

ANDRÉ EWERING

**Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von  
nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die  
Quantenchromodynamik**

Institut für Theoretische Physik I  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

März 2000







**Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen von  
nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die  
Quantenchromodynamik**

als Diplomarbeit vorgelegt von  
André Ewering

März 2000

Institut für Theoretische Physik I  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

*“Yes, of course. We’ve got a ghost! It’s a green one.”*

Baroness of Balgonie, Scotland

für Willy

Dieses Exemplar enthält im Gegensatz zu der dem Prüfungssekretariat vorgelegten Arbeit geringfügige orthographische, stilistische und inhaltliche Korrekturen. Die Ergebnisse der Arbeit sind davon unbeeinflußt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Konventionen und Notationen der Kontinuums-QCD</b>	<b>5</b>
1.1 Allgemeine Grundlagen . . . . .	5
1.2 Die spontane Massenskala . . . . .	11
1.3 Die Feynman-Regeln im euklidischen Impulsraum . . . . .	12
1.4 Mandelstam-Variablen . . . . .	16
<b>2 Die nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln</b>	<b>19</b>
2.1 Die Systematik des erweiterten Schemas . . . . .	19
2.2 Ansätze für die Basisvertices . . . . .	21
2.2.1 Die modifizierten Propagatoren . . . . .	21
2.2.2 Der 3-Gluon-Vertex . . . . .	24
2.2.3 Der Geist-Antigeist-Gluon-Vertex . . . . .	26
2.2.4 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex . . . . .	27
2.2.5 Die modifizierten Hilfsamplituden der STI . . . . .	28
2.3 Das Selbstkonsistenzproblem . . . . .	31
2.4 Bemerkung zu Bethe-Salpeter-Resummationen . . . . .	33
<b>3 Die Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex</b>	<b>37</b>
3.1 Skalare Projektion . . . . .	37
3.2 Die Nebenbedingungen . . . . .	39
3.3 Analyse für den Fall $r = 1$ . . . . .	41
<b>4 Die Slavnov-Taylor-Identitäten des Geist- und Fermion-Vertex</b>	<b>47</b>
4.1 Der Geist-Vertex . . . . .	47
4.1.1 Die Nebenbedingungen . . . . .	47
4.1.2 Analyse für den Fall $r = 1$ . . . . .	48
4.2 Der Fermion-Vertex . . . . .	51
4.2.1 Skalare Projektion und Nebenbedingungen . . . . .	51

4.2.2	Analyse für den Fall $r = 1$	52
4.3	Zwischenergebnis	56
<b>5</b>	<b>Die longitudinal projizierte Gluon-Selbstenergie</b>	<b>59</b>
5.1	Fermion-Schleife und Tadpole	59
5.2	Die Geist-Schleife	62
5.3	Die Gluon-Schleife	64
5.3.1	Skalare Projektion	65
5.3.2	Die Gluon-Schleife im erweiterten Schema	66
5.4	Selbstkonsistenzgleichungen	72
5.5	Selbstkonsistenz auf dem Niveau $r = 1$	73
5.6	Ergebnis	75
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>		<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Funktionalintegralmethoden</b>	<b>81</b>
A.1	Euklidische Greens- und Vertexfunktionen	81
A.2	Schwinger-Dyson-Gleichungen	83
A.3	Slavnov-Taylor-Identitäten	87
A.3.1	Der longitudinal projizierte 2-Gluon-Vertex	88
A.3.2	Der longitudinal projizierte 3-Gluon-Vertex	89
A.3.3	Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex	90
A.3.4	Weitere Slavnov-Taylor-Identitäten	92
<b>B</b>	<b>Wichtige Ergänzungen</b>	<b>95</b>
B.1	Algebra der $SU(N_C)$ -Eichgruppe	95
B.2	Algebra der euklidischen $\gamma$ -Matrizen	96
B.3	Euklidische Impulsintegration	97
B.4	Euklidische Formulierung	98
B.5	Ladungskonjugationen	99
<b>C</b>	<b>Basiskonstruktionen</b>	<b>101</b>
C.1	Der 3-Gluon-Vertex	101
C.2	Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex	103
<b>D</b>	<b>Feynman-Parametrisierungen</b>	<b>105</b>
D.1	Feynman-Parametrisierung $F_{(0)}$	105
D.2	Feynman-Parametrisierung $F_{(1)}$	106
D.3	Feynman-Parametrisierung $F_{(2)}$	107
D.4	Feynman-Parametrisierung $F_{(3)}$	108

---

<b>E Die Nebenbedingungen des 3-Gluon-Vertex in <math>r = 1</math></b>	<b>109</b>
E.1 Restriktionen an die Koeffizienten aus der Hilfsamplitude $\hat{G}$ . . . . .	109
E.2 Restriktionen der symmetrischen Invarianten $F_0$ . . . . .	110
E.3 Restriktionen der antisymmetrischen Invarianten $F_2$ . . . . .	121
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>131</b>
<b>Danksagung</b>	<b>134</b>



# Einleitung

In Anlehnung an die sehr erfolgreiche Quantenelektrodynamik (QED), die der Forderung nach Invarianz unter lokalen abelschen Eichtransformationen unterliegt, ist die Quantenchromodynamik (QCD) nach heutigem Wissen die richtige Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung und stellt das nicht-abelsche Pendant mit der Eichgruppe  $SU(3)$  zur QED dar. Die QCD besitzt das Oktett der Gluonen, die die Eichbosonen der Theorie sind, und das Farbtriplett der fermionischen Quarkfelder, welche an die Eichfelder minimal koppeln, als die elementaren Freiheitgrade.

Durchsetzen konnte sich die Theorie in den siebziger Jahren, als ihre Renormierbarkeit bewiesen und die Tatsache geklärt wurde, daß sie eine asymptotisch freie Theorie ist und somit im Hochenergiebereich, z.B. bei tiefinelastischen Streuprozessen zwischen Nukleonen und Leptonen, störungstheoretisch mit der Kopplungskonstanten als Entwicklungsparameter behandelbar ist. Im Fall niedriger Energien, d.h. im Infrarotbereich, versagt die Störungstheorie jedoch, denn dort sind die Quarks und Gluonen vom physikalischen Spektrum verschwunden. Die sogenannte Confinement-Hypothese besagt, daß asymptotisch detektierbare Teilchen nur als stabile Farbsingulett-Zustände auftreten dürfen.

Man ist also gezwungen zu sogenannten nicht-perturbativen Methoden zu greifen. Hierfür gibt es viele Möglichkeiten und Ansätze. Ein sehr erfolgreicher fußt auf den sogenannten Gittereichtheorien. In ihnen wird die Raum-Zeit diskretisiert, so daß die Theorie numerischen Simulationen, z.B. Monte-Carlo-Methoden, zugänglich wird. Für die QCD stimmen Daten wie die Bindungsenergien leichter Hadronzustände bereits recht gut mit dem Experiment überein.

Einen der alternativen Versuche, ein mehr analytisches Verständnis der QCD zu erlangen, stellt das in [Sti 96] vorgeschlagene nicht-perturbative Lösungsverfahren in Form einer systematisch erweiterten Störungstheorie dar. Dazu werden die Feynman-Regeln, d.h. Vertices nullter perturbativer Ordnung, nicht-perturbativ modifiziert. Deren Impulsabhängigkeit wird durch eine rationale Approximantenfolge systematisch genähert. Dies geschieht mit Hilfe der renormierungsgruppeninvarianten spontanen Massenskala (Lambda-Skala)

$$\Lambda = \nu \exp \left( - \int^g \frac{dg'}{\beta(g')} \right) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \nu \exp \left( - \frac{1}{2\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g} \right)^2 \right) \quad \text{für } \beta_0 > 0,$$

die aufgrund der Nichtanalytizität in der Eichkopplung  $g^2$  durch eine rein perturbative Entwicklung nicht erfaßt werden kann. Der Ansatz gibt auf der Grundlage der Schwinger-Dyson-Gleichungen (SDG) für die amputierten, zusammenhängenden 1-Teilchen-irreduzi-

blen Funktionen eine quasi-perturbative Approximationsrichtung, wobei um die modifizierte nullte Ordnung iterativ entwickelt wird, und eine nicht-perturbative Richtung vor, in der die  $\Lambda$ - und Impulsabhängigkeit der nullten Ordnung durch eine Folge rationaler Approximanten steigenden Grades erfaßt wird. Die asymptotische Freiheit der Theorie bleibt durch den Ansatz der Approximanten im erweiterten Schema gewahrt. Eine wesentliche Randbedingung für ihre Konstruktion ist die Forderung nach Erhaltung der perturbativen Renormierbarkeit.

Insgesamt tritt durch diesen Ansatz ein Selbstkonsistenzproblem auf, welches durch den sogenannten  $1/g^2$ -Mechanismus auf die sieben oberflächlich divergenten Vertexfunktionen der Quantenchromodynamik eingeschränkt ist. Man erhält ein zu lösendes Selbstkonsistenzgleichungssystem für die nicht-perturbativen Koeffizienten der Approximanten.

Der ersten Ansätze sind, aus heutiger Sicht in erster Stufe der rationalen Approximation ( $r = 1$ ) und noch ohne Einbettung in ein systematisches Näherungsverfahren, von [Fro 96], [Kön 90], [Reu 89] und [Wig 89] bzw. [HKR 90] formuliert worden. Dabei ist die Problematik endlicher Quarkmassen nicht behandelt worden und der Mechanismus der kompensierenden Pole war noch nicht bekannt.

Das Aufstellen und Lösen der Selbstkonsistenzgleichungen ist umfassend in [Dri 97] bzw. [DS 98] für den gluonischen und in [Kuh 97] bzw. [DFK 98] für den fermionischen Sektor durchgeführt worden. Eine eindeutige und reelle Lösung ist im Fall masseloser Fermionen und für  $N_F = 2$  auf der Approximationsstufe  $r = 1$  gefunden worden, die in einer gewissen Weise Confinement zeigt. Die hier ermittelten Daten werden in [Voi 99] zur Untersuchung der  $\rho$ -Meson-Resonanz benutzt, auf die aber durch den niedrigen Approximationsgrad bedingt noch kein Rückschluß gezogen werden konnte.

Gegenstand dieser Arbeit sind die sogenannten Slavnov-Taylor-Identitäten (STI), in denen die lokale Eichinvarianz bzw. Becchi-Rouet-Stora-Invarianz (BRS-Invarianz) der Theorie sich ausdrückt und die im Sinne der systematisch erweiterten Störungstheorie mit den SDG konkurrieren. Auch die STI stellen Beziehungen zwischen den Vertexfunktionen her, jedoch auf rein algebraischer Ebene, d.h. die expliziten Berechnungen von Schleifenintegralen entfallen. Es ist also naheliegend, auch diesen Bereich auf Selbstkonsistenz zu überprüfen und zu klären, welchen Platz die Identitäten im Rahmen des erweiterten Schemas einnehmen. Die Frage, ob STI im nicht-perturbativen Fall weiterhin erfüllbar sind, ist zu beantworten.

Man sollte dabei aber stets im Auge behalten, daß die SDG den STI in der Bestimmung von Selbstkonsistenzgleichungen übergeordnet sind, denn in die Ableitung der STI gehen stärkere Voraussetzungen ein. Dies betrifft insbesondere die Invarianz des Pfadintegralmaßes unter BRS-Transformation der Wirkung, die den Grundstein zur Herleitung der STI darstellt. Dementsprechend können die SDG auch partiell oder vollständig Eichsymmetriebrechende Lösungen besitzen.

Das erste Kapitel referiert die allgemeinen Grundlagen der Quantenchromodynamik. Mit der Definition der Lagrange-Dichte und auf Basis des Funktionalintegralformalismus werden einige Konzepte der Theorie kurz vorgestellt. Dies umfaßt Regularisierung, Renormierung, Feynman-Regeln und die spontane Massenskala, die im zweiten Kapitel als der nicht-perturbative Parameter der Theorie eingeführt wird. Abschließend folgt eine kurze Bemerkung zu Mandelstam-Variablen.

Die wesentlichen Züge der systematisch erweiterten Störungstheorie werden im zweiten Kapitel dieser Arbeit vorgestellt und die modifizierten Basisvertices werden formuliert, wie sie in [Sti 96] zu finden sind. Da die Berechnungen in frühereren Arbeiten den vollständig transversalen Sektor nicht verließen - die Vertexansätze des Gluon-Sektors sind in Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) und von außen transversal projiziert angegeben - wird eine Erweiterung der nicht-perturbativen Ansätze zum Teil notwendig. Dies betrifft insbesondere den Bereich der Slavnov-Taylor-Identitäten, da diese Beziehungen zwischen Amplituden mit teilweise *longitudinalen* Gluon-Linien darstellen.

Im dritten und vierten Kapitel wird untersucht, inwieweit die im zweiten Kapitel formulierten Basisansätze mit den Slavnov-Taylor-Identitäten verträglich sind. Dabei wird zunächst einmal deren Gültigkeit angenommen. Die Diskussion beschränkt sich auf die 3-Punkt-Vertices, wobei Restriktionen mit beliebigem Approximationsgrad erarbeitet werden, die, falls die Eichinvarianz respektiert wird, von den nicht-perturbativen Koeffizienten zu erfüllen wären. Abschließend wird in diesen Kapiteln das Niveau  $r = 1$  genauer analysiert.

Das fünfte Kapitel, welches den „dynamischen“ Teil der Arbeit darstellt, hat schließlich die einfachste Slavnov-Taylor-Identität zum Gegenstand, die in beliebiger Stufe der Approximation berechnet wird. Es wird überprüft, ob der Longitudinalanteil des Gluon-Propagators im nicht-perturbativ erweiterten Schema und in 1-Schleifen-Ordnung seine störungstheoretische Form beibehält.

Der Anhang enthält neben den in dieser Arbeit benutzten Schwinger-Dyson-Gleichungen und Slavnov-Taylor-Identitäten eine Formelsammlung zur Berechnung von Schleifenintegralen. Die im dritten und vierten Kapitel benutzten Tensorbasen der 3-Punkt-Vertices im fermionischen und gluonischen Sektor werden angegeben. Der letzte Teil des Anhangs enthält Gleichungen, die die im dritten Kapitel angegebenen Bedingungen an die nicht-perturbativen Parameter des 3-Gluon-Vertex auf dem Niveau  $r = 1$  implizieren.



# Kapitel 1

## Konventionen und Notationen der Kontinuums-QCD

### 1.1 Allgemeine Grundlagen

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist eine Yang-Mills-Theorie mit der Eichgruppe  $SU(N_C)$  und  $N_f$  Quark-Flavours. Die Quarks werden durch eine kovariante Ableitung an die Eichfelder gekoppelt. Die Wirkung der QCD im vierdimensionalen euklidischen Ortsraum ist gegeben durch

$$\mathcal{S}_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_V(x) + \mathcal{L}_G(x) + \mathcal{L}_F(x) \right\}, \quad (1.1)$$

wobei die zugehörigen Lagrange-Dichten die Form

$$\mathcal{L}_V(x) := \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu}(x) F_a^{\mu\nu}(x), \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(x) := & \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_a^\mu(x))^2 \\ & + \bar{c}_a \left\{ [ -\delta_{ab} \partial^\mu + \tilde{g}_0 f_{abc} A_c^\mu(x) ] \partial^\mu \right\} c_b(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F(x) := & \sum_{f=1}^{N_f} \left\{ \bar{\psi}_{(f)}^i(x) (-i\delta^{ij} \gamma^\mu \partial^\mu + m_0^{(f)} \delta^{ij} \right. \\ & \left. + \tilde{g}_0 (T_a)^{ij} \gamma^\mu A_a^\mu(x)) \psi_{(f)}^j(x) \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

haben. Die Lagrange-Dichten beschreiben die masselosen Gluonenfelder, die Faddeev-Popov-Geister mit beliebiger kovarianter Eichfixierung und die  $N_f$  verschiedenen minimal gekoppelten Fermionen. In der Literatur werden die Gluon-Felder auch oft nach ihren „Erfindern“ als Yang-Mills-Felder [YM 54] bezeichnet.

Der verallgemeinerte Maxwellsche Feldstärketensor hat, wie in der QCD verlangt, nicht-abelschen Charakter und ist durch

$$F_a^{\mu\nu}(x) := \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) + \tilde{g}_0 f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) \quad (1.5)$$

definiert. Dabei ist  $\tilde{g}_0$  in diesem Fall eine dimensionslose Kopplungskonstante. Die Diracschen  $\gamma$ -Matrizen im Euklidischen erfüllen die Antikommutator-Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2 \delta^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}. \quad (1.6)$$

Aus dem erzeugenden Funktional im Ortsraum

$$\begin{aligned} Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] &:= \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \\ &\times \exp \left\{ - S_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - j_E [A, \dots; J, \dots] \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

und dem Quellenfunktional

$$\begin{aligned} j_E [A, \dots; J, \dots] &:= \int d^4x \left( J_a^\mu(x) A_a^\mu(x) + \bar{c}_a(x) \omega_a(x) + \bar{\omega}_a(x) c_a(x) \right. \\ &\left. + \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left\{ \bar{\psi}_{(f)}^i(x) \eta_{(f)}^i(x) + \bar{\eta}_{(f)}^i(x) \psi_{(f)}^i(x) \right\} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

lassen sich, durch funktionales Ableiten nach den Quelltermen und anschließendes zu-Nullsetzen aller Quellen, die Greenschen Funktionen der Theorie gewinnen. Als Beispiel gebe ich hier die zeitgeordnete Geist-2-Punkt-Funktion im Ortsraum an:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ab}(x, y) &= \langle 0 | T[c_a(x) \bar{c}_b(y)] | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \left( \frac{\delta}{\delta \omega_b(y)} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_a(x)} Z_E [J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Gleichung (1.9) stellt den üblichen vollen Geist-Propagator im Ortsraum dar. Dabei ist zu beachten, daß sich die Geist-Felder und die zugehörigen Geist-Quellen Grassmann-wertig verhalten. Die Greenschen Funktionen höherer Ordnung bekommt man durch analoge Vorgehensweise. Sie sind in Anhang A zu finden.

Im Umgang mit Greenschen Funktionen sind die amputierten, zusammenhängenden 1-Teilchen-irreduziblen (1-PI) Greenschen Funktionen von besonderer Bedeutung. Man gewinnt sie mittels einer Reduzibilitätsanalyse.

Oft werden die 1-PI-Greenschen Funktionen einfach Vertexfunktionen genannt und mit  $\Gamma_N$  bezeichnet, wobei  $N$  die Anzahl der äußeren Beine darstellt. Die störungstheoretischen Vertexfunktionen  $\Gamma_N^{(0)per\ell}$ , die auch „nackte Vertexfunktionen“ genannt werden, können direkt aus der Lagrange-Dichte als Feynman-Regeln abgelesen werden. Sie erlauben eine Präsentation analytischer Ausdrücke in einer diagrammatischen Form und sind in Abschnitt 1.3 formuliert.

Die Dynamik der Theorie läßt sich durch die sogenannten „Schwinger-Dyson-Gleichungen“

(SDG) beschreiben. Sie stellen ein System von Integro-Differentialgleichungen dar, welches hierarchisch gekoppelt ist, und haben die allgemeine Form<sup>1</sup>

$$\Gamma_N = \Gamma_N^{(0)pert} + \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^2 \Phi_N [\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_N, \Gamma_{N+1}, \Gamma_{N+2}]. \quad (1.10)$$

Die Herleitungen einiger SDG aus dem Geist- und Gluon-Sektor sind in Anhang A beschrieben. Eine gute didaktische Einführung zu SDG enthält [Riv 87], wobei [Dri 97] den vollständigen Satz der SDG für die sieben Basisvertices der QCD formuliert.

Die Größe  $\Phi_N$  in (1.10) ist ein Funktional, welches Schleifenintegrale ausbildet. Die übliche Störungstheorie erhält man als Potenzreihe im Quadrat des Kopplungsparameters. Es werden Lösungen  $\Gamma_N^{pert}$  der Schwinger-Dyson-Gleichungen gesucht, wobei um die nullte perturbative Ordnung  $\Gamma_N^{(0)pert}$  iteriert wird:

$$\begin{aligned} \Gamma_N^{pert} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[p]pert}; \\ \Gamma_N^{[p]pert} &= \Gamma_N^{(0)pert} + \sum_{p'=1}^p \left(\frac{\tilde{g}_0}{4\pi}\right)^{2p'} \Gamma_N^{(p')pert}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Hierbei stellt  $p$  den Entwicklungsgrad der Störungsreihe dar.

Die Greenschen Funktionen entwickeln in  $D = 4$  Raumdimensionen divergente Ausdrücke, die bei Schleifenberechnungen im Fall großer Impulse auftreten und darum auch Ultraviolet-Divergenzen genannt werden. Um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, sind die auftretenden Divergenzen zu subtrahieren. Dies geschieht durch eine dimensionelle Regularisierung (siehe [tHo 72]) und anschließende Renormierung. Im Gegensatz zu „Cut-Off“-Regularisierungsschemata respektiert die dimensionelle Regularisierung die Poincaré-Invarianz und die Eichinvarianz der Theorie.

Die Idee dieses Mechanismus besteht darin die Theorie auf  $D = 4 - 2\epsilon$  Raumdimensionen zu erweitern, wobei  $\epsilon$  ein Regularisierungsparameter ist, um dann die divergenten von den konvergenten Anteilen zu trennen. Schließlich werden die Divergenzen im Rahmen des Renormierungsprozesses abgezogen und es wird  $\epsilon = 0$  gesetzt. Dabei tritt jedoch der „Schönheitsfehler“ auf, daß in einer gebrochenen Dimension die Dimensionslosigkeit der Kopplung  $\tilde{g}_0$  verloren geht. Dieser Zustand kann aber mittels Einführung der Massenskala  $\nu_0$  behoben werden. Die Kopplung wird durch eine dimensionslose ersetzt:

$$\tilde{g}_0 \rightarrow g_0 \nu_0^\epsilon. \quad (1.12)$$

Im Renormierungsprozeß wird die nackte Kopplung zu Gunsten einer skalenabhängigen renormierten Kopplung eliminiert. Diese Kopplung ist eine laufende Kopplung. Später wird gezeigt, daß diese für große Impulsskalen verschwindet, was die Semikonvergenz der Störungsreihe (1.11) in diesem Bereich sicherstellt. Zwischen den nackten und den renormierten Größen besteht der folgende Zusammenhang<sup>2</sup>:

$$\left(g(\nu)\nu^\epsilon\right)^2 = Z_\alpha(\nu, \epsilon)^{-1} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2. \quad (1.13)$$

<sup>1</sup> In dieser vereinfachten Notation sind alle Orts- bzw. Impulsabhängigkeiten sowie Indexstrukturen nicht mitgeschrieben.

<sup>2</sup> Der Grund für die Indizierung der Kopplungsrenormierungskonstanten  $Z_\alpha$  wird noch im Verlauf des Abschnitts deutlich werden.

Die Kopplungsrenormierungskonstante  $Z_\alpha$  ist in 1-Schleifen-Ordnung durch

$$Z_\alpha(\nu, \epsilon) = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \beta_0 \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.14)$$

gegeben, was sich mit Hilfe von (1.27) zeigen lässt. Dabei ist die Renormierungsgruppeninvariante

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N_C - \frac{2}{3}N_f \quad (1.15)$$

der erste Koeffizient der Renormierungsgruppenfunktion

$$\beta(g(\nu), \epsilon) := \nu \frac{d}{d\nu} g(\nu). \quad (1.16)$$

In einem dimensionellen Renormierungsschema nimmt  $\beta(g)$  mit (1.13) und (1.16) die Form

$$\beta(g(\nu), \epsilon) = -g(\nu) \epsilon - \frac{g(\nu)\nu}{2Z_\alpha(\nu, \epsilon)} \frac{d}{d\nu} Z_\alpha(\nu, \epsilon) \quad (1.17)$$

$$= -g(\nu) \left( \epsilon + \beta_0 \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^2 + \beta_1 \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6) \right) \quad (1.18)$$

an, wobei im letzten Rechenschritt (1.14) verwendet wurde. Für weitere Details siehe [tHo 73].

Es gibt in der QCD fünf unabhängige Renormierungskonstanten. Neben der Kopplungsrenormierung werden vier weitere Renormierungskonstanten angegeben. In 1-Schleifen-Ordnung mit beliebigem Eichfixierungsparameter  $\xi$  sind sie im MS-Renormierungsschema gegeben durch<sup>3</sup>

- Massen-Renormierung:

$$Z_m(\nu, \epsilon) = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(3 \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.19)$$

- inverser Gluon-Propagator:

$$Z_{3YM}(\nu, \epsilon) = 1 + \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{13}{6} - \frac{1}{2}N_C \xi - \frac{2}{3}N_f + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.20)$$

- inverser Fermion-Propagator:

$$\bar{Z}_{2F}(\nu, \epsilon) = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \xi + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (1.21)$$

- Fermion-Antifermion-Vertex:

$$\bar{Z}_{1F}(\nu, \epsilon) = 1 - \left(\frac{g(\nu)}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{3}{4}N_C + \frac{3N_C^2 - 2}{4N_C} \xi + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(g^4). \quad (1.22)$$

---

<sup>3</sup>Zur formalen Definition des MS-Renormierungsschemas siehe [Mut 87].

Der direkte Bezug zwischen den Renormierungskonstanten wird durch die „Slavnov-Taylor-Identitäten“ (STI) hergestellt. Diese wurden für die Quantenchromodynamik im Zusammenhang mit Renormierbarkeit von Yang-Mills-Theorien von 't Hooft [tHo 71] formuliert. Erstmalig abgeleitet wurden die STI von Slavnov und Taylor [Sla 72, ST 71].

Die Entdeckung der Becchi-Rouet-Stora-Transformation [BRS 74] bereicherte das Theoriegebäude der QCD enorm. Die BRS-Transformation als globale Eichtransformation machte nicht nur die kanonische Quantisierung der QCD möglich, denn bis zur Entdeckung der Transformation war man nur in der Lage, die Theorie im Pfadintegral-Formalismus zu quantisieren, sondern eröffnete auch einen leichteren Zugang zu den STI. Unter der BRS-Transformation der Felder (siehe Anhang A.3) ist die klassische Wirkung (1.39) oder Lagrange-Dichte invariant, was in der Literatur oft mit

$$\delta_{BRS} \mathcal{L} [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = 0 \quad (1.23)$$

abgekürzt wird. Stellt man dieselbe Anforderung an ein erzeugendes Funktional für Greensche Funktionen und postuliert dabei die Invarianz des funktionalen Integrationsmaßes, so bekommt man daraus die Slavnov-Taylor-Identitäten, wie sie in Anhang A aufgeführt sind. Sie stellen wie die Schwinger-Dyson-Gleichungen Beziehungen zwischen den Greenschen Funktionen der Theorie her. Die SDG resultieren ebenso wie die STI aus der Invarianz der klassischen Lagrange-Dichte unter einer geeigneten Transformation der Felder (siehe dazu [IZ 80]). Der im Anhang benutzte Ansatz, daß ein Pfadintegral über eine funktionale Ableitung verschwindet, ist dieser Darstellung äquivalent.

Die bereits oben angesprochenen Beziehungen zwischen den Renormierungskonstanten sind mit den STI leicht zu ermitteln. Als Beispiel gebe ich die STI des 3-Gluon-Vertex (A.41) an. Sie ist für  $p_3 = 0$  gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1^{\nu_1} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, 0) \\ = p_1^2 \tilde{D}(p_1^2) \left\{ \Gamma_{TT}(p_2) t^{\mu \nu_2}(p_2) \hat{G}_{a_2 a_1 a_3}^{\mu \nu_3}(p_2, p_1, 0) \right\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dabei bezeichnet  $\Gamma_{3V}$  den vollen 3-Gluon-Vertex,  $\tilde{D}$  den Geist-Propagator,  $\Gamma_{TT}$  den Transversalteil des 2-Gluon-Vertex,  $t^{\mu \nu}$  einen Transversalprojektor und  $\hat{G}$  eine sogenannte „Hilfsamplitude“, deren Ortsraumversion einen zusammengesetzten lokalen Geist-Gluon-Operator enthält. Die zu (1.24) korrespondierende renormierte Gleichung hat vor Entfernung des Regulators die Form

$$\begin{aligned} p_1^{\nu_1} Z_{1YM} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, 0) \\ = p_1^2 \tilde{Z}_3^{-1} \tilde{D}(p_1^2) \left\{ Z_{3YM} \Gamma_{TT}(p_2) t^{\mu \nu_2}(p_2) \tilde{Z}_1 \hat{G}_{a_2 a_1 a_3}^{\mu \nu_3}(p_2, p_1, 0) \right\}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

wobei die Hilfsamplitude  $\hat{G}$  wegen der Identität (A.45) die Renormierungskonstante des Geist-Vertex besitzt. Ein Vergleich der Beziehungen (1.24) und (1.25) liefert den Zusammenhang zwischen den Konstanten<sup>4</sup>. Nimmt man die weiteren Identitäten hinzu, so läßt sich insgesamt [PT 82]

$$\frac{\tilde{Z}_{1F}}{\tilde{Z}_{2F}} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1YM}}{Z_{3YM}} = \frac{Z_{4YM}}{Z_{1YM}} \quad (1.26)$$

<sup>4</sup>Bei der Betrachtung der Identität des Fermion-Vertex wird ein Impuls auf die Massenschale (*On-shell*) gesetzt, um sie so analog zu (1.24) bzw. (1.25) hinschreiben zu können.

finden. Neben den bereits bekannten Renormierungskonstanten stammen  $\tilde{Z}_1$  und  $\tilde{Z}_3$  aus dem Geist-Sektor.  $Z_{1YM}$  bzw.  $Z_{4YM}$  resultieren aus dem 3- bzw. 4-Gluon-Vertex. (1.26) wird ebenfalls Slavnov-Taylor-Identität genannt. Die in ihr enthaltenen Größen lassen sich in der reinen Störungstheorie durch die Berechnung von Schleifenintegralen aus den SDG berechnen.

Ein Vergleich der renormierten mit der unrenormierten Langrange-Dichte, wie sie z.B. in [Mut 87] angegeben ist, liefert den Zusammenhang obiger Renormierungskonstanten mit der Kopplungsrenormierung. Er ergibt sich zu

$$Z_\alpha = \left( Z_{3YM} \right)^{-1/2} \bar{Z}_{1F} \left( \bar{Z}_{2F} \right)^{-1}, \quad (1.27)$$

womit sich (1.14) berechnen läßt.

Für die Renormierungskonstanten existiert aber nicht nur die bereits angegebene Entwicklung bis hin zu einer beliebigen Ordnung in  $g^2$ , sondern auch ein geschlossener Ausdruck in Form einer Integraldarstellung. Mit der Definition der quadratischen Kopplung

$$\alpha = \frac{g(\nu)^2}{4\pi} \quad (1.28)$$

und der Funktion

$$f(\alpha)^{-1} = \left( \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{\alpha}{4\pi} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \quad (1.29)$$

läßt sich (1.18) als

$$\frac{\beta(g(\nu), \epsilon)}{g(\nu)} = - \left( \epsilon + \frac{\alpha}{4\pi f(\alpha)} \right) \quad (1.30)$$

schreiben. Separation der Variablen in (1.17) liefert gemeinsam mit (1.16) und (1.30)

$$\frac{dZ_\alpha(\alpha, \epsilon)}{Z_\alpha} = - \frac{d\alpha}{4\pi\epsilon f(\alpha) + \alpha}, \quad (1.31)$$

wobei in der Renormierungskonstanten die Abhängigkeit von der Renormierungsmassen-skala durch die explizite Kopplungsabhängigkeit ersetzt wurde. Integration nach  $\alpha$  unter Verwendung von  $Z_\alpha(0, \epsilon) = 1$  (vgl. (1.14)) ergibt die gesuchte Integraldarstellung

$$Z_\alpha(\alpha, \epsilon) = \exp \left( - \int_0^\alpha \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'} \right). \quad (1.32)$$

Der in  $\epsilon = 0$  reguläre Teil des Integranden läßt sich abspalten:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'} = \frac{1}{4\pi\epsilon f(0) + \alpha'} + \epsilon \rho_g(\alpha', \epsilon) \quad \text{mit} \quad \rho_g(0, \epsilon) = 0, \quad (1.33)$$

so daß für das Integral

$$Z_\alpha(\alpha, \epsilon) = \frac{4\pi\epsilon/\beta_0}{4\pi\epsilon/\beta_0 + \alpha} \exp \left( - \epsilon \int_0^\alpha d\alpha' \rho_g(\alpha', \epsilon) \right) \quad (1.34)$$

ist. Im Grenzwertprozeß  $\epsilon \rightarrow 0$  läuft  $Z_\alpha(\alpha, \epsilon) \rightarrow 0$ . Die auftretenden Divergenzen sind bei der endlichen Störungsreihe nicht die Divergenzen der exakten Theorie. Die Differenz zwischen dem in erster Ordnung divergenten perturbativen Ausdruck (1.14) und der für  $\epsilon = 0$  verschwindenden exakten Integraldarstellung von  $Z_\alpha(\alpha, \epsilon)$  ist von der Ordnung  $\alpha^2$ . Die perturbative Reihe wird durch die nächsthöhere Ordnung in  $\alpha$  korrigiert, bis bei unendlicher Aufsummation der Störungsreihe die Differenz schließlich verschwindet.

## 1.2 Die spontane Massenskala

Die renormierten Parameter der Theorie hängen im Gegensatz zu den nackten Größen von der beliebigen Massenskala  $\nu$  ab. Wie schon an (1.20), (1.21) und (1.22) zu sehen ist, gilt selbiges auch für die Vertexfunktionen. Diese gehen für große Impulse bis auf logarithmisch perturbative Modifikationen, die von der Renormierungsgruppe bestimmt werden, in ihre perturbative Form  $\Gamma_N^{(0)pert}$  über.

Mit  $N_C = 3$  und  $N_F \leq 16$  ist  $\beta_0 > 0$  (vgl. 1.15). In diesem Fall liegt *asymptotische Freiheit* vor. Damit bezeichnet man das Verschwinden der Kopplung bei hohen Impulsen. Die durch Integration von (1.16) erhaltene laufende Kopplung verschwindet mit  $\beta_0 > 0$  für große Skalen, was an

$$\bar{g}(Q^2) \approx \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad \text{für} \quad \frac{Q^2}{\Lambda^2} \gg 1 \quad (1.35)$$

abzulesen ist. Man bekommt diese Beziehung durch die Lösung der Renormierungsgruppengleichung bei großen Impulsüberträgen  $Q$ .

Der in (1.35) noch nicht definierte Parameter ist die sogenannte spontane oder renormierungsgruppeninvariante Massenskala  $\Lambda$ , die aus einer weiteren Analyse der Renormierungsgruppenfunktion resultiert<sup>5</sup>. Dazu integriert man die zugehörige Renormierungsgruppengleichung und fixiert die untere Integrationsgrenze, was die Abhängigkeit vom Renormierungsschema zum Ausdruck bringt<sup>6</sup>. Der analytische Ausdruck für  $\Lambda$  ist

$$\Lambda(g(\nu), \nu)^2 = \nu^2 \exp \left( -2 \int_{g_1}^{g(\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \right) \quad (1.36)$$

$$= \nu^2 \exp \left( -\frac{1}{\beta_0} \left( \frac{4\pi}{g(\nu)} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(g^2)) \right). \quad (1.37)$$

Die laufende Kopplung  $g(\nu)$  hängt von der Massenskala  $\nu$  ab, aber die aus experimentellen Daten extrahierten physikalischen Meßgrößen dürfen diese Skalenabhängigkeit nicht mehr aufweisen. Selbiges gilt auch für die spontane Massenskala, die eine implizite Größe der Theorie ist. Der in [Shm 97] berechnete Wert für  $\Lambda$  im  $\overline{MS}$ -Schema ist<sup>7</sup>

$$\Lambda_{QCD}^{\overline{MS}} \approx 287(\pm 31) \text{ MeV}. \quad (1.38)$$

<sup>5</sup> Die von jedem Massenmaßstab freie reine Yang-Mills-Theorie kann massive „Glueballs“ besitzen [MM 94]. Die mathematische Beschreibung gelingt nur durch die Bildung der spontanen  $\Lambda$ -Skala.

<sup>6</sup> Bei der Skala  $\nu = \Lambda$  ist  $g_1$  die zugehörige Kopplung.

<sup>7</sup> Zur Definition von Renormierungsschemata siehe wiederum [Mut 87].

Man sieht an (1.37), daß die spontane Massenskala eine Nichtanalytizität bezüglich ihrer Kopplungsabhängigkeit aufweist. Die Potenzreihenentwicklung von  $\Lambda$  in  $g(\nu)^2$  ist identisch null. Dies liegt darin begründet, daß  $\Lambda$  eine schnellere Nullasymptotik als die Kopplung besitzt. Eine Entwicklung der Vertexfunktionen in der Kopplung ist nicht in der Lage, die  $\Lambda$ -Abhängigkeit zu erfassen. Eventuelle physikalische Effekte, die von der nicht-perturbativen Skala  $\Lambda$  nicht nur invers-logarithmisch wie in (1.35), sondern polynomial oder rational abhängen, unter ihnen vermutlich das *Confinement*, werden unterdrückt.

Durch den Regularisierungs- und Renormierungsprozeß ist die dimensionslose Kopplungskonstante in einen Parameter transformiert worden (*dimensionelle Transmutation*), der eine Massendimension besitzt. Daraus ist eine renormierungsgruppeninvariante Massenskala hervorgegangen. Nun stellt sich die Frage, ob ein solcher Mechanismus auch für die nackten Fermionmassen  $m_0^{(f)}$  existiert. Durch die Analyse der zugehörigen Renormierungsgruppenfunktion (siehe [Mut 87]) läßt sich dies aber verneinen. Durch Integration der Renormierungsgruppenfunktion erhält man die sogenannten Strommassen, die analog zur spontanen Massenskala  $\Lambda$  als Integrationskonstante eingeführt werden. Sie sind „triviale“ Renormierungsgruppeninvarianten und besitzen keine Kopplungsabhängigkeit.

### 1.3 Die Feynman-Regeln im euklidischen Impulsraum

Mittels der Fourier-Transformation läßt sich die Ortswirkung (1.1) in den euklidischen Impulsraum übertragen. Da auftretende Impulsintegrationen im Rahmen eines  $D$ -dimensionalen Regularisierungs- und Renormierungsschemas behandelt werden, ist die Wirkung in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen zu formulieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_E [A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] &= \\
- \frac{1}{2} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \Gamma_{VV}^{(0) \mu_1 \mu_2}_{a_1 a_2}(q_2) A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) \\
+ \frac{1}{3!} g_0 \nu_0^\epsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
&\times \Gamma_{3V}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3}_{a_1 a_2 a_3}(q_1, q_2, q_3) A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
- \frac{1}{4!} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_4}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \\
&\times \Gamma_{4V}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4} A_{a_1}^{\mu_1}(q_1) A_{a_2}^{\mu_2}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3) A_{a_4}^{\mu_4}(q_4) \\
- \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}^{(0) \mu_1 \mu_2}_{a_1 a_2}(q_2^2) \bar{c}_{a_1}(q_1) c_{a_2}(q_2) \\
+ g_0 \nu_0^\epsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
&\times \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{(0) \mu_1 \mu_2 \mu_3}_{a_1 a_2 a_3}(q_1) \bar{c}_{a_1}(q_1) c_{a_2}(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3) \\
- \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2) \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \bar{\Gamma}_{F\bar{F}(f)}^{(0) ij}(q_2) \psi_{(f)}^j(q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + g_0 \nu_0^\epsilon \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(q_1 + q_2 + q_3) \\
 & \times \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_{(f)}^i(q_1) \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V(f)}^{ij \mu_3}(q_2) \psi_{(f)}^j(q_2) A_{a_3}^{\mu_3}(q_3).
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

An den in der Wirkung auftretenden sieben Vertexfunktionen nullter Ordnung der Störungstheorie, die die sogenannten Basisvertices der Theorie darstellen, lassen sich die Feynman-Regeln ablesen. Dabei ist zu beachten, daß die nackten 2-Punkt-Vertices oder auch Selbstenergien die Negativinversen der zugehörigen nackten Propagatoren sind<sup>8</sup>:

$$\Gamma_{VV}^{(0)} = -D^{(0)-1}, \quad \Gamma_{G\bar{G}}^{(0)} = -\tilde{D}^{(0)-1}, \quad \bar{\Gamma}_{F\bar{F}(f)}^{(0)} = -S_{(f)}^{(0)-1}, \tag{1.40}$$

wobei  $f = 1, \dots, N_f$ . Die Feynman-Regeln im  $D$ -dimensionalen euklidischen Impulsraum lauten im einzelnen:

- Der nackte Gluon-Propagator:

$$\begin{aligned}
 D^{(0) \mu_1 \mu_2}_{a_1 a_2}(p) &:= \delta_{a_1 a_2} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} p^2 - (1 - \xi) p^{\mu_1} p^{\mu_2} \right) \frac{1}{p^4} \\
 &\hat{=} \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \quad \quad \quad \mu_2, a_2 \\ \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \end{array}
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

- Der nackte Geist-Propagator:

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{(0) a_1 a_2}(p^2) &:= \delta_{a_1 a_2} \frac{1}{p^2} \\
 &\hat{=} \begin{array}{c} a_1 \quad \quad \quad a_2 \\ \bullet \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \bullet \end{array}
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

- Der nackte Fermion-Propagator:

$$\begin{aligned}
 S_{(f)}^{(0) ij}(p) &:= \delta^{ij} \frac{1}{\not{p} + m_0^{(f)}} \\
 &\hat{=} \begin{array}{c} i \quad \quad \quad j \\ \bullet \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \bullet \end{array}
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Die nackten Vertices nehmen in algebraischer und graphischer Notation die folgende Form an:

<sup>8</sup>Die Indizierung wird hier nicht mitgeschrieben.

