobei der "Fermi" oder Femtometer, fm, definiert ist durch

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} .$$

Daher haben wir in den natürlichen Einheiten die Beziehung

$$1 \text{ fm} \simeq \frac{1}{200 \text{ MeV}} = 5 (\text{GeV})^{-1} . \quad (\text{G.10})$$

Wenn man die Massen, die Impulse und die Energien in GeV ausdrückt, erhält man aus der Gleichung (G.10) (genauer gesagt aus der Beziehung $\hbar c = 197.328 \text{ MeV fm}$) ein sehr nützliches Resultat:

$$\left(\frac{1}{1 \text{ GeV}}\right)^2 = 1 (\text{GeV})^{-2} = 0.38939 \text{ mb} , \quad (\text{G.11})$$

wobei ein Millibarn, mb, durch

$$1 \text{ mb} = 10^{-31} \text{ m}^2 .$$

definiert ist.

G.1.2 Zur Erinnerung

Hier möchten wir einige Umrechnungen in Erinnerung rufen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ KeV} &= 10^3 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-16} \text{ J} \\ 1 \text{ MeV} &= 10^6 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J} \\ 1 \text{ GeV} &= 10^9 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-10} \text{ J} . \end{aligned}$$

Anhang H

Anmerkung zum Rechenprogramm

Die Auswertung der gebundenen Energiezustände erfolgte mit dem folgenden c^{++} – Programm. Die übrigen Graphen wurden ausgewertet, indem dieses Programm leicht abgewandelt wurde. Die Graphiken wurden von dem Graphikprogramm Gnuplot erstellt.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<iostream.h>
#include<complex.h>

//c=sqrt(mb*1Gev)/mu_0
//al=alpha
//e=z-Schrittweite
//e*kmax=grösster z- Wert
//eta=Kopplungsstärke
const int Nmax=40;
const int kmax=1000;
const double e=1.0/kmax;
const double c=sqrt(4.5)/(0.6);
const double al=1;
const double eta=10.0;
////////////////////////////////////

const double _complex i=double _complex(0,1);

// Energie E=E0 und/oder Drehimpuls l=l0 fest vorgegeben

double l0=0;

////////////////////////////////////
//Deklaration der Funktionen

double _complex a(double _complex);
double _complex A(int , double );
double _complex B(int , double);
double _complex C(int , double);

////////////////////////////////////

double _complex Q(int, double);
```

```

double_complex R(int, double);
double_complex S(int, double);

//////////

double_complex Q1(int , double);
double_complex R1(int, double);
double_complex S1(int, double);

//////////

double_complex nu(double);
double lb(double);

//////////

double_complex Ftld(int ,double,double,double,double);
double_complex Gtld(int ,double,double,double,double);

//////////

double_complex xii(int ,double,double,double);
double_complex xih(int ,double,double,double);
double_complex xij(int ,double,double,double);
double_complex xik(int,double,double,double);

//////////

double_complex I(int ,double,double,double,double);
double_complex H(int ,double,double,double,double);
double_complex J(int ,double,double,double,double);
double_complex K(int ,double,double,double,double);
double fakul (double, int);
int fak(int);
double invfak(int); //nochmal prüfen
double invfakul(double, int);
//////////

double_complex* phi (int ,double_complex*,double_complex*, double_complex*, double,double
);

//Hauptprogramm

int main()
{

for (double E=-1.0;E<=1.0;E+=.01)
{
double_complex p=1;
// Initialwerte der Felder
double_complex pm1[kmax];
double_complex p0[kmax];
double_complex phi1[kmax];

```