- Der nackte 3-Gluon-Vertex:

$$\Gamma_{3V}^{(0)}{}_{a_1 a_2 a_3}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (p_1, p_2, p_3) := i f_{a_1 a_2 a_3} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} \right)$$

$\hat{=} \quad \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu_3, a_3 \\ \mu_1, a_1 \\ \mu_2, a_2 \end{array} \quad (1.44)$

- Der nackte Geist-Antigeist-Gluon-Vertex:

$$\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{a_1 a_2 a_3}^{\mu_3}(p) := i f_{a_1 a_2 a_3} p^{\mu_3} \hat{=} \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{p}, a_1 \\ \mu_3, a_3 \\ a_2 \end{array} \quad (1.45)$$

- Der nackte Fermionen-Antifermion-Gluon-Vertex:

$$\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{(0)}{}_{a_3}^{ij\mu_3} := T_{a_3}^{ij} \gamma^{\mu_3} \hat{=} \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \quad (1.46)$$

- Der nackte 4-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4V}^{(0)}{}_{a_1 a_2 a_3 a_4}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &:= f_{a_1 a_2 b} f_{a_3 a_4 b} \left( \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} - \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} \right) \\ &+ f_{a_1 a_3 b} f_{a_4 a_2 b} \left( \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \right) \\ &+ f_{a_1 a_4 b} f_{a_2 a_3 b} \left( \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} - \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \right) \end{aligned}$$

$\hat{=} \quad \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \\ \mu_4, a_4 \\ \mu_2, a_2 \\ \mu_3, a_3 \end{array} \quad (1.47)$

Abschließend werden die Diagrammregeln für die vollen Propagatoren,

$$D_{a_1 a_2}^{\mu_1 \mu_2}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \\ \text{wavy line} \\ \mu_2, a_2 \end{array} \quad (1.48)$$

$$\tilde{D}_{a_1 a_2}(p^2) \hat{=} \begin{array}{c} a_1 \\ \text{dashed line} \\ a_2 \end{array} \quad (1.49)$$

$$S_{(f)}^{ij}(p) \hat{=} \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{solid line} \end{array} \quad (1.50)$$

und die Vertices formuliert:

$$\Gamma_{3V}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) \hat{=} \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{solid line} \\ \text{wavy line} \end{array} \quad (1.51)$$

$$\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{\mu_3}_{a_1 a_2 a_3}(-p_1, p_2, p_3) \hat{=} \begin{array}{c} a_1 \\ \text{dashed line} \\ a_2 \end{array} \quad (1.52)$$

$$\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V(f)}^{ij \mu_3}_{a_3}(-p_1, p_2, p_3) \hat{=} \begin{array}{c} i \\ \text{solid line} \\ j \end{array} \quad (1.53)$$

$$\Gamma_{4G}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}_{a_1 a_2 a_3 a_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \hat{=} \begin{array}{c} \mu_1, a_1 \\ \text{wavy line} \\ \mu_2, a_2 \\ \text{wavy line} \\ \mu_3, a_3 \\ \text{wavy line} \\ \mu_4, a_4 \end{array} \quad (1.54)$$

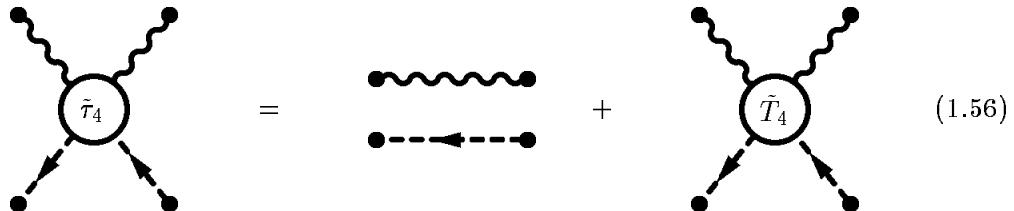
An den Vertices gilt Impulserhaltung. Die Pfeilrichtungen der Fermion- und Geist-Linien in den Vertices geben zugleich die Richtungen der Impulse an. Alle Impulse der Gluon-Beine werden als einlaufend betrachtet. Die äußeren Beine der Vertexfunktionen sind amputierte Beine und nicht mit den Propagatoren (1.48), (1.49) und (1.50) zu verwechseln. Zwei Vertices werden also stets durch einen Propagator verbunden. Im weiteren impliziert jede geschlossene Schleife ein  $D$ -dimensionales Impulsintegral, welches mit dem Faktor  $(2\pi)^{-D}$  zu multiplizieren ist. Geschlossene Fermion- und Geist-Schleifen erhalten ein negatives Vorzeichen, Diagramme mit  $n$  äquivalenten inneren Linien werden mit dem Symmetriefaktor  $1/n!$  versehen. Jeder Tadpole ist mit  $1/2$  zu multiplizieren.

## 1.4 Mandelstam-Variablen

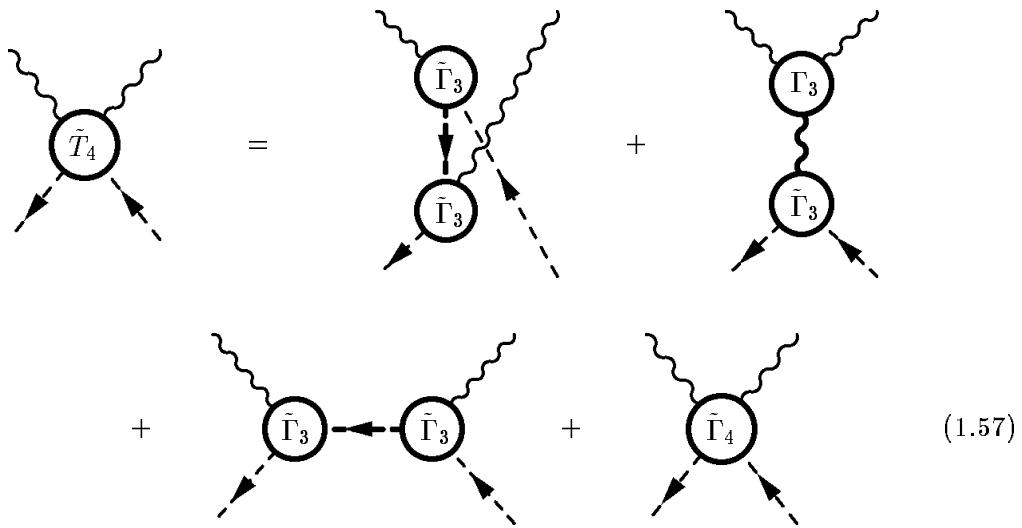
Die unverbundenen Greenschen Funktionen lassen sich, wie bereits erwähnt, aus dem erzeugenden Funktional gewinnen. Beispielsweise ist für die 4-Punkt-Geist-Gluon-Funktion die Größe

$$\left. \frac{\delta^4 Z_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_4}^{\mu_4}(p_4) \delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \omega_{a_2}(p_2) \delta \bar{\omega}_{a_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \quad (1.55)$$

zu berechnen. Aus der Definition der Vertices als 1-Teilchen-irreduzible Teile der amputierten, zusammenhängenden Greenschen Funktionen ist (1.55) in diagrammatischer Notation durch



gegeben. Geht man zu den zusammenhängenden und amputierten Funktionen über, so „überlebt“ in obiger Gleichung für  $\tilde{T}_4$  lediglich die schlichte Vertexfunktion  $\tilde{T}_4$ , die sich mittels einer Reduzibilitätsanalyse weiter zerlegen lässt (siehe auch (A.16)):



Hier ist  $\tilde{\Gamma}_4$  die 1-Teilchen-irreduzible („eigentliche“) 4-Punkt-Vertexfunktion. Mit der Definition der drei Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned}s &:= (p_1 + p_2)^2 = (-p_3 - p_4)^2 \\ u &:= (p_1 + p_3)^2 = (-p_2 - p_4)^2 \\ t &:= (p_1 + p_4)^2 = (-p_2 - p_3)^2,\end{aligned}\quad (1.58)$$

die sich aus den vier äußeren Impulsen der Amplitude zusammensetzen<sup>9</sup>, lässt sich also die folgende Zerlegung der Amplitude in Austauschgraphen angeben:

$$\tilde{T}_4 = \tilde{A}_{4,u} + \tilde{A}_{4,t} + \tilde{A}_{4,s} + \tilde{\Gamma}_4. \quad (1.59)$$

Bei der Herleitung der Slavnov-Taylor-Identität für den 3-Gluon-Vertex und der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Geist-Gluon-Vertex wird auf die Mandelstam-Variablen Bezug genommen. Für die dort angegebenen Amplituden gilt

$$\tilde{\mathcal{T}}_{4,s} = \tilde{A}_{4,u} + \tilde{A}_{4,t} + \tilde{\Gamma}_4 = \tilde{T}_4 - \tilde{A}_{4,s}. \quad (1.60)$$

Der Austauschgraph  $A_{4,s}$  im horizontalen  $s$ -Kanal ist in  $\tilde{\mathcal{T}}_{4,s}$  (siehe (1.60)) eliminiert.

---

<sup>9</sup>Von diesen Impulsen sind wegen  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$  immer nur drei voneinander unabhängig.



## Kapitel 2

# Die nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln

Ziel dieses Kapitels ist es, eine systematisch erweiterte Störungstheorie vorzustellen. Die Approximanten für die 2-Punkt und 3-Punkt-Vertexfunktionen werden in beliebiger Eichung  $\xi$  und ohne äußere Projektion angegeben, was eine Neuerung in dieser Arbeit darstellt. Zur Analyse der Slavnov-Taylor-Identitäten ist es notwendig, diese Ansätze auf die darin vorkommenden Hilfsamplituden zu verallgemeinern. Abschließend wird das Selbstkonsistenzproblem mit Hilfe der Schwinger-Dyson-Gleichungen auf Basis des  $1/g^2$ -Mechanismus formuliert.

### 2.1 Die Systematik des erweiterten Schemas

Die Vertexfunktionen werden, wie im 1. Kapitel eingeführt, weiterhin als formale Potenzreihe in  $g(\nu)^2$  entwickelt. Diese Entwicklung ist nur dann hinreichend semikonvergent, wenn die renormierte Kopplung für alle Skalen hinreichend klein bleibt. Dieser Sachverhalt wird aber durch Gitterrechnungen [LSW 94] und phänomenologische Arbeiten [SS 96] untermauert.

Wie wir bereits gesehen haben, besteht für die Vertexfunktionen neben der natürlichen Kopplungsabhängigkeit eine weitere Abhängigkeit von dem renormierungsgruppeninvarianten Massenparameter  $\Lambda$ . Obwohl die Beziehung (1.36) dazu genutzt werden könnte, die renormierte Kopplung  $g(\nu)$  durch die Massenskala zu ersetzen (Gleichung (1.35) wäre der Beginn einer asymptotischen Entwicklung dieser Ersetzung), ist es möglich, die Vertexfunktionen prinzipiell in beiden Parametern zu entwickeln. Eine solche Doppelentwicklung, die mathematisch gesehen einer sogenannten resurgenten Funktion entspricht, wäre im Wesentlichen identisch mit einer sogenannten Operatorprodukt-Entwicklung (OPE) [Kug 97] in ihrer von Wilson [Wil 69] ursprünglich postulierten *nicht-perturbativen* Bedeutung. Da aber  $\Lambda$  im Gegensatz zum dimensionslosen  $g(\nu)^2$  die Dimension einer Masse besitzt, stellt die „ $\Lambda$ -Richtung“ dieser Entwicklung stets automatisch eine asymptotische Entwicklung in  $\Lambda^2/k^2$  für  $k^2 \gg \Lambda^2$  dar, wo  $k^2$  pauschal für die unabhängigen Lorentz-skalaren Impulsvariablen der Vertexfunktion steht. Sie kann daher in dynamische Gleichungen, die stets

Schleifenintegrale bis herunter zu  $k = 0$  enthalten, prinzipiell nicht verwendet werden; dies ist der Grund dafür, weshalb die OPE, obwohl sie eine tiefliegende *strukturelle* Aussage macht, nicht zu einer *dynamischen* Theorie geführt hat. Vielmehr muß die  $\Lambda$ -Richtung der Doppelentwicklung zuerst - unter Ausnutzung der Analytizität der Vertexfunktionen in  $k^2$  - zu kleinen  $k^2$  analytisch fortgesetzt werden, was hier durch das bewährte Hilfsmittel der rationalen Approximanten bewerkstelligt wird.

Im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie werden die Vertexfunktionen als Doppelsequenz angesetzt:

$$\Gamma_N(\{k\}; g(\nu)^2; \nu) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}; g(\nu)^2; \nu) \quad (2.1)$$

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}; g(\nu)^2; \nu) = \Gamma_N^{[r,0]}(\{k\}; \Lambda) + \sum_{p'=1}^p \left( \frac{g(\nu)}{4\pi} \right)^{2p'} \Gamma_N^{[r,p']}( \{k\}; \Lambda; \nu). \quad (2.2)$$

In den Gleichungen steht  $\{k\}$  für sämtliche Impulsabhängigkeiten, der Index  $p$  zählt die Potenz der Kopplung bzw. die Ordnung der perturbativen Entwicklung, und der Index  $r$  bezeichnet den Grad der rationalen Approximation in  $\Lambda$ . Es stellt sich die Frage, wie dieser nicht-perturbative Parameter in die Vertexfunktionen neben der bereits durch die Störungsreihe bestehenden polynomialen Kopplungsabhängigkeit einzubauen ist und welche Bedingungen er zu erfüllen hat.

In der reinen Störungsreihe werden eventuelle Abhängigkeiten von  $\Lambda$  unterdrückt. Die nichtperturbative Massenskala verschwindet für  $g(\nu)^2 \rightarrow 0$  schneller als jede Potenz der Kopplung. Ein formaler Limes vom Typus  $\Lambda \rightarrow 0$  ist also bei endlicher Kopplung ein vernünftiger „Baustein“ der erweiterten Ansätze. Aufgrund der oben geschilderten Situation wird man somit zu einer gebrochen-rationalen Darstellung der Approximanten der nicht-perturbativ erweiterten Vertexfunktionen geführt, die die folgenden *physikalischen Randbedingungen* erfüllen sollen:

- Die Vertexfunktionen sollen nach Abschalten der nicht-perturbativen Massenskala in ihre perturbative Form übergehen. Wir bezeichnen den Grenzprozeß als „perturbativen Limes“:

$$\Gamma_N^{[r,p]}(\{k\}; \Lambda \rightarrow 0; \nu) \rightarrow \Gamma_N^{(p)pert}(\{k\}; \nu). \quad (2.3)$$

- Die QCD besitzt die Eigenschaft der asymptotischen Freiheit (1.35). Dies impliziert für  $p = 0$  eine „naive“ asymptotische Freiheit, d.h. beim Hochskalieren aller äußeren Impulse sollen die nichtperturbativen Approximanten in die perturbativen nackten Größen übergehen:

$$\Gamma_N^{[r,0]}(\{\lambda k\}; \Lambda) \rightarrow \Gamma_N^{(0)pert}(\{\lambda k\}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

- Die Impulsabhängigkeit der Vertexfunktionen  $\Gamma_N^{[r,p]}$  soll den Divergenzgrad der Schleifenintegrale im Vergleich zur Störungstheorie nicht erhöhen, denn die perturbative Renormierbarkeit soll erhalten bleiben und damit auch die Möglichkeit des einfachen *Power-Counting*.

Diese Forderungen schränken den Raum für mögliche Approximanten erheblich ein. In der expliziten Konstruktion einer Vertexapproximante ist die folgende Vorgehensweise zu beachten:

Die Vertexfunktionen sind zunächst, je nach ihrer Indexstruktur, bezüglich der Farbtensoren, Lorentz-Tensoren und Lorentz-invarianten Impulsfunktionen zu zerlegen. Danach werden letztere durch die gebrochen-rationalen Approximanten, die die explizite Abhängigkeit von  $\Lambda$  aufweisen, dargestellt. Spektraldarstellungen (siehe [Sti 96] und [Kuh 97]) legen nahe, eine faktorisierende Nennerstruktur der Approximanten für die Propagatoren und Vertices zu verwenden, da der Nenner eines Cauchy-Integranden für mehrere Variable stets in diesen Variablen faktorisiert.

## 2.2 Ansätze für die Basisvertices

In den bisherigen Arbeiten sind die Ansätze für die Basisvertices in Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) und mit äußerer Transversalprojektion formuliert worden, wodurch diese vereinfacht wurden. Der Geist-Sektor wurde bis auf die Behandlung von Kondensaten (siehe z.B. [Str 96]) außer Acht gelassen, da die Geist-Vertices aufgrund der Divergenzstrukturen in diesem Fall ihre störungstheoretische Form beibehalten. In dieser Arbeit werden die nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die Propagatoren und 3-Punkt-Vertexfunktionen in den drei Sektoren (Gluon, Fermion und Geist) in beliebiger Eichung benötigt. Die in [Sti 96] formulierten Ansätze werden mit Ausnahme der Farben auf die vollen Strukturen erweitert. Der 4-Gluon-Vertex wird nicht diskutiert, da eine Analyse im Zusammenhang mit seiner sehr komplizierten Slavnov-Taylor-Identität in dieser Arbeit nicht vorgenommen werden kann<sup>1</sup>.

### 2.2.1 Die modifizierten Propagatoren

Die Ansätze für die Propagatoren mit ungeradem Approximationsgrad  $r$  und paarweise komplex-konjugierten Propagatorpolstellen bezüglich  $p^2$  beschreiben nach dem Vorschlag von [Sti 96] bei geeigneter Parameterwahl *intrinsisch* kurzlebige Elementaranregungen von Teilchen und Antiteilchen. Pole mit reellen zeitartigen Impulsquadraten würden vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet asymptotisch frei detektierbare Teilchen beschreiben. Der Forderung nach Confinement wird somit entsprochen.

Der **Gluon-Propagator** lässt sich bezüglich seiner Lorentz-Struktur in einen Longitudinal- und einen Transversalanteil zerlegen:

$$D^{\mu\nu}(p) = t^{\mu\nu}(p) D_T(p^2) + l^{\mu\nu}(p) D_L(p^2), \quad (2.5)$$

wobei der Transversalprojektor durch

$$t^{\mu\nu}(p) = \delta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} = \delta^{\mu\nu} - l^{\mu\nu}(p) \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup> In der Approximationsstufe  $r = 1$  ist der 4-Gluon-Vertex in [Dri 97] behandelt.

gegeben ist. Seine Slavnov-Taylor-Identität (A.37) schränkt, sofern sie im nicht-perturbativen Bereich erhalten bleibt, den Gluon-Propagator ein.  $D_L(p^2)$  behält über alle Ordnungen seine störungstheoretische Form nullter Ordnung bei. Der Propagator-Ansatz im euklidischen Impulsraum, der die geforderten physikalischen Randbedingungen respektiert, lautet

$$D_T^{[r,0]}(p^2) = \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (p^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(p^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)}, \quad (2.7)$$

und für die Gluon-Selbstenergie in der Form eines Partialbruchs ist

$$-\Gamma_{TT}^{[r,0]}(p^2) = p^2 + u_{r,1}\Lambda^2 + \sum_{s=1}^r \frac{u_{r,2s+1}\Lambda^4}{(p^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}. \quad (2.8)$$

Für  $r = 1, 3, 5, \dots$  mit  $u_{r,1}, u_{r,2}, u_{r,3} \in \mathbb{R}$  ist  $u_{r,2s+2} = u_{r,2s}^*$  bzw.  $u_{r,2s+3} = u_{r,2s+1}^*$  für  $s = 2, 4, \dots, r-1$  sowie  $u_{r,s+} = u_{r,s-}^*$ . Zwischen den komplex-konjugierten Polen des Propagators und den Residuen der Vertexfunktionen besteht der folgende Zusammenhang:

$$u_{r,2t+1} = \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (u_{r,s+} - u_{r,2t})(u_{r,s-} - u_{r,2t})}{\prod_{s=1, s \neq t}^{(r+1)/2} (u_{r,2s} - u_{r,2t})} \quad \text{für } t = 1, \dots, r. \quad (2.9)$$

Mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta

$$u_{r,1} + \sum_{s=1}^r u_{r,2s} = \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (u_{r,s+} + u_{r,s-}) \quad (2.10)$$

lässt sich der Zusammenhang zwischen den komplex-konjugierten Polstellen des Propagators mit den übrigen Parametern und insbesondere auf dem Niveau  $r = 1$  mit den reellen Parametern in beliebiger Approximationsstufe  $r$  bestimmen. Die Gleichungen dazu sind z.B. in [Dri 97], [Kuh 97], [Sti 96] und [Voi 99] diskutiert.

Für den **Geist-Propagator** gilt nach Abseparation seiner Farbstruktur (A.7):

$$\hat{D}^{[r,0]}(p^2) = \frac{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s}\Lambda^2)}{p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1}\Lambda^2)}. \quad (2.11)$$

Er ist [Str 96] entnommen. Er hat oberflächlich betrachtet dieselbe Struktur wie der Gluon-Propagator, weist aber auch gravierende Unterschiede auf. Er hat zwei Pole auf der reellen Achse, wobei der eine massiv und der andere masselos ist. Alle weiteren erscheinen als komplex-konjugierte Polpaare. Da der Propagator in Landau-Eichung perturbativ bleibt,

verschwinden die Koeffizienten  $v$  bei  $\xi = 0$ .

Der **Fermion-Propagator** (Flavour f) schreibt sich auf der Stufe  $r$  der rationalen Approximation als

$$S_{(f)}^{[r,0]}(\not{p}) = \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} + \kappa_{r,s+}^{(f)})(\not{p} + \kappa_{r,s-}^{(f)})}. \quad (2.12)$$

Die entsprechende Vertexfunktion (Fermion-Selbstenergie) ist das Negativinverse (vgl. (1.40)) des Fermion-Propagators und durch

$$\begin{aligned} -\bar{\Gamma}_{F\bar{F}(f)}^{[r,0]}(\not{p}) &= \not{p} + \kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(\not{p} + \kappa_{r,2s}^{(f)})} \\ &= \not{p} \left( 1 - \sum_{s=1}^r \frac{(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(p^2 + (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2)} \right) + \mathbb{1} \left( \kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \frac{\kappa_{r,2s}^{(f)} (\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2}{(p^2 + (\kappa_{r,2s}^{(f)})^2)} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

gegeben für  $r = 1, 3, 5, \dots$  mit  $\kappa_{r,1}^{(f)}, \kappa_{r,2}^{(f)}, \kappa_{r,3}^{(f)} \in \mathbb{R}$  und  $\kappa_{r,2s+2}^{(f)} = \kappa_{r,2s}^{(f)*}$  bzw.  $\kappa_{r,2s+3}^{(f)} = \kappa_{r,2s+1}^{(f)*}$  für  $s = 2, 4, \dots, r-1$  sowie  $\kappa_{r,s+}^{(f)} = \kappa_{r,s-}^{(f)*}$ . Der Ausdruck rechts hinter dem Gleichheitszeichen in (2.13) entsteht durch Erweitern<sup>2</sup>. Analog zum Gluon-Propagator existiert auch hier ein Zusammenhang zwischen den komplex-konjugierten Polen des Propagators und den Residuen der Vertexfunktionen<sup>3</sup>

$$(\kappa_{r,2t+1}^{(f)})^2 = \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})(\kappa_{r,s-}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})}{\prod_{s=1, s \neq t}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,2s}^{(f)} - \kappa_{r,2t}^{(f)})}, \quad \text{für } t = 1, \dots, r, \quad (2.14)$$

mit

$$\kappa_{r,1}^{(f)} + \sum_{s=1}^r \kappa_{r,2s}^{(f)} = \sum_{s=1}^{(r+1)/2} (\kappa_{r,s+}^{(f)} + \kappa_{r,s-}^{(f)}). \quad (2.15)$$

Die nicht-perturbativen Parameter sind hier nicht wie beim Gluon-Propagator Vielfache der spontanen Massenskala, sondern besitzen eine polynomiale Abhängigkeit von  $\Lambda$  und den renormierungsgruppeninvarianten Strommassen  $\hat{m}$  (vgl. Kapitel 1.2)

$$\kappa_{r,1}^{(f)} = w_{r,1}^{(f)} \Lambda + w_{r,1}'^{(f)} \hat{m}^{(f)} \quad (2.16)$$

$$\kappa_{r,2s}^{(f)} = w_{r,2s}^{(f)} \Lambda + w_{r,2s}'^{(f)} \hat{m}^{(f)} \quad (2.17)$$

$$(\kappa_{r,2s+1}^{(f)})^2 = w_{r,2s+1}^{(f)} \Lambda^2 + w_{r,2s+1}'^{(f)} \Lambda \hat{m}^{(f)} + w_{r,2s+1}''^{(f)} (\hat{m}^{(f)})^2. \quad (2.18)$$

<sup>2</sup>Die euklidischen  $\gamma$ -Matrizen (B.9) sind so gewählt, daß  $\not{p} \not{p} = -p^2$  ist.

<sup>3</sup>Der Ansatz der komplex-konjugierten Pole des Propagators als „matrixwertige Pole“ stellt sicher, daß keine stabilen Teilchen beschrieben werden.

Die physikalischen Randbedingungen, die auch für die fermionischen Vertexfunktionen ihre Gültigkeit behalten, stellen an die Koeffizienten die folgenden Anforderungen

$$w_{r,1}^{(f)} = 1 \text{ und } w_{r,2s+1}^{(f)} = 0, \text{ für } s = 1, \dots, r. \quad (2.19)$$

Eine Diskussion der Ansätze in  $r = 1$  findet sich wiederum in [Dri 97], [Kuh 97], [Sti 96] und [Voi 99].

### 2.2.2 Der 3-Gluon-Vertex

Die in [Dri 97] bzw. [DS 98] vorgenommene Vereinfachung des sehr komplizierten 4-Gluon-Vertex wurde aus technischen Gründen notwendig. Der 3-Gluon-Vertex wird somit aus Konsistenzgründen bezüglich seiner Farbstruktur auf die total antisymmetrische Strukturkonstante eingeschränkt. Es werden also wie in der Störungstheorie keine Strukturen zu  $d_{abc}$  ausgebildet. Die Abseparation ergibt

$$\Gamma_{3V}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) = i f_{a_1 a_2 a_3} \Gamma_{3V}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3). \quad (2.20)$$

Da wir keine spezielle Eichung wählen, kommt die volle Lorentz-Struktur zum Tragen. Die Anzahl der unabhängigen Lorentz-Tensoren kann mit Hilfe von „Young-Tableaus“, wie sie z.B. in [Ste 94] zu finden sind, ermittelt werden. Hier erhält man im allgemeinen Fall 14 unabhängige Lorentz-Tensoren dritter Stufe, sowie sechs verschiedene Lorentz-invariante Impulsfunktionen, die zusammen mit der Strukturkonstanten die volle Bose-Symmetrie des Vertex sicherstellen. Ein zweckmäßiger Ansatz ist nach [Sti 99] durch

$$\begin{aligned} \left( \Gamma_{3V}^{[r,0]} \right)^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) = & \delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} F_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & + \delta^{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} F_0^{[r,0]}(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ & + \delta^{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} F_0^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ & + (p_1 - p_2)^{\mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} F_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & + \delta^{\mu_1 \mu_2} p_3^{\mu_3} F_2^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & + \delta^{\mu_2 \mu_3} p_1^{\mu_1} F_2^{[r,0]}(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ & + \delta^{\mu_3 \mu_1} p_2^{\mu_2} F_2^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ & + (p_2 - p_3)^{\mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} p_3^{\mu_3} F_3^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & + (p_3 - p_1)^{\mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} p_1^{\mu_1} F_3^{[r,0]}(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ & + (p_1 - p_2)^{\mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} p_2^{\mu_2} F_3^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ & + p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} F_4^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & + p_2^{\mu_2} p_3^{\mu_3} (p_2 - p_3)^{\mu_1} F_4^{[r,0]}(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ & + p_3^{\mu_3} p_1^{\mu_1} (p_3 - p_1)^{\mu_2} F_4^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ & + p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} p_3^{\mu_3} F_5^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

gegeben<sup>4</sup>. Um die Bose-Symmetrie nicht zu verletzen, müssen die Approximanten der invarianten Funktionen gewisse Permutationssymmetrien unter Vertauschung ihrer Impulsar-

<sup>4</sup>Ein für die Behandlung der Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex zweckmäßiger Ansatz mit Basistensoren höherer Massendimension ist in Anhang C aufgeführt.

gumente aufweisen<sup>5</sup>. Symmetrisch unter Austausch verhalten sich die Funktionen  $F_0$  und  $F_4$  bezüglich ihrer beiden ersten und  $F_1$  bezüglich aller Argumente. Das antisymmetrische Pendant stellt das Tripel  $F_2$ ,  $F_3$  und  $F_5$  dar. Für  $k = 0, \dots, 5$  haben die Approximanten die Form

$$F_k^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{N_{3V}^{k[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + u'_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + u'_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u'_{r,2s}\Lambda^2)}. \quad (2.22)$$

Das Zählerpolynom

$$N_{3V}^{k[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \delta_{k0}(p_1^2 p_2^2 p_3^2)^r + \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0} C_{m_1, m_2, m_3}^{k[r]} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_3^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-t-(m_1+m_2+m_3)} \quad (2.23)$$

wird durch die Randbedingungen stark eingeschränkt. In [Kuh 97] wurde gezeigt, daß die  $m_i$  bis  $r$  summiert werden, aber darüber hinaus sind noch die weiteren Restriktionen

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &\leq 3r - t \\ m_1 + m_2 &\leq 2r - t \\ m_2 + m_3 &\leq 2r - t \\ m_3 + m_1 &\leq 2r - t, \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit  $t = 0$  für  $k = 0, 2$  und  $t = 1$  für  $k = 1, 3, 4, 5$  zu erfüllen. Die bereits oben angesprochene Bose-Symmetrie liefert

$$\begin{aligned} C_{m_1, m_2, m_3}^{0[r]} &= C_{m_2, m_1, m_3}^{0[r]} \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{1[r]} &= C_{m_2, m_1, m_3}^{1[r]} = C_{m_1, m_3, m_2}^{1[r]}, \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{2[r]} &= -C_{m_2, m_1, m_3}^{2[r]} \quad \text{und} \quad C_{m_1, m_2, m_3}^{2[r]} = 0 \quad \text{für } m_1 = m_2 \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{3[r]} &= -C_{m_2, m_1, m_3}^{3[r]} \quad \text{und} \quad C_{m_1, m_2, m_3}^{3[r]} = 0 \quad \text{für } m_1 = m_2 \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{4[r]} &= C_{m_2, m_1, m_3}^{4[r]} \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{5[r]} &= C_{m_3, m_1, m_2}^{5[r]} = C_{m_2, m_3, m_1}^{5[r]} \quad \text{bzw.} \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{5[r]} &= -C_{m_2, m_1, m_3}^{5[r]} = -C_{m_1, m_3, m_2}^{5[r]} \quad \text{und} \\ C_{m_1, m_2, m_3}^{5[r]} &= 0 \quad \text{für } m_i = m_j \quad \text{und } i \neq j. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Die physikalischen Randbedingungen legen wenige der Koeffizienten bereits fest, denn im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  soll der Vertex in seine perturbative Form übergehen. Dies erfordert in (2.23), daß  $C_{rrr}^{k[0]} = 0$  für  $k = 0, \dots, 5$  ist.

<sup>5</sup> Bisher hat man sich auf die invarianten Funktionen beschränkt, die eine Transversalprojektion des 3-Gluon-Vertex in allen Beinen überleben. Das waren die drei  $F_0$ -Funktionen und die  $F_1$ -Funktion.

### 2.2.3 Der Geist-Antigeist-Gluon-Vertex

Analog zum 3-Gluon-Vertex wird auch der Geist-Vertex aus Konsistenzgründen bezüglich seiner antisymmetrischen Farbstrukturkonstanten angesetzt. Diese Vorgehensweise wird durch [Col 85] gestützt. Die Argumentation beruht auf dem Transformationsverhalten der Geister-Felder unter Ladungskonjugation und ist in Anhang B.5 aufgeführt. Für den Vertex gilt in seiner farbkovarianten Zerlegung

$$\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V a_1 a_2 a_3}^{\mu}(-p_1, p_2, k) = i f_{a_1 a_2 a_3} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{\mu}(-p_1, p_2, k). \quad (2.26)$$

Separation nach unabhängigen Lorentz-Strukturen liefert

$$\left( \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{[r,0]} \right)^{\mu}(-p_1, p_2, k) = -p_1^{\mu} \tilde{F}_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, k^2) + k^{\mu} \tilde{F}_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, k^2), \quad (2.27)$$

wobei  $k^{\mu} = p_1^{\mu} - p_2^{\mu}$  ist. Die beiden invarianten Funktionen entsprechen der  $F_0$ -Funktion des 3-Gluon-Vertex mit den Restriktionen (2.24) für  $t = 0$  und einem neuem Koeffizientensatz:

$$\tilde{F}_i^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, k^2) = \frac{N_{G\bar{G}V}^{i[r]}(p_1^2, p_2^2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (p_1^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (k^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2)}. \quad (2.28)$$

Das Zählerpolynom

$$\begin{aligned} N_{G\bar{G}V}^{i[r]}(p_1^2, p_2^2, k^2) &= \delta_{i0} (p_1^2 p_2^2 k^2)^r \\ &+ \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0} \tilde{C}_{m_1, m_2, m_3}^{i[r]} (p_1^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (k^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r - (m_1 + m_2 + m_3)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

ist wiederum durch die physikalischen Randbedingungen eingeschränkt.  $\tilde{C}_{rrr}^{i[0]} = 0$  für  $i = 0, 1$  und die Beziehungen

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &\leq 3r \\ m_1 + m_2 &\leq 2r \\ m_2 + m_3 &\leq 2r \\ m_3 + m_1 &\leq 2r \end{aligned} \quad (2.30)$$

sind zu erfüllen.

Um den Kreis der freien Parameter weiter zu verkleinern, bedient man sich einer „erweiterten BRS-Transformation“, wie sie in [Nis 94] bzw. [Nis 96] formuliert wird. Nach [Sme 98] ist die Funktion  $F_0$  invariant unter dem Austausch ihrer beiden ersten Impulsargumente. Dies impliziert für die nicht-perturbativen Parameter  $\tilde{C}^0$  die Beziehung

$$\tilde{C}_{m_1, m_2, m_3}^{0[r]} = \tilde{C}_{m_2, m_1, m_3}^{0[r]}. \quad (2.31)$$

Für  $F_1$  sind derartige Restriktionen nicht bekannt, so daß sich die komplizierte Struktur nicht vereinfachen läßt.

### 2.2.4 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Die globale Eichinvarianz lässt bei der Wahl der Farbstruktur für den Fermion-Vertex keinen Spielraum<sup>6</sup>. Die störungstheoretische Struktur wird beibehalten und kann somit gemäß

$$\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{l_1 l_2 \mu}(-p_1, p_2, k) = \left(T_a\right)^{l_1 l_2} \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{\mu}(-p_1, p_2, k) \quad (2.32)$$

absepariert werden. Die allgemeinste Lorentz-Struktur, die der Quantenelektrodynamik (QED) äquivalent ist, wird von 12 matrixwertigen Vektoren gebildet (siehe [Ber 68]) und ist in Anhang C angegeben. Der Ansatz im Sinne der erweiterten Feynman-Regeln hat die Form

$$\left(\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{[r,0]}\right)^{\mu}(-p_1, p_2, k) = \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa'_{r,2s})} \frac{N_{F\bar{F}V}^{[r] \mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + \bar{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa'_{r,2s})} \quad (2.33)$$

mit<sup>7</sup>

$$N_{F\bar{F}V}^{[r] \mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^{\lambda} \left\{ \sum_{m,n,n'=0}^r (k^2)^m \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} \times (\not{p}_1)^n \left[ C_{\lambda mnn'}^{[r]} \gamma^{\mu} + D_{\lambda mnn'}^{[r]} \frac{r^{\mu}}{\Lambda} + E_{\lambda mnn'}^{[r]} \frac{k^{\mu}}{\Lambda} \right] (\not{p}_2)^{n'} \right\}. \quad (2.34)$$

Dabei sind

$$r^{\mu} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)^{\mu} \quad \text{und} \quad k^{\mu} = (p_1 - p_2)^{\mu}. \quad (2.35)$$

Von hier ab werden Terme  $\propto D_{\lambda mnn'}$  und  $\propto E_{\lambda mnn'}$  nicht mehr mitgeschrieben, denn in [Kuh 97] konnte gezeigt werden, daß diese Größen aufgrund des Mechanismus der „kompenzierenden Pole“ (siehe dazu auch [DFK 98]) nicht selbstkonsistent behandelt werden können. Der chirale Limes ( $\hat{m} = 0$ ), der die Berechnungen erheblich vereinfacht, wird in dieser Arbeit ebenfalls durchgeführt.

Abschließend werden die Anforderungen formuliert, die an die  $C_{\lambda mnn'}$  gestellt werden. Die renormierungsgruppeninvarianten Massenskalen  $\Lambda$  und  $\hat{m}$  treten wie im Propagator polynomial auf. Also ist

$$n + n' \leq 4r - \lambda - 2m. \quad (2.36)$$

Die Randbedingungen fordern zum einen

$$C_{0mnn'}^{[r]} = \delta_{mr} c_{r-n}^{[r]} c_{r-n'}^{[r]} \quad (2.37)$$

mit  $c_{r-n}^{[r]} = 0$  für  $r - n < 0$  und sonst definiert

$$\text{durch} \quad \prod_{s=1}^r (p + w'_{r,2s}) = \sum_{s=0}^r c_{r-n}^{[r]} p^s. \quad (2.38)$$

<sup>6</sup>Die Flavour-Abhängigkeit ist im folgenden nicht explizit mitgeschrieben.

<sup>7</sup>Wegen der Dirac-Matrixstruktur ist die Reihenfolge der Faktoren von besonderer Bedeutung.

Um den perturbativen Divergenzgrad nicht zu erhöhen muß zum anderen

$$n + n' \leq 2r, \quad 2m + n \leq 3r, \quad 2m + n' \leq 3r \quad (2.39)$$

erfüllt sein. Die Ladungskonjugation (siehe Anhang B.5) reduziert die Parameterzahl durch die Symmetriebeziehung

$$C_{\lambda mn'n'}^{[r]} = C_{\lambda mnn'}^{[r]} \quad (2.40)$$

weiter.

### 2.2.5 Die modifizierten Hilfsamplituden der STI

In diesem Abschnitt werden die nicht-perturbativen Ansätze für die Hilfsamplituden in den Slavnov-Taylor-Identitäten der bezüglich eines Gluon-Beins longitudinal projizierten 3-Punkt-Vertices formuliert. Da in früheren Arbeiten in Landau-Eichung gearbeitet wurde, wo diese Amplituden keine Divergenzen ausbilden, ist eine Erweiterung auf die vollen Strukturen der Hilfsamplituden notwendig<sup>8</sup>.

#### 2.2.5.1 Die Amplitude $\hat{G}$

Zunächst wird die Hilfsamplitude für den 3-Gluon-Vertex (siehe A.42) konstruiert. Wie in den bisherigen Ansätzen wird  $\hat{G} \propto f_{abc}$  angesetzt, also proportional zur total antisymmetrischen Strukturkonstanten. Ein Vergleich mit der störungstheoretischen Form nullter Ordnung (A.43) liefert

$$\hat{G}_{abc}^{\mu\nu}(p_3, p_2, p_1) = -i f_{abc} \hat{G}^{\mu\nu}(p_3, p_2, p_1). \quad (2.41)$$

Die Zerlegung nach Lorentz-Strukturen ergibt insgesamt fünf unabhängige Funktionen. Ein sehr zweckmäßiger Ansatz kann [BC 80] entnommen werden:

$$\begin{aligned} & \left( \hat{G}^{[r,0]} \right)^{\mu\nu}(p_3, p_2, p_1) \\ &= \delta^{\mu\nu} \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) - p_2^\nu p_1^\mu \tilde{G}_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + p_1^\mu p_3^\nu \tilde{G}_2^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &+ p_1^\nu p_3^\mu \tilde{G}_3^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + p_3^\nu p_3^\mu \tilde{G}_4^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Die Wahl der von  $\Lambda$  abhängigen Approximanten wird durch die Identität (A.45) vorgegeben. Ein Vergleich mit (2.28) impliziert den Ansatz

$$\tilde{G}_i^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{N_G^{i[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2)}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2)} \quad (2.43)$$

<sup>8</sup> Warum die Hilfsamplituden der Slavnov-Taylor-Identitäten in Landau-Eichung keine Divergenzen ausbilden, ist in Abschnitt 2.4 diskutiert.

mit der Zählerfunktion

$$\begin{aligned} N_{\hat{G}}^{i[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) &= \delta_{i0} (p_3^2 p_2^2 p_1^2)^r \\ &+ \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0} G_{m_1, m_2, m_3}^{i[r]} (p_3^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_1^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r - (m_1 + m_2 + m_3)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Restriktionen, die an  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  gestellt werden, lassen sich am Vorbild des Gluon-Vertex bestimmen. Beim Vergleich der Massendimensionen findet man die Einschränkungen

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &\leq 3r - t \\ m_1 + m_2 &\leq 2r - t \\ m_2 + m_3 &\leq 2r - t \\ m_3 + m_1 &\leq 2r - t \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit  $t = 0$  für  $i = 0$  und  $t = 1$  sonst. Symmetriebeziehungen für die nicht-perturbativen Koeffizienten  $G_{m_1, m_2, m_3}$  sind nicht bekannt. Man sieht, daß die Approximanten die Amplitude im perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) in ihre störungstheoretische Form hinübergehen lassen.

### 2.2.5.2 Die Amplitude $\hat{F}$

Der Aufbau dieser Hilfsamplitude gestaltet sich recht einfach, da keinerlei Lorentz- oder Matrix-Strukturen zu beachten sind. Die Farbstruktur ist gleich der störungstheoretischen:

$$\hat{F}_{abc}(-p_1, p_2, p_3) = -i f_{abc} \hat{F}(p_1^2, p_2^2, p_3^2). \quad (2.46)$$

Da die zugehörige STI fast vollständig im Geist-Sektor verwurzelt ist, bietet sich analog zum Geist-Vertex der natürliche Ansatz

$$\hat{F}^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{N_F^{[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2)}{\prod_{s=1}^r (p_3^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + \bar{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2)} \quad (2.47)$$

an. Wiederum erfüllt das Zählerpolynom

$$\begin{aligned} N_{\hat{F}}^{[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) &= (p_3^2 p_2^2 p_1^2)^r \\ &+ \sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0} F_{m_1, m_2, m_3}^{i[r]} (p_3^2)^{m_1} (p_2^2)^{m_2} (p_1^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r - (m_1 + m_2 + m_3)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

die bereits bekannten Restriktionen (2.45), die hier für den Fall  $t = 0$  gelten.

### 2.2.5.3 Die Amplituden $\hat{C}$ und $\hat{C}'$

Analog zum Fermion-Vertex erfordert die globale Eichinvarianz

$$\hat{C}^i{}_b(p_2, k, -p_1) = -(T_b)^{ki} \hat{C}(p_2, k, -p_1) \quad (2.49)$$

$$\hat{C}'^k{}_b{}^i(-p_1, k, p_2) = -(T_b)^{ki} \hat{C}'(-p_1, k, p_2). \quad (2.50)$$

Bei der Nennerkonstruktion der nicht-störungstheoretisch erweiterten Hilsamplituden wird eine Analyse des Vertex<sup>9</sup>



mit dem Vakuumerwartungswert im nicht-amputierten Schema

$$\begin{aligned} \hat{C}^i{}_b{}^k(p_2, k, -p_1) S(p_1) \tilde{D}(k) \\ = - (T_a)^{ij} \int d^D x \int d^D y e^{i[-p_2(x-y)+p_1y]} \langle 0 | T[\psi^j(x) \bar{c}_a(x) c_b(y) \bar{\psi}^k(0)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.52)$$

notwendig. Die graphische Notation der Hilsamplitude (2.51), die eine 3-Punkt-Funktion ist, stützt sich auf [Dri 97]. Neben dem zueinander gewinkelten Fermion- und Geist-Bein läuft von links ein zusammengesetztes Bein-Paar in den Vertex hinein. Es handelt sich hierbei um einen sogenannten zusammengesetzten Operator, der auch „Composite“ genannt wird. Wie an (2.52) zu sehen ist, sind ein Fermion- und ein Geist-Feld am selben Raum-Zeit-Punkt lokalisiert. Der Composite besitzt daher sowohl skalaren als auch matrixwertigen Charakter. Es ist darum sinnvoll, diese Vertex-Polstelle matrixwertig anzusetzen. An den anderen Linien laufen, wie in den üblichen Basisvertices, Propagatoren in den Vertex hinein. Man hat dort ein auslaufendes Fermion mit Matrixstruktur und einen einlaufenden skalaren Geist. Um letzterem Rechnung zu tragen, wird hier eine Polstelle wie in der  $\hat{G}$ -Amplitude angesetzt, so daß insgesamt

$$\hat{C}^{[r,0]}(p_2, k, -p_1) = \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa'_{r,2s})} \frac{N_{\hat{C}}^{[r]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa'_{r,2s})}, \quad (2.53)$$

$$\hat{C}'^{[r,0]}(-p_1, k, p_2) = \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_1 + \kappa'_{r,2s})} \frac{N_{\hat{C}'}^{[r]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2)}{\prod_{s=1}^r (k^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (\not{p}_2 + \kappa'_{r,2s})} \quad (2.54)$$

<sup>9</sup>Die Argumentation ist auf  $\hat{C}$  eingeschränkt, denn die Erweiterung der Hilsamplitude  $\hat{C}'$  folgt aus Symmetriegründen analog.

gilt. Kandidaten für die matrixwertigen Zählerpolynome sollten die vier unabhängigen Strukturen  $\mathbb{1}$ ,  $\not{p}_1$ ,  $\not{p}_2$  und  $\not{p}_1 \not{p}_2$  ausbilden. Einen sinnvollen Ansatz bilden

$$N_{\hat{C}}^{[r]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \left\{ \sum_{m,n,n'=0}^r (k^2)^m \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} (\not{p}_1)^n \hat{C}_{\lambda m n n'}^{[r]} (\not{p}_2)^{n'} \right\} \quad (2.55)$$

und

$$N_{\hat{C}'}^{[r]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) = \sum_{\lambda=0}^{4r} \Lambda^\lambda \left\{ \sum_{m,n,n'=0}^r (k^2)^m \hat{m}^{4r-(2m+n+n'+\lambda)} (\not{p}_1)^n \hat{C}'_{\lambda m n n'}^{[r]} (\not{p}_2)^{n'} \right\} \quad (2.56)$$

mit denselben Randbedingungen wie beim Fermion-Vertex. Auch dieser besitzt genau wie die Hilfsamplituden die Massendimension  $\Lambda^0$ .

## 2.3 Das Selbstkonsistenzproblem

Der Selbstkonsistenzmechanismus auf Basis der Schwinger-Dyson-Gleichungen wird nun vorgestellt. In niedrigster perturbativer Ordnung ergibt sich im ersten Iterationsschritt um die perturbative nullte Ordnung aus (1.10) mit (2.1) und (2.2) in beliebiger Stufe der rationalen Approximation das Resultat

$$\left\{ \left( \frac{\bar{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_N \left[ \Gamma_N^{[r,0]} \right] \right\}_{R,\nu} = \Gamma_N^{[r,0]} - \Gamma_N^{(0)per} + \mathcal{O}(g(\nu)^2, e(r+1)). \quad (2.57)$$

Bis auf Fehler in der perturbativen Ordnung  $g(\nu)^2$  und in dem Grad der nächst höheren nicht-perturbativen Approximationssstufe, hier durch  $e(r+1)$  angedeutet, ist der erste Iterationsschritt der SDG erfüllt. Der Index  $R$  deutet an, daß die Resultate aus Schleifenberechnungen von der Wahl des Renormierungsschemas abhängig sind.

Durch die Berechnung der Schleifenintegrale in (2.57) erfolgt die Bestimmung der  $\Gamma_N^{[r,0]}$ , wobei ein dimensionelles Regularisierungs- und Renormierungsschema verwendet wird. Diese Größen lassen sich dann als die „neuen Feynman-Regeln“ der Theorie auffassen. Mit ihnen lassen sich physikalische Meßgrößen berechnen. In [Voi 99] etwa werden mit den Parametersätzen aus [Dri 97] und [Kuh 97] nicht-perturbative Feynman-Regeln aufgestellt und damit die hadronische Vakuumpolarisation des Photons ermittelt.

Wie an der Beziehung (2.57) abzulesen ist, müssen die Schleifenintegrale  $\Phi_N$  in der Lage sein, die Kopplungsabhängigkeit zu eliminieren. Damit Terme der Ordnung  $g^0$  ausgebildet werden können, müssen die Schleifenintegrale *selbstkonsistent* einen geeigneten Vorfaktor produzieren.

Nach [Sti 96] geschieht dies durch den sogenannten  $1/g^2$ -Mechanismus. Durch diesen Mechanismus werden die Beträge in  $\Phi_N$  kopplungsunabhängig und divergenzfrei, was allerdings voraussetzt, daß die Schleifenintegrale neben den bei der Integration sowieso schon

auftretenden Divergenzen die Größe  $(\Lambda/\nu_0)^{-2\epsilon}$  hervorbringen<sup>10</sup>. Die Schleifenintegrale in (2.57) sollten damit insgesamt den Faktor

$$\Pi(\epsilon) = \left(\frac{g_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} \quad (2.58)$$

liefern. Wir werden sehen, daß die Schleifenintegrale dies auch bewirken, denn mittels elementarer Umformungen erhält man aus (1.37)

$$\left(\frac{\Lambda}{\nu_0}\right)^{-2\epsilon} = \frac{\alpha_1}{\alpha(\nu)} \exp\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha(\nu)} \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'}\right). \quad (2.59)$$

Unter Ausnutzung der Integraldarstellung der Renormierungskonstanten (1.32) findet sich für den Faktor  $\Pi(\epsilon)$ :

$$\Pi(\epsilon) = \frac{\alpha_1}{4\pi\epsilon} \exp\left(-\int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha'}{4\pi\epsilon f(\alpha') + \alpha'}\right). \quad (2.60)$$

Man sieht, daß  $\Pi(\epsilon)$  kopplungsunabhängig ist und zwar exakt! Nach Abspalten der in  $\epsilon$  regulären Terme findet sich (analoge Vorgehensweise wie in (1.33))

$$\begin{aligned} \Pi(\epsilon) &= \frac{\alpha_1}{4\pi\epsilon} \frac{4\pi\epsilon/\beta_0}{4\pi\epsilon/\beta_0 + \alpha_1} \exp\left(-\epsilon \int_0^{\alpha_1} d\alpha' \rho_\alpha(\alpha', \epsilon)\right) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_0}, \quad \text{da } \rho_\alpha(0, \epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Das Funktional  $\Phi_N$  kompensiert die Divergenz und liefert Terme  $\propto g^0$ .

Bei der expliziten Berechnung von Schleifenintegralen wird man drei Typen von Beiträgen antreffen. Die Behandlung der unterschiedlichen Ausdrücke wird in folgender Liste kurz geschildert:

- nicht-perturbative Divergenzen:

Diese Divergenzen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) verschwinden. Die Beiträge der nicht-perturbativen Divergenzen modifizieren die  $\Gamma_N^{[r,0]}$  gemäß (2.57).

- perturbative Divergenzen:

Auf die perturbativen Divergenzen darf der  $1/g^2$ -Mechanismus wegen der Randbedingung (2.3) nicht angewendet werden. Die Divergenzen bleiben im perturbativen Limes erhalten. Sie sind mit den Divergenzen der betreffenden Renormierungskonstanten zu vergleichen und werden störungstheoretisch renormiert.

- endliche Anteile:

Die den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  überlebenden endlichen Anteile liefern Beiträge in erster Ordnung der Kopplung  $g^2$ , und stellen die „quasi-perturbativen“ Korrekturen von (2.2) für  $p = 1$  dar. Die dort auftretenden gemischten Logarithmen gehen dann im perturbativen Limes in die üblichen perturbativen Logarithmen über<sup>11</sup>.

<sup>10</sup>In 1-Schleifen-Ordnungen werden Divergenzen  $\propto (1/\epsilon)$  ausgebildet.

<sup>11</sup>Eine Berechnung von endlichen Anteilen wird in dieser Arbeit nicht vorgenommen.

Der Selbstkonsistenzmechanismus entkoppelt das unendlich hierarchische Schwinger-Dyson-Gleichungssystem vollständig auf elegante Weise und liefert ein endliches Selbstkonsistenz-Gleichungssystem bezüglich der nicht-perturbativen Parameter, welches auf die sieben oberflächlich divergenten Basisvertices  $\Gamma_{VV}$ ,  $\bar{\Gamma}_{G\bar{G}}$ ,  $\bar{\Gamma}_{F\bar{F}}$ ,  $\Gamma_{3V}$ ,  $\bar{\Gamma}_{G\bar{G}V}$ ,  $\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}$  und  $\Gamma_{4V}$  beschränkt ist. Dies ist sofort einzusehen, denn nur die oberflächlich divergenten Vertices sind in der Lage, die erforderlichen nicht-perturbativen Divergenzen auszubilden, um so Beträge zur Ordnung  $g^0$  liefern zu können. Man hat somit ein natürliches Abbruchkriterium für die unendliche Hierarchie der SDG. Im Gegensatz dazu ist beim „nicht-linearen  $\sigma$ -Modell“ die Zahl der zum Selbstkonsistenzmechanismus beitragenden SDG nicht beschränkt. Die Zahl der erweiterten Feynman-Regeln „proliferiert“ [Pin 97].

Zieht man in Schleifenberechnungen die Approximanten aus den vorangegangenen Abschnitten hinzu, so ist zu sehen, daß Pole in den Impulsen äußerer Beine der nicht-perturbativ erweiterten Vertexfunktionen nach außen abfaktorisieren. In den SDG für die inversen Propagatoren entspricht dies den Faktoren der 3-Punkt-Vertexfunktionen. Um beim Berechnen von Selbstkonsistenzgleichungen nicht einen lokal unendlich großen Fehler zu machen, müssen alle Gluon-, Geist- und Fermion-Pole jeweils an denselben Stellen auftreten. Das bedeutet

$$\begin{aligned} u_{r,2s} &= u'_{r,2s} = \bar{u}'_{r,2s} = \bar{u}'_{r,2s} \\ v_{r,2s} &= v'_{r,2s} \\ \kappa_{r,2s} &= \kappa'_{r,2s}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Damit liegen die Polstellen der 3-Punkt-Funktionen bezüglich *innerer* Diagrammimpulse genau auf den Nullstellen der Propagatoren und können gekürzt werden.

Der so vorgestellte Selbstkonsistenzmechanismus kommt im 5. Kapitel dieser Arbeit zum Tragen. Dort wird die einfachste Slavnov-Taylor-Identität (A.38)

$$p^{\mu_2} p^{\mu_1} \Gamma_{VV}^{\mu_1 \mu_2}(p) = -\frac{1}{\xi} \tag{2.63}$$

auf 1-Loop-Niveau auf Selbstkonsistenz untersucht, wobei die in den Schleifen auftretenden Vertices jeweils ihre STI erfüllen. Die Vorgehensweise ist sofort einsichtig, wenn man sich vor Augen führt, daß (2.63) die longitudinal projizierte Schwinger-Dyson-Gleichung der Gluon-Selbstenergie ist. Also ist nicht nur innerhalb der SDG, sondern auch im Bereich der Slavnov-Taylor-Identitäten Selbstkonsistenz zu fordern.

## 2.4 Bemerkung zu Bethe-Salpeter-Resummationen

In den bisherigen Überlegungen lieferten die Schwinger-Dyson-Gleichungen bzw. ihre longitudinal projizierten Formen, die dann mit Slavnov-Taylor-Identitäten zu vergleichen sind, im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie, Selbstkonsistenzgleichungen. Mit der sogenannten „Bethe-Salpeter-Resummation“ (siehe dazu [Rom 69] und [IZ 80]) ist man in der Lage verbesserte dynamische Gleichungen zu formulieren, mit denen sich nach bekanntem Muster Selbstkonsistenzgleichungen aufstellen lassen.

Allgemein lässt sich für eine beliebige 4-Punkt-Funktion eine Zerlegung in Beiträge durchführen, die sich bezüglich der Eigenschaft der 2-Teilchen-Reduzibilität unterscheiden. Wir stellen die Bethe-Salpeter-Integralgleichung für die in Abschnitt 1.4 behandelte Geist-Gluon-Amplitude im horizontalen  $s$ -Kanal auf. Sie ist in graphischer Notation gegeben durch

The diagram consists of three parts separated by equals and plus signs. The first part is a circle with a wavy line entering from the top-left and a dashed line exiting to the bottom-left, labeled  $\tilde{T}_{4,s}$ . The second part is a square with a wavy line entering from the top-left and a dashed line exiting to the bottom-left, labeled  $\tilde{K}_s$ . The third part is a loop diagram with a circle labeled  $\tilde{T}_{4,s}$  and a square labeled  $\tilde{K}_s$ , with a wavy line entering from the top-left and a dashed line exiting to the bottom-right. The label  $(g_0 \nu_0^\epsilon)^2$  is placed between the second and third parts.

(2.64)

Dabei enthält der Bethe-Salpeter-Kern  $\tilde{K}_s$  alle im horizontalen Kanal 1-PI- und 2-PI-Funktionen und filtert somit den 2-Teilchen-irreduziblen Teil aus der Amplitude  $\tilde{T}_{4,s}$  heraus.

Wir wollen die Integralgleichung für die Hilfsamplitude (A.42) der Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex einer Bethe-Salpeter-Resummation unterziehen. Mit der Gleichung (2.64) ist für diese

The diagram consists of two parts separated by equals and plus signs. The first part is a circle with a wavy line entering from the top-left and a dashed line exiting to the bottom-left, labeled  $\hat{G}$ . The second part is a circle with a wavy line entering from the top-left and a dashed line exiting to the bottom-left. The third part is a loop diagram with a square labeled  $\tilde{K}_s$  and a circle labeled  $\tilde{T}_{4,s}$ , with a wavy line entering from the top-left and a dashed line exiting to the bottom-right. The label  $(g_0 \nu_0^\epsilon)^2$  is placed between the second and third parts.

(2.65)

Dies lässt sich zusammenfassen, und man gelangt so zur Bethe-Salpeter-Gleichung der  $\hat{G}$ -Hilfsamplitude

$$(2.66)$$

Mit der Skelettgraphenentwicklung des Bethe-Salpeter-Kerns nimmt die Hilfsamplitude auf 1-Schleifen-Niveau die folgende Form an:

$$(2.67)$$

Wie in Abschnitt (2.2.5) bereits bemerkt worden ist, bilden die Hilfsamplituden der Slavnov-Taylor-Identitäten in Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ) auf 1-Schleifen-Niveau keine Divergenzen aus. Dies ist an der Bethe-Salpeter-resummierten Form durch Abzählen der Impulspotenzen der Propagatoren und Vertices in den Schleifen-Diagrammen leicht abzulesen. In beliebiger Eichung sind die beiden letzten Diagramme in (2.67) logarithmisch divergent. Die Propagatoren „gehen“ je mit der Massendimension  $-2$ , die Vertices besitzen die Massendimension  $1$ , und die Hilfsamplituden sind, wie an der störungstheoretischen Form abzulesen ist, dimensionslos. Für  $\xi = 0$  nehmen die Propagatoren eine rein transversale Struktur an. Zieht man in den Diagrammen aus den Geist-Vertices, die mit einer inneren Gluon-Linie verbunden sind, einen Integrationsimpuls über die Identität (A.45) hinaus, so werden diese durch die Transversalprojektoren der Propagatoren eliminiert. Der Divergenzgrad der Diagramme erniedrigt sich um eine Potenz, wodurch die Schleifen effektiv konvergent sind.

Diese Überlegung trifft auch für die Hilfsamplituden der weiteren Slavnov-Taylor-Identitäten zu. In den Bethe-Salpeter-resummierten Amplituden der STI des Fermion- und des Geist-Vertex findet ebenfalls ein Teilchen-Austausch der 3-Punkt-Vertices über ein Gluon statt. Wiederum überführt die Landau-Eichung die divergenten Schleifen in konvergente. Legt man sich jedoch in der Wahl der Eichung nicht fest, so lassen sich aus den Bethe-Salpeter-resummierten Hilfsamplituden unter Verwendung kompensierender Pole weitere Selbstkonsistenzgleichungen aufstellen.

## Kapitel 3

# Die Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex

Sowohl in diesem als auch in dem noch folgenden Kapitel werden Beziehungen erarbeitet, die von den nicht-perturbativen Koeffizienten der Approximanten für die Propagatoren und Vertices zu erfüllen sind. Fordert man Eichinvarianz, so werden diese Restriktionen von den Slavnov-Taylor-Identitäten, von denen man weiß, daß sie perturbativ ( $\Lambda = 0$ ) gelten, auf einem gewissen Niveau erzwungen. Im nicht-störungstheoretischen Fall ist eine exakte Erfüllung höchstens in schwach nicht-perturbativen Bereichen, d.h. in niedrigen Potenzen von  $\Lambda$ , zu erwarten.

### 3.1 Skalare Projektion

Zum Aufstellen der Restriktionen wird die STI des 3-Gluon-Vertex zu Beginn skalar projiziert. Dies liefert einen Satz von Gleichungen zwischen den Approximanten aus dem 2. Kapitel. Diese Beziehungen könnten einmal durch direkten Vergleich der Polstrukturen ausgewertet werden; wenn es sich jedoch wie hier um einen Vergleich zwischen *rationalen* Funktionen handelt, kann man äquivalent dazu das Problem auch durch Heraufmultiplizieren von Nennern in einen reinen Polynomvergleich in Potenzen von  $\Lambda$  und in den äußeren Impulsen umwandeln. Dieses Verfahren, das demjenigen bei der Bestimmung von Padé-Approximanten (siehe [Sch 91]) ähnelt, wird in diesem und im nächsten Kapitel bevorzugt. Nach (A.41) ist die Identität durch

$$\begin{aligned} p_1^{\nu_1} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) \\ = p_1^2 \tilde{D}(p_1^2) \left\{ \Gamma_{TT}(p_2) t^{\mu \nu_2}(p_2) \hat{G}_{a_2 a_1 a_3}^{\mu \nu_3}(p_2, p_1, p_3) \right. \\ \left. + \Gamma_{TT}(p_3) t^{\mu \nu_3}(p_3) \hat{G}_{a_3 a_1 a_2}^{\mu \nu_2}(p_3, p_1, p_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

gegeben. Die Abseparation der Farbstruktur nach (2.20) und (2.41) hat

$$\begin{aligned} p_1^{\nu_1} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(p_1, p_2, p_3) \\ = p_1^2 \tilde{D}(p_1^2) \left\{ \Gamma_{TT}(p_2) t^{\mu \nu_2}(p_2) \hat{G}^{\mu \nu_3}(p_2, p_1, p_3) \right. \\ \left. + \Gamma_{TT}(p_3) t^{\mu \nu_3}(p_3) \hat{G}^{\mu \nu_2}(p_3, p_1, p_2) \right\} \end{aligned}$$

$$- \Gamma_{TT}(p_3) t^{\mu\nu_3}(p_3) \hat{G}^{\mu\nu_2}(p_3, p_1, p_2) \} \quad (3.2)$$

zur Folge. Für die Hilfsamplituden  $\hat{G}$  wird die Tensorzerlegung

$$\begin{aligned} \hat{G}^{\mu\nu}(p_3, p_2, p_1) &= \delta^{\mu\nu} \tilde{G}_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2) - p_2^\nu p_1^\mu \tilde{G}_1(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + p_1^\mu p_3^\nu \tilde{G}_2(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &\quad + p_1^\nu p_3^\mu \tilde{G}_3(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + p_3^\nu p_3^\mu \tilde{G}_4(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

aus (2.42) verwendet. Sie ist sehr zweckmäßig, denn die Transversalprojektoren in der STI bringen die Größen  $\tilde{G}_3$  und  $\tilde{G}_4$  zum Verschwinden.

Bei der Wahl der Basis für  $\Gamma_{3V}$  wird hier (C.2) verwendet. Diese Basis hat zwar eine höhere Massendimension als (2.21), aber den Vorteil, daß die F- und H-Funktionen durch die Longitudinalprojektion des einen Beins eliminiert werden. Unter Verwendung dieser Ansätze in der STI wird nach unabhängigen Tensorgrößen (z.B. nach  $\delta^{\nu_3\nu_2}$ ,  $p_1^{\nu_3}p_3^{\nu_2}$ ,  $p_1^{\nu_3}p_1^{\nu_2}$ ,  $p_2^{\nu_3}p_1^{\nu_2}$  und  $p_2^{\nu_3}p_3^{\nu_2}$ ) sortiert und dann ein Koeffizientenvergleich durchgeführt, der skalare Gleichungen liefert. Um den Gleichungssatz übersichtlich darzustellen, wird eine vereinfachende Notation für die invarianten Funktionen benutzt<sup>1</sup>:

$$G_0^{ijk} = p_j^2 \tilde{D}(p_j^2) \Gamma_{TT}(p_k) \frac{1}{p_k^2} \tilde{G}_0(p_i^2, p_j^2, p_k^2) \quad (3.4)$$

$$A_{lmn} = A(p_l^2, p_m^2, p_n^2). \quad (3.5)$$

Nimmt man neben (3.2) die longitudinal projizierte STI in den jeweils anderen Impulskanälen hinzu, so bekommt man insgesamt 15 Gleichungen, die sich einerseits aus den invarianten Funktionen des Ansatzes für die Vertexfunktion (C.2) und andererseits aus denen der Hilfsamplitude (3.3) zusammensetzen. Mit Hilfe von [BC 80] ist

$$\begin{aligned} A_{123} &= -\frac{1}{4} \left\{ 2(G_0^{312} + G_0^{321}) + 2p_1p_3 G_2^{321} + 2p_2p_3 G_2^{312} \right. \\ &\quad \left. + p_3^2 (G_1^{123} + G_1^{213}) + (p_1^2 - p_2^2)(G_1^{231} + G_1^{312} - G_1^{132} - G_1^{321}) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} B_{123} &= \frac{1}{4} \left\{ 2(G_0^{312} - G_0^{321}) - 2p_1p_3 G_2^{321} - 2p_2p_3 G_2^{312} \right. \\ &\quad \left. - p_3^2 (G_1^{312} - G_1^{321} + G_1^{231} - G_1^{132}) + (p_1^2 - p_2^2)(G_1^{123} + G_1^{213}) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$C_{123} = \frac{1}{p_1^2 - p_2^2} \left\{ G_0^{132} - G_0^{231} + p_1p_3 G_2^{231} - p_2p_3 G_2^{132} \right\} \quad (3.8)$$

$$S_{123} = \frac{1}{2} \left\{ G_1^{123} + G_1^{231} + G_1^{312} - G_1^{132} - G_1^{213} - G_1^{321} \right\} \quad (3.9)$$

mit der Restriktion

$$G_0^{123} - G_0^{213} - p_1p_2 (G_1^{123} - G_1^{213}) + p_1p_3 G_2^{123} - p_2p_3 G_2^{213} = 0 \quad (3.10)$$

für den Funktionensatz aus (3.3). Hinzu kommen noch die zyklischen Permutationen der Impulsargumente in den Gleichungen, so daß man insgesamt auf die 15 Beziehungen kommt.

<sup>1</sup>Die Notation für die anderen invarianten Funktionen ist analog und nicht explizit aufgeführt.

## 3.2 Die Nebenbedingungen

In der systematisch erweiterten Störungstheorie sind die Approximanten des 3-Gluon-Vertex speziell für die Basis (2.21) konstruiert worden. Möchte man obiges Gleichungssystem analysieren, so ist es notwendig, Relationen zwischen beiden Basen bzw. ihren invarianten Funktionen zu formulieren. Ihre Berechnung ist in Anhang C geschildert. Sie werden im folgenden bei der Diskussion der invarianten Funktionen benutzt, die aus dem in skalare Beziehungen zerlegten Gluon-Vertex resultieren.

In den weiteren Betrachtungen werden die Strukturen des Vertex und der Hilfsamplitude auf die invarianten Funktionen eingeschränkt, deren die Lorentz-Struktur tragenden Tensoren die niedrigsten Massendimensionen besitzen. Diese Vereinfachung ist durchaus gerechtfertigt, denn das durch die STI implizierte Gleichungssystem wird im Rahmen nicht-perturbativer Methoden untersucht. Die wesentliche Randbedingung dabei besteht in der Forderung nach perturbativer Renormierbarkeit, wie sie im vorangegangenen Kapitel formuliert wurde. In [Kuh 97] konnte gezeigt werden, daß die Mitnahme der Terme mit den größeren Impulspotenzen den perturbativen Divergenzgrad überhöht und die Renormierbarkeit der Theorie in Frage stellt.

Wir beschränken die Basis des 3-Gluon-Vertex (2.21) also auf die Terme proportional zu  $F_0^{[r,0]}$  und  $F_2^{[r,0]}$ . In der Hilfsamplitudbasis bleibt lediglich die Funktion  $\tilde{G}_0^{[r,0]}$  übrig. Die Analyse der Restriktionen für die Hilfsamplitude reduziert sich damit auf

$$G_0^{123} - G_0^{213} = 0. \quad (3.11)$$

Verwendung von (3.4) und Einsetzen der nicht-perturbativen Ansätze aus Kapitel 2 liefert

$$p_2^2 \tilde{D}^{[r,0]}(p_2^2) \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = p_1^2 \tilde{D}^{[r,0]}(p_1^2) \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_2^2, p_1^2, p_3^2). \quad (3.12)$$

Kürzt man die Nullstellen der Propagatoren mit den Polstellen der Vertices gemäß (2.62), so bleibt in beliebiger Stufe der Approximation

$$\begin{aligned}
 & \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) N_{\hat{G}}^{0[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
 &= \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) N_{\hat{G}}^{0[r]}(p_2^2, p_1^2, p_3^2). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Die Restriktionen für die invarianten Funktionen des Gluon-Vertex werden nun berechnet. Mit (3.4), (3.5) und dem Gleichungssystem aus Anhang C gilt

$$F_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = A_{123} = \frac{1}{2} (G_0^{312} + G_0^{321}) \quad (3.14)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 & D_T^{[r,0]}(p_1^2) D_T^{[r,0]}(p_2^2) F_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_1^2}{p_2^2} \tilde{D}^{[r,0]}(p_1^2) D_T^{[r,0]}(p_1^2) \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{p_2^2}{p_1^2} \tilde{D}^{[r,0]}(p_2^2) D_T^{[r,0]}(p_2^2) \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) \Bigg\}. \quad (3.15)$$

Mit den nicht-störungstheoretischen Approximanten und unter Verwendung von (2.62) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
 & \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \\
 & \times \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) p_1^2 p_2^2 N_{3V}^{0[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
 & = \frac{1}{2} \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u'_{r,2s} \Lambda^2) \\
 & \times \left\{ \prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \right. \\
 & \times \prod_{s=1}^{(r+1)/2} \left\{ (p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2) (p_2^2 + u_{r,s-1} \Lambda^2) \right\} p_1^2 N_G^{0[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) \\
 & \left. + \text{1 Permutation } p_1^2 \leftrightarrow p_2^2 \right\} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Völlig analoge Vorgehensweise mit Gleichung (3.7) liefert zunächst das Ergebnis

$$F_2^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = B_{123} = \frac{1}{2} \left( G_0^{312} - G_0^{321} \right) \quad (3.17)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 & D_T^{[r,0]}(p_1^2) D_T^{[r,0]}(p_2^2) F_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
 & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_1^2}{p_2^2} \tilde{D}^{[r,0]}(p_1^2) D_T^{[r,0]}(p_1^2) \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right. \\
 & \left. - \frac{p_2^2}{p_1^2} \tilde{D}^{[r,0]}(p_2^2) D_T^{[r,0]}(p_2^2) \tilde{G}_0^{[r,0]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) \right\}. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

In beliebiger Stufe der Approximation folgt mit den erweiterten Ansätzen aus Kapitel 2

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \\
& \times \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) p_1^2 p_2^2 N_{3V}^{2[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
& = \frac{1}{2} \prod_{s=1}^r (p_3^2 + u'_{r,2s} \Lambda^2) \\
& \times \left\{ \prod_{s=1}^r (p_1^2 + u_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \right. \\
& \times \prod_{s=1}^{(r+1)/2} \left\{ (p_2^2 + u_{r,s} \Lambda^2) (p_2^2 + u_{r,s-1} \Lambda^2) \right\} p_1^2 N_G^{0[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) \\
& \left. - 1 \text{ Permutation } p_1^2 \leftrightarrow p_2^2 \right\}. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

### 3.3 Analyse für den Fall $r = 1$

Das Herausarbeiten der Restriktionen an die nicht-perturbativen Parameter aus den Gleichungen (3.13), (3.16) und (3.19) erweist sich trotz der Einschränkung der Basistensoren auf die Strukturen niedrigster Massendimension bereits auf dem Niveau  $r = 1$  als recht schwierig.

Zunächst ist es notwendig, die Zählerpolynome der Gluon- und die Hilfsamplituden-Basis in  $r = 1$  explizit anzugeben. Unter Verwendung der Symmetriebeziehungen (2.25) der nicht-perturbativen Parameter erhält man

$$\begin{aligned}
N_{3V}^{0[1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \left( C_{110}^{0[1]} p_1^2 p_2^2 + C_{101}^{0[1]} (p_1^2 + p_2^2) p_3^2 \right. \\
&\quad \left. + C_{200}^{0[1]} (p_1^4 + p_2^4) + C_{002}^{0[1]} p_3^4 \right) \Lambda^2 \\
&\quad \left( C_{100}^{0[1]} (p_1^2 + p_2^2) + C_{001}^{0[1]} p_3^2 \right) \Lambda^4 + C_{000}^{0[1]} \Lambda^6 \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{3V}^{2[1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \left( C_{200}^{2[1]} (p_1^4 - p_2^4) + C_{101}^{2[1]} (p_1^2 - p_2^2) p_3^2 \right) \Lambda^2 \\
&\quad + C_{100}^{2[1]} (p_1^2 - p_2^2) \Lambda^4 \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\hat{G}}^{0[1]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) &= p_3^2 p_2^2 p_1^2 + \left( G_{110}^{0[1]} p_3^2 p_2^2 + G_{101}^{0[1]} p_3^2 p_1^2 + G_{011}^{0[1]} p_2^2 p_1^2 \right. \\
&\quad \left. + G_{200}^{0[1]} p_3^4 + G_{020}^{0[1]} p_2^4 + G_{002}^{0[1]} p_1^4 \right) \Lambda^2 \\
&\quad \left( G_{100}^{0[1]} p_3^2 + G_{010}^{0[1]} p_2^2 + G_{001}^{0[1]} p_1^2 \right) \Lambda^4 + G_{000}^{0[1]} \Lambda^6, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

wobei hier zunächst auch Terme in den Zählerpolynomfunktionen  $N_{3V}^0$  und  $N_{3V}^2$  mit  $p_i^4$  für  $i = 1, 2, 3$  zugelassen werden. Die weiteren Berechnungen zeigen, daß die entsprechenden Koeffizienten  $C_{200}^{0[1]}$  usw. durch die sich ergebenden Bedingungen (3.25) bis (3.31) tatsächlich auf Null gesetzt werden. Dieses Ergebnis ist mit den in [Kuh 97] formulierten Folgerungen für die Vertexparameter konsistent!

Ich beginne mit der Restriktion (3.13) für die Koeffizienten der Hilfsamplitude. Das Problem reduziert sich in  $r = 1$  auf

$$\begin{aligned} & (p_1^2 + v_1 \Lambda^2)(p_2^2 + \tilde{u}_2' \Lambda^2) N_{\hat{G}}^{0[1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &= (p_2^2 + v_1 \Lambda^2)(p_1^2 + \tilde{u}_2' \Lambda^2) N_{\hat{G}}^{0[1]}(p_2^2, p_1^2, p_3^2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ausmultiplizieren und Sortieren nach  $\Lambda$ -Potenzen liefert die in Anhang E aufgeführte Beziehung. Ein Koeffizientenvergleich ergibt neun unabhängige Gleichungen mit zwölf Unbekannten<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2' G_{000} - v_1 G_{000} - \tilde{u}_2' v_1 G_{101} + \tilde{u}_2' v_1 G_{100} &= 0 \\ \tilde{u}_2' G_{100} - v_1 G_{010} - \tilde{u}_2' v_1 G_{020} + \tilde{u}_2' v_1 G_{200} &= 0 \\ \tilde{u}_2' G_{001} - v_1 G_{001} - \tilde{u}_2' v_1 G_{011} + \tilde{u}_2' v_1 G_{101} &= 0 \\ G_{010} - G_{100} + \tilde{u}_2' G_{020} - \tilde{u}_2' G_{110} + v_1 G_{110} - v_1 G_{200} &= 0 \\ \tilde{u}_2' G_{200} - v_1 G_{020} &= 0 \\ \tilde{u}_2' G_{002} - v_1 G_{002} &= 0 \\ \tilde{u}_2' G_{101} - v_1 G_{011} &= 0 \\ G_{020} - G_{200} &= 0 \\ G_{011} - G_{101} - \tilde{u}_2' + v_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Das reduzierte System hat die Form

$$\begin{aligned} G_{110} &= -G_{000} \frac{\tilde{u}_2' - v_1}{\tilde{u}_2'(v_1^2 - \tilde{u}_2' v_1)} = \frac{G_{000}}{\tilde{u}_2' v_1} \\ G_{100} &= -G_{000} \frac{v_1(\tilde{u}_2' - v_1)}{\tilde{u}_2'(v_1^2 - \tilde{u}_2' v_1)} = \frac{G_{000}}{\tilde{u}_2'} \\ G_{010} &= -G_{000} \frac{\tilde{u}_2' - v_1}{v_1^2 - \tilde{u}_2' v_1} = \frac{G_{000}}{v_1} \\ G_{001} &= v_1 \tilde{u}_2' \\ G_{011} &= \tilde{u}_2' \\ G_{101} &= v_1 \\ G_{002} &= G_{200} = G_{020} = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei  $\tilde{u}_2' \neq v_1$  und  $\tilde{u}_2', v_1 \neq 0$  vorausgesetzt wurde. Diese Annahmen sind durchaus vernünftig, denn zum einen sind beide Koeffizienten Propagator- bzw. Vertex-Polstellen

<sup>2</sup>In der Indizierung der nicht-perturbativen Koeffizienten der Hilfsamplitude und der des Gluon-Vertex wird die Angabe des Approximationsgrads im Verlauf dieses Abschnitts fortgelassen.

in den erweiterten Ansätzen. Eine Gleichheit der Werte ist daher wenig wahrscheinlich. Zum anderen würde ein Verschwinden der Variablen nur zu trivialen Lösungen führen. Der Landau Grenzfall, in dem der Geist-Sektor vollständig störungstheoretisch bleibt, tritt für  $v_1 = v_2 = \tilde{u}'_2 = 0$  ein. Dies gilt auch für die  $\hat{G}$ -Hilfsamplitude im erweiterten Schema (2.43), denn in (3.24) bestimmen sich die Koeffizienten  $(G_{100}, G_{010}, \dots)$  für  $v_1 = \tilde{u}'_2 = 0$  zu Null.

Ich fahre mit der Diskussion von (3.16) fort. In  $r = 1$  ist

$$\begin{aligned}
 & (p_1^2 + v_1 \Lambda^2)(p_2^2 + v'_2 \Lambda^2)(p_2^2 + v_1 \Lambda^2)(p_1^2 + v'_2 \Lambda^2)(p_3^2 + \tilde{u}'_2 \Lambda^2) \\
 & \times p_1^2 p_2^2 N_{3V}^{0[1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = \frac{1}{2} (p_3^2 + u'_2 \Lambda^2) \left\{ (p_2^2 + u_+ \Lambda^2)(p_2^2 + u_- \Lambda^2) \right. \\
 & \times (p_1^2 + u_2 \Lambda^2)(p_2^2 + v_1 \Lambda^2)(p_1^2 + v'_2 \Lambda^2) p_1^2 N_{\hat{G}}^{0[1]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) \\
 & \left. + \text{eine Permutation } p_1^2 \leftrightarrow p_2^2 \right\}. 
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Unter Verwendung von (3.25) und Elimination der komplexen Propagator-Polstellen gemäß (siehe Kapitel 2)

$$(p^2 + u_+ \Lambda^2)(p^2 + u_- \Lambda^2) = (p^2 + u_1 \Lambda^2)(p^2 + u_2 \Lambda^2) + u_3 \Lambda^4 \tag{3.27}$$

erhält man das in Anhang E aufgeführte Polynom. Es setzt sich neben den äußeren Impulsen aus 15 Unbekannten zusammen. Diese beinhalten sieben Variablen aus den Propagatoren und Vertex-Polstellen ( $u_1, u_2, u_3, v_1, v'_2, u'_2, \tilde{u}'_2$ ), sieben Koeffizienten aus dem Ansatz für den Zähler des Vertex  $\propto C^0$  und zehn für die Hilfsamplitude, die sich aber durch Einbau der Beziehungen aus (3.25) auf einen Parameter reduzieren lässt.

Ein Koeffizientenvergleich in (E.2) liefert ein sehr kompliziertes nicht-lineares Gleichungssystem mit reellen Unbekannten. Da nicht zu erwarten ist, daß die STI im tief nicht-perturbativen Fall, d.h. hohe Potenzen von  $\Lambda$ , erfüllt ist, wird mit dem Vergleich der Impulse aus dem Anteil  $\propto \Lambda^2$  begonnen. Dies liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 G_{000} &= 2 \tilde{u}'_2 v_1 \left( C_{101}^0 - \frac{1}{2} u_1 - u_2 + \frac{1}{2} v'_2 \right) \\
 C_{110}^0 &= u'_2 \\
 C_{200}^0 &= C_{002}^0 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

womit sich die Parameterzahl noch weiter reduzieren lässt. Nach einem Koeffizientenvergleich in der nächsthöheren Potenz  $\Lambda^4$  von  $\Lambda$  findet sich

$$\begin{aligned}
C_{100}^0 - C_{101}^0 u_2' &= 0 \\
u_2^2 + \frac{1}{2} (u_1 v_2' - v_1^2 - (v_2')^2 - u_3) - C_{101}^0 (u_2 - v_1) \\
- u_1 v_1 - u_2 v_1 + v_1 v_2' &= 0 \\
u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + (v_2')^2 + 2 C_{101}^0 (v_2' - v_1 - u_1 - u_2) \\
+ C_{001}^0 + 2 (u_1 u_2 + u_2 v_1 + u_1 v_1 - u_1 v_2' - u_2 v_2' - v_1 v_2') &= 0.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Weitere Elimination der Variablen, die in den Termen  $\propto \Lambda^6$  vorgenommen wird, macht schließlich die Bestimmung des verbleibenden Koeffizienten  $C_{000}^0$  des Zählerpolynoms unter der Voraussetzung  $v_1 \neq u_2$  möglich<sup>3</sup>. Er berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
(u_2 - v_1) C_{000}^0 &= u_2' \left\{ v_2' (4v_1^2 + u_1^2 + u_3 - 2v_2'(u_1 + 2v_1)) \right. \\
&\quad - u_1 (4v_1^2 + 2u_1 v_1 + u_3) - v_1 (2v_1 + u_1 + 2u_3) \\
&\quad + (u_2 - v_1) (v_2' (4v_1 + 3u_1 - 2v_2') - (u_1^2 - u_2^2 + u_3) \\
&\quad \left. - v_1 (1 + 4u_1)) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

In der Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex bleibt noch (3.19) auszuwerten. Die Koeffizienten des Zählerpolynoms der antisymmetrischen Funktion  $F_2^{[r,0]}$ , die durch drei Parameter approximiert wird, werden bestimmt. Das Verfahren ist trotz des etwas eingeschränkteren Ansatzes im Vergleich zur vorangegangenen Analyse ähnlich aufwendig. Mit analoger Vorgehensweise findet man

$$\begin{aligned}
G_{000} - 2 \tilde{u}_2' v_1 \left( \frac{1}{2} u_1 + v_1 - \frac{1}{2} v_2' - C_{101}^2 \right) &= 0 \\
C_{200}^2 &= 0 \\
-C_{100}^2 + C_{101}^2 u_2' &= 0 \\
\frac{1}{2} (v_1^2 + (v_2')^2 + u_3 - u_1 v_2') + C_{101}^2 (u_2 - v_1) \\
- v_1 v_2' + u_1 v_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Die beiden ersten Gleichungen stammen dabei aus Beziehungen  $\propto \Lambda^2$ , die letzteren aus solchen  $\propto \Lambda^4$ .