```

for(int s=0;s<=kmax-1;s+=1)
{

pm1[s]=0;
p0[s]=1;
phi1[s]=0 ;
}

for (int n=1;n<=Nmax; n+=1)
{

int z=((Nmax+1-n)/(1+a1*(Nmax+1-n))*kmax;

p+=pow(-eta,n)*phi(n,phi1,pm1,p0,E,l0)[z]
*(invfak(n)*invfakul(lb(E),n))
/pow((n+lb(E)-nu(E))*(n+nu(E)),l0);

for(int k=0;k<kmax;k+=1)
{
pm1[k]=p0[k];
p0[k]=phi1[k];
}

}

cout<<E<<" " <<real(p) <<"\n";
}
}

//Definition der Funktionen
double_complex a(double_complex k)
{
double_complex z=1/k- a1;
return z;
}
double lb (double E)
{
double l=2*c*sqrt(sqrt(pow(E,2)+pow(.225,2))-E);
return l;
}
double_complex nu (double E)
{
double_complex n=i*c*sqrt(sqrt(pow(E,2)+pow(.225,2))+E);
return n;
}

double_complex A(int n, double E)
{
double_complex As=n*(n+lb(E))/(2*(n+nu(E))*(n+lb(E)-nu(E)));
return As;
}
double_complex B(int n, double E)
{

```

```

double_complex Bs= n*(n+lb(E))*(n-1)*(n-1+lb(E))/
(4*(n+nu(E))*(n+lb(E)-nu(E))*(n-1+nu(E))*(n-1+lb(E)-nu(E)));
return Bs;
}
double_complex C(int n, double E)
{
double_complex Cs= n*(n+lb(E))*(n-1)*(n-1+lb(E))/
(4*(n+nu(E))*(n+lb(E)-nu(E))*(n-1-nu(E))*(n-1+lb(E)+nu(E)));
return Cs;
}

double_complex Q(int n, double E)
{
double_complex Qs=a(n-1+lb(E)-nu(E))+a(n-1+nu(E))-a(n+lb(E)-nu(E))-
a(n+nu(E));
return Qs;
}
double_complex R(int n, double E)
{
double_complex Rs=2*(a(n-1+nu(E))*a(n-1+lb(E)-nu(E))-a(n+lb(E)-nu(E))*
a(n+nu(E)));
return Rs;
}
double_complex S(int n, double E)
{
double_complex Ss=a(n-1+nu(E))*a(n-1+lb(E)-nu(E))*(a(n+nu(E))
+a(n+lb(E)-nu(E)))-a(n+lb(E)-nu(E))*a(n+nu(E))*(a(n-1+nu(E))+a(n-1+lb(E)-nu(E)));
return Ss;
}
double_complex Q1(int n, double E)
{
double_complex Qs=a(n-1+lb(E)+nu(E))+a(n-1-nu(E))-a(n+lb(E)-nu(E))-
a(n+nu(E));
return Qs;
}
double_complex R1(int n, double E)
{
double_complex Rs=2*(a(n-1+lb(E)+nu(E))*a(n-1-nu(E))-a(n+lb(E)-nu(E))*
a(n+nu(E)));
return Rs;
}
double_complex S1(int n, double E)
{
double_complex Ss=a(n-1-nu(E))*a(n-1+lb(E)+nu(E))*(a(n+nu(E))
+a(n+lb(E)-nu(E)))-a(n+lb(E)-nu(E))*a(n+nu(E))*(a(n-1-nu(E))+a(n-1+lb(E)+nu(E)));
return Ss;
}

double_complex xii(int n,double t, double E, double l)
{
double_complex xi=pow(((1+a(n+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n+nu(E))*t)
/((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-1+nu(E))*t))),l+1)
*pow(((1+a(n-2+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-2+nu(E))*t)
/((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-1+nu(E))*t))),l);
}

```

```
return xi;
}
```

```
double_complex xih(int n,double t, double E, double l)
{
double_complex xi=pow(((1+a(n+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n+nu(E))*t)
/((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-1+nu(E))*t))),l+1)
*pow(((1+a(n-2+lb(E)+nu(E))*t)*(1+a(n-2-nu(E))*t))
/((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-1+nu(E))*t))),l);
return xi;
}
```