Ein Vergleich der Restriktionen der Koeffizienten der symmetrischen und antisymmetrischen invarianten Funktionen des Gluon-Vertex schafft eine „Brücke“ zwischen beiden Sektoren. Mit (3.28) und (3.31) ergibt sich dieser Zusammenhang zu

<sup>3</sup>Der Fall der Gleichheit beider Parameter schafft nur triviale Resultate und macht eine weitere Bestimmung der  $C^0$  nicht mehr möglich.

$$\begin{aligned}
 u_1 - v'_2 + v_1 + u_2 &= C_{101}^0 + C_{101}^2 \\
 C_{100}^2 C_{101}^0 &= C_{100}^0 C_{101}^2.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Es ist ein bemerkenswertes Resultat der bisherigen Betrachtungen, daß sich beide Bereiche vermischen. Eine Aussage über das relative Gewicht des einen oder des anderen Anteils des Vertex-Ansatzes läßt sich jedoch nicht treffen. Es ist aber zu sehen, daß sich der symmetrische Funktionenanteil, also jener, der Landau-Eichung und äußere Transversalprojektion überlebt, sich auf dem Niveau ( $r = 1$ ) vollständig unabhängig behandeln läßt. Man anderen Worten bedeutet dies, daß die STI über die Gleichungen (3.28) bis (3.30) nur Beziehungen für die Zählerpolynomkoeffizienten der  $F_0^{[r,0]}$ -Funktion *untereinander und zu den Propagatorkoeffizienten* liefert, aber nicht zu weiteren, bei Rechnungen in Landau-Eichung mit vollständiger Transversalprojektion nicht eingehenden Funktionen bzw. Koeffizienten. Gegen die bei den bisherigen Rechnungen in Landau-Eichung geübte Praxis ergeben sich also keine Einwände auch dann, wenn man die volle Gültigkeit der STI - nicht nur für den perturbativen Bereich - postulieren will.

Eine weitere Diskussion der hier erhaltenen Ergebnisse wird im Zusammenhang mit den beiden weiteren 3-Punkt-Vertices am Ende des folgenden Kapitels vorgenommen.



## Kapitel 4

# Die Slavnov-Taylor-Identitäten des Geist- und Fermion-Vertex

Völlig analog zur Diskussion der Slavnov-Taylor-Identität des bezüglich einen Beins longitudinal projizierten 3-Gluon-Vertex werden die in diesem Kapitel behandelten Identitäten zunächst in skalare Beziehungen zerlegt, die neben den Basisvertices die Hilfsamplituden enthalten. Im Rahmen der erweiterten Feynman-Regeln werden auch hier Einschränkungen formuliert, die von den nicht-perturbativen Koeffizienten zu erfüllen sind.

### 4.1 Der Geist-Vertex

Die Slavnov-Taylor-Identität für den Geist-Vertex wird im Rahmen der erweiterten nicht-perturbativen Störungstheorie erstmalig behandelt. Eine Diskussion des Geist-Sektors war bisher nicht notwendig, denn in [Dri 97] konnte gezeigt werden, daß die Geist-Basisgrößen in Landau-Eichung ihre störungstheoretische Form beibehalten.

#### 4.1.1 Die Nebenbedingungen

Der Vertex wird in beliebiger Stufe der rationalen Approximation untersucht. Im Gegensatz zum 3-Gluon-Vertex ist der Rechenaufwand zu Beginn nicht so groß, denn sämtliche Lorentz-Strukturen werden durch die Longitudinalprojektion kontrahiert, so daß man nach Elimination der Farbstruktur und mit den erweiterten Ansätzen sofort skalare Gleichungen hat. Die Identität (A.56) hat nach einer Substitution des in die Vertices einlaufenden Impulses die Form<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} p_3^{\nu_3} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{a_1 a_2 a_3}^{\nu_3}(p_1, p_2, p_3) \frac{\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_3^2)}{p_3^2} - p_2^{\nu_2} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{a_1 a_3 a_2}^{\nu_2}(p_1, p_3, p_2) \frac{\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_2^2)}{p_2^2} \\ = \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_1^2) \hat{F}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Im Gegensatz zu den beiden weiteren 3-Punkt-Identitäten erscheint der longitudinale Teil in *zwei* Geist-Vertices, die mit verschiedenen Lorentz-Impulsen kontrahiert werden. Nach

---

<sup>1</sup>Die hier verwendete Slavnov-Taylor-Identität wird neben [Dri 97] auch in [Sme 98] angegeben.

der üblichen Abseparation der Farbstruktur und einigem Umstellen der Gleichung hat man

$$\begin{aligned} p_3^{\nu_3} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{\nu_3}(p_1, p_2, p_3) p_2^2 \tilde{D}(p_2^2) \tilde{D}(p_1^2) + p_2^{\nu_2} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{\nu_2}(p_1, p_3, p_2) p_3^2 \tilde{D}(p_3^2) \tilde{D}(p_1^2) \\ = - \tilde{D}(p_2^2) \tilde{D}(p_3^2) p_2^2 p_3^2 \hat{F}(p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mit den Approximantenansätzen aus Kapitel 2 bekommt man

$$\begin{aligned} & - \tilde{D}^{[r,0]}(p_2^2) \tilde{D}^{[r,0]}(p_3^2) p_2^2 p_3^2 \hat{F}^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ & = p_2^2 \left\{ (p_1 p_3) \tilde{F}_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + p_3^2 \tilde{F}_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right\} \tilde{D}^{[r,0]}(p_1^2) \tilde{D}^{[r,0]}(p_2^2) \\ & + p_3^2 \left\{ (p_1 p_2) \tilde{F}_0^{[r,0]}(p_1^2, p_3^2, p_2^2) + p_2^2 \tilde{F}_1^{[r,0]}(p_1^2, p_3^2, p_2^2) \right\} \tilde{D}^{[r,0]}(p_1^2) \tilde{D}^{[r,0]}(p_3^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei das Vorzeichen des einlaufenden Geist-Feldes eliminiert worden ist. Die Bedingungen, die an den Geist-Vertex im erweiterten Schema für ein beliebiges  $r$  gestellt werden, berechnen sich zu

$$\begin{aligned} & \prod_{s=1}^r (p_2^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \\ & \quad \times p_1^2 N_{\hat{F}}^{[r]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) \\ & = \prod_{s=1}^r (p_1^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \left\{ \prod_{s=1}^r (p_2^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_3^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) \right. \\ & \quad \times \left\{ \frac{1}{2} (p_1^2 + p_3^2 - p_2^2) N_{G\bar{G}V}^{0[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) - p_3^2 N_{G\bar{G}V}^{1[r]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right\} \\ & \quad \left. + \text{1 Permutation } p_2 \leftrightarrow p_3 \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Analyse für den Fall $r = 1$

Die Zählerpolynome des Geist-Vertex und der Hilfsamplitude werden benötigt. Sie ergeben sich mit Hilfe von (2.29) und (2.48) zu

$$\begin{aligned} N_{G\bar{G}V}^{0[1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) & = p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \left( \tilde{C}_{110}^{0[1]} p_1^2 p_2^2 + \tilde{C}_{101}^{0[1]} (p_1^2 + p_2^2) p_3^2 \right. \\ & \quad \left. + \tilde{C}_{200}^{0[1]} (p_1^4 + p_2^4) + \tilde{C}_{002}^{0[1]} p_3^4 \right) \Lambda^2 \\ & \quad + \left( \tilde{C}_{100}^{0[1]} (p_1^2 + p_2^2) + \tilde{C}_{001}^{0[1]} p_3^2 \right) \Lambda^4 + \tilde{C}_{000}^{0[1]} \Lambda^6, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} N_{G\bar{G}V}^{1[1]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) & = \left( \tilde{C}_{110}^{1[1]} p_1^2 p_2^2 + \tilde{C}_{101}^{1[1]} p_1^2 p_3^2 + \tilde{C}_{011}^{1[1]} p_2^2 p_3^2 \right. \\ & \quad \left. + \tilde{C}_{200}^{1[1]} p_1^4 + \tilde{C}_{020}^{1[1]} p_2^4 + \tilde{C}_{002}^{1[1]} p_3^4 \right) \Lambda^2 \\ & \quad + \left( \tilde{C}_{100}^{1[1]} p_1^2 + \tilde{C}_{010}^{1[1]} p_2^2 + \tilde{C}_{001}^{1[1]} p_3^2 \right) \Lambda^4 + \tilde{C}_{000}^{1[1]} \Lambda^6 \end{aligned} \quad (4.6)$$

und

$$\begin{aligned}
 N_{\hat{F}}^{[1]}(p_3^2, p_2^2, p_1^2) &= p_3^2 p_2^2 p_1^2 + \left( F_{110}^{[1]} p_3^2 p_2^2 + F_{101}^{[1]} p_3^2 p_1^2 + F_{011}^{[1]} p_2^2 p_1^2 \right. \\
 &\quad \left. + F_{200}^{[1]} p_3^4 + F_{020}^{[1]} p_2^4 + F_{002}^{[1]} p_1^4 \right) \Lambda^2 \\
 &\quad + \left( F_{100}^{[1]} p_3^2 + F_{010}^{[1]} p_2^2 + F_{001}^{[1]} p_1^2 \right) \Lambda^4 + F_{000}^{[1]} \Lambda^6. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Analog zum Ansatz der Zählerpolynomfunktionen des 3-Gluon-Vertex werden zunächst auch hier Terme mit  $p_i^4$  zugelassen. Das Verschwinden der entsprechenden Koeffizienten  $\tilde{C}_{200}^{0[1]}$  usw. findet hier aber nur teilweise statt.

Neben den unbekannten Vertex- bzw. Propagator-Polstellen  $\tilde{u}'_2$  und  $v_1$  hat man in dieser Identität 27 weitere Unbestimmte durch die Vertex-Polynome, wobei zehn Parameter aus der Hilfsamplitude  $\hat{F}$  stammen.

Im Gluon-Vertex ist es gelungen, alle nicht-perturbativen Koeffizienten der Zählerpolynome durch die der Propagatoren und der Vertex-Polstellen auszudrücken. Im Hinblick auf die andersartige Struktur der Identität (4.1) wird hier zum einen ein Gleichungssystem aufgestellt, welches die Bestimmung der Koeffizienten aus der Hilfsamplituden-Zählerfunktion durch die weiteren Parameter ermöglicht. Zum anderen werden einige wenige Beziehungen in der Form von (4.9) und (4.11) bestimmt, die die in der Identität enthaltene Information über die Koeffizienten  $\tilde{C}^0$  und  $\tilde{C}^1$  des Geist-Vertex wiedergeben. Die Gleichungen aus (4.11) werden im 5. Kapitel verwendet.

Wie beim Gluon-Vertex werden die Beziehungen niedrigster Potenz von  $\Lambda$ , hier  $\Lambda^2$ , zuerst analysiert. (4.5), (4.6) und (4.7) in (4.4) für  $r = 1$  liefern den unabhängigen Satz von Gleichungen<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 F_{110} &= \tilde{C}_{110}^0 - 2 \tilde{C}_{110}^1 \\
 F_{101} &= F_{011} = \frac{1}{2} (v_1 - \tilde{u}'_2 + \tilde{C}_{101}^0 + \tilde{C}_{110}^0) - \tilde{C}_{200}^1 \\
 F_{200} &= F_{020} = \frac{1}{2} (\tilde{u}'_2 - v_1 + \tilde{C}_{002}^0 + \tilde{C}_{101}^0 + \tilde{C}_{200}^0 - \tilde{C}_{110}^0) - \tilde{C}_{101}^1 \\
 F_{002} &= \tilde{C}_{200}^0, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

wobei man zusätzlich die Restriktionen

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{002}^0 - \tilde{C}_{200}^0 - 2 \tilde{C}_{002}^1 &= 0 \\
 \tilde{C}_{002}^0 - \tilde{C}_{200}^0 + 2 \tilde{C}_{011}^1 + 2 \tilde{C}_{020}^1 &= 0 \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

erhält. Wie in der STI des 3-Gluon-Vertex vermischen sich in (4.9) die Koeffizienten aus dem symmetrischen und dem nicht-symmetrischen Anteil des Geist-Vertex. Mit den Beiträgen aus (4.4), die proportional zu  $\Lambda^4$  sind, erhält man die folgenden zwei Gleichungen für die Zählerpolynomkoeffizienten des Vertex:

<sup>2</sup>Die Angabe des Approximationsgrads  $r = 1$  wird in den Gleichungen dieses Kapitels nicht weiter mitgeschrieben.

$$\begin{aligned}
F_{001} &= \tilde{C}_{100}^0 + \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{110}^0 + v_1 (\tilde{C}_{101}^0 + \tilde{C}_{200}^0) - 2 \tilde{C}_{200}^1 - v_1 F_{200} \\
&\quad - \tilde{u}'_2 (F_{011} + F_{101}) + \tilde{u}'_2 (v_1 - \tilde{u}'_2) \\
F_{100} &= F_{010} = \frac{1}{2} \left( \tilde{C}_{001}^0 + \tilde{C}_{100}^0 + \tilde{u}_2 (\tilde{C}_{101}^0 + \tilde{C}_{110}^0 + \tilde{C}_{200}^0) \right. \\
&\quad \left. + v_1 (\tilde{C}_{002}^0 + \tilde{C}_{101}^0 + \tilde{C}_{110}^0) - \tilde{u}'_2 v_1 \right) - \tilde{C}_{100}^1 - \tilde{u}'_2 (\tilde{C}_{110}^1 + \tilde{C}_{200}^1) \\
&\quad - v_1 (\tilde{C}_{101}^1 + \tilde{C}_{110}^1) - \tilde{u}'_2 (F_{020} + F_{110}) - v_1 F_{011}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Im Fall  $\tilde{u}'_2 \neq v_1$  (vgl. Kapitel 3) lassen sich zusätzlich die Restriktionen

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{200}^0 &= 0 \\
\tilde{C}_{002}^0 &= 2 \left( \frac{\tilde{C}_{001}^1 - \tilde{C}_{010}^1}{\tilde{u}'_2 - v_1} + \tilde{C}_{110}^1 - \tilde{C}_{011}^1 + \tilde{C}_{101}^1 + \tilde{C}_{011}^1 \right) + v_1 \\
\tilde{C}_{110}^0 &= \tilde{u}'_2 \\
\tilde{C}_{100}^0 &= \tilde{C}_{001}^0 + (\tilde{u}'_2 - v_1) \left( \tilde{C}_{101}^0 - \tilde{C}_{110}^0 - 2 \tilde{C}_{101}^1 - 2 \tilde{C}_{011}^1 \right) \\
&\quad - 2 \tilde{C}_{001}^1 + (v_1 - \tilde{u}'_2)^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

notieren, wobei die Parameter in den Gleichungen wiederum stark vermischen. Aus den Termen  $\propto \Lambda^6$  wird schließlich noch der letzte Koeffizient der Hilfsamplitude extrahiert. Er bestimmt sich zu

$$\begin{aligned}
F_{000} &= \tilde{C}_{000}^0 + \tilde{u}'_2 (\tilde{C}_{100}^0 - F_{010} - F_{100}) + v_1 (\tilde{C}_{001}^0 + \tilde{C}_{100}^0 - 2 \tilde{C}_{100}^1 \\
&\quad - F_{001}) + (\tilde{u}'_2)^2 (\tilde{C}_{110}^0 - \tilde{C}_{200}^0 - F_{110}) + \tilde{u}'_2 v_1 (\tilde{C}_{101}^0 + \tilde{C}_{110}^0 + \tilde{C}_{200}^0 \\
&\quad - 2 (\tilde{C}_{110}^1 + \tilde{C}_{200}^1) - F_{011} - F_{101}).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Eine Diskussion dieser Ergebnisse wird zusammen mit der Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex und des Fermion-Vertex am Ende des Kapitels vorgenommen.

## 4.2 Der Fermion-Vertex

Der Quark-Gluon-Vertex ist in vorangegangenen Arbeiten in Landau-Eichung bereits kurz diskutiert worden. In [Kuh 97] wird gezeigt, daß sich die in der STI auftretenden Divergenzen auf der Stufe  $r = 1$  im Gegensatz zur Störungstheorie nicht exakt aufheben. Man wird gezwungen, die nicht-perturbativen Parameter so anzupassen, daß die Gesamtlösung auf eine triviale zurückfällt. Der Ansatz in [Voi 99] arbeitet zunächst mit verschwindendem Transversalanteil des Fermion-Vertex. Die berechneten Selbstkonsistenzgleichungen zeigen, daß die STI nicht erfüllt werden kann. Man ist daher gezwungen, zumindest in  $r = 1$ , die Transversalanteile zu berücksichtigen.

Wie in der Analyse der bisherigen Identitäten wird der Vertex, zunächst auf beliebiger Stufe  $r$  der rationalen Approximation, bezüglich des Lorentz-Index skalar projiziert. Die daraus resultierende exakte matrixwertige Gleichung ist dann für konkrete Werte von  $r$  zu untersuchen. Ein Koeffizientenvergleich in den vier unabhängigen Matrixstrukturen liefert auch hier Bedingungen, die von den erweiterten Ansätzen zu erfüllen sind.

### 4.2.1 Skalare Projektion und Nebenbedingungen

Die Identität (A.52) läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} S(p_1) k^\mu \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{l_1 l_2 \mu}(-p_1, p_2, k) S(p_2) \\ = -k^2 \tilde{D}(k^2) \left\{ S(p_1) \hat{C}^{l_2 a l_1}(p_2, k, -p_1) - \hat{C}'^{l_1 a l_2}(-p_1, k, p_2) S(p_2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Zunächst werden nach (2.32), (2.49) und (2.50) die Farbstrukturen abgespalten, was

$$\begin{aligned} S(p_1) k^\mu \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^\mu(-p_1, p_2, k) S(p_2) \\ = k^2 \tilde{D}(k^2) \left\{ S(p_1) \hat{C}(p_2, k, -p_1) - \hat{C}'(-p_1, k, p_2) S(p_2) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

liefert. Mit den erweiterten Ansätzen aus Kapitel 2 und unter Verwendung von

$$\frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} - \kappa_{r,s+})(\not{p} - \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} + \kappa_{r,s+})(\not{p} + \kappa_{r,s-})} = \frac{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p} - \kappa_{r,s+})(\not{p} - \kappa_{r,s-})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (p^2 + (\kappa_{r,s+})^2)(p^2 + (\kappa_{r,s-})^2)} \quad (4.15)$$

sowie

$$\frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa'_{r,2s})}{\prod_{s=1}^r (\not{p} + \kappa'_{r,2s})} = (-1)^r \frac{\prod_{s=1}^r (\not{p} - \kappa'_{r,2s})}{\prod_{s=1}^r (p^2 + (\kappa'_{r,2s})^2)}, \quad (4.16)$$

um die matrixwertigen Nenner in eine skalare Form zu bringen, lassen sich die durch die STI implizierten Nebenbedingungen als geschlossener Ausdruck formulieren:

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p}_1 - \kappa_{r,s+})(\not{p}_1 - \kappa_{r,s-}) k^\mu N_{FFV}^{[r]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p}_2 - \kappa_{r,s+})(\not{p}_2 - \kappa_{r,s-}) \\
& \times \prod_{s=1}^r (k^2 + v_{r,2s-1}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (k^2 + \bar{u}'_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (p_1^2 + (\kappa'_{r,2s})^2) \prod_{s=1}^r (p_2^2 + (\kappa'_{r,2s})^2) \\
& = - \prod_{s=1}^r (k^2 + v_{r,2s}\Lambda^2) \prod_{s=1}^r (k^2 + \bar{u}'_{r,2s}\Lambda^2) \\
& \times \left\{ \prod_{s=1}^r (p_1^2 + (\kappa'_{r,2s})^2) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (p_2^2 + (\kappa_{r,s+})^2)(p_2^2 + (\kappa_{r,s-})^2) \right. \\
& \times \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p}_1 - \kappa_{r,s+})(\not{p}_1 - \kappa_{r,s-}) N_{\hat{C}}^{[r]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) \prod_{s=1}^r (\not{p}_2 - \kappa'_{r,2s}) \\
& - \prod_{s=1}^r (p_2^2 + (\kappa'_{r,2s})^2) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (p_1^2 + (\kappa_{r,s+})^2)(p_1^2 + (\kappa_{r,s-})^2) \\
& \times \left. \prod_{s=1}^r (\not{p}_1 - \kappa'_{r,2s}) N_{\hat{C}'}^{[r]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) \prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not{p}_2 - \kappa_{r,s+})(\not{p}_2 - \kappa_{r,s-}) \right\}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

#### 4.2.2 Analyse für den Fall $r = 1$

Zunächst werden die Zählerpolynome der Vertices explizit aufgeschrieben. Aus Gründen der Vollständigkeit wird dies für den Fall  $\hat{m} \neq 0$  durchgeführt. Für den Fermion-Vertex lässt sich nach der Kontraktion mit dem äußeren Impuls  $k^\mu$  und unter Verwendung der Impulserhaltung die Beziehung

$$\begin{aligned}
k^\mu N_{FFV}^{[1]\mu}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) &= (\not{p}_2 - \not{p}_1) \left\{ C_{1000}^{[1]} \hat{m}^3 \Lambda + C_{2000}^{[1]} \hat{m}^2 \Lambda^2 + C_{3000}^{[1]} \hat{m} \Lambda^3 + C_{4000}^{[1]} \Lambda^4 \right. \\
&\quad + C_{0100}^{[1]} k^2 \hat{m}^2 + C_{1100}^{[1]} k^2 \hat{m} \Lambda + C_{2100}^{[1]} k^2 \Lambda^2 \Big\} \\
&\quad + \mathbb{I} (p_1^2 - p_2^2) \left\{ C_{1010}^{[1]} \hat{m}^2 \Lambda + C_{2010}^{[1]} \hat{m} \Lambda^2 + C_{3010}^{[1]} \Lambda^3 \right. \\
&\quad + C_{0110}^{[1]} k^2 \hat{m} + C_{1110}^{[1]} k^2 \Lambda \Big\} \\
&\quad + (p_1^2 \not{p}_2 - \not{p}_1 p_2^2) \left\{ C_{2011}^{[1]} \Lambda^2 + C_{1011}^{[1]} \hat{m} \Lambda + C_{0111}^{[1]} k^2 \right\}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

notieren. Für den Hilfsvertex  $\hat{C}$  findet man das Polynom

$$\begin{aligned}
N_{\hat{C}}^{[1]}(\not{p}_1, \not{p}_2, k^2) &= \mathbb{I} \left\{ \hat{C}_{1000}^{[1]} \hat{m}^3 \Lambda + \hat{C}_{2000}^{[1]} \hat{m}^2 \Lambda^2 + \hat{C}_{3000}^{[1]} \hat{m} \Lambda^3 + \hat{C}_{4000}^{[1]} \Lambda^4 \right. \\
&\quad + \hat{C}_{0100}^{[1]} k^2 \hat{m}^2 + \hat{C}_{1100}^{[1]} k^2 \hat{m} \Lambda + \hat{C}_{2100}^{[1]} k^2 \Lambda^2 \Big\} \\
&\quad + \not{p}_1 \left\{ \hat{C}_{1010}^{[1]} \hat{m}^2 \Lambda + \hat{C}_{2010}^{[1]} \hat{m} \Lambda^2 + \hat{C}_{3010}^{[1]} \Lambda^3 \right. \\
&\quad + \hat{C}_{0110}^{[1]} k^2 \hat{m} + \hat{C}_{1110}^{[1]} k^2 \Lambda \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \not{p}_2 \left\{ \hat{C}_{1001}^{[1]} \hat{m}^2 \Lambda + \hat{C}_{2001}^{[1]} \hat{m} \Lambda^2 + \hat{C}_{3001}^{[1]} \Lambda^3 \right. \\
& \quad \left. + \hat{C}_{0101}^{[1]} k^2 \hat{m} + \hat{C}_{1101}^{[1]} k^2 \Lambda \right\} \\
& + \not{p}_1 \not{p}_2 \left\{ \hat{C}_{2011}^{[1]} \Lambda^2 + \hat{C}_{1011}^{[1]} \hat{m} \Lambda + \hat{C}_{0111}^{[1]} k^2 \right\}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Die Strukturen für  $\hat{C}'$  ergeben sich analog. Die Propagator-Polstellen werden gemäß den Beziehungen

$$\begin{aligned}
(\not{p} - \kappa_+)(\not{p} - \kappa_-) &= -(p^2 + \not{p}(\kappa_1 + \kappa_2) - (\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_3^2)) \\
(p^2 + \kappa_+^2)(p^2 + \kappa_-^2) &= (p^2)^2 + p^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_3^2) + (\kappa_3^2 + \kappa_1 \kappa_2)^2 \tag{4.20}
\end{aligned}$$

ersetzt. Da die Selbstkonsistenzproblematik mit nicht-verschwindenden Strommassen noch nicht befriedigend gelöst ist, wird die Identität (4.17) im Grenzfall  $\hat{m} \rightarrow 0$  betrachtet. Die nicht-perturbativen Koeffizienten im Fermion-Sektor reduzieren sich zu

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= w_1 \Lambda \\
\kappa_2 &= w_2 \Lambda \\
\kappa'_2 &= w'_2 \Lambda \\
\kappa_3^2 &= w_3 \Lambda^2, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

womit neben  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\tilde{u}'_2$  und  $\bar{u}'_2$  insgesamt acht nicht-perturbative Koeffizienten aus den Propagatoren und Vertex-Polstellen übrig bleiben. Darüber hinaus hat man noch sechs Unbestimmte aus dem Fermion-Vertex und acht Parameter je Hilfsamplitude, so daß zusammen 30 zu bestimmende Variablen bleiben.

Mit den Ansätzen (4.18), (4.19) und (4.17) in  $r = 1$  bekommt man Terme proportional zu den vier unabhängigen Matrixstrukturen  $\mathbb{1}$ ,  $\not{p}_1$ ,  $\not{p}_2$  und  $\not{p}_1 \not{p}_2$ . Sortieren nach Potenzen der spontanen Massenskala  $\Lambda$  und den äußeren Impulsen liefert analog zum Geist- und Gluon-Vertex Beziehungen, die von den nicht-perturbativen Koeffizienten aus den Propagatoren und Vertices zu erfüllen sind. Betrachtet man die Ausdrücke proportional zu  $\Lambda^0$ ,  $\Lambda^1$  und  $\Lambda^2$ , so resultiert ein Gleichungssystem, welches im Vergleich zum Gluon-Vertex eine komplizierte Gestalt besitzt<sup>3</sup>. Aufgrund der unterschiedlichen Massendimensionen der matrixwertigen Strukturen gehen die Ausdrücke, die eine Einheitsmatrix oder  $\not{p}_1 \not{p}_2$  enthalten, mit ungeraden Potenzen in  $\Lambda$ . Alle anderen gehen dementsprechend mit einer geraden Potenz.

Das „Herausfiltern“ von Gleichungen, deren Terme proportional zur Einheitsmatrix und  $\propto \Lambda^1$  sind, liefert

$$\begin{aligned}
(w_1 + w_2) \left( \hat{C}'_{0111} - C_{0111} \right) + C_{1110} - \hat{C}'_{1110} &= 0 \\
(w_1 + w_2) \left( \hat{C}_{0111} - C_{0111} \right) + C_{1110} - \hat{C}_{1101} &= 0. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Auch hier ist die Angabe des Grads der rationalen Approximationsstufe ( $r = 1$ ) in den Koeffizienten der Zählerpolynome unterdrückt.

Ausdrücke, die die Matrixstruktur  $\not{p}_1$  bzw.  $\not{p}_2$  enthalten, ergeben sich einerseits zu

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_{0111} - C_{0111} &= 0 \\
 - C_{2011} + \hat{C}_{2011} + \hat{C}_{0111}(\bar{u}_2 + v_2) - C_{0111}(\bar{u}_2 + v_1) &= 0 \\
 ((w'_2)^2 - w_1 w_2 - w_3)(\hat{C}_{0111} - C_{0111}) + (w_1 + w_2)(\hat{C}_{1101} - C_{1110}) &= 0 \\
 (w_1^2 + w_2^2)(\hat{C}_{0111} - C_{0111}) - (w'_2)^2 C_{0111} - C_{2100} + \hat{C}'_{2100} \\
 + (w_1 + w_2)(C_{1110} - \hat{C}'_{1101}) - w_1 w_2 C_{0111} \\
 + w'_2(\hat{C}_{1110} - \hat{C}'_{1110}) + w'_2(w_1 + w_2)\hat{C}'_{0111} + w_3(C_{0111} - 2\hat{C}_{0111}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

und andererseits ( $\propto \not{p}_2$ ) ist

$$\begin{aligned}
 \hat{C}'_{0111} - C_{0111} &= 0 \\
 - C_{2011} + \hat{C}'_{2011} + \hat{C}'_{0111}(\bar{u}_2 + v_2) - C_{0111}(\bar{u}_2 + v_1) &= 0 \\
 ((w'_2)^2 - w_1 w_2 - w_3)(\hat{C}'_{0111} - C_{0111}) + (w_1 + w_2)(\hat{C}'_{1110} - C_{1110}) &= 0 \\
 (w_1^2 + w_2^2)(\hat{C}'_{0111} - C_{0111}) - (w'_2)^2 C_{0111} - C_{2100} + \hat{C}_{2100} \\
 + (w_1 + w_2)(C_{1110} - \hat{C}_{1110}) - w_1 w_2 C_{0111} \\
 + w'_2(\hat{C}'_{1101} - \hat{C}_{1101}) + w'_2(w_1 + w_2)\hat{C}_{0111} + w_3(C_{0111} - 2\hat{C}'_{0111}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Bis auf die jeweils erste Gleichung aus (4.23) und (4.24), die aus den Ausdrücken  $\propto \Lambda^0$  stammen, resultieren die anderen Beziehungen aus solchen  $\propto \Lambda^2$ . Schließlich bleiben noch die Strukturen, die  $\not{p}_1 \not{p}_2$  enthalten und  $\propto \Lambda^1$  sind, übrig. Man findet hier

$$\hat{C}_{1110} - \hat{C}'_{1101} - w'_2(\hat{C}_{0111} - \hat{C}'_{0111}) = 0. \tag{4.25}$$

Mit den obigen Gleichungen lässt sich der Parametersatz durch

$$\begin{aligned}
 C_{0111} &= \hat{C}_{0111} = \hat{C}'_{0111} \\
 C_{1110} &= \hat{C}_{1101} = \hat{C}'_{1110} \\
 \hat{C}_{1110} &= \hat{C}'_{1101} \\
 \hat{C}_{2011} &= \hat{C}'_{2011} \\
 \hat{C}_{2100} &= \hat{C}'_{2100}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

reduzieren, und es bleibt somit

$$\begin{aligned}\hat{C}_{2011} &= C_{2011} + (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) C_{0111} \\ \hat{C}_{2100} &= C_{2100} + (w'_2 - w_1 - w_2) (C_{1110} - \hat{C}_{1110}) \\ &\quad + ((w'_2)^2 + w_1 w_2 - w'_2 (w_1 + w_2) + w_3) C_{0111}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Mit den Termen in den Ordnungen bis  $\Lambda^3$  und  $\Lambda^4$  werden von allen vier Matrixgleichungen simultan

$$\begin{aligned}\hat{C}_{3010} &= \hat{C}'_{3001} \\ \hat{C}_{3001} &= \hat{C}'_{3010} \\ \hat{C}_{3001} &= C_{3010} + (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) C_{1110}\end{aligned}\quad (4.28)$$

für  $w_1 \neq w_2$  erzwungen. Ein widerspruchsfreies Resultat dieser Art ist nicht ohne weiteres selbstverständlich. Die Einfachheit der Beziehungen zwischen den Koeffizienten aus den Hilfsamplituden  $\hat{C}$  und  $\hat{C}'$  in (4.26) und (4.28) ist auf die Symmetrie der STI (4.14) zurückzuführen. Im weiteren berechnen sich die Terme aus  $\not{p}_1 \not{p}_2$  und  $\propto \Lambda^3$  zu

$$\begin{aligned}0 &= \left( w'_2 (w_1 + w_2 - w'_2) + w_1 (w'_2 - w_2) \right) \hat{C}_{1110} \\ &\quad - \left( (w'_2)^2 (w'_2 - w_1 - w_2) + w'_2 (w_1 w_2 + w_3) \right) C_{0111}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Die aus den Matriximpulsen resultierenden Gleichungen, die proportional zu  $\Lambda^4$  sind, haben die Form

$$\begin{aligned}\hat{C}_{4000} &= \hat{C}'_{4000} \\ \hat{C}_{4000} &= C_{4000} + (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) \left( (w'_2)^2 + w_1 w_2 \right. \\ &\quad \left. - w'_2 (w_1 + w_2) + w_3 \right) C_{0111} + (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) C_{2100} \\ &\quad - (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) (w_1 + w_2) C_{1110} + \left( (w'_2)^2 + w_1 w_2 \right. \\ &\quad \left. - w'_2 (w_1 + w_2) + w_3 \right) C_{2011} + (w_1 + w_2 - w'_2) \hat{C}_{3010} + w'_2 \hat{C}_{3001} \\ &\quad - (w_1 + w_2) C_{3010}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Es bleiben noch  $\hat{C}_{3010}$  und  $\hat{C}'_{3001}$  zu bestimmen. Dies gestaltet sich aber als schwierig, denn allein aus den Termen  $\propto \mathbb{1}$  und  $\propto \not{p}_1 \not{p}_2$  sind diese Größen nicht zu berechnen. Durch

Einsetzen der bereits ermittelten Gleichungen verschwinden die Parameter aus diesen Bereichen völlig.

In den Termen mit  $\not{p}_1$ -Faktoren und Koeffizienten  $\propto \Lambda^6$  ist  $\hat{C}_{3010}$  schließlich zu finden,  $\hat{C}'_{3001}$  ergibt sich dann aus (4.28). Da bereits Gleichungen mit hohen Potenzen ( $\Lambda^6$ ) in der spontanen Massenskala untersucht werden, ist die gefundene Beziehung mit vielen weiteren Parametern behaftet. Die unhandliche Bestimmungsgleichung hat die Form

$$\begin{aligned}
 0 = & \left( (w'_2)^2(w_1 + w_2) + w'_2(w_1^2 - w_2^2 + 2w_3) \right) \hat{C}_{3010} - \left( (w'_2)^2 - w_1 w_2 - w_3 \right) \\
 & \times (w_1 + w_2) C_{3010} + w'_2 \left( (w'_2)^2 - w_1 w_2 - w_3 \right) \hat{C}_{3001} \\
 & + \left( w_1 w_2 + w_3 - (w'_2)^2 \right) \left( \hat{C}_{4000} - C_{4000} \right) - \left( (w'_2)^2(w_1 + w_2) - (w'_2)^2(w_1^2 \right. \\
 & \left. + w_2^2 - w_1 w_2 + w_3) + w_1^2 w_2^2 + w_3^2 + 2w_1 w_2 w_3 \right) C_{2011} + \left( (w'_2)^2 - w_1 w_2 \right. \\
 & \left. - w_3) (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) \right) C_{2100} + (\bar{u}_2 + v_2) \left( (w'_2)^2(w'_2 - w_1^2 - w_2^2) \right. \\
 & \left. - w'_2(w_1 w_2 - w_3) + (w_1 + w_2)(w_1 w_2 + w_3) \right) \hat{C}_{1110} + (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2) \\
 & \times (w_1 + w_2) \left( (w'_2)^2 + w_1 w_2 - w_3 \right) C_{1110} + \left( - (\bar{u}_2 - \bar{u}_2 + v_1 - v_2)(w_1 w_2 \right. \\
 & \times (w_1 w_2 + w_3)) + \bar{u}_2(w_1 + w_2) - (\bar{u}_2 + v_2)(w'_2(w_1 w_2 + w_3)(w_1 + w_2) \right. \\
 & \left. + (w'_2)^4) + ((w'_2)^2(w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2 - w_3)) \right) C_{0111}. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Die Analyse des von  $\Lambda$  abhängigen Polynoms in der nächsthöheren Massendimension ist, wie man an der letzten Gleichung vielleicht schon erahnen kann, sehr aufwendig und kann hier nicht vorgenommen werden.

### 4.3 Zwischenergebnis

Die Parameter der Slavnov-Taylor-Identität des 3-Gluon-Vertex sind jetzt soweit reduziert, daß sie sämtlich durch die nicht-perturbativen Koeffizienten der Propagatoren und der Vertex-Polstellen ausdrückbar sind. Dies konnte für die beiden anderen 3-Punkt-Vertices im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Der nächste Schritt in diesen Betrachtungen sollte also eine Reduzierung der Koeffizienten des Fermion- und des Geist-Vertex-Zählerpolynoms sein. Ich weise aber gleich darauf hin, daß die Gleichungen in höheren Potenzen von  $\Lambda$  eine sehr komplizierte Form annehmen. Ohne eine tiefer greifende Automatisierung des Verfahrens sind weitere Gleichungen nur noch unter großen Schwierigkeiten zu ermitteln.

Hätte man diese Hürde genommen, so sollte es möglich sein, ein Gleichungssystem für jeden der drei Vertices aufzustellen, welches nur noch Parameter aus den Propagatoren und den Vertexpolstellen enthält. Dieses System, welches sich insgesamt als nicht-linear erweisen wird, sollte unter Hinzunahme von Selbstkonsistenzgleichungen aus den dynamischen Schwinger-Dyson-Gleichungen gelöst werden. Dabei bieten sich die SDG der hier

behandelten Basis-Vertices an. Eine Berechnung dieser jenseits der Landau-Eichung ist noch nicht erfolgt. Das 5. Kapitel dieser Arbeit, wo die longitudinale Gluon-Selbstenergie in allgemeiner kovarianter Eichfixierung berechnet wird, stellt aber einen ersten Schritt in dieser Richtung dar.

Im Rahmen numerischer Methoden sollte eine Behandlung und damit eine Bestimmung der Unbekannten möglich sein. Die dann gewonnenen Ergebnisse einerseits aus den SDG, andererseits aus den STI, wären zu vergleichen, und es wäre zu überprüfen, inwieweit eine Übereinstimmung der nicht-perturbativen Koeffizienten (z.B. die des Geist-Propagators) gegeben ist. Eine Gegenüberstellung der bisherigen Berechnung von Koeffizienten aus [Dri 97] und [Kuh 97], welche in Landau-Eichung erfolgt ist, scheint naheliegend und wird neue Einsichten liefern.

In diesem Zusammenhang merke ich aber an, daß aus mehreren Gründen nicht zwingend widerspruchsfreie Ergebnisse zu erwarten sind. Die Slavnov-Taylor-Identitäten repräsentieren die Eichinvarianz der Theorie. Es ist nicht klar, ob diese für den nicht-störungstheoretischen Fall weiterhin erfüllbar sind. Die nach obigem Vorschlag zu berechnenden Parameter werden, um genügend Gleichungen aufstellen zu können, zum Teil aus dem tief nicht-perturbativen Sektor stammen. Es sollte also geklärt werden, auf welchem Niveau der  $\Lambda$ -Skala die STI und damit auch die Symmetrien zum Teil oder gar vollständig gebrochen werden.

Die Betrachtung der Bethe-Salpeter-resummierten Gleichungen für die Hilfsamplituden scheint aber schon darauf hinzudeuten, daß die Slavnov-Taylor-Identitäten im nicht-perturbativen Fall nicht erfüllt sind. Eine grobe Abschätzung der Struktur der zu erwartenden Selbstkonsistenzgleichungen in diesem Sektor liefert Beziehungen, die im Gegensatz zu den bisher ermittelten Gleichungen, trilinear in den Koeffizienten der Hilfsamplituden-Zählerpolynome sind. Ein widerspruchsfreies Resultat scheint also wenig wahrscheinlich. Die Frage kann aber letztendlich nur durch explizite Berechnungen beantwortet werden.

Eine große weitere Einschränkung der bisherigen Überlegungen stellt der niedrige Approximationsgrad ( $r = 1$ ) dar. Propagatoren und Vertices werden dadurch in eine sehr einfache Form gezwungen. Ein Propagator, der durch drei nicht-perturbative Koeffizienten angesetzt ist, kann den Anspruch die Physik global zu approximieren, noch kaum stellen. Es ist also zu klären, ob Selbstkonsistenz in dieser elementaren Näherung schon erreichbar ist.



# Kapitel 5

## Die longitudinal projizierte Gluon-Selbstenergie

In diesem Kapitel wird die einfachste Slavnov-Taylor-Identität, die der longitudinal projizierten Gluon-Selbstenergie, in 1-Schleifen-Ordnung auf Selbstkonsistenz untersucht. Dazu ist es notwendig, die Schwinger-Dyson-Gleichung des inversen Gluon-Propagators (A.20) longitudinal zu projizieren, wobei die in den Schleifenintegralen auftretenden vollen 3-Punkt-Vertices ihre jeweilige STI erfüllen. Man beachte die Logik des Vorgehens: Es ist nämlich nicht möglich, die STI aus den SDG ohne weitere Voraussetzungen zu beweisen. Man kann lediglich auf jeder Stufe der Schwinger-Dyson-Hierarchie die Gültigkeit der STI für die nächsthöheren Vertices *annehmen* und sie dann für die niedrigeren herleiten. Dies entspricht der Tatsache, daß die SDG allgemeiner als die STI sind und auch Eichsymmetrie-brechende Lösungen zulassen. - Im Rahmen der erweiterten Störungstheorie werden die auftretenden Impulsintegrale berechnet und Selbstkonsistenzgleichungen aufgestellt.

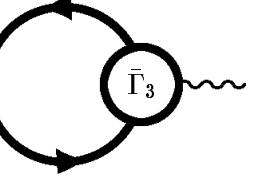
### 5.1 Fermion-Schleife und Tadpole

Zunächst werden die einfachsten Graphen in der Schwinger-Dyson-Gleichung für die Gluon-Selbstenergie behandelt. Die Fermion-Schleife ist für sich genommen transversal und trägt nach der Longitudinalprojektion nicht bei. Zur Berechnung der Projektion der Schleife, d.h. Lorentz-Kontraktion mit  $l^{\mu\nu}(p)$ , ist es zweckmäßig, in die Landau-Eichung zu gehen. In diesem Fall bilden die Hilfsamplituden der benutzten Slavnov-Taylor-Identität<sup>1</sup> auf 1-Schleifen-Niveau keine Divergenzen aus und somit nimmt die STI des Fermion-Vertex nach Abseparation der Farbstruktur wie im abelschen Fall die Form der Ward-Takahashi-

---

<sup>1</sup>Die hier verwendete STI ist die des longitudinal projizierten Fermion-Vertex (siehe (A.52)).

Identität (siehe dazu [Ryd 96]) an. Zu berechnen ist die Projektion

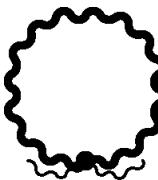
$$l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(A)}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) = l^{\mu\nu}(p) \left\{ - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left[ \text{Diagramm } \bar{\Gamma}_3 \right] \right\}, \quad (5.1)$$


wobei man sich lediglich auf die Divergenzen beschränkt. Nach Spurbildung über die Farb-Indizes, die sich vermöge der globalen Eichinvarianz leicht abseparieren lassen, bleibt ein Schleifenintegral, welches sich durch Ausnutzen der Translationsinvarianz des Integrationsimpulses (vgl. (B.22)) sofort bestimmen läßt. Für das obige Diagramm  $\Phi^A$  ist

$$\frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \delta_{ab} \tilde{D}(p^2) \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left[ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \not{p} \left( S_{(f)}(q-p) - S_{(f)}(q) \right) \right] = 0. \quad (5.2)$$

Es ist noch anzumerken, daß das Ergebnis für jeden Flavour einzeln folgt, also flavourunabhängig ist.

Als nächstes wird das Ergebnis der longitudinal projizierten Tadpole-Schleife angegeben. Die konkrete Berechnung ist bereits in [Dri 97] und [Kuh 97] durchgeführt worden, dennoch wird die Vorgehensweise zur Berechnung dieser Schleife diskutiert. Der Tadpole eignet sich hervorragend als Modell, um die benutzten Rechentechniken, die im weiteren Verlauf des Kapitels wieder auftauchen, kurz vorzustellen. Zunächst läßt sich das Zwischenergebnis

$$l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(B)}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) = l^{\mu\nu}(p) \left\{ \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{Diagramm } \bar{\Gamma}_4 \right\} \quad (5.3)$$


$$= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{(D-1)^2}{D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_T(q) \quad (5.4)$$

angeben. In (5.3) ist der gluonische 4-Punkt-Vertex störungstheoretisch und kann den Feynman-Regeln des 1. Kapitels entnommen werden. Der volle Propagator wird in seinen Transversal- und Longitudinalanteil gemäß (2.5) zerlegt. Die Slavnov-Taylor-Identität der Gluon-Selbstenergie (A.38), von der man zu diesem Zeitpunkt noch nicht weiß, ob sie im erweiterten Schema erhalten bleibt, stellt sicher, daß der longitudinale Anteil seine perturbative Form beibehält. Die Impulsintegrale proportional zum Eichfixierungsparameter

verschwinden dann aus Gründen der Skalenfreiheit (s.u.). Die Farb-Kontraktionen in der adjungierten Darstellung werden mittels (B.7) durchgeführt.

Im Rahmen der erweiterten Störungstheorie ist nun das Impulsintegral über den transversalen Gluon-Propagator in beliebiger Stufe der Approximation zu berechnen. Zum Aufstellen von Selbstkonsistenzgleichungen sind, wie im 2. Kapitel bereits angemerkt, die divergenten Anteile der Schleifen notwendig. Für den Tadpole ist in  $D$  Dimensionen zunächst

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\bar{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(B)}_{ab}{}^{\mu\nu}(p) &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{(D-1)^2}{D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_T^{[r,0]}(q) \\
 &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{(D-1)^2}{D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\prod_{s=1}^r (q^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s+}\Lambda^2) (q^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)}. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Das Herauspräparieren der divergenten Anteile der Impulsintegration ist auf unterschiedliche Weise möglich. Es werden zwei Wege aufgezeigt:

Der erste orientiert sich an dem in [Dri 97] vorgestellten Mechanismus. Das quadratisch divergente Integral (5.4) läßt sich durch geschickte Addition konvergenter Integrale unter Verwendung der Eigenschaft der Skalenfreiheit, die sich als direkte Konsequenz der Manipulationsvorschriften (B.20) und (B.21) ergibt, und der Formel zur symmetrischen Integration (B.29) derart behandeln, daß nur noch effektiv logarithmisch divergente Ausdrücke vorliegen. Durch weiteres Umformen nehmen diese Integrale eine Gestalt an, die sich mit der Standardformel der sphärisch symmetrischen Integration (B.23) ausführen lassen. Die für die Selbstkonsistenz erforderliche Größe  $\Lambda^{-2\epsilon}$  entsteht durch die Integration dabei automatisch.

Der andere Weg zur Berechnung des Integrals besteht in der sogenannten Feynman-Parametrisierung. Mit ihr wird das Integrationsargument so manipuliert, daß der Integrand in einem Schritt in ein sphärisch symmetrisches Integral überführt wird. Die divergenten Anteile lassen sich nach einer geeigneten Substitution des Integrationsimpulses mittels kombinatorischer Überlegungen oder mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes und Power-Counting ermitteln. Wiederum mit der Formel (B.23) werden die zu ermittelnden Impulsintegrale gelöst. Die Feynman-Parametrisierung wird rückgängig gemacht.

Die aus der Impulsintegration auftretenden Ausdrücke  $(R^2)^{-\epsilon}$ , die aus den logarithmisch divergenten Anteilen stammen, sind  $\propto \Lambda^{-2\epsilon}$ , wie mit einem Residuenvergleich gezeigt werden kann (siehe z.B. [Kuh 97]). Die quadratisch divergenten Ausdrücke produzieren einen Faktor  $(R^2)^{1-\epsilon}$ . Nach der Zerlegung in  $(R^2)(R^2)^{-\epsilon}$  sind die Feynman-Parameter in dem „Rest“ ( $R^2$ ) wie gewöhnlich auszaintegrieren. Der andere Teil bildet, wie oben, den für den Selbstkonsistenzmechanismus neben der natürlich vorhandenen Kopplungsabhängigkeit notwenigen Vorfaktor  $\Pi(\epsilon)$  (vgl. (2.61)) mit aus.

Mit der im Anhang aufgeführten Feynman-Parametrisierung (D.1), den Identitäten (D.6) und (D.7) zum Zurücknehmen derselben und des Wurzelsatzes von Vieta (2.10) läßt sich

für den Tadpole das Ergebnis

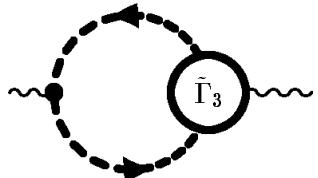
$$\begin{aligned} l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(B) \mu\nu}_{ab}(p) &= \delta_{ab} N_C \frac{9}{4} \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} u_{r,1} \Lambda^2 + \text{endl. Anteile} \\ &= \delta_{ab} N_C \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} I_{(1)} + \text{endl. Anteile} \end{aligned} \quad (5.6)$$

notieren.

Es bleibt noch anzumerken, daß der den Faktor  $\Lambda^{-2\epsilon}$  produzierende oben beschriebene Residuenvergleich im fermionischen Sektor ein noch ungelöstes Problem aufwirft. Bei endlichen Strommassen  $\hat{m}$  wird diese für den Selbstkonsistenzmechanismus notwendige Größe nur noch zum Teil und im Fall großer Quarkmassen (z.B. bei der Behandlung von *Top-Quarks*) fast gar nicht mehr ausgebildet, was an einem Vergleich der numerischen Werte für die Massen sofort abzulesen ist. Durch diese Problematik entstehen neue Divergenzen, die Nebenbedingungen an die nichtperturbativen Parameter stellen und im Fall chiraler Fermionen nicht vorlägen. Die erweiterte Störungsreihe verhält sich daher vermutlich im Grenzwertprozeß  $\hat{m} \rightarrow 0$  nicht stetig.

## 5.2 Die Geist-Schleife

Im folgenden wird der Betrag aus der Geist-Schleife ausgerechnet. Wiederum sind nach Einsetzen der Feynman-Regeln die Lorentz- und Farbkontraktionen durchzuführen. Es ist nach kurzer Rechnung

$$l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(C) \mu\nu}_{ab}(p) = l^{\mu\nu}(p) \left\{ - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{ (Diagramm)} \right\} \quad (5.7)$$


$$\begin{aligned} &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (qp) p^\mu \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^\mu(q-p, -q, p) \\ &\quad \times \tilde{D}(q^2) \tilde{D}((q-p)^2). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dieser Ausdruck ist mit den erweiterten Ansätzen aus dem Geist-Sektor (siehe (2.11) und (2.28)) zu behandeln. Die STI des Geist-Sektors wird aufgrund ihrer ungewöhnlichen Be- schaffenheit in obiger Schleife nicht verwendet. Die Informationen aus ihr werden implizit in Form der im 4. Kapitel berechneten Restriktionen zwischen den nicht-perturbativen Koeffizienten in die Selbstkonsistenzgleichungen für  $r = 1$  in Abschnitt 5.5 eingesetzt. Mit der im Anhang angegebenen Feynman-Parametrisierung (D.2) ergibt sich der Geist-Loop zu

$$\begin{aligned} l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^C \mu\nu_{ab}(p) &= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (qp) p^\mu \\ &\quad \times \left( \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{[r,0]} \right)^\mu(q-p, -q, p) \tilde{D}^{[r,0]}(q^2) \tilde{D}^{[r,0]}((q-p)^2) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
&= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{qp}{p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \\
&\quad \times \frac{((qp) - p^2) N_{G\bar{G}V}^{0[r]}((q-p)^2, q^2, p^2) + p^2 N_{G\bar{G}V}^{1[r]}((q-p)^2, q^2, p^2)}{q^2 \prod_{s=1}^r (q^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2) (q-p)^2 \prod_{s=1}^r (q^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \quad (5.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \\
&\quad \times \left[ \frac{(qp)^2 - (qp)p^2}{q^2(q-p)^2} \int dF_{(1)}(z) \frac{N_{G\bar{G}V}^{0[r]}((q-p)^2, q^2, p^2)}{[(q-zp)^2 + R_{(1)}^2(z)]^{2r}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(qp)p^2}{q^2(q-p)^2} \int dF_{(1)}(z) \frac{N_{G\bar{G}V}^{1[r]}((q-p)^2, q^2, p^2)}{[(q-zp)^2 + R_{(1)}^2(z)]^{2r}} \right] \quad (5.11)
\end{aligned}$$

$$= - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} I_{(2)}(p^2). \quad (5.12)$$

Die divergenten Anteile des Integrals  $I_{(2)}$  werden nun berechnet. Dies geschieht durch gewöhnliches Power-Counting. Mit einer Entwicklung der Zählerpolynome  $N^0$  und  $N^1$  werden die quadratisch, linear und logarithmisch divergenten Integrale isoliert. Nach der Substitution  $q \rightarrow q+zp$  und erneutem Power-Counting lassen sich die Impulsintegrale unter Ausnutzung der Eigenschaft der symmetrischen Integration mittels der Formel (B.23) bestimmen. Damit lässt sich

$$\begin{aligned}
I_{(2)} &= \int dF_{(1)}(z) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q-zp)^2 + R_{(1)}^2(z)]^{2r}} \left[ \frac{(qp)^2 - p^2(qp)}{q^2(q-p)^2} \right. \\
&\quad \times \left\{ \left( (q-p)^2 q^2 p^2 \right)^r + \sum_{m_1, m_2, m_3} \tilde{C}_{m_1, m_2, m_3}^{0[r]} ((q-p)^2)^{m_1} (q^2)^{m_2} (p^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)} \right\} \\
&\quad \left. + \frac{(qp)p^2}{q^2(q-p)^2} \left\{ \sum_{m_1, m_2, m_3} \tilde{C}_{m_1, m_2, m_3}^{1[r]} ((q-p)^2)^{m_1} (q^2)^{m_2} (p^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)} \right\} \right] \quad (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m_3=1}^r (p^2)^{m_3+1} \int dF_{(1)}(z) \left( R_{(1)}^2(z) \right)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \left[ - \tilde{C}_{rrm_3}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_3} \frac{2r}{D} R_{(1)}^2(z) \right. \\
&\quad \left. + 2 \tilde{C}_{r(r-1)m_3}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_3+1} + \tilde{C}_{rrm_3}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_3} (p^2) \left\{ \frac{(r-1)(6r+D-10)}{D(D+2)} \right. \right. \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - z \frac{6(r-1)(4r+D-4)}{D(D+2)} \\
& + z^2 \left( 1 + \frac{2(r-1)(12r+5D-8)}{D(D+2)} \right) \} \\
& - \tilde{C}_{rrm_3}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_3} (p^2) \left\{ - \frac{2(r-1)}{D} + z \frac{4r+D-4}{D} \right\} \\
& + \tilde{C}_{rrm_3}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_3} (p^2) \left\{ - \frac{2(r-1)}{D} + z \frac{4r+D-4}{D} \right\} \] + endl. Anteile
\end{aligned} \tag{5.14}$$

angeben. Die Feynman-Parametrisierung (D.2) wird nun rückgängig gemacht. In  $D = 4$  Dimensionen und einigem Umsortieren der Terme ist

$$\begin{aligned}
l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_{ab}^{(C)\mu\nu}(p) &= - \delta_{ab} N_C \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \\
&\times \left[ - \frac{1}{4} \sum_{m_3=0}^r \tilde{C}_{rrm_3}^{0[r]} (p^2)^{m_3+2} (\Lambda^2)^{r-m_3} - \frac{r}{2} \sum_{m_3=0}^r \tilde{C}_{rrm_3}^{0[r]} (p^2)^{m_3+2} (\Lambda^2)^{r-m_3} \right. \\
&\times \left\{ v_{r,2r-1} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) (v_{r,2r-2s-1} - v_{r,2r-2s+1}) \Lambda^2 \right\} \\
&+ 2 \sum_{m_3=0}^r \tilde{C}_{r(r-1)m_3}^{0[r]} (p^2)^{m_3+1} (\Lambda^2)^{r-m_3+1} \\
&\left. + \frac{1}{2} \sum_{m_3=0}^r \tilde{C}_{rrm_3}^{1[r]} (p^2)^{m_3+2} (\Lambda^2)^{r-m_3} \right] + endl. Anteile.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Es ist zu sehen, daß im perturbativen Limes mit  $\tilde{C}_{rrr}^{0[r]} = 1$  und  $\tilde{C}_{rrr}^{1[r]} = 0$  die gewöhnlichen perturbativen Divergenzen der Geist-Schleife reproduziert werden. Etwas kompakter ergibt sich (5.15) zu

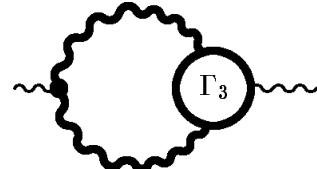
$$l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_2^{(C)\mu\nu}(p) = \delta_{ab} N_C \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{\hat{I}_{(2)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} + endl. Anteile.
\tag{5.16}$$

### 5.3 Die Gluon-Schleife

Der Beitrag des Gluon-Loops zur Gluon-Selbstenergie wird berechnet. Wiederum wird die Schleife longitudinal projiziert, wobei der volle 3-Punkt-Vertex seine Slavnov-Taylor-Identität (A.41) erfüllt. Als Zwischenschritt werden die Divergenzen auf perturbativem Niveau mit denen der Geist-Schleife verglichen. Aus Gründen der Eichinvarianz sollten sich in diesem Fall beide Beiträge wegheben. Im allgemeinen ist dieses Verhalten nicht zu erwarten, denn dazu wäre sicherlich die Hinzunahme der Zwei-Schleifen-Terme erforderlich.

### 5.3.1 Skalare Projektion

Wie gehabt in beliebiger Eichung wird das quadratisch divergente Diagramm

$$l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(D)}_{ab}^{\mu\nu}(p) = l^{\mu\nu}(p) \left\{ \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{Diagramm } \Gamma_3 \right\} \quad (5.17)$$


ausgerechnet. Die vollen Gluon-Propagatoren des Graphen werden tensoriell zerlegt. Der volle Vertex wird durch die STI des 3-Gluon-Vertex ersetzt und Lorentz-Kontraktionen soweit wie möglich durchgeführt. Unter Benutzung der Eigenschaften der Euklidischen Impulsintegration (B.20) bis (B.22), Verwendung der Identität (A.45) und durch Abseparation der Vertex-Farbstrukturen bezüglich der total antisymmetrischen Strukturkonstanten bekommt man Ausdrücke  $\propto \xi$  und  $\propto 1$ . Das Ergebnis der Projektion unter der Voraussetzung, daß (A.37) gilt, ist

$$\begin{aligned} l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{(D)}_{ab}^{\mu\nu}(p) &= \xi (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \tilde{D}(p^2) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \\ &\times \left\{ (q-p)^2 q^\mu q^\nu \hat{G}^{\mu\nu}(q-p, p, -q) - (q^2 - (qp)) q^\mu \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^\mu(q-p, p, -q) \right\} \\ &+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \tilde{D}(p^2) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_T(q^2) \frac{p^2 - 2(qp)}{q^2(q-p)^2} \\ &\times \left\{ q^2(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} \hat{G}^{\mu\nu}(q-p, p, -q) - (q-p)^2 p^\mu q^\nu \hat{G}^{\mu\nu}(q-p, p, -q) \right. \\ &\left. - q^2(q-p)^\mu \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^\mu(q-p, p, -q) + ((qp) - p^2) q^\mu \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^\mu(q-p, p, -q) \right\}. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Dieses Resultat ist mit dem der perturbativen Geist-Schleife zu vergleichen. Die Eichinvarianz bedingt in diesem Falle die Transversalität in der Summe beider Schleifen [BBJ 81]. Der vom Eichfixierungsparameter abhängige Teil der Gluon-Schleife verschwindet, da die darin enthaltenen Integrale skalenfrei sind. Zu überprüfen bleibt noch die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \left( \Phi^{(C)}_{ab}^{\mu\nu}(p) + \Phi^{(D)}_{ab}^{\mu\nu}(p) \right) \\ = l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \delta_{ab} N_C (\delta^{\mu\nu} - \frac{1}{p^2} p^\mu p^\nu) \left( \tilde{\Phi}^{(C)}(p) + \tilde{\Phi}^{(D)}(p) \right) = 0. \quad (5.19) \end{aligned}$$

Da hier im Rahmen des erweiterten Schemas keine endlichen Anteile analysiert werden, beschränkt sich die Diskussion auf die Divergenzen. Für diese findet man

$$\begin{aligned} l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \left( \Phi^{(C)}_{ab}^{\mu\nu}(p) \right)^{(0)pert} &= \delta_{ab} N_C \frac{p^2}{4} \left( \frac{g_0 \nu_0^\epsilon}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} + \text{endl. Anteile} \\ l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \left( \Phi^{(D)}_{ab}^{\mu\nu}(p) \right)^{(0)pert} &= -\delta_{ab} N_C \frac{p^2}{4} \left( \frac{g_0 \nu_0^\epsilon}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} + \text{endl. Anteile} \end{aligned}$$

mit den üblichen Methoden. Die Beziehung (5.19) ist erfüllt und die Eichinvarianz wird respektiert.

### 5.3.2 Die Gluon-Schleife im erweiterten Schema

Der nicht vom Eichfixierungparameter abhängige Teil der Gluon-Schleife wird im Rahmen des erweiterten Schemas analysiert. Dabei wird der Anteil der Hilfsamplitude mit der niedrigsten Massendimension (vgl. Kapitel 3) angesetzt. Mit der in Anhang D angegebenen Feynman-Parametrisierung  $F_{(2)}$  und den Formeln zur Impulsintegration ist zunächst

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_1^{(D)}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \tilde{D}^{[r,0]}(p^2) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_T^{[r,0]}(q^2) \frac{p^2 - 2(qp)}{q^2(q-p)^2} \\
 &\times \left\{ q^2(q-p)^2 \delta^{\mu\nu} \left( \hat{G}^{[r,0]} \right)^{\mu\nu}(q-p, p, -q) - (q-p)^2 p^\mu q^\nu \left( \hat{G}^{[r,0]} \right)^{\mu\nu}(q-p, p, -q) \right. \\
 &\left. - q^2(q-p)^\mu \left( \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{[r,0]} \right)^\mu(q-p, p, -q) + ((qp) - p^2) q^\mu \left( \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{[r,0]} \right)^\mu(q-p, p, -q) \right\} \\
 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{p^2 \prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int dF_{(2)}(z) \\
 &\times \left[ \left( D(p-2q)p - \frac{qp}{q^2}(p^2 - (qp)) \right) \frac{N_G^{0[r]}((q-p)^2, p^2, q^2)}{[(q-zp)^2 + R_{(2)}^2(z)]^{2r}} \right. \\
 &+ \left( (2q-p)p + \frac{(p^2 - 2(qp))((qp) - p^2)(q^2 - (qp))}{q^2(q-p)^2} \right) \frac{N_{G\bar{G}V}^{0[r]}((q-p)^2, p^2, q^2)}{[(q-zp)^2 + R_{(2)}^2(z)]^{2r}} \\
 &+ \left. \left( (p-2q)p \right) \frac{N_{G\bar{G}V}^{1[r]}((q-p)^2, p^2, q^2)}{[(q-zp)^2 + R_{(2)}^2(z)]^{2r}} \right] \\
 &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \left( I_{(3)}(p^2) + I_{(4)}(p^2) + I_{(5)}(p^2) \right). \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Der Gesamtausdruck der letzten Gleichung wird in die Integrale zerlegt, die die Zählerpolynomkoeffizienten der Hilfsamplitude und des Geist-Vertex enthalten. Die Integrale  $\propto N_{\hat{G}}$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 I_{(3)}(p^2) &= \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2} \int dF_{(2)}(z) \left( R_{(2)}^2(z) \right)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \\
 &\times \left[ D \left( - G_{rm_2r}^{0[r]}(\Lambda^2)^{r-m_2} (2r+1) R_{(2)}^2(z) + G_{rm_2(r-1)}^{0[r]}(\Lambda^2)^{r-m_2+1} \right. \right. \\
 &+ G_{(r-1)m_2r}^{0[r]}(\Lambda^2)^{r-m_2+1} + G_{rm_2r}^{0[r]}(\Lambda^2)^{r-m_2}(p^2) \left( \frac{r(2r+D-2)}{D} - z \frac{2r(4r+D-2)}{D} \right. \\
 &\left. \left. + z^2 \frac{2r(4r+D-2)}{D} \right) \right) + 2D \left\{ G_{rm_2r}^{0[r]}(\Lambda^2)^{r-m_2} (2r+1) R_{(2)}^2(z) \left( - \frac{2r}{D} + z \frac{4r+D}{D} \right) \right. \\
 &\left. - G_{rm_2(r-1)}^{0[r]}(\Lambda^2)^{r-m_2+1} \left( - \frac{1}{2}r + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - G_{(r-1)m_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} \left( -\frac{1}{2}(r-1) + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) \\
 & - G_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( -\frac{r(r-1)(4r+2D-4)}{D(D+2)} + z \left( r + \frac{2r(5r-4)}{D} + \frac{24r(r-1)^2}{D(D+2)} \right) \right. \\
 & - z^2 \left( 2r + \frac{10r(2r-1)}{D} + \frac{24(2r-1)(r-1)}{D(D+2)} \right) \\
 & \left. + z^3 \left( 2r + \frac{8r(2r-1)}{D} + \frac{16r(2r-1)(r-1)}{D(D+2)} \right) \right) \\
 & - G_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( -\frac{2r}{D} + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) + 2 \left\{ - G_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} \frac{2r+1}{D} R_{(2)}^2(z) \right. \\
 & + \left( G_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + G_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right) (\Lambda^2)^{r-m_2+1} \frac{2}{D} + G_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( \frac{r(6r+D-4)}{D(D+2)} \right. \\
 & \left. - z \frac{6r(4r+D-2)}{D(D+2)} + z^2 \frac{(2r-1)(12r+5D+12)}{D(D+2)} \right) \left. \right\} \quad + \text{endl. Anteile} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[ G_{rm_2r}^{0[r]} \left\{ -\frac{r}{4} \right. \right. \\
 & \times \left( \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)+} + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)+} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)+}) \right\} \right. \\
 & + \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)-} + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)-} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)-}) \right\} \\
 & \left. \left. + \frac{r+1}{2} (8r-9) \left\{ v'_{r,2r} + \sum_{s=1}^r \left( \frac{r-s}{r} \right) (v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2}) \right\} \right\} \\
 & \left. + 5 G_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + G_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right] \quad + \text{endl. Anteile} \\
 & = (\Lambda)^{-2\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \hat{I}_{(3)}(p^2) \quad + \text{endl. Anteile.} \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Terme, die die Parameter  $\tilde{C}^0$  enthalten und somit auch die perturbativen Anteile „tragen“, sind

$$\begin{aligned}
 I_{(4)}(p^2) & = \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2+1} \int dF_{(2)}(z) \left( R_{(2)}^2(z) \right)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \\
 & \times \left[ \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (2r+1) R_{(2)}^2(z) - \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} \right. \\
 & - \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} - \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( \frac{r(2r+D-2)}{D} - z \frac{2r(4r+D-2)}{D} \right. \\
 & \left. + z^2 \frac{2r(4r+D-2)}{D} \right) + 2 \left\{ - \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (2r+1) R_{(2)}^2(z) \left( -\frac{2r}{D} + z \frac{4r+D}{D} \right) \right. \\
 & \left. + \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} \left( -\frac{1}{2}r + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} \left( -\frac{1}{2}(r-1) + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) \\
& + \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( -\frac{r(r-1)(4r+2D-4)}{D(D+2)} + z \left( r + \frac{2r(5r-4)}{D} + \frac{24r(r-1)^2}{D(D+2)} \right) \right. \\
& - z^2 \left( 2r + \frac{10r(2r-1)}{D} + \frac{24(2r-1)(r-1)}{D(D+2)} \right) \\
& \left. + z^3 \left( 2r + \frac{8r(2r-1)}{D} + \frac{16r(2r-1)(r-1)}{D(D+2)} \right) \right\} \\
& + 2 \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( -\frac{6(r-1)}{D(D+2)} + z \frac{3(4r+D-2)}{D(D+2)} \right) - \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \frac{3}{D} \\
& - 2 \left\{ - \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} \frac{2r+1}{D} R_{(2)}^2(z) + \left( \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right) (\Lambda^2)^{r-m_2+1} \frac{1}{D} \right. \\
& + \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left\{ \frac{6r+D-10}{D(D+2)} - z \frac{4r+D-2}{D(D+2)} + z^2 \left( 1 + \frac{12r+5D-2}{D(D+2)} \right) \right\} \left. \right\} \\
& + 3 \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( -\frac{2(r-1)}{D} + z \frac{4r+D-2}{D} \right) \\
& \left. - \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \right] + \text{endl. Anteile} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2} (\Lambda^2)^{r-m_2} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[ -\frac{1}{4} \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} p^2 + \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} \left\{ \frac{r}{4} \right. \right. \\
& \times \left( \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)+} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)+} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)+}) \Lambda^2 \right\} \right. \\
& + \left. \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)-} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)-} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)-}) \Lambda^2 \right\} \right) \\
& + \frac{3(r+1)}{2} \left\{ v'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^r \left( \frac{r-s}{r} \right) (v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2}) \Lambda^2 \right\} \left. \right\} \\
& - \frac{3}{2} \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{0[r]} \Lambda^2 - \frac{1}{2} \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \Lambda^2 \right] + \text{endl. Anteile} \\
& = (\Lambda)^{-2\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \hat{I}_{(4)}(p^2) + \text{endl. Anteile.} \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Schließlich bleiben die Ausdrücke  $\propto \tilde{C}^1$  zu berechnen. Es findet sich hierfür

$$\begin{aligned}
I_{(5)}(p^2) & = \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2} \int dF_{(2)}(z) \left( R_{(2)}^2(z) \right)^{-\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{D/2}} \\
& \times \left[ - \tilde{C}_{rm_2r}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (2r+1) R_{(2)}^2(z) + \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} \right. \\
& \left. + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} + \tilde{C}_{rm_2r}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( \frac{r(2r+D-2)}{D} - z \frac{2r(4r+D-2)}{D} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + z^2 \frac{2r(4r+D-2)}{D} \Big) + 2 \left\{ \tilde{C}_{rm_2r}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (2r+1) R_{(2)}^2(z) \left( -\frac{2r}{D} + z \frac{4r+D}{D} \right) \right. \\
 & - \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} \left( -\frac{1}{2}r + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) \\
 & - \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} \left( -\frac{1}{2}(r-1) + z \frac{1}{2}(2r+1) \right) \\
 & - \tilde{C}_{rm_2r}^{1[r]} (\Lambda^2)^{r-m_2} (p^2) \left( -\frac{r(r-1)(4r+2D-4)}{D(D+2)} + z \left( r + \frac{2r(5r-4)}{D} + \frac{24r(r-1)^2}{D(D+2)} \right) \right. \\
 & - z^2 \left( 2r + \frac{10r(2r-1)}{D} + \frac{24(2r-1)(r-1)}{D(D+2)} \right) \\
 & \left. \left. + z^3 \left( 2r + \frac{8r(2r-1)}{D} + \frac{16r(2r-1)(r-1)}{D(D+2)} \right) \right) \right\} + \text{endl. Anteile} \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2+1} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[ \tilde{C}_{rm_2r}^{1[r]} \left\{ (r+1) \right. \right. \\
 & \times \left\{ v'_{r,2r} + \sum_{s=1}^r \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \right\} + \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{1[r]} \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{1[r]} \right] + \text{endl. Anteile} \quad (5.26) \right. \\
 & = (\Lambda)^{-2\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \hat{I}_{(5)}(p^2) + \text{endl. Anteile.}
 \end{aligned}$$

Es ist zu sehen, daß die nicht-perturbativen Divergenzen im Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) verschwinden. Die Terme des Integrals  $I_4(p^2)$  bilden den richtigen perturbativen Limes, denn dieser hebt sich aufgrund der Projektion exakt mit dem berechneten Term der Geist-Schleife zu Null weg. Insgesamt findet sich für die Gluon-Schleife

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_1^{(D)\mu\nu}_{ab}(p) & = \delta_{ab} N_C \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \\
 & \times \left( \hat{I}_{(3)}(p^2) + \hat{I}_{(4)}(p^2) + \hat{I}_{(5)}(p^2) \right) + \text{endl. Anteile.} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Der vom Eichfixierungsparameter abhängige Teil der Schleife wird im Rahmen der nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln berechnet. Bevor jedoch in

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_2^{(D)\mu\nu}_{ab}(p) & = \xi (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \tilde{D}^{[r,0]}(p^2) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^4} \\
 & \times \left\{ (q-p)^2 q^\mu q^\nu \left( \hat{G}^{[r,0]} \right)^{\mu\nu}(q-p, p, -q) - (q^2 - (qp)) q^\mu \left( \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{[r,0]} \right)^\mu(q-p, p, -q) \right\} \\
 & = \xi (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \tilde{D}(p^2)^{[r,0]} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \\
 & \times \left\{ (1 - 2 \frac{qp}{q^2} + \frac{p^2}{q^2}) \tilde{G}_0^{[r,0]}((q-p)^2, p^2, q^2) - (1 - 2 \frac{qp}{q^2} + \frac{(qp)^2}{q^4}) \tilde{F}_0^{[r,0]}((q-p)^2, p^2, q^2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - \frac{qp}{q^2}\right) \tilde{F}_1^{[r,0]}((q-p)^2, p^2, q^2) \Big\} \quad (5.28)$$

eine Feynman-Parametrisierung durchgeführt wird, lassen sich die quartisch divergenten Terme in (5.28) unter Ausnutzung der Eigenschaft der skalenfreien Integration in einen quadratisch divergenten Ausdruck überführen, wodurch sich der Rechenaufwand erheblich vereinfacht<sup>2</sup>. Exemplarisch gebe ich

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{F}_0^{[r,0]}((q-p)^2, p^2, q^2) &= \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{-2 \sum_{s=1}^r v_{r,2s} \Lambda^2 (q^2)^{2r-1} + 2 \sum_{s=1}^r v_{r,2s} \Lambda^2 (qp)(q^2)^{2r-2}}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (q^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \right. \\ &- \frac{\left( (2r-1) p^2 \sum_{s=1}^r v_{r,2s} \Lambda^2 + 2 \sum_{s=1}^{r-1} v_{r,2s} \Lambda^2 \left\{ \sum_{t=s+1}^r v_{r,2t} \Lambda^2 \right\} + \left( \sum_{s=1}^r v_{r,2s} \Lambda^2 \right)^2 \right) (q^2)^{2r-2}}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (q^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \\ &\left. + \frac{\sum_{m_1, m_2, m_3 \geq 0} \tilde{C}_{m_1, m_2, m_3}^{0[r]} ((q-p)^2)^{m_1} (p^2)^{m_2} (q^2)^{m_3} (\Lambda^2)^{3r-(m_1+m_2+m_3)}}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2) \prod_{s=1}^r (q^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \right\} + \text{endl. Anteile} \end{aligned} \quad (5.29)$$

an, wobei im letzten divergenten Ausdruck  $\tilde{C}_{rrr}^{0[r]} = 0$  gilt. Die kubisch divergenten Integrale werden sich mit dem Mittel der symmetrischen Integration ebenso als quadratisch divergente erweisen, so daß effektiv nur noch solche vorliegen. Mit

$$I^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_2^{(D)}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) = \xi (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 N_C \delta_{ab} \frac{1}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} I_{(6)}(p^2) \quad (5.30)$$

findet sich nach ähnlich langwieriger Integration wie bei der vorangegangenen Rechnung

$$\begin{aligned} I_{(6)}(p^2) &= \sum_{m_2=0}^r (p^2)^{m_2-1} (\Lambda^2)^{r-m_2+1} (\Lambda^2)^{-\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left[ \right. \\ &\quad \frac{3r+1}{2r+1} \left( G_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + G_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right) p^2 - r \left( G_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + G_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right) \\ &\quad \left. \times \left\{ \tilde{u}'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \tilde{u}'_{r,2r-2s} - \tilde{u}'_{r,2r-2s+2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Quartisch und kubisch divergente Impulsintegrale treten allein bei Untersuchungen von Vakuumkondensaten, wie sie in [Str 96] durchgeführt wurden, auf.

$$\begin{aligned}
& + v'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \} \Lambda^2 + \left( G_{rm_2(r-2)}^{0[r]} + G_{(r-2)m_2r}^{0[r]} \right) \Lambda^2 \\
& + r(r-1) G_{rm_2r}^{0[r]}(p^2) \left\{ \tilde{u}'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \tilde{u}'_{r,2r-2s} - \tilde{u}'_{r,2r-2s+2} \right) \right. \\
& + v'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \} \Lambda^2 - G_{(r-1)m_2r} p^2 \\
& - \left\{ \frac{1}{4} \frac{6r+1}{2r+1} \left( \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right) p^2 - r \left( \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{0[r]} + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} \right) \right. \\
& \times \left. \left\{ \tilde{u}'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \tilde{u}'_{r,2r-2s} - \tilde{u}'_{r,2r-2s+2} \right) \right\} \right. \\
& + v'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \} \Lambda^2 + \left( \tilde{C}_{rm_2(r-2)}^{0[r]} + \tilde{C}_{(r-2)m_2r}^{0[r]} \right) \Lambda^2 \\
& + \frac{r(4r-1)}{4} \tilde{C}_{rm_2r}^{0[r]} p^2 \left\{ \tilde{u}'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \tilde{u}'_{r,2r-2s} - \tilde{u}'_{r,2r-2s+2} \right) + v'_{r,2r} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \} - \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{0[r]} p^2 \left. \right\} \\
& + \frac{r}{2r+1} \left( \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{1[r]} + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{1[r]} \right) p^2 - r \left( \tilde{C}_{rm_2(r-1)}^{1[r]} + \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{1[r]} \right) \\
& \times \left\{ \tilde{u}'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \tilde{u}'_{r,2r-2s} - \tilde{u}'_{r,2r-2s+2} \right) \right. \\
& + v'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \} \Lambda^2 + \left( \tilde{C}_{rm_2(r-2)}^{1[r]} + \tilde{C}_{(r-2)m_2r}^{1[r]} \right) \Lambda^2 \\
& + \frac{1}{2} r^2 \tilde{C}_{rm_2r}^{1[r]} p^2 \left\{ \tilde{u}'_{r,2r} + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \tilde{u}'_{r,2r-2s} - \tilde{u}'_{r,2r-2s+2} \right) + v'_{r,2r} \right. \\
& + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{(r-1)m_2r}^{1[r]} p^2 \left. \right\} + \text{endl. Anteile} \\
& = (\Lambda)^{-2\epsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \hat{I}_{(6)}(p^2) + \text{endl. Anteile.} \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Im Falle  $r = 1$  treten in einigen Koeffizienten, die die Zählerpolynome der Vertices approximieren, negative Indizes auf. Diese sind zu Null zu setzen. Insgesamt folgt damit für die Schleifenintegrale proportional zum Eichparameter

$$l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi_2^{(D)}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) = \xi \delta_{ab} N_C \left( \frac{g_0}{4\pi} \right)^2 \left( \frac{\Lambda}{\nu_0} \right)^{-2\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{\hat{I}_{(6)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} + \text{endl. Anteile.} \tag{5.32}$$

Der gesamte Longitudinalanteil ist somit oberfächlich betrachtet im Gegensatz zum störungstheoretischen Resultat von Null verschieden und verletzt damit die STI des 2-Gluon-Vertex.

## 5.4 Selbstkonsistenzgleichungen

Die in diesem Kapitel durchgeführten Rechenschritte fasse ich kurz zusammen:

Die Slavnov-Taylor-Identität der Gluon-Selbstenergie ist im Rahmen der systematisch erweiterten Störungstheorie auf 1-Loop-Niveau untersucht worden. Dazu ist die zugehörige Schwinger-Dyson-Gleichung bezüglich beider Beine longitudinal projiziert worden, wobei postuliert wurde, daß die vollen Vertices mit Ausnahme des Geist-Vertex in den Schleifen ihre jeweilige STI erfüllen. Abschließend wurden die Schleifenintegrale im erweiterten Schema ausgewertet. Für die Identität läßt sich

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \Phi^{\Gamma_2}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) &= l^{\mu\nu}(p) \left( \frac{\tilde{g}_0}{4\pi} \right)^2 \left\{ \Phi^{(A+B+C+D)}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) \right\} \\
 &= \delta_{ab} N_C \Pi(\epsilon) \left\{ I_{(1)} + \frac{\hat{I}_{(2)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} + \frac{\hat{I}_{(3)}(p^2) + \hat{I}_{(4)}(p^2) + \hat{I}_{(5)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{v}_{r,2s-1} \Lambda^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \xi \frac{\hat{I}_{(6)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \right\} + \text{endl. Anteile} \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

als Zwischenergebnis notieren. Der longitudinal projizierte volle 2-Gluon-Vertex reduziert sich auf

$$\begin{aligned}
 l^{\mu\nu}(p^2) \Gamma_2^{[r,0]}{}_{ab}^{\mu\nu}(p) &= \delta_{ab} l^{\mu\nu} \left\{ t^{\mu\nu}(p) \Gamma_{TT}^{[r,0]}(p^2) + l^{\mu\nu}(p) \Gamma_{LL}^{[r,0]}(p^2) \right\} \\
 &= \delta_{ab} \Gamma_{LL}^{[r,0]}(p^2), \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

wobei  $\Gamma_{LL}$  zunächst nicht, wie für die STI notwendig, die störungstheoretische Form aufweist. Der Grund hierfür wird sofort ersichtlich. Mit Hilfe von (2.57) und nach Abspalten der Farbindizes ist für die zugrundeliegende SDG

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{LL}^{[r,0]}(p^2) &= -\frac{p^2}{\xi} + N_C \Pi(\epsilon) \left\{ I_{(1)} + \frac{\hat{I}_{(2)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\hat{I}_{(3)}(p^2) + \hat{I}_{(4)}(p^2) + \hat{I}_{(5)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + \tilde{v}_{r,2s-1} \Lambda^2)} + \xi \frac{\hat{I}_{(6)}(p^2)}{\prod_{s=1}^r (p^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \right\}. \tag{5.35}
 \end{aligned}$$

Für das Aufstellen der Selbstkonsistenzgleichungen mit (5.35) gibt es prinzipiell zwei mögliche Wege. Dies kann wie bei der Padé-Approximation durch Multiplikation der Nennerstrukturen in den Gleichungen und durch Sortierung nach Potenzen in der spontanen Massenskala geschehen. Ein Koeffizientenvergleich, wie er bereits in den Kapiteln 3 und 4 vorgenommen wurde, liefert dann Beziehungen, die von den nicht-perturbativen Koeffizienten zu erfüllen sind. Dieses Verfahren, obwohl gegen kein allgemeines Prinzip verstößend, ist bei niedrigen  $r$  weniger empfehlenswert, da es auf eine Anpassung der Approximante beim Punkt  $p^2 = 0$  hinausläuft, wo sie vermutlich den größten Fehler aufweist (bei  $p^2 \rightarrow \infty$

ist sie nach Konstruktion exakt).

Der im folgenden benutzte Mechanismus zur Berechnung der Selbstkonsistenzgleichungen beruht auf dem Vergleich der Polstrukturen.  $\Gamma_{LL}(p^2)$  behält, wie in [Sti 96] vorgeschlagen, seine störungstheoretische Form bei und kann mit  $-p^2/\xi$  in (5.35) gekürzt werden. Die Residuen werden an den Polstellen der verbleibenden Ausdrücke gebildet. Die Selbstkonsistenzgleichungen ergeben sich für  $p^2 = -\tilde{u}'_{r,2t}\Lambda^2$  und  $s \neq t$  einerseits zu

$$0 = \hat{I}_{(2)}(-\tilde{u}'_{r,2t}\Lambda^2), \quad (5.36)$$

und an der Stelle  $p^2 = -v_{r,2t-1}\Lambda^2$  mit  $s \neq t$  andererseits zu

$$\begin{aligned} 0 = & \hat{I}_{(3)}(-v_{r,2t-1}\Lambda^2) + \hat{I}_{(4)}(-v_{r,2t-1}\Lambda^2) + \hat{I}_{(5)}(-v_{r,2t-1}\Lambda^2) \\ & + \xi \hat{I}_{(6)}(-v_{r,2t-1}\Lambda^2). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die jetzt bestimmten Gleichungen besitzen keinerlei Abhängigkeit von der durch den Selbstkonsistenzmechanismus implizierten Größe  $\beta_0$ . Sie geht durch das Fehlen von  $\Lambda^2$ -Modifikationen auf der linken Seite von (5.35) verloren. Im weiteren weist (5.37) eine Abhängigkeit vom Eichparameter auf, was die Eichinvarianz der Theorie verletzt.