```
double_complex xij(int n,double t, double E, double l)
{
double_complex xi=pow(((1+a(n+lb(E)+nu(E))*t)*(1+a(n-nu(E))*t)
/((1+a(n-1+lb(E)+nu(E))*t)*(1+a(n-1-nu(E))*t))),l+1)
*pow(((1+a(n-2+lb(E)+nu(E))*t)*(1+a(n-2-nu(E))*t))
/((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-1+nu(E))*t))),l);
return xi;
}
```

```
double_complex xik(int n,double t, double E, double l)
{
double_complex xi=pow(((1+a(n+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n+nu(E))*t)
/((1+a(n-1+lb(E)+nu(E))*t)*(1+a(n-1-nu(E))*t))),l+1)
*pow(((1+a(n-2+lb(E)-nu(E))*t)*(1+a(n-2+nu(E))*t))
/((1+a(n-1+lb(E)+nu(E))*t)*(1+a(n-1-nu(E))*t))),l);
return xi;
}
```

```
double_complex Ftld(int n, double x, double z, double E, double l)
{
double_complex F=1/(l+1)*(1+a(n+lb(E)-nu(E))*(z+x/2))*(1+a(n+nu(E))*(x/2+z))
/(Q(n,E)+R(n,E)*(x/2+z)+S(n,E)*pow(z+x/2,2))
*(pow(((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*(z+x))*(1+a(n-1+nu(E))*(x+z))
/((1+a(n+lb(E)-nu(E))*(x+z))*(1+a(n+nu(E))*(x+z)))),l+1)
-pow(((1+a(n-1+lb(E)-nu(E))*z)*(1+a(n-1+nu(E))*z)
/((1+a(n+lb(E)-nu(E))*z)*(1+a(n+nu(E))*z))),l+1));
return F;
}
```

```
double_complex Gtld(int n, double x, double z, double E, double l)
{
double_complex G=1/(l+1)*(1+a(n+lb(E)-nu(E))*(z+x/2))*(1+a(n+nu(E))*(x/2+z))
/(Q1(n,E)+R1(n,E)*(x/2+z)+S1(n,E)*pow(z+x/2,2))
*(pow(((1+a(n-1+lb(E)+nu(E))*(z+x))*(1+a(n-1-nu(E))*(x+z))
/((1+a(n+lb(E)-nu(E))*(x+z))*(1+a(n+nu(E))*(x+z)))),l+1)
-pow(((1+a(n-1+lb(E)+nu(E))*z)*(1+a(n-1-nu(E))*z)
/((1+a(n+lb(E)-nu(E))*z)*(1+a(n+nu(E))*z))),l+1));
return G;
}
```

```
double_complex I(int n, double x, double z,double E, double l)
{
double_complex Is=xii(n,x/2+z,E,l)*B(n,E)/2*pow(Ftld(n,x,z,E,l),2);
}
```

```

return Is;
}

double_complex H(int n, double x, double z, double E, double l)
{
double_complex Hs=xik(n,x/2+z,E,l)*B(n,E)/2*pow(Ftld(n,x,z,E,l),2);
return Hs;
}

double_complex J(int n, double x, double z, double E, double l)
{
double_complex Js=xij(n,x/2+z,E,l)*C(n,E)/2*pow(Gtld(n,x,z,E,l),2);
return Js;
}

double_complex K(int n, double x, double z, double E, double l)
{
double_complex Ks=xik(n,x/2+z,E,l)*C(n,E)/2*pow(Gtld(n,x,z,E,l),2);
return Ks;
}

double_complex* phi( int n, double_complex* phi1, double_complex* pm1, double_complex*
p0,double E, double
l)
{

phi1[0]=0;
for(int s=0;s<kmax-1;s+=1)
{
phi1[s+1]=phi1[s]
+(A(n,E)*(
p0[s]*Ftld(n,e,s*e,E,l)
+conj(p0[s])
*Gtld(n, e, s*e,E,l))
+.5*((
pm1[s+1]+pm1[s]
)*(I(n,e,s*e,E,l)+K(n,e,s*e,E,l))
+
(conj (pm1[s+1])+conj(pm1[s]))
*(H(n,e,s*e,E,l)+J(n,e,s*e,E,l))));
}
return phi1;
}

double fakul(double l,int n)
{
if (n>1)
{
return (l+n)*fakul(l,n-1);
}
else
{
if (n=1)

```



```
return l+1;
}
if (n=0) return 1;
}
int fak(int k)
{
if(k>1)
{
return k*(fak(k-1));
}
else
return 1;
}

double invfak(int k)
{
if(k>1)
{
return 1.0/k*(invfak(k-1));
}
else
return 1;
}

double invfakul(double l,int n)
{
if (n>1)
{
return 1.0/(l+n)*invfakul(l,n-1);
}
else
{
if (n=1)
return 1.0/(l+1);
}
if (n=0) return 1;
}
```


Literaturverzeichnis

- [1] [HKXY 98] Quang Ho-Kim, Pham Xuan Yem, Elementary Particles and their Interactions. Concepts and Phenomena. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998)
- [2] [BJ 95] Burcham and Jobes, Nuclear and Particle Physics, Longman Singapore Publishers (1995)
- [3] [MOS 66] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 52, Formula and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Third Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1966)
- [4] [GRÖ 77] Wolfgang Gröber, Mathematik für Physiker/6, Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag (1977)
- [5] [DEGM 84] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press Inc. (London) Ltd (1984)
- [6] [USZ 74] Georg Uszczapowski, Die Laplace-Transformation, Deutsch-Taschenbücher Nr.22, Verlag Harri Deutsch, Zürich (1974)
- [7] [NA 86] Otto Nachtmann, Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden (1986)
- [8] [KUG 97] Taichiro Kugo, Eichtheorie, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1997)
- [9] [AIH 89] I. J. R. Aitchison & A. J. G. Hey, Gauge Theories in Particle Physics, Second Edition, IOP Publishing Ltd (1989)
- [10] [MUT 98] Taizo Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics, Second Edition, An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, World Scientific Lecture Notes in Physics-Vol.57, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998)
- [11] [ST 00] M. Stingl, persönliche Mitteilungen
- [12] [PO 91] Nathan Poliatzky, A Method for Solving the Schrödinger Equation, The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, WIS-91/71/OKT-PH
- [13] [SI 96] K. Siantidis, Herleitung einer Streu- und Bindungsgleichung für schwere Quarkonia durch euklidische Mitteilung, Diplomarbeit an der WWU Münster (1996)
- [14] [BE 91] M. Becker, G. Löffler, A. Pesch, M. Stingl und Rosenfelder, Physics Letters B267,261(1991)
- [15] [HSZ 95, 96] W. Hachbusch, H. R. Schwarz, E. Zeidler, Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil I (1996) und Teil III (1995), B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig (1996) und (1995)

Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit auf irgendeine Weise unterstützt und beraten haben.

Mein Dank gilt zuerst insbesondere Herrn Prof. Dr. M. Stingl, sowohl für die Anregung zu diesem interessanten Thema, als auch für seine ständige Bereitschaft zu klärenden Diskussionen und für seine zahlreichen wertvollen Hinweise.

Weiterhin danke ich allen, die mir bei technischen Computerproblemen geholfen haben, namentlich Kossivi KOULEFIANOU, Dipl. Physiker Klaus POTZESNY und Dr. Jerry CHUN-CHUNG CHAN, die ständig bereit waren mir bei Computerinstandhaltung und anderen technischen Problemen zu helfen.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich jedoch bei Nicole ROSENBACH und Stefan DONGUS sowie bei meiner Freundin Yuet PO HO für ihre moralische und finanzielle Unterstützung, ohne die diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre.

Ein spezielles " Dankeschön "geht an die Familie ROSENBACH und an Frederic GUELTON und seine Frau Simone für ihre immerwährenden Aufmunterungen.

Meinen Nachbarn Alexander FROHN und Dipl. Geograph Oliver WELLIE möchte ich herzlich danken für die zeitraubende strukturelle und grammatikalische Überarbeitung dieser Arbeit.