## 5.5 Selbstkonsistenz auf dem Niveau $r = 1$

Die im vorangegangenen Abschnitt berechneten Selbstkonsistenzgleichungen werden nun für die Approximationsstufe  $r = 1$  aufgestellt. Zuerst wird der Beitrag der Geist-Schleife zur Gluon-Selbstenergie untersucht. Dieser ergibt sich nach einigem Kürzen und der perturbativen Renormierung unter Verwendung  $\tilde{C}_{111}^{0[1]} = 1$  in (5.36) zu<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} 0 = & \left( \frac{1}{4} \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{110}^0 - \frac{1}{2} v_1 \left( \tilde{C}_{110}^0 - \tilde{u}'_2 \right) + 2 \left( \tilde{C}_{100}^0 - \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{101}^0 \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{110}^1 \right) \Lambda^4, \end{aligned} \quad (5.38)$$

was sich aber mit Hilfe von (4.11) zu

$$0 = \left( \frac{1}{4} \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{110}^0 + 2 \left( \tilde{C}_{100}^0 - \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{101}^0 \right) - \frac{1}{2} \tilde{u}'_2 \tilde{C}_{110}^1 \right) \Lambda^4 \quad (5.39)$$

vereinfacht. Vorausgesetzt wurde  $\tilde{u}'_2 \neq 0$ , was, wie im 3. Kapitel bereits diskutiert, eine vernünftige Annahme ist. Mit (5.37) und  $v_1 \neq 0$  erhält man nach perturbativer Renormierung aus der Gluon-Schleife die Gleichung

<sup>3</sup>Die Indizierung des Approximationsgrads wird im folgenden fortgelassen.

$$\begin{aligned}
0 = & \left( \frac{1}{4} \left( G_{101}^0 - v_1 \right) (u_+ + u_- - v'_2) + 5 \left( G_{100}^0 - v_1 G_{110}^0 \right) \right. \\
& + \left( G_{001}^0 - v_1 G_{011}^0 \right) + \frac{1}{4} v_1 \tilde{C}_{101}^0 + \left( \tilde{C}_{101}^0 - v_1 \right) \left( \frac{1}{4} (u_+ + u_-) + 3v'_2 \right) \\
& - \frac{3}{2} \left( \tilde{C}_{100}^0 - v_1 \tilde{C}_{110}^0 \right) - \frac{1}{2} \left( \tilde{C}_{001}^0 - v_1 \tilde{C}_{011}^0 \right) + 2 v'_2 v_1 \tilde{C}_{101}^1 \\
& + \left( \tilde{C}_{100}^1 - v_1 \tilde{C}_{110}^1 \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{C}_{001}^1 - v_1 \tilde{C}_{011}^1 \right) \Lambda^4 \\
& + \xi \left( \left( \frac{4}{3} + \frac{\tilde{u}'_2 + v'_2}{v_1} \right) \left( G_{100}^0 + G_{001}^0 \right) - \left( \frac{4}{3} v_1 + \tilde{u}'_2 + v'_2 \right) \left( G_{110}^0 + G_{011}^0 \right) \right. \\
& - \left( \frac{7}{12} + \frac{\tilde{u}'_2 + v'_2}{v_1} \right) \left( \tilde{C}_{100}^0 + \tilde{C}_{001}^0 \right) - \left( \frac{7}{12} v_1 - \tilde{u}'_2 + v'_2 \right) \left( \tilde{C}_{110}^0 + \tilde{C}_{011}^0 \right) \\
& - \frac{3}{4} (\tilde{u}'_2 + v'_2) \tilde{C}_{101}^0 + \frac{3}{4} v_1 (\tilde{u}'_2 + v'_2) + \tilde{C}_{001}^0 - v_1 \tilde{C}_{011}^0 \\
& + \left( \frac{1}{3} + \frac{\tilde{u}'_2 + v'_2}{v_1} \right) \left( \tilde{C}_{100}^1 + \tilde{C}_{001}^1 \right) - \left( \frac{1}{3} v_1 + \tilde{u}'_2 + v'_2 \right) \left( \tilde{C}_{110}^1 + \tilde{C}_{011}^1 \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} (\tilde{u}'_2 + v'_2) \tilde{C}_{101}^1 - \frac{1}{2} \tilde{C}_{001}^1 + \frac{1}{2} v_1 \tilde{C}_{011}^1 \right) \Lambda^4. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Unter Hinzunahme der in Kapitel 3 erarbeiteten Restriktionen (3.25), die an die Zählerpolynomkoeffizienten der Hilfsamplitude  $\hat{G}$  für die STI des 3-Gluon-Vertex gestellt werden, fällt die Abhängigkeit von diesen vollständig heraus, was ein sehr interessantes Resultat darstellt. Die im 4. Kapitel berechneten Einschränkungen (4.9) und (4.11) für die Koeffizienten des Geist-Vertex schaffen dies nicht, da diese untereinander stark vermischen. Somit bleibt die Abhängigkeit der Beziehung vom Eichfixierungsparameter für  $r = 1$  weiterhin bestehen. Mit den Symmetriebeziehungen (2.31) für die Parameter reduziert sich (5.40) zu

$$\begin{aligned}
0 = & \left( \frac{1}{4} v_1 \tilde{C}_{101}^0 + \left( \tilde{C}_{101}^0 - v_1 \right) \left( \frac{1}{4} (u_+ + u_-) + 3v'_2 \right) \right. \\
& - \frac{3}{2} \left( \tilde{C}_{100}^0 - v_1 \tilde{C}_{110}^0 \right) - \frac{1}{2} \left( \tilde{C}_{001}^0 - v_1 \tilde{C}_{101}^0 \right) + 2 v'_2 v_1 \tilde{C}_{101}^1 \\
& + \left( \tilde{C}_{100}^1 - v_1 \tilde{C}_{110}^1 \right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{C}_{001}^1 - v_1 \tilde{C}_{011}^1 \right) \Lambda^4 \\
& + \xi \left( - \left( \frac{7}{12} + \frac{\tilde{u}'_2 + v'_2}{v_1} \right) \left( \tilde{C}_{100}^0 + \tilde{C}_{001}^0 \right) - \left( \frac{7}{12} v_1 - \tilde{u}'_2 + v'_2 \right) \right. \\
& \times \left( \tilde{C}_{110}^0 + \tilde{C}_{010}^0 \right) - \frac{3}{4} (\tilde{u}'_2 + v'_2) \tilde{C}_{101}^0 + \frac{3}{4} v_1 (\tilde{u}'_2 + v'_2) + \tilde{C}_{001}^0 - v_1 \tilde{C}_{101}^0 \\
& + \left( \frac{1}{3} + \frac{\tilde{u}'_2 + v'_2}{v_1} \right) \left( \tilde{C}_{100}^1 + \tilde{C}_{001}^1 \right) - \left( \frac{1}{3} v_1 + \tilde{u}'_2 + v'_2 \right) \left( \tilde{C}_{110}^1 + \tilde{C}_{011}^1 \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} (\tilde{u}'_2 + v'_2) \tilde{C}_{101}^1 - \frac{1}{2} \tilde{C}_{001}^1 + \frac{1}{2} v_1 \tilde{C}_{011}^1 \right) \Lambda^4. \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Die rechten Seiten von (5.38) und (5.41) verschwinden im perturbativen Limes vollständig und besitzen somit die typische Eigenschaft von Selbstkonsistenzgleichungen. Beide Beziehungen sind im Fall der Landau-Eichung, wo die Koeffizienten aus dem Geist-Sektor vollständig verschwinden, trivial erfüllt.

Es bleibt noch anzumerken, daß die STI an dieser Stelle die Bedingungen aus den Kapiteln 3 und 4 erfüllen, aber noch nicht vollständig. Dies gelingt vielleicht für einen größeren Approximationsgrad.

## 5.6 Ergebnis

Wie bereits mehrfach betont, ist eine Abhängigkeit der nicht-perturbativen Koeffizienten der Geistertvertices - hier sind das die  $\tilde{C}$ ,  $v_1$  und  $v'_2$  - vom Eichfixierungsparameter sehr wahrscheinlich, was auf dem Niveau  $r = 1$  an (5.39) und (5.41) explizit abzulesen ist<sup>4</sup>. Dieses scheint auch plausibel, denn wie bereits mehrfach betont, bleibt der Geist-Sektor in Landau-Eichung störungstheoretisch.

Leider läßt sich diese Aussage nicht weiter untermauern, denn dazu fehlen die numerischen Daten der in den Selbstkonsistenzgleichungen auftretenden nicht-perturbativen Koeffizienten. Eine numerische Bestimmung mit den Ergebnissen dieser Arbeit allein ist nicht möglich, da das Gleichungssystem mit den Beziehungen (5.41) und (5.38) und den 14 Unbekannten  $(u_+, u_-, v_1, v'_2, \tilde{u}'_2)$ ,  $(\tilde{C}_{100}^0, \tilde{C}_{001}^0, \tilde{C}_{110}^0, \tilde{C}_{101}^0)$  und  $(\tilde{C}_{100}^1, \tilde{C}_{001}^1, \tilde{C}_{110}^1, \tilde{C}_{101}^1, \tilde{C}_{011}^1)$  stark unterbestimmt ist. Dies könnte erst mit Hilfe der Selbstkonsistenzgleichungen aus der Analyse von Schwinger-Dyson-Gleichungen, oder aus Bewegungsgleichungskondensaten geschehen, wie sie in [Str 96] durchgeführt worden ist.

Dennoch wird die Abhängigkeit von  $\xi$  in (5.41) vermutlich nicht eliminiert werden, was damit gleichbedeutend ist, daß die Eichinvarianz der Theorie zum Teil spontan gebrochen ist. Die Analyse der Gleichungen aus Kapitel 3 und 4 lieferten ja bereits ähnliche Hinweise. Ob dieses Verhalten auch für einen großen Wert für  $r$  so bleibt, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden.

Sollte die Eichinvarianz in der systematisch erweiterten Störungstheorie jenseits des perturbativen Limes nicht erhalten bleiben, so entsteht prinzipiell die Möglichkeit, den Longitudinalanteil des Gluon-Propagators, der durch seine STI auf die perturbative Struktur eingeschränkt schien, ebenfalls nicht-perturbativ zu modifizieren. Er könnte mit Koeffizienten aus dem Geist- bzw. Gluonsektor ausgestattet oder mit einem völlig neuen Parametersatz versehen werden.

Die so vorgeschlagene Modifikation im Gluon-Sektor hat aber weitreichende Konsequenzen. Ein Neuansatz des Longitudinalanteils des Gluon-Propagators wirkt sich auf die STI des 3- und des 4-Gluon-Vertex aus, denn bei der Herleitung vermischen sich die Identitäten mehr oder weniger. Damit sind dann auch die in diesem Kapitel gewonnenen Ergebnisse der Gluon-Schleife zu überarbeiten.

Die Landau-Eichung bleibt aber ein legitimes Mittel, die Theorie durch Beschränkung auf rein transversale Gluon-Linien zu vereinfachen. Die longitudinale Selbstenergie besitzt eine

---

<sup>4</sup>Dieser Sachverhalt wird durch die in [Zan 00] angegebenen Ergebnisse gestützt.

Entwicklung im Eichparameter, wie an (5.35) zu sehen ist. Nach der perturbativen nullten Ordnung, die  $\propto (1/\xi)$  ist, besteht eine potenzartige Abhängigkeit im Eichparameter. Die 1-Schleifen-Diagramme produzieren eine Abhängigkeit  $\propto \xi^1$  und die 2-Schleifen-Diagramme dementsprechend höhere Potenzen von  $\xi$ . Dabei eliminiert die Wahl der Landau-Eichung die nicht-perturbative Modifikation in jeder Ordnung, denn  $\Gamma_{LL}(p^2)$  bildet keine Strukturen proportional zu  $1/\xi^2$  aus.

Die Wahl der Landau-Eichung hat aber den Nachteil, daß sich die Anzahl der aufzustellenden Selbstkonsistenzgleichungen prinzipiell verringert. Wie bereits in Abschnitt 2.4 erwähnt, bilden die Hilfsamplituden der STI für  $\xi = 0$  keine Divergenzen aus und stehen der Berechnung von Selbstkonsistenzgleichungen im Rahmen der erweiterten Störungstheorie nicht mehr zu Verfügung und entfallen somit zur numerischen Bestimmung der nicht-perturbativen Parameter.

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden die ersten Ansätze zur Untersuchung der Slavnov-Taylor-Identitäten im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie mit beliebigem Eichfixierungsparameter  $\xi$  formuliert. In der Analyse wird im Wesentlichen der Fragestellung nachgegangen, ob die Identitäten ihre Gültigkeit beibehalten und welche Restriktionen sie im Falle ihrer Erhaltung an die nicht-perturbativen Koeffizienten stellen. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß man daran interessiert ist zu klären, inwieweit das erweiterte Schema die Eichinvarianz der Theorie respektiert.

Es gibt jedoch erste Indizien dafür, daß dies nicht der Fall ist und die STI möglicherweise nur für den perturbativen Limes ( $\Lambda \rightarrow 0$ ) gelten. Die Slavnov-Taylor-Identitäten der 3-Punkt-Vertices werden in dieser Arbeit auf Beziehungen zwischen den nicht-perturbativen Parametern der Vertexansätze reduziert. Der Grundstein zu einer numerischen Bestimmung der Koeffizienten ist damit gelegt. Ein Vergleich dieser Beziehungen mit denen aus den Schwinger-Dyson-Gleichungen sollte schließlich klären, ob die Identitäten weiterhin erfüllbar sind. Die in Kapitel 3 und 4 abgeleiteten Restriktionen weisen aber schon jetzt eine „auf den ersten Blick“ völlig anders geartete Struktur auf, als die aus den SDG, zumal ihrer Bethe-Salpeter-resummierten Form, zu erwartenden Selbstkonsistenzgleichungen. Da das Gesamtsystem aus SDG- und STI-Bedingungen auf *jeder* Stufe  $r$  eine erhebliche Überbestimmung der nicht-perturbativen Koeffizienten bewirken würde, die nur in Sonderfällen nicht-triviale Lösungen zuläßt, sieht es nach den Ergebnissen dieser Arbeit eher so aus, als ob eine Erfüllung der STI durch *alle* nicht-perturbativen Terme eher einen seltenen Ausnahmefall darstellen wird.

Die dynamische Rechnung der longitudinal projizierten Gluon-Selbstenergie „wirft“ eine explizite Abhängigkeit der nicht-perturbativen Koeffizienten vom Eichfixierungsparameter ab. Dieser Befund wird durch die Berechnungen in [Zan 00] gestützt. Es scheint also eine Erweiterung in Form einer Abhängigkeit vom Eichparameter aller nicht-perturbativen Koeffizienten erforderlich zu sein. Dennoch ist die Landau-Eichung ( $\xi = 0$ ), wie sie auch in [Dri 97], [Kuh 97] oder [Voi 99] benutzt wurde, ein geeignetes Mittel, um die Komplexität der Theorie zu vereinfachen, weil sie weiterhin longitudinale innere Gluon-Linien eliminiert.

Die bisherigen Analysen der Slavnov-Taylor-Identitäten scheinen also darauf hinzudeuten, daß die systematisch erweiterte Störungstheorie die Eichinvarianz der Theorie zum Teil spontan bricht. Die Selbstkonsistenz der in [Sti 96] vorgeschlagenen Ansätze, die die Störungsreihen für nicht-perturbative Impulsskalen systematisch ergänzen, scheint ein Anomalie-ähnliches Phänomen darzustellen. Denn ebenso wie Anomalien entsteht sie nicht

nur aus Schleifenintegralen, ist also ein reiner Quanteneffekt, sondern ist darüber hinaus an *divergente* Schleifen, d.h. einen nur bei unendlich vielen Freiheitsgraden auftretenden Quanteneffekt, gebunden. Dies wird z.B. deutlich beim Vergleich des  $1/g^2$ -Mechanismus, wie er im 2. Kapitel beschrieben worden ist, mit der Berechnung der Adler-Bell-Jackiw-Anomalie (siehe dazu [Col 85] oder [PS 95]) aus den sogenannten gluonischen Dreiecksdiagrammen, die in der quantisierten Theorie einen Beitrag zum axialen Strom leisten. In beiden Herleitungen werden die auftretenden Divergenzen bezüglich der Dimension, die in 1-Schleifen-Rechnungen als Faktor  $1/\epsilon$  erscheinen, kompensiert und bewirken damit das Überleben von Termen, die klassisch für  $D \rightarrow 4$  (bzw.  $\epsilon \rightarrow 0$ ) verschwinden würden.

Werden klassisch vorhandene Symmetrien durch den Quantisierungsprozeß zerstört, so bezeichnet man dies als Anomalie. Anomalien haben im Prinzip die „Macht“, alle klassischen Symmetrien bis auf die Poincaré-Invarianz zu brechen. Das bedeutet auch, daß die BRS-Invarianz für die nicht-perturbativen Zusatzterme möglicherweise nicht mehr gilt und damit auch die Slavnov-Taylor-Identitäten ihre Gültigkeit verlieren. Daß die QCD als Eichtheorie dann weder renormierbar noch unitär wäre [Kug 97], kann dennoch vermieden werden, wenn alle Amplituden weiterhin die richtigen perturbativen Grenzfälle für  $\Lambda \rightarrow 0$  und insbesondere die perturbativen Divergenzen aufweisen. Denn die perturbativen Amplituden erfüllen bekanntlich die STI in jeder Ordnung in  $g^2$ , und *und nur diese Tatsache* wird für die bekannten Beweise der perturbativen Renormierbarkeit benutzt.

Die Ansätze der systematisch erweiterten Störungstheorie sind so formuliert, daß die „Anomalien“ im Hochenergie-Limes verschwinden und die perturbative Renormierbarkeit erhalten bleibt. Um sich aber im Bereich der Slavnov-Taylor-Identitäten im Bezug auf die Eichinvarianz Gewißheit zu verschaffen, ist es notwendig die folgenden Schwerpunkte noch weiter zu klären.

Die Bedeutung des 4-Gluon-Vertex bzw. seiner zugehörigen Slavnov-Taylor-Identität, die eine sehr komplizierte Struktur besitzt, ist in die bisherigen Überlegungen mit einzubeziehen. Bedingungen an die nicht-perturbativen Koeffizienten sind analog zur Vorgehensweise im 3-Gluon-Vertex zu erarbeiten und zu analysieren. Damit lassen sich dann auch die STI der 3-Punkt-Vertices in „dynamischen“ Rechnungen behandeln. Auch hier ist die Eichfixierungsabhängigkeit der nicht-störungstheoretischen Vertex-Approximanten zu überprüfen. Ein bisher noch ungelöstes Problem ist die Behandlung des fermionischen Sektors mit endlichen Strommassen. Nach [Kuh 97] weist die systematisch erweiterte Theorie eine Unstetigkeit für  $\hat{m} \rightarrow 0$  auf. Daher sind externe Quarkmassen auch in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden.

Im allgemeinen sollten in der Analyse von Selbstkonsistenzgleichungen höhere Approximationsgrade  $r > 1$  diskutiert werden. Dazu ist es zunächst notwendig die Selbstkonsistenzgleichungen der Schwinger-Dyson-Gleichungen in beliebigem Approximationsgrad zu berechnen. Für die Gleichungen des fermionischen Sektors ist dies bereits geschehen [Kuh 97]. Im gluonischen Bereich ist die Berechnung von Selbstkonsistenzgleichungen bisher auf dem Niveau  $r = 1$  vorgenommen worden. Eine Erweiterung ist notwendig, kann aber aufgrund des komplizierten 4-Gluon-Vertex wahrscheinlich nur in einem langfristig angelegten Projekt durchgeführt werden.

Dennoch läßt sich nicht sagen, ob sich die Beschreibung nicht-perturbativer physikalischer Sachverhalte bereits auf der Approximationsstufe  $r = 3$  verbessert. Dies ist sicherlich

möglich, aber nicht vorhersagbar, denn über das Konvergenzverhalten rationaler Approximanten ist bekannt, daß es manchmal in niedrigen Ordnungen noch „erratisch“ ist: Durch eine Vergrößerung des Approximationsgrads kann sich die erweiterte Störungsreihe zunächst vom Konvergenzgebiet fortbewegen, bevor sich ihr Verhalten ab einem bestimmten Niveau wieder verbessert.



## Anhang A

# Funktionalintegralmethoden

### A.1 Euklidische Greens- und Vertexfunktionen

Das erzeugende Funktional für die euklidischen Greenschen Funktionen ist durch

$$\begin{aligned} Z_E [ J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta} ] &:= \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \\ &\quad \times \exp \left\{ - S_E [ A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi ] - j_E [ A, \dots; J, \dots ] \right\} \end{aligned} \tag{A.1}$$

definiert, wobei das Quellenfunktional durch

$$\begin{aligned} j_E [ A, \dots; J, \dots ] &:= \int d^D q \left( J_a^\mu (-q) A_a^\mu (q) + \bar{c}_a (q) \omega_a (-q) + \bar{\omega}_a (-q) c_a (q) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{f=1}^{N_F} \text{tr} \left\{ \bar{\psi}_{(f)}^i (q) \eta_{(f)}^i (-q) + \bar{\eta}_{(f)}^i (-q) \psi_{(f)}^i (q) \right\} \right) \end{aligned}$$

gegeben ist. Die zusammenhängenden (connected) Greenschen Funktionen lassen sich aus dem erzeugenden Funktional für die zusammenhängenden n-Punkt-Greens-Funktionen  $G_{n(c)}$

$$W_E [ J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta} ] = \ln Z_E [ J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta} ] \tag{A.2}$$

durch funktionales Ableiten nach den Quellen gewinnen:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^n W_E [ J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta} ]}{\delta J_{a_n}^{\mu_n} (p_n) \dots \delta J_{a_1}^{\mu_1} (p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D (p_1 + \dots + p_n) G_{nV(c)}^{\mu_1 \dots \mu_n} (p_1, \dots, p_n) \\ \\ &\frac{\delta^n W_E [ J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta} ]}{\delta J_{a_n}^{\mu_n} (p_n) \dots \delta J_{a_3}^{\mu_3} (p_3) \delta \omega_{a_2} (p_2) \delta \bar{\omega}_{a_1} (p_1)} \Big|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D (p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}_{G\bar{G}(n-2)V(c)}^{\mu_3 \dots \mu_n} (p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\delta^n W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \eta^{l_2}(p_2) \delta \bar{\eta}^{l_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) \bar{G}_{F\bar{F}(n-2)V(c)_{l_1 l_2 a_3 \cdots a_n}}^{\mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Das erzeugende Funktional für die amputierten Vertexfunktionen erhält man durch eine Legendre-Transformation aus (A.2):

$$\Gamma_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] = W_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}] - j_E[A, \dots; J, \dots] \tag{A.4}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta A_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta A_{a_1}^{\mu_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) (g_0 \nu_0^\epsilon)^{(n-2)} \Gamma_{nV_{a_1 \cdots a_n}}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \\
& \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta A_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta A_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta c_{a_2}(p_2) \delta \bar{c}_{a_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) (g_0 \nu_0^\epsilon)^{(n-2)} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}(n-2)V_{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}}^{\mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n) \\
& \left. \frac{\delta^n \Gamma_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]}{\delta A_{a_n}^{\mu_n}(p_n) \cdots \delta A_{a_3}^{\mu_3}(p_3) \delta \psi^{l_2}(p_2) \delta \bar{\psi}^{l_1}(p_1)} \right|_{J=\omega=\bar{\omega}=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= (2\pi)^{(1-n)D} \delta^D(p_1 + \cdots + p_n) (g_0 \nu_0^\epsilon)^{(n-2)} \bar{\Gamma}_{F\bar{F}(n-2)V_{l_1 l_2 a_3 \cdots a_n}}^{\mu_3 \cdots \mu_n}(p_1, \dots, p_n).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Die verwendeten Ableitungen sind stets Linksdifferentiationen, was bei funktionalen Ableitungen nach den Grassmann-wertigen Feldern zu beachten ist. Für die Propagatoren und Vertexfunktionen gelten die folgenden Bezeichnungen:

$$\delta_{a_1 a_2} D^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := D_{a_1 a_2}^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := G_{VV(c)_{a_1 a_2}}^{\mu_1 \mu_2}(p_1, p_2) \tag{A.6}$$

$$\delta_{a_1 a_2} D(p_2^2) := D_{a_1 a_2}(p_2^2) := \bar{G}_{G\bar{G}(c)_{a_1 a_2}}(p_1, p_2) \tag{A.7}$$

$$\delta^{l_1 l_2} S(p_2) := S^{l_1 l_2}(p_2) := \bar{G}_{F\bar{F}(c)}^{l_1 l_2}(p_1, p_2) \tag{A.8}$$

und

$$\delta_{a_1 a_2} \Gamma_{VV}^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := \Gamma_{VV_{a_1 a_2}}^{\mu_1 \mu_2}(p_2) := \Gamma_{VV_{a_1 a_2}}^{\mu_1 \mu_2}(p_1, p_2) \tag{A.9}$$

$$\delta_{a_1 a_2} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_2^2) := \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}_{a_1 a_2}}(p_2^2) := \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}_{a_1 a_2}}(p_1, p_2) \tag{A.10}$$

$$\delta^{l_1 l_2} \bar{\Gamma}_{F\bar{F}}(p_2) := \bar{\Gamma}^{l_1 l_2}(p_2) := \bar{\Gamma}_{F\bar{F}}^{l_1 l_2}(p_1, p_2). \tag{A.11}$$

Die Propagatoren bilden dabei das Negativinverse ihrer zugehörigen 2-Punkt-Vertexfunktionen. Für die Greens-Funktionen höherer Ordnung ohne Farb- und Lorentz-Indizes ist<sup>1</sup>

$$G_{3V(c)}(p_1, p_2, p_3) = (g_0 \nu_0^\epsilon) \Gamma_{3V}(p_1, p_2, p_3) D(p_1) D(p_2) D(p_3) \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{G}_{G\bar{G}V(c)}(p_1, p_2, p_3) = (g_0 \nu_0^\epsilon) \tilde{D}(p_1^2) \Gamma_{G\bar{G}V}(p_1, p_2, p_3) \tilde{D}(p_2^2) D(p_3) \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{G}_{F\bar{F}V(c)}(p_1, p_2, p_3) = (g_0 \nu_0^\epsilon) S(p_1) \Gamma_{F\bar{F}V}(p_1, p_2, p_3) S(p_2) D(p_3). \quad (\text{A.14})$$

Neben der für den gluonischen Basisvertex werden die in dieser Arbeit benötigten 4-Punkt-Funktionen<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} G_{4(c)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 T_{4V}(p_1, p_2, p_3, p_4) D(p_1) D(p_2) D(p_3) D(p_4) \\ \tilde{G}_{4(c)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \tilde{T}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) D(p_3) D(p_4) \\ \bar{G}_{4(c)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 T_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) S(p_3) S(p_4) \\ \tilde{\bar{G}}_{4(c)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \tilde{T}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(p_2^2) \tilde{D}(p_3^2) \tilde{D}(p_4^2) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

mit ihren 4-Punkt-Amplituden

$$\begin{aligned} T_4(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) + \Gamma_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_3(p_3, p_4) \\ &\quad + 2 \text{ zyklische Permutationen} \\ \tilde{T}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \tilde{\Gamma}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \Gamma_3(p_3, p_4) \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_3(p_1, p_3) D((p_1 + p_2)^2) \tilde{\Gamma}_3(p_2, p_4) \\ &\quad + 1 \text{ Permutationen } (3 \leftrightarrow 4) \\ \bar{T}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \bar{\Gamma}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) + \bar{\Gamma}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \bar{\Gamma}_3(p_3, p_4) \\ \tilde{\bar{T}}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \tilde{\bar{\Gamma}}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) + \tilde{\bar{\Gamma}}_3(p_1, p_2) D(p_1 + p_2) \tilde{\bar{\Gamma}}_3(p_3, p_4) \\ &\quad - 1 \text{ Permutationen } (2 \leftrightarrow 4) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

angegeben.

## A.2 Schwinger-Dyson-Gleichungen

Der fundamentale Ansatz zur Herleitung von Schwinger-Dyson-Gleichungen ist das Verschwinden des Pfadintegrals über eine funktionale Ableitung, wie es in [BBJ 81] zu finden ist. Dabei gibt die Ableitung bezüglich eines Feldes, welche unter dem Pfadintegral wirkt, den jeweiligen Kanal oder Sektor vor. In der Quantenchromodynamik gibt es drei dieser Kanäle, den Gluon-, Fermion und Geist-Kanal. Die Funktionalableitung zeichnet das Bein aus, das später in den nackten Vertex einlaufen wird. Der Ausgangspunkt für den

<sup>1</sup> Es ist zu beachten, daß alle Impulse, die entgegen den Richtungen der äußeren Beine in einen Vertex laufen, mit einem negativen Vorzeichen zu versehen sind.

<sup>2</sup> Eine ausführliche Liste der 4-Punkt-Funktionen enthält [Dri 97].

Gluon-Kanal ist:

$$0 = \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \frac{\delta}{\delta A_{b_1}^{\nu_1}(-p_1)} \times \exp \left\{ -S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - j_E[A, \dots; J, \dots] \right\} \quad (\text{A.17})$$

Rechnet man nun das Differential aus und ersetzt die Felder durch funktionale Ableitungen nach den zugehörigen Quellen, so bekommt man eine sogenannte „Master-Gleichung“ für alle Schwinger-Dyson-Gleichungen in diesem Kanal:

$$0 = (-1) \left[ \Gamma_{VV}^{(0)}{}_{b_1 a_2}^{\nu_1 \mu_2}(p_1) \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\nu_2}(-p_1)} \right. \\ + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon) \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{3V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}^{\nu_1 \mu_2 \mu_3}(-p_1, q_2, p_1 - q_2) \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \\ + \frac{1}{6} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q_3}{(2\pi)^D} \Gamma_{4V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3 a_4}^{\nu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(-q_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(-q_3)} \frac{\delta}{\delta J_{a_4}^{\mu_4}(q_2 + q_3 - p_1)} \\ - (g_0 \nu_0^\epsilon) \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{a_1 a_2 b_1}^{\nu_1}(q_1) \frac{\delta}{\delta c_{a_1}(-q_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_{a_2}(q_1 - p_1)} \\ - (g_0 \nu_0^\epsilon) \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \sum_{f=1}^{N_f} \frac{\delta}{\delta \eta^i(-q_1)} \Gamma_{F\bar{F}V(f)}^{(0)}{}_{b_1}^{ij} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^j(q_1 - p_1)} + \frac{1}{(2\pi)^D} J_{b_1}^{\nu_1}(p_1) \left. \right] \\ \times Z_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}]. \quad (\text{A.18})$$

Aus dieser Master-Gleichung lassen sich nun durch Anwendung weiterer Differentiale, Nullsetzen der Quellen und Abspaltung der  $\delta$ -Funktionen für die Impulserhaltung die Schwinger-Dyson-Gleichungen bis zu beliebigen Ordnungen berechnen. Für die Gluon-Selbstenergie nach Anwendung von

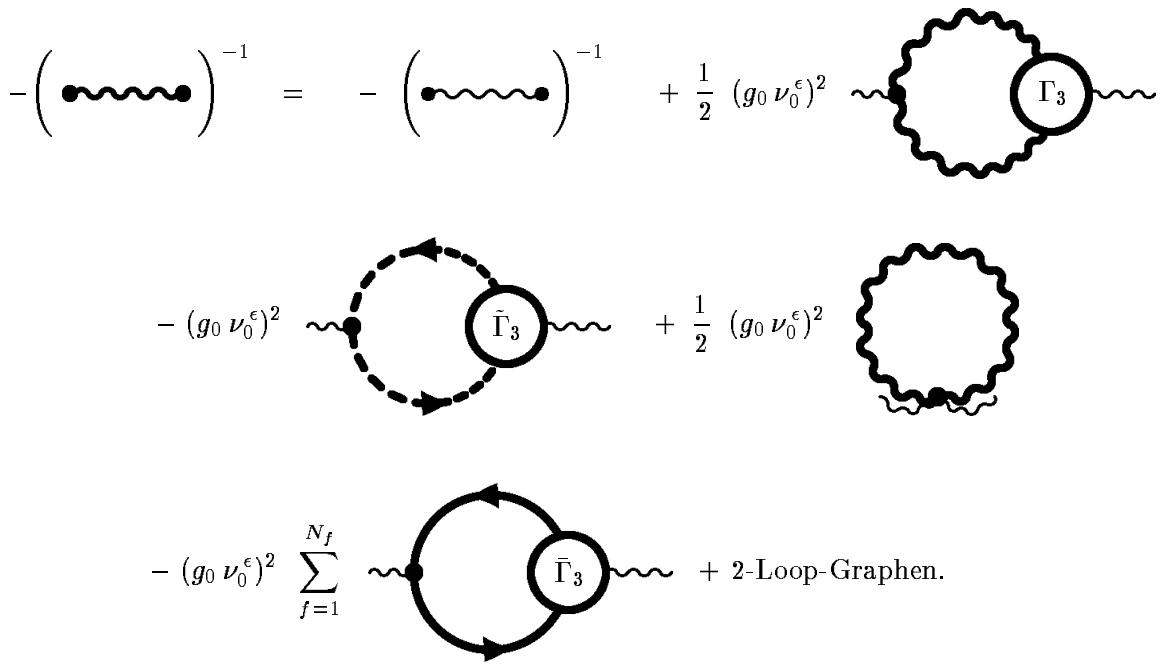
$$\frac{\delta}{\delta J_{b_2}^{\nu_2}(p_2)} \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=\bar{\omega}=\omega=0} \quad (\text{A.19})$$

und durch Entwicklung nach Vertexfunktionen ist

$$\Gamma_{VV}^{\nu_1 \nu_2}(p) \delta_{b_1 b_2} = \Gamma_{VV}^{(0)}{}_{b_1 b_2}^{\nu_1 \nu_2}(p) \delta_{b_1 b_2} \\ + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Gamma_{3V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}^{\nu_1 \mu_2 \mu_3}(-p, q, p - q) D^{\mu_3 \mu'_3}(q - p) \\ \times D^{\mu_2 \mu'_2}(-q) \Gamma_{3V}^{\mu'_3 \mu'_2 \nu_2}_{a_3 a_2 b_2}(q - p, -q, p) \\ + \frac{1}{6} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{4V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3 a_4}^{\nu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} D^{\mu_4 \mu'_4}(q_1 + q_2 - p) \\ \times D^{\mu_3 \mu'_3}(-q_2) D^{\mu_2 \mu'_2}(-q_1) T_{4V}^{\mu'_4 \mu'_3 \mu'_2 \nu_2}_{a_4 a_3 a_2 b_2}(q_1 + q_2 - p, -q_2, -q_1, p) \\ + \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \Gamma_{4V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3 a_4}^{\nu_1 \nu_2 \mu_3 \mu_4} D^{\mu_3 \mu_4}(q)$$

$$\begin{aligned}
& - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{a_1 a_2}{}^{b_1}{}^{\nu_1}(q) \tilde{D}(q^2) \tilde{D}((q-p)^2) \\
& \quad \times \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{a_2 a_1}{}^{b_2}{}^{\nu_2}(q-p, -q, p) \\
& - (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left[ \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V(f)}^{(0)}{}^{ij}{}_{b_1}{}^{\nu_1} S(q-p) \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}{}^{ji}{}_{b_2}{}^{\nu_2}(q-p, -q, p) \right. \\
& \quad \left. \times S(-q) \right]. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Die Entwicklung der Amplitude  $T_4$ , die sich vollständig in Basisgraphen zerlegen lässt, ist durch (A.16) gegeben. Die diagrammatische Notation der SDG ist



Für die Herleitung der Slavnov-Taylor-Identitäten sind zwei Schwinger-Dyson-Gleichungen aus dem Geist-Kanal erforderlich. Mit dem Ansatz

$$0 = \frac{1}{Z_E[0,0,0,0,0,0]} \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \frac{\delta}{\delta \bar{c}_{b_1}(-p_1)} \times \exp \left\{ - S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - j_E[A, \dots; J, \dots] \right\} \quad (\text{A.21})$$

bekommt man die Master-Gleichung

$$0 = (-1) \left[ \Gamma_{G\bar{G} \rightarrow b_1 a_2}^{(0)}(p_1^2) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_{a_2}(-p_1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (g_0 \nu_0^\epsilon) \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}^{\mu_3}(-p_1) \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_{a_2}(-q_2)} \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(q_2 - p_1)} \\
& + \frac{1}{(2\pi)^D} \omega_{b_1}(p_1) \Big] \times Z_E[J, \omega, \bar{\omega}, \eta, \bar{\eta}].
\end{aligned} \tag{A.22}$$

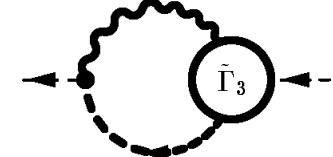
Die Schwinger-Dyson-Gleichung für den inversen Geist-Propagator erhält man durch Anwendung von

$$\frac{\delta}{\delta \omega_{b_2}(p_2)} \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=\bar{\omega}=\omega=0}. \tag{A.23}$$

Abspalten der  $\delta$ -Funktion und Entwicklung nach Vertexfunktionen liefert

$$\begin{aligned}
\Gamma_{G\bar{G}}(p) \delta_{b_1 b_2} &= \Gamma_{G\bar{G}}^{(0)}(p) \delta_{b_1 b_2} \\
& + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}^{\mu_3}(p) \tilde{D}(q^2) \\
& \times D^{\mu_3 \mu'_3}(q - p) \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{a_2 b_2 a_3}^{\mu'_3}(-q, p, q - p)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

bzw.

$$-\left( \bullet - \bullet \right)^{-1} = -\left( \bullet - \bullet \right)^{-1} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{Diagramm mit } \tilde{\Gamma}_3$$


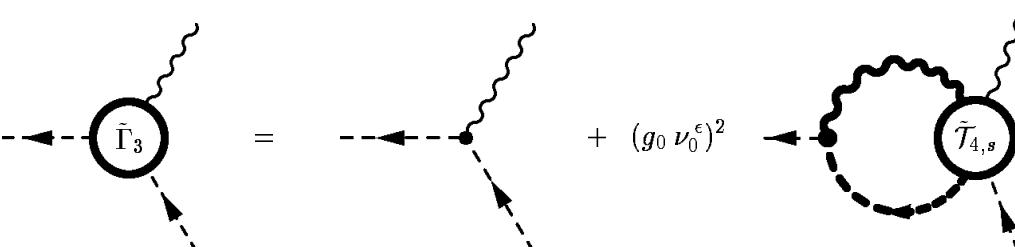
Analoge Vorgehensweise liefert unter Verwendung von

$$\frac{\delta}{\delta J_{b_3}^{\mu_3}(p_3)} \frac{\delta}{\delta \omega_{b_2}(p_2)} \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=\bar{\omega}=\omega=0} \tag{A.25}$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{b_1 b_2 b_3}^{\mu_3}(-p_1, p_2, p_1 - p_2) &= \Gamma_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{b_1 b_2 b_3}^{\mu_3}(-p_1) \\
& + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{(0)}{}_{b_1 a_2 a_3}^{\nu_3}(p) \tilde{D}(q^2) \\
& \times D^{\nu_3 \nu'_3}(q - p_1) \mathcal{T}_{4,s}^{(0)}{}_{a_2 b_2 b_3 a_3}^{\mu_3 \nu'_3}(-q, p_2, p_1 - p_2, q - p_1)
\end{aligned} \tag{A.26}$$

bzw. in graphischer Form

$$\text{Diagramm mit } \tilde{\Gamma}_3 = \text{Diagramm mit } \tilde{\Gamma}_3 + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \text{Diagramm mit } \tilde{\mathcal{T}}_{4,s}$$


### A.3 Slavnov-Taylor-Identitäten

Die Slavnov-Taylor-Identitäten resultieren aus der Invarianz der klassischen Wirkung (1.39) unter BRS-Transformationen der Felder. In der durch das Pfadintegral quantisierten Theorie ergibt sich die Forderung nach Invarianz des Quellterms. Mit

$$\begin{aligned} \delta_{BRS} A_a^\mu(q) &= -\frac{i}{g_0 \nu_0^\epsilon} q^\mu c_a(q) \delta\lambda \\ &\quad - f_{abc} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} c_b(q_1) A_c^\mu(q - q_1) \delta\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\delta_{BRS} \psi^i(q) = -i \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \left( T_a \right)^{ij} \psi^j(q_1) c_a(q - q_1) \delta\lambda \quad (\text{A.28})$$

$$\delta_{BRS} \bar{\psi}^j(q) = i \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \bar{\psi}^i(q_1) \left( T_a \right)^{ij} c_a(q - q_1) \delta\lambda \quad (\text{A.29})$$

$$\delta_{BRS} c_a(q) = -\frac{1}{2} f_{abc} \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} c_b(q_1) c_c(q - q_1) \delta\lambda \quad (\text{A.30})$$

$$\delta_{BRS} \bar{c}_a(q) = \frac{i}{g_0 \nu_0^\epsilon} \frac{1}{\xi} q^\mu A_a^\mu(q) \delta\lambda, \quad (\text{A.31})$$

wobei  $\delta\lambda$  nilpotent und eine mit den Grassmann-Variablen antikommutierende Größe ist, wird gefordert:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(\bar{c}, c) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) \\ &\quad \times \left[ \int d^D q \left( J_a^\mu(-q) \delta_{BRS} A_a^\mu(q) + \delta_{BRS} \bar{c}_a(q) \omega_a(-q) + \bar{\omega}_a(-q) \delta_{BRS} c_a(q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{f=1}^{N_f} \text{tr} \left\{ \delta_{BRS} \bar{\psi}_{(f)}^i(q) \eta_{(f)}^i(-q) + \bar{\eta}_{(f)}^i(-q) \delta_{BRS} \psi_{(f)}^i(q) \right\} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ - S_E[A, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] - j_E[A, \dots; J, \dots] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Ersetzt man nun die Felder durch die funktionalen Ableitungen nach den Quellen und wendet

$$\left. \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \right|_{\bar{\omega}=\omega=0} \quad (\text{A.33})$$

auf (A.32) an, so ergibt sich die „Master-Gleichung“ für alle Slavnov-Taylor-Identitäten<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \left\{ \int d^D q \left\{ J_a^\mu(-q) \left( \frac{i}{g_0 \nu_0^\epsilon} q^\mu \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_a(-q)} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - f_{abc} \int d^D q_1 \frac{\delta}{\delta J_c^\mu(q_1 - q)} \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_b(-q_1)} \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Die Flavor-Indizierung ist in den weiteren Ableitungen durchgängig unterdrückt. Die Slavnov-Taylor-Identität für den Fermion-Vertex (A.52) versteht sich flavor-abhängig gelesen.

$$\begin{aligned}
& -i \int d^D q_1 \frac{\delta}{\delta \eta^j(-q_1)} \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_a(q_1 - q)} \left( T_a \right)^{ji} \eta^i(-q) \\
& -i \bar{\eta}^i(-q) \int d^D q_1 \left( T_a \right)^{ij} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^j(-q_1)} \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_a(q_1 - q)} \} \\
& + \frac{i}{g_0 \nu_0^\epsilon} \frac{1}{\xi} p_1^{\mu_1} \frac{\delta}{\delta J_{a_1}^{\mu_1}(p_1)} \} Z_E [J, 0, 0, \eta, \bar{\eta}].
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Die funktionalen Ableitungen in dieser Master-Gleichung wirken auf das erzeugende Funktional der nicht-zusammenhängenden Greenschen Funktionen. Eine etwas andere Form der Master-Gleichung ist in [Dri 97] angegeben. Sie bezieht sich auf die erzeugenden Funktionale der zusammenhängenden und 1-PI-Vertexfunktionen, was ein Abspalten der äußeren Beine in den STI nicht mehr notwendig macht.

Hier werden die Slavnov-Taylor-Identitäten direkt mit Hilfe von (A.34) berechnet. Durch weitere Funktionalableitungen nach den Quellen erhält man Relationen zwischen Vertexfunktionen, die bezüglich eines äußeren Gluon-Beins longitudinal projiziert sind, und anderen Greenschen-Funktionen.

### A.3.1 Der longitudinal projizierte 2-Gluon-Vertex

Wir wollen die Identität für den 2-Gluon-Vertex herleiten. Anwendung des Operators

$$p_2^{\mu_2} \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(p_2)} \Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} \tag{A.35}$$

auf (A.34) und Verwendung der Definitionen zur Berechnung der Greenschen-Funktionen (A.3) liefert

$$\begin{aligned}
0 &= p_2^2 \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{D}(p_2^2) \delta_{a_1 a_2} \\
&- i (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 f_{a_2 b c} p_2^2 \int d^D q_1 \frac{(g_0 \nu_0^\epsilon)^2}{(2\pi)^{2D}} \delta^D(p_1 + p_2) \tilde{D}(p_1^2) \tilde{D}(q_1^2) D^{\mu_2 \nu}(q_1 + p_2) \\
&\times \tilde{\Gamma}_{G \bar{G} V} \delta_{b a_1 c}^\nu(-q_1, p_1, q_1 + p_2) \\
&- \frac{1}{\xi} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \frac{1}{(2\pi)^D} \delta^D(p_1 + p_2) D^{\mu_1 \mu_2}(p_2) \delta_{a_1 a_2}.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Unter Benutzung der Feynman-Regeln für die nackten Vertexfunktionen (siehe Kapitel 1.3), der Schwinger-Dyson-Gleichung für den inversen Geist-Propagator (A.24) und nach Abspalten der  $\delta$ -Funktionen bekommt man nach einer Umbenennung der Lorentz-Indizes und Impulse die folgende schöne Identität

$$p^{\mu_1} p^{\mu_2} D^{\mu_1 \mu_2}(p) = \xi \tag{A.37}$$

bzw.

$$p^{\mu_1} \Gamma_{VV}^{\mu_1 \mu_2}(p) = -\frac{1}{\xi} \frac{p^{\mu_2}}{p^2}. \tag{A.38}$$

Dies ist die Slavnov-Taylor-Identität für den Gluon-Propagator bzw. für den 2-Gluon-Vertex.

### A.3.2 Der longitudinal projizierte 3-Gluon-Vertex

Die Slavnov-Taylor-Identität für den 3-Gluon-Vertex, der bezüglich eines Beins longitudinal projiziert ist, bekommt man durch funktionales Ableiten der Master-Gleichung gemäß

$$\frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_3)} \frac{\delta}{\delta J_{a_2}^{\mu_2}(p_2)}, \quad (\text{A.39})$$

was nach Benutzen von (1.45) und (A.26)

$$\begin{aligned} & (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 + p_3) D^{\mu_2 \nu_2}(p_2) D^{\mu_3 \nu_3}(p_3) \frac{p_1^{\mu_1}}{p_1^2} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) \\ &= \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \left[ (2\pi)^{3D} t^{\mu_2 \nu_2}(p_2) i f_{a_2 bc} \right. \\ & \quad \times \int d^D q_1 \frac{\delta}{\delta J_{a_3}^{\mu_3}(p_3)} \frac{\delta}{\delta J_c^{\nu_2}(q_1 + p_2)} \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_b(-q_1)} \\ & \quad \left. + \text{eine Permutation } \left\{ a_2 \leftrightarrow a_3, p_2 \leftrightarrow p_3, \mu_2 \leftrightarrow \mu_3 \right\} \right] Z_E[J, 0, 0, \eta, \bar{\eta}] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

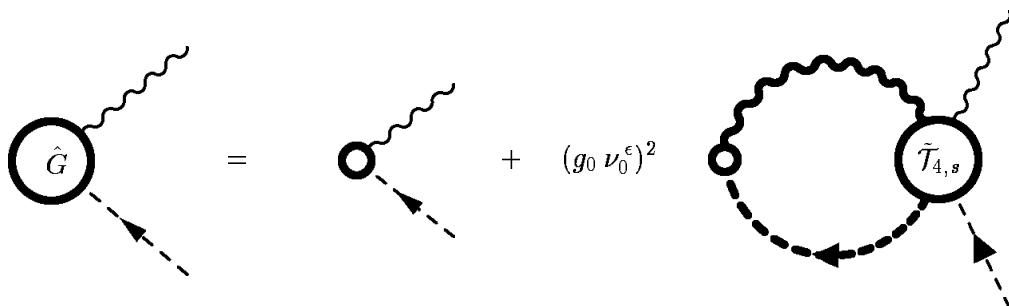
ergibt. Mit der Definition der 4-Punkt-Funktion aus Kapitel 1.4 und der Definition der Hilfsamplitude (A.42) erhält man die Identität

$$\begin{aligned} & p_1^{\nu_1} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) \\ &= p_1^2 \tilde{D}(p_1^2) \left\{ \Gamma_{TT}(p_2) t^{\mu \nu_2}(p_2) \hat{G}_{a_2 a_1 a_3}^{\mu \nu_3}(p_2, p_1, p_3) \right. \\ & \quad \left. + \Gamma_{TT}(p_3) t^{\mu \nu_3}(p_3) \hat{G}_{a_3 a_1 a_2}^{\mu \nu_2}(p_3, p_1, p_2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Der analytische Ausdruck der Hilfsamplitude  $\hat{G}$  ist durch

$$\begin{aligned} \hat{G}_{abc}^{\mu \nu}(p, r, r') &:= -i f_{abc} \delta^{\mu \nu} \\ &+ i f_{amn} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{D}(q^2) D^{\mu \tau}(p+q) \tilde{\mathcal{T}}_{4,s}^{\nu \tau}(q, r, r', p+q) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

definiert und lautet in diagrammatischer Form wie folgt:



Der nackte Hilfsvertex läßt sich als

$$\hat{G}_{abc}^{(0)\mu\nu} = -i f_{abc} \delta^{\mu\nu} \hat{=} \text{Diagramm mit einem offenen Kreis (Loop-Graphen) und einem gestrichelten Bein am unteren rechten Ende.}$$
(A.43)

darstellen. Der offene Kreis des Loop-Graphen soll andeuten, daß neben den zwei äußeren Beinen ein weiteres Beinpaar in den Vertex einläuft, welches am selben Raum-Zeit-Punkt lokalisiert ist. Dies sieht man unmittelbar an der Fourier-Transformierten des Vakuumerwartungswerts (siehe dazu [PT 82]) der Hilfsamplitude im nicht-amputierten Schema:

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{abc}^{\mu\nu}(p, r, r') D^{\nu\sigma}(r') \tilde{D}(r) \\ &= -i f_{amn} \int d^D x \int d^D y e^{i[r(x-y)+r'y]} \langle 0 | T[A_n^\mu(x) \bar{c}_m(x) c_b(y) A_c^\sigma(0)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Desweiteren gilt für die Hilfsamplitude die Identität

$$-p^\mu \hat{G}_{abc}^{\mu\nu}(p, r, r') = \bar{\Gamma}_{G\bar{G}V}^{\nu}(p, r, r'). \quad (\text{A.45})$$

### A.3.3 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Die Identität des Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex (longitudinal projiziert bezüglich des Gluon-Beins) läßt sich mittels Anwendung von

$$\frac{\delta}{\delta \eta^{l_2}(p_3)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^{l_1}(p_2)} \quad (\text{A.46})$$

aus (A.34) ableiten<sup>4</sup>. Dies liefert das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_E[0, 0, 0, 0, 0]} \left[ \frac{1}{\xi} \frac{i}{(2\pi)^D} p_1^{\mu_1} \delta^D(p_1 + p_2 + p_3) S(p_2) S(p_3) D^{\mu_1\nu_1}(p_1) \right. \\ & \times \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{l_1 l_2 \nu_1}_{a_1}(p_2, p_3, p_1) \\ & - i \int d^D q_1 \frac{\delta}{\delta \eta^j(-q_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^{l_1}(p_2)} \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_a(q_1 + p_3)} (T_a)^{jl_2} \\ & + i \int d^D q_1 (T_a)^{l_1 j} \frac{\delta}{\delta \eta^{l_2}(p_3)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^j(-q_1)} \frac{\delta}{\delta \omega_{a_1}(p_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_a(q_1 + p_2)} \left. \right] \\ & \times Z_E[J, 0, 0, \eta, \bar{\eta}]. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Mit der Definition der nackten Hilfsamplituden

$$\hat{C}_b^{(0)i k} := - (T_b)^{ki} \hat{=} \text{Diagramm mit einem offenen Kreis (Loop-Graphen) und zwei gestrichelten Beinen am unteren rechten Ende.}$$
(A.48)

<sup>4</sup>Der Flavor-Index ist im folgenden unterdrückt.

bzw.

$$\hat{C}'^{(0)}{}^i{}_b := - (T_b)^{ik} \hat{=} \begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} \quad (A.49)$$

lassen sich die vollen Hilfsamplituden  $\hat{C}$  und  $\hat{C}'$  in analytischer und diagrammatischer Notation

$$\begin{aligned} \hat{C}^i{}_b(p, r, -r') &:= - (T_b)^{ki} \\ &+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \bar{\tilde{T}}_4{}_{ab}{}^{kj}(-q, r, -r', p+q) \tilde{D}(q^2) S(p+q) (T_a)^{ji}, \end{aligned} \quad (A.50)$$

$$\begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} = \begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} \quad (A.50)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \hat{C}'^i{}_b(-p, r, r') &:= - (T_b)^{ik} \\ &+ (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (T_a)^{ij} S(p-q) \tilde{D}(q^2) \bar{\tilde{T}}_4{}_{ab}{}^{jk}(-q, r, r', -p+q), \end{aligned} \quad (A.51)$$

$$\begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} = \begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} + (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \begin{array}{c} \text{circle} \\ \text{dashed line} \end{array} \quad (A.51)$$

formulieren und erlauben eine kompakte Notation der Identität

$$\begin{aligned} p_3^{\nu_3} \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}{}^{l_1 l_2 \nu_3}(-p_1, p_2, p_3) \frac{\bar{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_3^2)}{p_3^2} \\ = \left\{ \hat{C}^{l_2}{}_{a_3}{}^{l_1}(p_2, p_3, -p_1) \bar{\Gamma}_{F\bar{F}}(p_2) - \bar{\Gamma}_{F\bar{F}}(p_1) \hat{C}'^{l_1}{}_{a_3}{}^{l_2}(-p_1, p_3, p_2) \right\}. \end{aligned} \quad (A.52)$$

Die 4-Punkt-Amplituden haben die Eigenschaft

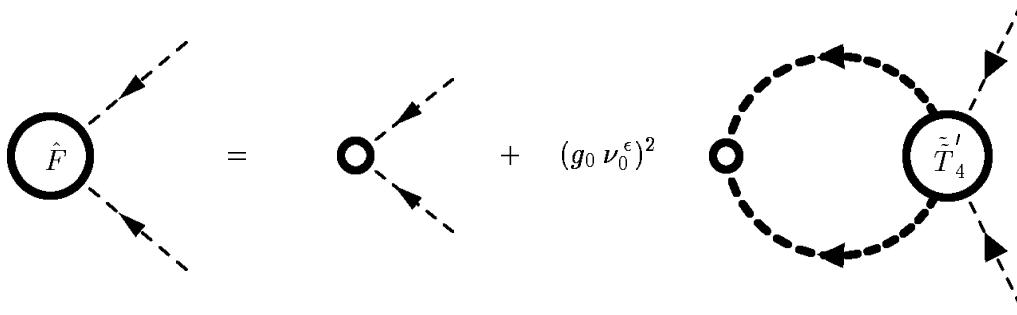
$$\bar{\tilde{T}}_4{}_{a_1 a_2}{}^{ji}(p_1, p_2, p_4, -p_3) = - \bar{\tilde{T}}_4{}_{a_1 a_2}{}^{ij}(p_1, p_2, -p_3, p_4). \quad (A.53)$$

### A.3.4 Weitere Slavnov-Taylor-Identitäten

Völlig analog zu Herleitung der STI des Fermion-Vertex gelangt man mit Hilfe der Amplitude

$$\begin{aligned} \hat{F}_{abc}(-p, r, r') &:= -i f_{abc} \\ &+ i f_{amn} \frac{1}{2} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{D}(q^2) \tilde{D}((p-q)^2) \tilde{\tilde{T}}_4'_{mbcn}(-q, r, r', -p+q) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

bzw.



mit

$$\hat{F}_{abc}^{(0)} := -i f_{abc} \hat{\equiv} \text{Diagram with a bare vertex and two dashed lines extending from it.} \quad (\text{A.55})$$

zur STI des Geist-Antigeist-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} p_3^{\nu_3} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{a_1 a_2 a_3}^{\nu_3}(-p_1, p_2, p_3) \frac{\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_3^2)}{p_3^2} &- p_2^{\nu_2} \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{a_1 a_3 a_2}^{\nu_2}(-p_1, p_3, p_2) \frac{\tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_2^2)}{p_2^2} \\ &= \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}}(p_1^2) \hat{F}_{a_1 a_2 a_3}(-p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Die 4-Punkt-Geist-Amplitude  $\tilde{\tilde{T}}_4$  erfüllt die Identität

$$\tilde{\tilde{T}}_4'_{a_1 a_2 a_3 a_4}(p_1, p_2, -p_3, p_4) = -\tilde{\tilde{T}}_4{}_{a_1 a_3 a_2 a_4}(p_1, -p_3, p_2, p_4). \quad (\text{A.57})$$

Aus Gründen der Vollständigkeit gebe ich an dieser Stelle die Identität für den 4-Gluon-Vertex an. Mit

$$\begin{aligned} \hat{H}_{abcd}^{\mu \nu \rho}(p, r, r', r'') &:= i f_{amn} (g_0 \nu_0^\epsilon)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{D}(q^2) D^{\mu\tau}(p-q) \tilde{\tilde{T}}_5'{}_{mbcdn}^{\nu\rho\tau}(-q, r, r', r'', p-q) \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

und

$$-p^\mu \hat{H}_{abcd}^{\mu \nu \rho}(p, r, r', r'') = \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}VV}{}_{aa_1a_2a_3a_4}^{\nu \rho}(p, r, r', r'') \quad (\text{A.59})$$

ergibt sich die komplizierte Identität zu

$$\begin{aligned} & p_1^{\nu_1} \Gamma_{4V}{}_{a_1a_2a_3a_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \frac{\tilde{\Gamma}_2(p_1^2)}{p_1^2} \\ &= \Gamma_{3V}{}_{aa_3a_4}^{\mu\nu_3\nu_4}(p_1 + p_2, p_3, p_4) t^{\mu\nu}(p_1 + p_2) \hat{G}_{aa_1a_2}^{\nu}(-p_1 - p_2, p_1, p_2) \\ & \quad + 2 \text{ zyklische Permutationen (234)} \\ & \quad + \Gamma_{TT}(p_2) t^{\mu\nu_2}(p_2) \times \\ & \quad \left\{ \hat{H}_{a_2a_1a_3a_4}^{\mu \nu_3 \nu_4}(p_2, p_1, p_3, p_4) \right. \\ & \quad + \hat{G}_{a_2aa_4}^{\nu}(-p_1 - p_3, p_1, p_3) \tilde{D}(u) \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{aa_1a_3}^{\nu_3}(-p_1 - p_3, p_1, p_3) \\ & \quad \left. + \hat{G}_{a_2aa_3}^{\nu}(-p_1 - p_4, p_1, p_4) \tilde{D}(t) \tilde{\Gamma}_{G\bar{G}V}{}_{aa_1a_4}^{\nu_4}(-p_1 - p_4, p_1, p_4) \right\} \\ & \quad + 2 \text{ zyklische Permutationen (234)}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$



## Anhang B

# Wichtige Ergänzungen

### B.1 Algebra der $SU(N_C)$ -Eichgruppe

Die Quantenchromodynamik ist eine Feldtheorie mit lokaler  $SU(N_C)$ -Eichinvarianz. Dabei ist die  $SU(N_C)$  eine Gruppe, deren Elemente die Menge aller unitären  $N_C \times N_C$ -Matrizen mit Determinante +1 bilden. Die Generatoren sind diejenigen  $T_a$  für  $a \in \{1, 2, \dots, N_C^2 - 1\}$ , die der Kommutator-Relation

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (\text{B.1})$$

gehorchen und linear unabhängig sind<sup>1</sup>. Sie bilden eine Lie-Algebra (siehe [Ste 94]) mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f_{abc}$ . Die  $T_a$ -Matrizen sind spurfrei und hermitesch und wirken im Raum der Fundamental-Darstellung der Lie-Gruppe. Nach ihr transformieren sich die Fermion-Felder.

Obige Algebra lässt sich durch eine entsprechende Antikommutator-Relation bezüglich der total symmetrischen Strukturkonstanten  $d_{abc}$  einführen [PT 82]:

$$(T_a)^{ij} (T_b)^{jk} = \frac{1}{2N_C} \delta_{ab} \delta^{ik} + \frac{1}{2} d_{abc} (T_c)^{ik} + f_{abc} (T_c)^{ik}, \quad (\text{B.2})$$

die dann die Grundlage für die Spur-Relationen bildet. Mit (B.2) lässt sich

$$\text{tr} \{T_a T_b\} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{tr} \{T_a T_b T_c\} = \frac{1}{4} d_{abc} + \frac{i}{4} f_{abc} \quad (\text{B.4})$$

finden (Summation über die Farbindizes der Fermionen). Insbesondere gilt für die Farb-Spur

$$\text{tr} \{T_a T_a\} = \frac{N_C^2 - 1}{2}. \quad (\text{B.5})$$

---

<sup>1</sup>Die übliche Wahl für  $N = 3$  sind die Gell-Mann-Matrizen (siehe z.B. [PT 82])

Die Eichfelder der Theorie transformieren sich gemäß der adjungierten Darstellung der  $SU(N_C)$  mit:

$$(F_a)_{bc} = -i f_{abc}, \quad \text{wobei} \quad \text{tr} \{ F_a \} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Für die Farb-Kontraktionen (Summation über die Farbindizes der Gluonen) in der adjungierten Darstellung ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\text{tr} \{ F_a F_b \} = N_C \delta_{ab}, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{tr} \{ F_a F_b F_c \} = \frac{i}{2} N_C f_{abc}. \quad (\text{B.8})$$

Die Spur-Relationen, die die symmetrischen Strukturkonstanten enthalten, werden nicht benötigt. Die erweiterten nicht-perturbativen Ansätze in dieser Arbeit beziehen sich lediglich auf die total antisymmetrischen Strukturkonstanten.

## B.2 Algebra der euklidischen $\gamma$ -Matrizen

Geht man von der Antikommutator-Relation der Diracschen  $\gamma$ -Matrizen in ( $D = 4 - 2\epsilon$ ) Dimensionen

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = -2\delta^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} \quad (\text{B.9})$$

aus, so erhält man für kontrahierte Produkte:

$$\gamma^\mu \gamma^\mu = -D \cdot \mathbb{1} \quad (\text{B.10})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = (D - 2) \gamma^\nu \quad (\text{B.11})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = -(D - 4) \gamma^\nu \gamma^\rho + 4 \delta^{\nu\rho} \cdot \mathbb{1}. \quad (\text{B.12})$$

Für die Produkte einer geraden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen gelten die Spurrelationen in  $D = 4$  Dimensionen:

$$\text{tr} \{ \mathbb{1} \} = 4 \quad (\text{B.13})$$

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = -4 \delta^{\mu\nu} \quad (\text{B.14})$$

$$\text{tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = 4 \left( \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} \right). \quad (\text{B.15})$$

Die Spur, die nicht mit den Farb-Spuren zu verwechseln sind, über eine ungerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen ist null. Bei den Kontraktionen im fermionischen Sektor werden die folgenden Beziehungen benutzt:

$$\not{p} \not{p} = -p^2 \quad (\text{B.16})$$

$$\not{p} \not{k} + \not{k} \not{p} = -2(p \cdot k) \quad (\text{B.17})$$

$$\not{p} \not{k} \not{p} = p^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{p}. \quad (\text{B.18})$$

## B.3 Euklidische Impulsintegration

Bei der Analyse von Schwinger-Dyson-Gleichungen treten oftmals euklidische Impulsintegrale auf, die im Rahmen einer dimensionell regularisierten Theorie gelöst werden. Dazu ist es notwendig, Manipulationsvorschriften, wie sie z.B. in [Col 85] aufgeführt sind, im Umgang mit diesen Integralen zu formulieren. Das allgemeine Integral der Form

$$I_D[f] = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p) \quad (\text{B.19})$$

ist ein Funktional mit folgenden Eigenschaften:

- Linearität (für  $a, b \in \mathbb{C}$ ):

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \{ a f(p) + b g(p) \} = a \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p) + b \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} g(p) \quad (\text{B.20})$$

- Skalierung (für  $\alpha$  beliebig):

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(\alpha \cdot p) = \alpha^{-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p) \quad (\text{B.21})$$

- Translationsinvarianz:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p + k) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} f(p) \quad (\text{B.22})$$

- Anschlußbedingung:

Ist  $D$  ganzzahlig und positiv, so soll im Falle der Existenz  $I_D[f]$  mit dem gewöhnlichen Integral übereinstimmen.

Die dann auftretenden Integrale werden schließlich durch die folgende Standardformel (siehe [Col 85], [Mut 87] oder [Ryd 96]) der dimensionellen Regularisierung berechnet:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + M^2)^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha + D/2) \Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(\beta)} [M^2]^{D/2+\alpha-\beta}. \quad (\text{B.23})$$

Hieraus läßt sich dann auch das Verschwinden der sogenannten skalenfreien Integrale, d.h.  $M = 0$ , ablesen. Die in dieser Arbeit auftretenden Integraltypen sind logarithmisch

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + R^2)^{\alpha+2}} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon) (R^2)^{-\epsilon}, \quad (\text{B.24})$$

bzw. quadratisch

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + R^2)^{\alpha+1}} = (\alpha + 1) \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(\epsilon - 1) (R^2)^{1-\epsilon} \quad (\text{B.25})$$

divergent. Die Eigenschaften der Gamma-Funktion [AS 72] seien hier kurz aufgeführt:

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{j(j+n)}, \quad \text{wobei } n \in \{-1, -2, \dots\} \quad (\text{B.27})$$

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right). \quad (\text{B.28})$$

Eine weitere wichtige Formel im Umgang mit Impulsintegrationen ist die der symmetrischen Integration. Zum einen gilt

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n} f(p^2) = 0 \quad (\text{B.29})$$

für  $n$  ungerade und zum anderen verwendet man

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n} f(p^2) \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{S_n^{(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n)}}{D(D+2) \cdots (D+n-2)} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (q^2)^{n/2} f(p^2) \quad (\text{B.31})$$

für  $n$  gerade. Hierbei bezeichnet  $S^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$  für  $n \geq 2$  den total symmetrischen Lorentz-Tensor  $n$ -ter Stufe, von denen hier die zwei niedrigsten Ordnungen

$$S_2^{(\mu_1 \mu_2)} := \delta^{\mu_1 \mu_2} \quad (\text{B.32})$$

$$S_4^{(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)} := \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_3} \delta^{\mu_2 \mu_4} + \delta^{\mu_1 \mu_4} \delta^{\mu_2 \mu_3} \quad (\text{B.33})$$

in dieser Arbeit benötigt werden.

## B.4 Euklidische Formulierung

Viele Arbeiten werden in physikalischer Raum-Zeit, d.h. minkowskisch mit indefiniter Metrik geschrieben (z.B. [BC 80]). Da hier ausschließlich euklidisch gearbeitet wird, wird der Übersetzungsmechanismus zwischen beiden Formulierungen angegeben. In dem man die nullte Komponente<sup>2</sup> des Viererimpulses  $p_M$  durch den euklidischen Impuls  $p_E$  ersetzt:

$$p_M^0 \rightarrow i p_E^0, \quad (\text{B.34})$$

bekommt man einen euklidischen Viererimpuls. Die Ersetzungsvorschrift ist also eine Drehung der Raum-Zeit in der Gaußschen Zahlenebene. Alle Lorentz-invarianten Argumente bekommt man durch die Substitution der Skalarprodukte (siehe z. B. [Bel 91])

$$a \cdot b \rightarrow -a_E \cdot b_E = - \sum_{i=0}^D a^i b^i. \quad (\text{B.35})$$

---

<sup>2</sup>Die nullte Komponente des Viererimpulses ist die Energiekomponente.

Die Minkowski-Metrik  $g^{\mu\nu}$  ist durch die euklidische Metrik

$$g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu} \quad (\text{B.36})$$

zu ersetzen. Bevor ein Schleifenintegral, welches minkowskisch formuliert ist und somit eine indefinite Metrik besitzt, berechnet werden kann, ist es ins Euklidische zu übersetzen:

$$\int \frac{1}{i} \mathcal{D}p_M \rightarrow \int \mathcal{D}p_E. \quad (\text{B.37})$$

Dies geschieht durch Drehung des zeitartigen Integrationsweges gegen den Uhrzeigersinn auf die reelle Achse, ohne dabei die Residuen von eventuell überstrichenen Polen zu berücksichtigen. Diese Art der Drehung wird auch „blinde Wick-Rotation“ genannt.

## B.5 Ladungskonjugationen

In diesem Abschnitt wird das mathematische „Handwerkszeug“ zur Verfügung gestellt, mit denen es möglich wird, Restriktionen für Basiskonstruktionen im fermionischen Sektor anzugeben. Im weiteren wird das Verhalten von Geist-Feldern unter Ladungskonjugationen untersucht, um auch in diesem Sektor Einschränkungen zu formulieren. Das Transformationsverhalten der Fermion-Felder unter Ladungskonjugationen ist durch

$$\mathcal{C} \psi(x) \mathcal{C}^+ = C \bar{\psi}^T(x) \quad (\text{B.38})$$

$$\mathcal{C} \bar{\psi}(x) \mathcal{C}^+ = -\psi^T(x) C^{-1} \quad (\text{B.39})$$

gegeben, wobei sich die Transposition auf die Spinorindizes der Feldoperatoren bezieht. Die Eigenschaften der Diracschen Ladungskonjugations-Matrix

$$C = i \gamma^2 \gamma^0 \quad (\text{B.40})$$

lauten nach [BD 65]

$$C^{-1} = C^T = -C \quad (\text{B.41})$$

$$C \gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T \quad (\text{B.42})$$

$$C \gamma^5 C^{-1} = \gamma^5. \quad (\text{B.43})$$

Das Transformationsverhalten der  $SU(N_C)$ -Eichfelder ergibt sich aus der Forderung nach  $\mathcal{C}$ -Invarianz der Wirkung zu

$$\mathcal{C} (T_a)^{ij} A_a^\mu(x) \mathcal{C}^+ = (-T_a)^{ji} A_a^\mu(x). \quad (\text{B.44})$$

Die Invarianzbedingung für den Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex im Ortsraum berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(y) A^\mu(z)] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\mathcal{C} \psi(x) \bar{\psi}(y) A^\mu(z) \mathcal{C}^+] | 0 \rangle \\ &= -C \langle 0 | T[\psi(y) \bar{\psi}(x) A^\mu(z)] | 0 \rangle^T C^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

so daß mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[ \psi(x) \bar{\psi}(y) A^\mu(z) ] | 0 \rangle &= \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p_2}{(2\pi)^D} e^{-i[p_1(x-y) + p_2(y-z)]} \\ &\times S(p_1) \left[ \bar{\Gamma}_{F\bar{F}G}^{\nu}(-p_1, p_2, p_1 - p_2) \right] S(p_2) D^{\mu\nu}(p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

die Beziehung

$$- \bar{\Gamma}_{F\bar{F}G}^{\nu}(-p_1, p_2, p_1 - p_2) = C \left[ \bar{\Gamma}_{F\bar{F}G}^{\nu}(p_2, -p_1, p_1 - p_2) \right]^T C^{-1} \quad (\text{B.47})$$

für die amputierte Vertexfunktion im Impulsraum folgt. Damit lassen sich die Restriktionen (C.13) für den Basisansatz des Fermion-Vertex ermitteln.

Im folgenden wird das Transformationsverhalten der Geist-Felder unter Ladungskonjugationen untersucht. Nimmt man sich das Verhalten der Eichfelder in Abhängigkeit von der Farbkomponente zum Vorbild, so ist

$$\mathcal{C} A_a^u \mathcal{C}^+ = -\eta(a) A_a^\mu \quad (\text{B.48})$$

mit dem Phasenfaktor

$$\eta(a) = 2 \text{tr} (T_a)^{ji} ((T_a)^{ij})^*. \quad (\text{B.49})$$

Unter Zuhilfenahme einer Tabelle für die total antisymmetrischen Strukturkonstanten (siehe z.B. [Ber 68]) findet man, daß die Forderung nach Invarianz der Lagrange-Dichte erfüllt ist. Für das Transformationsverhalten der Geist-Felder (siehe dazu [Col 85]) gilt dies ebenfalls, wenn man

$$\mathcal{C} c_a(x) \mathcal{C}^+ = -\eta(a) c_a(x) \quad (\text{B.50})$$

$$\mathcal{C} \bar{c}_a(x) \mathcal{C}^+ = -\eta(a) \bar{c}_a(x) \quad (\text{B.51})$$

ansetzt. Man kann leicht zeigen, daß die Anteile der Lagrange-Dichte, welche Geister enthalten, für sich invariant unter Ladungskonjugationen sind, wenn man

$$f_{abc} = -\eta(a) \eta(b) \eta(c) f_{abc} \quad (\text{B.52})$$

fordert. Die Gültigkeit dieser Beziehung läßt sich mit (B.49) nachprüfen. Nach [Col 85] könnte (B.52) ein Hinweis darauf sein, daß der Geist-Vertex keine Farbstrukturen proportional zur total symmetrischen Strukturkonstanten  $d_{abc}$  ausbildet.

## Anhang C

# Basiskonstruktionen

### C.1 Der 3-Gluon-Vertex

Eine für die Analyse der Slavnov-Taylor-Identitäten nützlicher Ansatz für den Drei-Gluon-Vertex ist der aus [BC 80]. Diese Tensorbasis besitzt zwar eine höhere Massendimension als (2.21), hat aber den Vorteil, daß durch die Longitudinalprojektion bezüglich eines Gluon-Beins, wie es in der STI der Fall ist, eine einfache Form annimmt. Bezuglich der antisymmetrischen Farbstruktur

$$\Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}_{a_1 a_2 a_3}(p_1, p_2, p_3) = i f_{a_1 a_2 a_3} \Gamma_{3V}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(p_1, p_2, p_3) \quad (C.1)$$

lassen sich dem Vertex 14 Lorentz-Tensorstrukturen mit den zugehörigen invarianten Funktionen zuordnen. Es gilt nach [BC 80]

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(p_1, p_2, p_3) &= (\delta^{\nu_1 \nu_2} p_1 p_2 - p_1^{\nu_2} p_2^{\nu_1}) (p_1^{\nu_3} p_2 p_3 - p_2^{\nu_3} p_1 p_3) F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &+ (\delta^{\nu_2 \nu_3} p_2 p_3 - p_2^{\nu_3} p_3^{\nu_2}) (p_2^{\nu_1} p_3 p_1 - p_3^{\nu_1} p_2 p_1) F(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ &+ (\delta^{\nu_3 \nu_2} p_3 p_1 - p_3^{\nu_2} p_1^{\nu_3}) (p_3^{\nu_2} p_1 p_2 - p_1^{\nu_2} p_3 p_2) F(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ &- \delta^{\nu_1 \nu_2} (p_1^{\nu_3} p_2 p_3 - p_2^{\nu_3} p_1 p_3) H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &- \delta^{\nu_2 \nu_3} (p_2^{\nu_1} p_3 p_1 - p_3^{\nu_1} p_2 p_1) H(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ &- \delta^{\nu_3 \nu_2} (p_3^{\nu_2} p_1 p_2 - p_1^{\nu_2} p_3 p_2) H(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ &+ (p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_1} p_3^{\nu_2} - p_1^{\nu_2} p_2^{\nu_3} p_3^{\nu_1}) H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &+ \delta^{\nu_1 \nu_2} (p_1^{\nu_3} - p_2^{\nu_3}) A(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &+ \delta^{\nu_2 \nu_3} (p_2^{\nu_1} - p_3^{\nu_1}) A(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ &+ \delta^{\nu_3 \nu_2} (p_3^{\nu_2} - p_1^{\nu_2}) A(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ &+ \delta^{\nu_1 \nu_2} (p_1^{\nu_3} + p_2^{\nu_3}) B(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &+ \delta^{\nu_2 \nu_3} (p_2^{\nu_1} + p_3^{\nu_1}) B(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \\ &+ \delta^{\nu_3 \nu_2} (p_3^{\nu_2} + p_1^{\nu_2}) B(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\ &- (\delta^{\nu_1 \nu_2} p_1 p_2 - p_1^{\nu_2} p_2^{\nu_1}) (p_1^{\nu_3} - p_2^{\nu_3}) C(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\ &- (\delta^{\nu_2 \nu_3} p_2 p_3 - p_2^{\nu_3} p_3^{\nu_2}) (p_2^{\nu_1} - p_3^{\nu_1}) C(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\delta^{\nu_3 \nu_2} p_3 p_1 - p_3^{\nu_1} p_1^{\nu_3}) (p_3^{\nu_2} - p_1^{\nu_2}) C(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \\
& + (p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_1} p_3^{\nu_2} + p_1^{\nu_2} p_2^{\nu_3} p_3^{\nu_1}) S(p_1^2, p_2^2, p_3^2),
\end{aligned} \tag{C.2}$$

wobei die  $F$ ,  $A$  und  $C$  Funktionen sind, die symmetrisch in ihren beiden ersten Impulsargumenten vertauschen. Die  $B$  Funktion dagegen vertauscht antisymmetrisch. Die invarianten Funktionen  $H$  und  $S$  verhalten sich in allen drei Argumenten symmetrisch bzw. antisymmetrisch.

Um einen Bezug zwischen den invarianten Funktionen aus dieser Basis und denen aus (2.21) herzustellen, schreibt man die Impulse z.B. mittels

$$p_1^{\nu_2} = \frac{1}{2} (p_2 + p_1)^{\nu_2} - \frac{1}{2} (p_2 - p_1)^{\nu_2} \tag{C.3}$$

um, nutzt die lineare Abhängigkeit der Impulse  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  aus und vergleicht die Tensorstrukturen. Dies liefert den folgenden Satz von Beziehungen:

$$\begin{aligned}
F_0^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{1}{4} p_3^2 (p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \frac{1}{2} p_3^2 H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
&+ A(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) C(p_1^2, p_2^2, p_3^2)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\frac{1}{4} p_3^2 (p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \\
&+ \frac{1}{2} (p_1^2 - p_2^2) H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) - B(p_1^2, p_2^2, p_3^2)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
F_3^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\frac{1}{4} S(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \frac{1}{4} \left( C(p_3^2, p_1^2, p_2^2) - C(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \right) \\
&+ \frac{1}{8} \left( (p_2^2 - p_1^2) F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) - p_1^2 F(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \right. \\
&\left. + p_2^2 F(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
F_4^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{1}{4} H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \frac{1}{4} C(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \frac{1}{8} \left( p_3^2 F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right. \\
&\left. + (p_2^2 - p_3^2) F(p_2^2, p_3^2, p_1^2) + (p_1^2 - p_3^2) F(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

mit jeweils zwei Permutationen der Impulse. Hinzu kommen noch:

$$\begin{aligned}
F_1^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{1}{4} H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) - \frac{1}{4} \left( C(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + C(p_2^2, p_3^2, p_1^2) \right. \\
&\left. + C(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right) - \frac{1}{8} \left( p_3^2 F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right. \\
&\left. + p_1^2 F(p_2^2, p_3^2, p_1^2) + p_2^2 F(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

und

$$\begin{aligned}
F_5^{[r,0]}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\frac{1}{4} S(p_1^2, p_2^2, p_3^2) + \frac{1}{8} \left( (p_1^2 - p_2^2) F(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \right. \\
&\left. + (p_2^2 - p_3^2) F(p_2^2, p_3^2, p_1^2) + (p_3^2 - p_1^2) F(p_3^2, p_1^2, p_2^2) \right).
\end{aligned} \tag{C.9}$$

## C.2 Der Fermion-Antifermion-Gluon-Vertex

Nach Abseparation der Farbstruktur (globale Eichinvarianz) gemäß

$$\bar{\Gamma}_{F\bar{F}V_a}^{ij}(-p_1, p_2, k) = \left(T_a\right)^{ij} \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{\mu}(-p_1, p_2, k) \quad (\text{C.10})$$

wird die allgemeinste Lorentzstruktur von 12 matrixwertigen Vektoren gebildet [Ber 68]

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{F\bar{F}V}^{\mu}(-p_1, p_2, k) &= \sum_{i=1}^{12} W_i(p_1^2, p_2^2, k^2) V_i^{\mu} \\ &= \gamma^{\mu} W_1(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \not{p}_1 \gamma^{\mu} W_2(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \gamma^{\mu} \not{p}_2 W_3(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \not{p}_1 \gamma^{\mu} \not{p}_2 W_4(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ r^{\mu} \mathbb{1} W_5(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \not{p}_1 r^{\mu} W_6(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ r^{\mu} \not{p}_2 W_7(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \not{p}_1 r^{\mu} \not{p}_2 W_8(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ k^{\mu} \mathbb{1} W_9(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \not{p}_1 k^{\mu} W_{10}(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ k^{\mu} \not{p}_2 W_{11}(p_1^2, p_2^2, k^2) \\ &+ \not{p}_1 k^{\mu} \not{p}_2 W_{12}(p_1^2, p_2^2, k^2) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

mit

$$r^{\mu} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)^{\mu} \quad \text{und} \quad k^{\mu} = (p_1 - p_2)^{\mu}. \quad (\text{C.12})$$

Die Invarianzbedingungen unter Ladungskonjugationen (siehe (B.5)) liefern Restriktionen für die invarianten Funktionen

$$\begin{aligned} W_i(p_1^2, p_2^2, k^2) &= W_{i+1}(p_2^2, p_1^2, k^2) \quad \text{für } i = 2, 6 \text{ bzw.} \\ W_{10}(p_1^2, p_2^2, k^2) &= -W_{11}(p_2^2, p_1^2, k^2) \quad \text{und} \\ W_i(p_1^2, p_2^2, k^2) &= W_i(p_2^2, p_1^2, k^2) \quad \text{für } i = 1, 4, 5, 8 \text{ bzw.} \\ W_i(p_1^2, p_2^2, k^2) &= -W_i(p_2^2, p_1^2, k^2) \quad \text{für } i = 9, 12, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

die u.a. in die Symmetriebeziehung (2.40) eingehen.



## Anhang D

# Feynman-Parametrisierungen

### D.1 Feynman-Parametrisierung $F_{(0)}$

Die Standardformeln zur Feynman-Parametrisierung [Kug 97] lauten

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{(\alpha+\beta)}} \quad (\text{D.1})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \\ &\times \frac{x_2 x_3^2 \cdots x_{n-1}^{n-2}}{[(a_1 - a_2)x_1 \cdots x_{n-1} (a_2 - a_3)x_2 \cdots x_{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)x_{n-1} + a_n]^n}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Der Nenner der Tadpole-Schleife hat die Form

$$N_{(0)}(q) = \frac{1}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s+\Lambda^2})} \frac{1}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s-\Lambda^2})}, \quad (\text{D.3})$$

der sich gemäß der Feynman-Parametrisierung

$$N_{(0)}(q) = \int dF_{(0)}(z) \frac{1}{[q^2 + R_{(0)}^2(z)]^{r+1}} \quad (\text{D.4})$$

mit

$$\begin{aligned} \int dF_{(0)}(z) &= \int dF_{(0)}(x, y, z) = \Gamma(r+1) \int_0^1 dx_1 \cdots dx_{\frac{r-1}{2}} x_2 x_3^2 \cdots x_{\frac{r-1}{2}}^{\frac{r-3}{2}} \\ &\times \int_0^1 dy_1 \cdots dy_{\frac{r-1}{2}} y_2 y_3^2 \cdots y_{\frac{r-1}{2}}^{\frac{r-3}{2}} \int_0^1 dz (1-z)^{\frac{1}{2}(r-1)} z^{\frac{1}{2}(r-1)} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

zusammenfassen lässt. Dabei gelten die Identitäten

$$\int dF_{(0)}(z) = 1 \quad (\text{D.6})$$

und

$$\begin{aligned} \int dF_{(1)}(z) \cdot R_{(1)}^2(z) &= \frac{1}{2} \left\{ u_{r, \frac{1}{2}(r+1)+} \Lambda^2 \right. \\ &+ \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) \left( u_{r, \frac{1}{2}(r-2s+1)+} - u_{r, \frac{1}{2}(r-2s+3)+} \right) \Lambda^2 + u_{r, \frac{1}{2}(r+1)-} \Lambda^2 \\ &\left. + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) \left( u_{r, \frac{1}{2}(r-2s+1)-} - u_{r, \frac{1}{2}(r-2s+3)-} \right) \Lambda^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

die zum Zurücknehmen der Feynman-Parametrisierung nach erfolgter Impulsintegration benötigt werden.

## D.2 Feynman-Parametrisierung $F_{(1)}$

Bei der Berechnung der Geisterschleife tritt die Nennerstruktur

$$N_{(1)}(q) = \frac{1}{\prod_{s=1}^r (q^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + v_{r,2s-1} \Lambda^2)} \quad (\text{D.8})$$

auf. Mittels dreimaliger Feynman-Parametrisierung lassen sich die Nennerfaktoren zusammenfassen:

$$N_{(1)}(q) = \int dF_{(1)}(z) \frac{1}{[(q-zp)^2 + R_{(1)}^2(z)]^{2r}}, \quad (\text{D.9})$$

wobei

$$\begin{aligned} \int dF_{(1)}(z) &= \int dF_{(1)}(x, y, z) = \Gamma(2r) \int_0^1 dx_1 \cdots dx_{r-1} x_2 x_3^2 \cdots x_{r-1}^{r-2} \\ &\times \int_0^1 dy_1 \cdots dy_{r-1} y_2 y_3^2 \cdots y_{r-1}^{r-2} \int_0^1 dz (1-z)^{r-1} z^{r-1} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

und

$$\begin{aligned} R_{(1)}^2(z) &= R_{(1)}^2(x, y, z) = \\ &z(1-z)p^2 + z \left\{ v_{r,2r-1} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( v_{r,2r-2s-1} - v_{r,2r-2s+1} \right) \Lambda^2 \prod_{i=r-s}^{r-1} y_i \right\} \\ &+ (1-z) \left\{ v_{r,2r-1} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( v_{r,2r-2s-1} - v_{r,2r-2s+1} \right) \Lambda^2 \prod_{i=r-s}^{r-1} x_i \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Zum Zurücknehmen der Feynman-Parametrisierung  $F_{(1)}$  werden in dieser Arbeit die Identitäten

$$\int dF_{(1)}(z) = 1 \quad (\text{D.12})$$

$$\int dF_{(1)}(z) \cdot z = \frac{1}{2} \quad (\text{D.13})$$

$$\int dF_{(1)}(z) \cdot z^2 = \frac{(r+1)}{2(2r+1)} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \int dF_{(1)}(z) \cdot R_{(1)}^2(z) &= \frac{r}{2(2r+1)} p^2 \\ &+ v_{r,2r-1} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) (v_{r,2r-2s-1} - v_{r,2r-2s+1}) \Lambda^2 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

benötigt.

### D.3 Feynman-Parametrisierung $F_{(2)}$

Der Transversalanteil der Gluonschleife hat den Nenner

$$N_{(2)}(q) = \frac{1}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (q^2 + u_{r,s} \Lambda^2)(q^2 + v_{r,s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2)}. \quad (\text{D.16})$$

Nach fünfmaliger Feynman-Parametrisierung ist

$$N_{(2)}(q) = \int dF_{(2)}(z) \frac{1}{[(q-zp)^2 + R_{(2)}^2(z)]^{2r+1}}, \quad (\text{D.17})$$

wobei diese durch die Beziehungen

$$\int dF_{(2)}(z) = 1 \quad (\text{D.18})$$

$$\int dF_{(2)}(z) \cdot z = \frac{r}{2r+1} \quad (\text{D.19})$$

$$\int dF_{(2)}(z) \cdot z^2 = \frac{r(r+1)}{(2r+1)(2r+2)} \quad (\text{D.20})$$

$$\int dF_{(2)}(z) \cdot z^3 = \frac{r(r+1)(r+2)}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} \int dF_{(2)}(z) \cdot R_{(2)}^2(z) &= \frac{r(r+1)}{(2r+1)(2r+2)} p^2 \\ &+ \frac{r}{2(2r+1)} \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)+} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)+} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)+}) \Lambda^2 \right\} \\ &+ \frac{r}{2(2r+1)} \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)-} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)-} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)-}) \Lambda^2 \right\} \\ &+ \frac{r+1}{2r+1} \left\{ v'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) (v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2}) \Lambda^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} \int dF_{(2)}(z) \cdot z R_{(2)}^2(z) &= \frac{r(r+1)^2}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)} p^2 \\ &+ \frac{r(r+1)}{2(2r+1)(2r+2)} \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)+} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) (u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)+} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)+}) \Lambda^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r(r+1)}{2(2r+1)(2r+2)} \left\{ u_{r,\frac{1}{2}(r+1)-} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{(r-1)/2} \left( \frac{r+1-2s}{r+1} \right) \left( u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+1)-} - u_{r,\frac{1}{2}(r-2s+3)-} \right) \Lambda^2 \right\} \\
& + \frac{r(r+1)}{(2r+1)(2r+2)} \left\{ v'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \Lambda^2 \right\} \quad (D.23)
\end{aligned}$$

zurückgenommen werden.

#### D.4 Feynman-Parametrisierung $F_{(3)}$

Der Longitudinalanteil der Gluon-Schleife besitzt die Nennerstruktur

$$\begin{aligned}
N_{(3)}(q) &= \frac{1}{\prod_{s=1}^r (q^2 + \bar{u}'_{r,2s} \Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^r ((q-p)^2 + v'_{r,2s} \Lambda^2)} \\
&= \int dF_{(3)}(z) \frac{1}{[(q-zp)^2 + R_{(3)}^2(z)]^{2r}}. \quad (D.24)
\end{aligned}$$

Dabei werden

$$\int dF_{(3)}(z) \cdot z^n = \frac{(2r-1)!(n-1)!}{(r+n-1)!(2r+n-1)!} \quad (D.25)$$

$$\begin{aligned}
\int dF_{(3)}(z) \cdot R_{(3)}^2(z) &= \frac{r}{2(2r+1)} p^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \bar{u}'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \bar{u}'_{r,2r-2s} - \bar{u}'_{r,2r-2s+2} \right) \Lambda^2 \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ v'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \Lambda^2 \right\} \quad (D.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int dF_{(3)}(z) \cdot z R_{(3)}^2(z) &= \frac{r(r+1)}{2(2r+1)(2r+2)} p^2 \\
&+ \frac{r}{2(2r+1)} \left\{ \bar{u}'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( \bar{u}'_{r,2r-2s} - \bar{u}'_{r,2r-2s+2} \right) \Lambda^2 \right\} \\
&+ \frac{r}{2(2r+1)} \left\{ v'_{r,2r} \Lambda^2 + \sum_{s=1}^{r-1} \left( \frac{r-s}{r} \right) \left( v'_{r,2r-2s} - v'_{r,2r-2s+2} \right) \Lambda^2 \right\} \quad (D.27)
\end{aligned}$$

benutzt.

## Anhang E

# Die Nebenbedingungen des 3-Gluon-Vertex in $r = 1$

Angegeben werden die im 3. Kapitel abgeleiteten Nebenbedingungen (3.19), (3.19) und (3.19) auf dem Niveau  $r = 1$  als Polynom in der spontanen Massenskala. Dabei sind die berechneten Restriktionen aus (E.1) bzw. (3.25) bereits in den letzteren verwendet.

### E.1 Restriktionen an die Koeffizienten aus der Hilfsamplitude $\hat{G}$

$$\begin{aligned}
0 = & \left( G_{000}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2) - G_{000}^0 v_1(p_1^2) - G_{101}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2) + G_{100}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2) - G_{000}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2) + G_{000}^0 v_1(p_2^2) \right. \\
& \left. + G_{101}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_2^2) - G_{100}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_2^2) \right) \Lambda^8 \\
& + \left( G_{100}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)^2 - G_{101}^0 v_1(p_1^2)^2 - G_{020}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2)^2 + G_{200}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2)^2 - G_{100}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2)^2 + G_{101}^0 v_1(p_2^2)^2 \right. \\
& + G_{020}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_2^2)^2 - G_{200}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_2^2)^2 + G_{001}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)(p_3^2) - G_{001}^0 v_1(p_1^2)(p_3^2) + G_{101}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2)(p_3^2) \\
& \left. - G_{001}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2)(p_3^2) + G_{001}^0 v_1(p_2^2)(p_3^2) - G_{101}^0 \tilde{u}'_2 v_1(p_2^2)(p_3^2) \right) \Lambda^6 \\
& + \left( G_{200}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)^3 - G_{020}^0 v_1(p_1^2)^3 - G_{200}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2)^3 + G_{020}^0 v_1(p_2^2)^3 + G_{101}^0 (p_1^2)(p_2^2)^2 - G_{100}^0 (p_1^2)(p_2^2)^2 \right. \\
& + G_{020}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)(p_2^2)^2 - G_{110}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)(p_2^2)^2 + G_{110}^0 v_1(p_1^2)(p_2^2)^2 - G_{200}^0 v_1(p_1^2)(p_2^2)^2 + G_{002}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)(p_3^2)^2 \\
& - G_{002}^0 v_1(p_1^2)(p_3^2)^2 - G_{002}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2)(p_3^2)^2 + G_{002}^0 v_1(p_2^2)(p_3^2)^2 - G_{101}^0 (p_1^2)^2(p_2^2) + G_{100}^0 (p_1^2)^2(p_2^2) \\
& - G_{020}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)^2(p_2^2) + G_{110}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)^2(p_2^2) - G_{110}^0 v_1(p_1^2)^2(p_2^2) + G_{200}^0 v_1(p_1^2)^2(p_2^2) + G_{101}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)^2(p_3^2) \\
& - G_{011}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2)^2(p_3^2) - G_{101}^0 \tilde{u}'_2(p_2^2)^2(p_3^2) + G_{011}^0 v_1(p_2^2)^2(p_3^2) + G_{011}^0 \tilde{u}'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2) \\
& \left. - G_{011}^0 v_1(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2) \right) \Lambda^4
\end{aligned}$$

$$+ \left( G_{020}^0(p_1^2)(p_2^2)^3 - G_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^3 - G_{020}^0(p_1^2)^3(p_2^2) + G_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2) - G_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2) \right. \\ \left. - \tilde{u}'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2) + v_1(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2) + G_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2) + \tilde{u}'_2(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2) \right. \\ \left. - v_1(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2) \right) \Lambda^2$$

## E.2 Restriktionen der symmetrischen Invarianten $F_0$

$$0 = \left( -\frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)u_1u_2^2u'_2v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)u_1u_2^2u'_2v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)u_2u'_2u_3v_1v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)u_2u'_2u_3v_1 \right) \Lambda^{18}$$

$$+ \left( C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)\tilde{u}'_2v_1^2v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2u_1u_2^2u'_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2u_1u_2^2u'_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2u_2u'_2u_3v_1v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2u_2u'_2u_3v_1 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2u_1u_2^2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2v'_2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^2u_1u_2^2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2v'_2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2u_2u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1^2v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(p_2^2)^2u_2u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1^2v'_2 - 2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)u_1u_2^2u'_2v_1 - 2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)u_2u'_2u_3v_1^2v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_3^2)u_1u_2^2v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2v_1v'_2 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)u_2u'_2v_1v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2u_1u_2u'_2v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2u_1u_2u'_2v_1v'_2 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)u_1u_2u'_2v_1v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_3^2)u_2u_3v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)(p_3^2)u_2u_3v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2u'_2u_3v_1v'_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2u'_2u_3v_1v'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_3^2)u_2u'_2u_3v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_2^2)(p_3^2)u_2u'_2u_3v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) \right. \\ \left. - (G_{000}^0(p_1^2)(p_3^2)u_1u_2^2u'_2v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2u'_2v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) \right) \Lambda^{16}$$

$$+ \left( -\frac{1}{2}(p_1^2)^3u_1u_2^2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^3u_1u_2^2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3u_2u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^3u_2u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1^2 \right. \\ \left. + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)v_1^2v'^2 + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1^2v'^2 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)\tilde{u}'_2v_1^2v'^2 + C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1^2v'^2 \right. \\ \left. + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1v'^2 + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)\tilde{u}'_2v_1v'^2 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2^2u'_2 \right. \\ \left. - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2^2u'_2 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_2u'_2u_3 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_2u'_2u_3 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2v_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_2u'_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_2u'_2v_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3u_1u_2u'_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^3u_1u_2u'_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2u'_2v_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2u'_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_2u_3v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_3v_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3u'_2u_3v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^3u'_2u_3v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_2u'_2u_3v_1)/(2\tilde{u}'_2) \right. \\ \left. - (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u'_2u_3v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u'_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u'_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^3u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_3^2)u_2u_2'u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'u_3v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3u_2'\tilde{u}_2'u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^3u_2'\tilde{u}_2'u_3v_1^2v_2' \\
& - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_2^2u_2'v_2' - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_2^2u_2'v_2' - 2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2u_2'v_2' \\
& - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2u_2'v_2' - 2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_2u_3v_1^2v_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_2'u_3v_1^2v_2' \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_2'u_3v_1^2v_2' - (2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_2u_3v_1^2v_2')/\tilde{u}_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_2^2v_1v_2' \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_1u_2v_1v_2' - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2v_1v_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2v_1v_2' \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2v_1v_2' - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2'v_1v_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_2u_2'v_1v_2' \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_2u_2'v_1v_2' - (p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1v_2' \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_3v_1v_2' - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_3v_1v_2' - (p_1^2)(p_2^2)^2u_2u_2'\tilde{u}_2'u_3v_1v_2' \\
& - (p_1^2)^2(p_2^2)u_2u_2'\tilde{u}_2'u_3v_1v_2' - (G_{000}^0(p_1^2)(p_3^2)^2u_2u_3v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_2^2)(p_3^2)^2u_2u_3v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_2'u_3v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'u_3v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u_2'v_1v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1v_2')/\tilde{u}_2' \\
& - (2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2^2u_2'v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_1u_2^2u_2'v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_2u_2'u_3v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)u_2u_2'u_3v_2')/(2v_1) \Big) \Lambda^{14} \\
& + \Big( -G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_1^2 \\
& + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^4u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_2u_2'u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4u_2'\tilde{u}_2'u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^4u_2'\tilde{u}_2'u_3v_1^2 + C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2v_1^2v_2'^2 \\
& + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2'^2 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)v_1^2v_2'^2 + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2 \\
& + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2 + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2 + C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2 \\
& + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2 + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2 + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2'^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)v_1v_2'^2 + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)v_1v_2'^2 + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1v_2'^2 \\
& + 2C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1v_2'^2 + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)\tilde{u}_2'v_1v_2'^2 + C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1v_2'^2 \\
& + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1v_2'^2 - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_2^2u_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2u_2' \\
& - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_1u_2u_2' - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2u_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_3 \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2u_3 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_2'v_3 - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_2'v_3 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'v_3)/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2u_2'v_3)/\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2v_1 \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2^2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_3^2)u_1u_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2v_1 \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2'v_1 \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2'v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_2u_2'v_1 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_2u_2'v_1 \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_2u_2'v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_3^2)u_3v_1 \\
& - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_2^2)^3(p_3^2)u_3v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^3u_2u_2'\tilde{u}_2'v_3v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)u_2u_2'\tilde{u}_2'v_3v_1 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_3^2)u_2'u_3v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'u_3v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2^2u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2v_2' - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1^2v_2' + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2' + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2^2u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + 2C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)u_2'u_3v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_1^2v_2' - 2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2v_2' \\
& - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2v_2' - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_1u_2'v_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_2u_2'v_2' \\
& - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_2u_2'v_2' - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_2u_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2u_1u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_2'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_3v'_2 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_3v'_2 - (p_1^2)^2(p_2^2)^2u_2u'_2\tilde{u}'_2u_3v'_2 \\
& -(2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2u_2u_3v'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u'_2u_3v'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u'_2u_3v'_2)/\tilde{u}'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1v_1v'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1v_1v'_2 \\
& -G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2v_1v'_2 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2v_1v'_2 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u'_2v_1v'_2 \\
& -(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u'_2v_1v'_2 - (p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2u'_2v_1v'_2 + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1v'_2 \\
& +2C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1v'_2 - (p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}'_2v_1v'_2 - (p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}'_2v_1v'_2 \\
& +C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)\tilde{u}'_2v_1v'_2 - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_2^2u'_2\tilde{u}'_2v_1v'_2 - (p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1v'_2 \\
& -2(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_1u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1v'_2 - (p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1v'_2 - (p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u'_2u_3v_1v'_2 - \\
& (p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2u'_2u_3v_1v'_2 - (p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2u_3v_1v'_2 - (p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2u_3v_1v'_2 \\
& -(p_1^2)(p_2^2)^3u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1v'_2 - (p_1^2)^3(p_2^2)u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1v'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)^2u_3v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) - \\
& (G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_3v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2u_2^2v_1v'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2v_1v'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u'_2v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u'_2v_1v'_2)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u'_2v_1v'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2u'_2v_1v'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& -(2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2u_1u_2^2v'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u'_2v'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2^2u'_2v'_2)/\tilde{u}'_2 - (2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u'_2v'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& -(2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u'_2v'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u'_2v'_2)/(2v_1) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2v'_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_2^2u'_2v'_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_2^2u'_2v'_2)/(2v_1) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3u_1u_2u'_2v'_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_1u_2u'_2v'_2)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)u_1u_2u'_2v'_2)/(2v_1) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_3v'_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2u_3v'_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u'_2u_3v'_2)/v_1 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u'_2u_3v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_2u'_2u_3v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2u'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_1u_2^2u'_2)/v_1 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2u_2u'_2u_3)/v_1 \Big) \Lambda^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Big( -2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1^2 + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2^2u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_3^2)u_1u_2u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2u'_2v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u'_2v_1^2 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1^2 + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2^2\tilde{u}'_2v_1^2 + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4u_1u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)u_1u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)^2u_2u_3v_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_3^2)u'_2u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^4(p_3^2)u'_2u_3v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_3^2)\tilde{u}'_2u_3v_1^2 \\
& -\frac{1}{2}(p_2^2)^4(p_3^2)\tilde{u}'_2u_3v_1^2 + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^3v_1^2v_2^2 + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2v_2^2 \\
& +C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2v_1^2v_2^2 + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2v_2^2 + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2^2 \\
& +C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)v_1^2v_2^2 + (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1^2v_2^2 + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2^2 \\
& +C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1^2v_2^2 + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1^2v_2^2 + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1^2v_2^2 \\
& +C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2v_2^2 + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2v_1^2v_2^2 + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2v_2^2 \\
& +2C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2^2 + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)v_1^2v_2^2 + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^4\tilde{u}'_2v_1v_2^2 \\
& +C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1v_2^2 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1v_2^2 + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1v_2^2 \\
& +C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1v_2^2 + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2\tilde{u}'_2v_1v_2^2 + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2\tilde{u}'_2v_1v_2^2 \\
& +C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)\tilde{u}'_2v_1v_2^2 + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1v_2^2 + 2C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1v_2^2 \\
& +C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1v_2^2 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2 - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2 \\
& -G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2' - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2' - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2u_2' \\
& -2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2u_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2^2u_2'\tilde{u}'_2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2^2u_2'\tilde{u}'_2 - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_3 \\
& -G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2u_2'\tilde{u}'_2u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2u_2'\tilde{u}'_2u_3 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2u_3)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'u_3)/\tilde{u}'_2 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2'u_3)/\tilde{u}'_2 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1v_1 \\
& -\frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2v_1 - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2v_1 \\
& -\frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2'v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2'v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_1 \\
& +C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1 + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}'_2v_1 \\
& -(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2^2u_2'\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2^2u_2'\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^4u_1u_2u_2'\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2u_2'\tilde{u}'_2v_1 \\
& -(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2u_2'\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)u_1u_2u_2'\tilde{u}'_2v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'u_3v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2u_2'u_3v_1 \\
& -(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2u_3v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2u_3v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^4u_2'\tilde{u}'_2u_3v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)u_2'\tilde{u}'_2u_3v_1 \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^3(p_3^2)^2u_3v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_3v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2v_1)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'v_1)/(2\tilde{u}'_2) \\
& -(G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'v_1)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2u_2'v_1)/(2\tilde{u}'_2) \\
& +C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2v_2' + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2^2v_1^2v_2' \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2^2v_1^2v_2' + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2v_2' + 2C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2' \\
& +C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2^2v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_1^2v_2' \\
& -\frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2'v_1^2v_2'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'v_1^2v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2u_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + 2C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2'\tilde{u}_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_3^2)^2u_3v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_3v_1^2v_2' \\
& - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1v_2' - G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2v_2' - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2v_2' \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2v_2' - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2'v_2' - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u_2'v_2' \\
& + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_2' + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'u_3v_2' \\
& - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2'\tilde{u}_2'u_3v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2'\tilde{u}_2'u_3v_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_3v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_3v_2')/\tilde{u}_2' - (p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1v_2' \\
& - (p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1v_2' + C_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)v_1v_2' + 2C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1v_2' \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)v_1v_2' + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)v_1v_2' - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u_2'v_1v_2' \\
& - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1v_2' - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1v_2' \\
& + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_1v_2' + 3C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1v_2' + 3C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1v_2' \\
& - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_1v_2' + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)\tilde{u}_2'v_1v_2' + C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1v_2' \\
& + 2C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1v_2' + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1v_2' - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1v_2' \\
& - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_1v_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2^2\tilde{u}_2'v_1v_2' - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1v_2' - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1v_2' \\
& - (p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3v_1v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2u_3v_1v_2' - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'u_3v_1v_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2'u_3v_1v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_1v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_1v_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1v_1v_2')/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2v_1v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2v_1v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'u_2v_1v_2')/\tilde{u}_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2^2v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2^2v_2')/\tilde{u}_2' - (2G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_2')/\tilde{u}_2' \\
& - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2v_2')/\tilde{u}_2' - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2v_2')/\tilde{u}_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'v_2')/\tilde{u}_2' - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'v_2')/\tilde{u}_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2'u_2'v_2')/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2^2v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2v_2')/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2'v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2'v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4u_2u_2'v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2u_2'v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2u_2'v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)u_2u_2'v_2')/(2v_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_3v'_2)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_2u_3v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u'_2u_3v'_2)/(\tilde{u}'_2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2^2v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2u'_2v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_2^2u'_2v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u'_2v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u'_2v'_2)/(\tilde{u}'_2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u'_2v'_2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2)/\tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2^2)/\tilde{u}'_2 - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u'_2)/\tilde{u}'_2 - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u'_2)/\tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u'_2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_2^2u'_2)/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_2^2u'_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u_1u_2u'_2)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u_1u_2u'_2)/v_1 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_3)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3u'_2u_3)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2u'_2u_3)/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u'_2u_3)/(\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u'_2)/(\tilde{u}'_2v_1) \Big) \Lambda^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2^2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_2^2v_1^2 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2 \right. \\
& + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_3^2)^2u_1u_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_2^2)^4(p_3^2)^2u_1u_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_1u'_2v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_2u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u'_2v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_2u'_2v_1^2 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4\tilde{u}'_2v_1^2 + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_1^2 + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2\tilde{u}'_2v_1^2 + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_1\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_1\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_3^2)^2u_3v_1^2 \\
& - \frac{1}{2}(p_2^2)^4(p_3^2)^2u_3v_1^2 + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_2'^2 + (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2v_2'^2 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_2'^2 \\
& + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_2'^2 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4\tilde{u}'_2v_2'^2 + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3\tilde{u}'_2v_2'^2 + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2\tilde{u}'_2v_2'^2 \\
& + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2\tilde{u}'_2v_2'^2 + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}'_2v_2'^2 + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_2'^2 \\
& + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^3v_1v'_2 + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)(p_3^2)^3v_1v'_2 + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1v'_2 \\
& + 2C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1v'_2 + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2v_1v'_2 + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)v_1v'_2 \\
& + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1v'_2 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1v'_2 + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1v'_2 \\
& + C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1v'_2 + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)v_1v'_2 + (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1v'_2 + (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}'_2v_1v'_2 \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1 - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1 - 2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2 - 2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2 \\
& - 2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3u'_2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2u'_2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2u'_2 + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3\tilde{u}'_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2^2\tilde{u}_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^3u_2^2u_2'\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4u_1u_2u_2'\tilde{u}_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^3u_1u_2u_2'\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2u_1u_2u_2'\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'u_3 \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4u_2'\tilde{u}_2'u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2u_2'\tilde{u}_2'u_3 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_3)/\tilde{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_3)/\tilde{u}_2' - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1 \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2^2v_1 + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1 \\
& + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1 - \frac{1}{2}G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2u_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u_2'v_1 \\
& - (p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1 \\
& - (p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2u_2'v_1 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_1 + 2C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1 + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1 \\
& - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_1 + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1 + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1 \\
& - (p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1 \\
& - (p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^4u_1u_2'\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^2u_1u_2'\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^4u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1 \\
& - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^3u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^2u_2u_2'\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2u_3v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_2u_3v_1 \\
& - (p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)u_2'u_3v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)u_2'u_3v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_1 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_1v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_2v_1)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'v_1)/(2\tilde{u}_2') - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2v_2' + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^3v_1^2v_2' \\
& + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3v_1^2v_2' + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1^2v_2' + 2C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2v_2' \\
& + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2v_2' + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^3v_1^2v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2v_2' \\
& + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2v_2' \\
& + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_1v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2v_1^2v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2u_2v_1^2v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'v_1^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'v_1^2v_2' + \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' \\
& + \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2v_2' + C_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_2' - G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)v_2' + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_2' \\
& - G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2u_2'\tilde{u}_2'v_2' \\
& - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_2' \\
& + 2C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_2' + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2'v_2' \\
& + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_2' + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^3u_1u_2'\tilde{u}_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^3u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2u_2u_2'\tilde{u}_2'v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)u_2'u_3v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'u_3v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3v_2'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{001}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2 v_1 v'_2 + 2C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 v_1 v'_2 + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2 v_1 v'_2 \\
& - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u'_2 v_1 v'_2 + C_{100}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2) v_1 v'_2 + 3C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) v_1 v'_2 \\
& + 3C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) v_1 v'_2 + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2) v_1 v'_2 - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 u_2 v_1 v'_2 \\
& - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 u_2 v_1 v'_2 - (p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2 u_1 u_2 v_1 v'_2 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 u'_2 v_1 v'_2 \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_1 u'_2 v_1 v'_2 - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 u'_2 v_1 v'_2 - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2 v_1 v'_2 \\
& + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^5 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + 2C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 \\
& + 2C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + 2C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + C_{110}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 \\
& + 2C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + 2C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 \\
& + C_{002}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + C_{200}^0(p_1^2)^5(p_2^2) \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2) \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 \\
& + 3C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + 3C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 + C_{101}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2) \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 \\
& - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_1 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 \\
& - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 - (p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_3 v_1 v'_2 \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^2 u_3 v_1 v'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 v_1 v'_2) / \tilde{u}'_2 - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 v'_2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2 v'_2) / \tilde{u}'_2 - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2 v'_2) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2 u_2 v'_2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2 v'_2) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 v'_2) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 v'_2) / (2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_1 v'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2) u_2 v'_2) / (2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 v'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 v'_2) / (2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2) u_2 v'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4 u'_2 v'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2 u'_2 v'_2) / (2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_3 v'_2) / (\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 u_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2 u_1 u_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 u_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2) u_2 u'_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2 u'_2 v'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2^2) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 u_2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 u_2) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^2 u_1 u_2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 u'_2) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_1 u'_2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 u'_2) / \tilde{u}'_2 - (2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 u'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 u_2) / v_1 \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_1 u_2) / v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3 u_1 u'_2) / v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4 u_2 u'_2) / (2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3 u_2 u'_2) / v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2 u_2 u'_2) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_3) / (2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_3) / (2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2 u_3) / (\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u'_2 u_3) / (2\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u'_2 u_3) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 u'_2) / (\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 u'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u'_2) / (2\tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 u_2 u'_2) / (\tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2) u_1 u_2 u'_2) / (\tilde{u}'_2 v_1) \Big) \Lambda^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2^2 + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^3v_1^2 + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1^2 \right. \\
& \quad + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1^2 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)v_1^2 + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)v_1^2 + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)v_1^2 \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^2u_1v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)^2u_1v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^2u_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2v_1^2 \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)^2u_2v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'v_1^2 \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2 + (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1^2 + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^3v_2^2 \\
& \quad + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_2^2 + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_2^2 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)v_2^2 + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)v_2^2 \\
& \quad + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)v_2^2 + (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_2^2 + (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1v_2^2 + (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1v_2^2 \\
& \quad + C_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) - 2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2u_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2u_2' \\
& \quad - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2u_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2u_2' + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4\tilde{u}_2' + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3\tilde{u}_2' \\
& \quad - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_2^2\tilde{u}_2' + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2' \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^4u_1u_2'\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^3u_1u_2'\tilde{u}_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^4u_2u_2'\tilde{u}_2' \\
& \quad - (p_1^2)^4(p_2^2)^3u_2u_2'\tilde{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_2'u_3 \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_2'u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'u_3 + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1 \\
& \quad + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2^2v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2^2v_1 + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)v_1 \\
& \quad + 2C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)v_1 + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)v_1 - (p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^2u_1u_2v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2v_1 \\
& \quad - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)^2u_1u_2v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_1u_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_1u_2'v_1 \\
& \quad - (p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_2u_2'v_1 - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'v_1 + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^5\tilde{u}_2'v_1 \\
& \quad + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_1 + C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_1 + C_{110}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1 + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_1 \\
& \quad + C_{200}^0(p_1^2)^5(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_1 + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2\tilde{u}_2'v_1 + C_{002}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2\tilde{u}_2'v_1 \\
& \quad + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1 + 2C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1 + C_{101}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)\tilde{u}_2'v_1 \\
& \quad - (p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_1\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_1\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'v_1 \\
& \quad - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_2\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^3(p_2^2)^4u_2'\tilde{u}_2'v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)^3u_2'\tilde{u}_2'v_1 \\
& \quad - (p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^2u_3v_1 - (p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)^2u_3v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1)/(2\tilde{u}_2') \\
& \quad - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_1)/(2\tilde{u}_2') + C_{001}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_2' + C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_2' \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_2^2v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_2^2v_2' + \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2v_1^2v_2' \\
& \quad + \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2v_2^2v_2' + C_{100}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)v_2' + 2C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)v_2' \\
& \quad + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2u_1u_2v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2u_1u_2v_2' \\
& \quad - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_1u_2'v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)u_2u_2'v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)u_2u_2'v_2' \\
& \quad - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)u_2u_2'v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^5\tilde{u}_2'v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^4\tilde{u}_2'v_2' \\
& \quad + C_{110}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3\tilde{u}_2'v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^5(p_2^2)^2\tilde{u}_2'v_2' + C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2\tilde{u}_2'v_2'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{002}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 \bar{u}_2' v_2' + C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) \bar{u}_2' v_2' + 2C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) \bar{u}_2' v_2' \\
& + C_{101}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) \bar{u}_2' v_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 \bar{u}_2' v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) u_2 \bar{u}_2' v_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 \bar{u}_2' v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 \bar{u}_2' v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) u_2' \bar{u}_2' v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) u_2' \bar{u}_2' v_2' \\
& - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_3 v_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_3 v_2' + C_{002}^0(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)^3 v_1 v_2' \\
& + 2C_{002}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^2(p_3^2)^3 v_1 v_2' + C_{002}^0(p_1^2)^3(p_2^2)(p_3^2)^3 v_1 v_2' + C_{101}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^2 v_1 v_2' \\
& + 3C_{101}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 v_1 v_2' + 3C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 v_1 v_2' + C_{101}^0(p_1^2)^4(p_2^2)(p_3^2)^2 v_1 v_2' \\
& + C_{200}^0(p_1^2)(p_2^2)^5(p_3^2) v_1 v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) v_1 v_2' + 2C_{200}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) v_1 v_2' \\
& + 2C_{110}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) v_1 v_2' + 2C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) v_1 v_2' + C_{110}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) v_1 v_2' \\
& + 2C_{200}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) v_1 v_2' + C_{200}^0(p_1^2)^5(p_2^2)(p_3^2) v_1 v_2' - (p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 v_1 v_2' \\
& - (p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 v_1 v_2' - 2(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2 v_1 v_2' - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2 v_1 v_2' \\
& - 2(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_2' v_1 v_2' + (p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) \bar{u}_2' v_1 v_2' + (p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) \bar{u}_2' v_1 v_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 v_2')/\bar{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 v_2')/\bar{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) v_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) v_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 v_2')/(2\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 v_2')/(2\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)(p_2^2)^4(p_3^2)^2 u_2 v_2')/(2\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2 v_2')/(2\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2 v_2')/(2\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2 v_2')/(2\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1)/\bar{u}_2' \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1)/\bar{u}_2' - (2G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2)/\bar{u}_2' - (2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2)/\bar{u}_2' \\
& - (2G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_2')/\bar{u}_2' - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_1)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) u_2)/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_2)/v_1 - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) u_2)/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4 u_2')/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3 u_2')/(2v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_3)/(2\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_3)/(2\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2^2)/(2\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_2^2)/(2\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 u_2)/(\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 u_2)/(\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 u_2')/(\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2) u_2 u_2')/(2\bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 u_2')/(\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2) u_2 u_2')/(2\bar{u}_2' v_1) \Big) \Lambda^6 \\
& + \left( C_{001}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)^2 - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_2^2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 v_1^2 + (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)^2 v_1^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 v_1^2 + (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)^2 v_2^2 + C_{100}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) + C_{100}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2}(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 u_1 u_2 - (p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)^2 u_1 u_2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 u_1 u_2 - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) u_1 u_2' \right. \\
& \left. - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 u_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) u_2 u_2' - (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) u_2 u_2' + C_{200}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^5 \bar{u}_2' \right. \\
& \left. + C_{110}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^4 \bar{u}_2' + C_{200}^0(p_1^2)^5(p_2^2)^3 \bar{u}_2' + C_{002}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^3(p_3^2)^2 \bar{u}_2' + C_{101}^0(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) \bar{u}_2' \right. \\
& \left. + C_{101}^0(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) \bar{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) u_1 \bar{u}_2' - \frac{1}{2}(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) u_1 \bar{u}_2' - (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) u_2 \bar{u}_2' \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) u_2 \bar{u}_2' - (p_1^2)^4 (p_2^2)^4 u_2' \bar{u}_2' - \frac{1}{2} (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_3 - \frac{1}{2} (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 u_3 \\
& + C_{002}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^3 v_1 + C_{002}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^3 v_1 + C_{101}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 v_1 + 2 C_{101}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 v_1 \\
& + C_{101}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 v_1 + C_{200}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^5 (p_3^2) v_1 + C_{110}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2) v_1 + C_{200}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2) v_1 \\
& + C_{110}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) v_1 + C_{200}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) v_1 + C_{200}^0 (p_1^2)^5 (p_2^2)^2 (p_3^2) v_1 - (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_1 v_1 \\
& - (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 u_1 v_1 - (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_2 v_1 - 2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_2 v_1 - (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 u_2 v_1 \\
& - (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2) u_2' v_1 - (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) u_2' v_1 + C_{002}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^3 v_2' + C_{002}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^3 v_2' \\
& + C_{101}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 v_2' + 2 C_{101}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 v_2' + C_{101}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 v_2' + C_{200}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^5 (p_3^2) v_2' \\
& + C_{110}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2) v_2' + C_{200}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2) v_2' + C_{110}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) v_2' + C_{200}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) v_2' \\
& + C_{200}^0 (p_1^2)^5 (p_2^2)^2 (p_3^2) v_2' - (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_1 v_2' - \frac{1}{2} (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_2 v_2' - (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_2 v_2' \\
& - \frac{1}{2} (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 u_2 v_2' - \frac{1}{2} (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_2' v_2' - \frac{1}{2} (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_2' v_2' + \frac{1}{2} (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 \bar{u}_2' v_2' \\
& + \frac{1}{2} (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) \bar{u}_2' v_2' + (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 v_1 v_2' + (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 v_1 v_2' \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 v_2') / (2 \bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 v_2') / (2 \bar{u}_2' v_1) - (2 G_{000}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \bar{u}_2' \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_1) / (\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_2) / (2 \bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_2) / (\bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 u_2) / (2 \bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2) u_2') / (2 \bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2) u_2') / (2 \bar{u}_2' v_1) \Big) \Lambda^4 \\
& + \Big( C_{002}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^3 (p_3^2)^3 + C_{101}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 + C_{101}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + C_{200}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^5 (p_3^2) \\
& + C_{110}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^4 (p_3^2) + C_{200}^0 (p_1^2)^5 (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_1 - \frac{1}{2} (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_1 \\
& - (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 u_2 - (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 u_2 - (p_1^2)^4 (p_2^2)^4 (p_3^2) u_2' + \frac{1}{2} (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 v_2' \\
& + \frac{1}{2} (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 v_2' - (G_{000}^0 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2) / (2 \bar{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \bar{u}_2' v_1) \Big) \Lambda^2
\end{aligned}$$

### E.3 Restriktionen der antisymmetrischen Invarianten $F_2$

$$\begin{aligned}
0 &= \Big( - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 v_2' (p_1^2) - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 v_2' (p_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 v_2' (p_2^2) \Big) \Lambda^{18} \\
&+ \Big( - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 (p_1^2)^2 - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 (p_1^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_2' \bar{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 - \frac{1}{2} u_2 u_2' \bar{u}_2' u_3 v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1 v_2' (p_1^2)^2 - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2)^2 + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 (p_2^2)^2 + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 (p_2^2)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_2' \bar{u}_2' v_1^2 v_2' (p_2^2)^2 + \frac{1}{2} u_2 u_2' \bar{u}_2' u_3 v_1^2 v_2' (p_2^2)^2 + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1 v_2' (p_2^2)^2 + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2' u_3 v_1 v_2' (p_2^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 v_2'(p_1^2)(p_3^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 v_2'(p_1^2)(p_3^2) - (G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 v_2'(p_1^2)(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') \\
& -(G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 v_2'(p_1^2)(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 v_2'(p_2^2)(p_3^2) + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 v_2'(p_2^2)(p_3^2) \\
& +(G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 v_2'(p_2^2)(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 v_2'(p_2^2)(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') \Big) \Lambda^{16} \\
\\
& + \Big( -\frac{1}{2}u_1 u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2(p_1^2)^3 - \frac{1}{2}u_2 u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1^2(p_1^2)^3 - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1(p_1^2)^3 - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2' u_3 v_1(p_1^2)^3 \\
& -\frac{1}{2}u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)^3 - \frac{1}{2}u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1^2 v_2'(p_1^2)^3 + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2(p_2^2)^3 + \frac{1}{2}u_2 u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1^2(p_2^2)^3 \\
& +\frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1(p_2^2)^3 + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2' u_3 v_1(p_2^2)^3 + \frac{1}{2}u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_2^2)^3 + \frac{1}{2}u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1^2 v_2'(p_2^2)^3 \\
& -C_{100}^2 \tilde{u}_2' v_1^2(v_2')^2(p_1^2)^2 + G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' (p_1^2)^2 + G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 (p_1^2)(p_2^2)^2 \\
& +\frac{1}{2}G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_1(p_1^2)(p_2^2)^2 + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1(p_1^2)(p_2^2)^2 + \frac{1}{2}u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 \\
& +\frac{1}{2}u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 - G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 + G_{000}^0 u_2' u_3 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 \\
& +\frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2' v_1 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 + u_1 u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 + u_2 u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2 \\
& -(G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2)/(2v_1) - (G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_2'(p_1^2)(p_2^2)^2)/(2v_1) \\
& -(G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 v_2'(p_1^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 v_2'(p_1^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}_2') \\
& +(G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 v_2'(p_2^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}_2') + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 v_2'(p_2^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}_2') + C_{100}^2 \tilde{u}_2' v_1^2(v_2')^2(p_1^2)^2(p_2^2) \\
& -G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' (p_1^2)^2(p_2^2) - G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 (p_1^2)^2(p_2^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_1 (p_1^2)^2(p_2^2) \\
& -\frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1 (p_1^2)^2(p_2^2) - \frac{1}{2}u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) - \frac{1}{2}u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) \\
& +G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) - G_{000}^0 u_2' u_3 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2' v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) \\
& -u_1 u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) - u_2 u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2) + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_2'(p_1^2)^2(p_2^2))/(2v_1) \\
& +(G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2))/(2v_1) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 (p_1^2)^2(p_3^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 (p_1^2)^2(p_3^2) \\
& -(G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 (p_1^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') - (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 (p_1^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') - \frac{1}{2}u_1 u_2^2 u_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2) \\
& -\frac{1}{2}u_1 u_2^2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2) - \frac{1}{2}u_2 u_2' u_3 v_1^2 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2) - \frac{1}{2}u_2 \tilde{u}_2' u_3 v_1^2 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2) \\
& -\frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_3 v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2) - (G_{000}^0 u_2' u_3 v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') \\
& -(G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1 v_2'(p_1^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 (p_2^2)^2(p_3^2) + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 (p_2^2)^2(p_3^2) \\
& +(G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_1 (p_2^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_1 (p_2^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 u_2' v_1^2 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2) \\
& +\frac{1}{2}u_1 u_2^2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2) + \frac{1}{2}u_2 u_2' u_3 v_1^2 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2) + \frac{1}{2}u_2 \tilde{u}_2' u_3 v_1^2 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2) \\
& +\frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2) + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_3 v_1 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2) + (G_{000}^0 u_2' u_3 v_1 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') \\
& +(G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1 v_2'(p_2^2)^2(p_3^2))/(2\tilde{u}_2') \Big) \Lambda^{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v'_1 (p_1^2)^4 - \frac{1}{2}u'_2 \tilde{u}'_2 u_3 v'_1 (p_1^2)^4 + \frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v'_1 (p_2^2)^4 + \frac{1}{2}u'_2 \tilde{u}'_2 u_3 v'_1 (p_2^2)^4 \right. \\
& \quad + \frac{1}{2}u_2^2 u'_2 \tilde{u}'_2 v'_1 (p_1^2)^3 + \frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v'_1 (p_1^2)^3 - C_{200}^2 \tilde{u}'_2 v'_1 (v'_2)^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 - C_{100}^2 \tilde{u}'_2 v_1 (v'_2)^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 \\
& \quad + G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 (p_1^2)^3 + G_{000}^0 u'_2 u_3 (p_1^2)^3 + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u'_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2 u'_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 \\
& \quad + u_1 u_2^2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1 (p_1^2)^3 + u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 u_3 v_1 (p_1^2)^3 - C_{100}^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 + \frac{1}{2}u_1 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 \\
& \quad + \frac{1}{2}u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 - G_{000}^0 u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 + u_1 u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 + u'_2 \tilde{u}'_2 u_3 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 \\
& \quad - (G_{000}^0 u_2^2 u'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3) / (2v_1) - (G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3) / (2v_1) - (G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 (p_1^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) \\
& \quad - (G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 (p_1^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) - \frac{1}{2}u_1 u_2^2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2}u_2 u_3 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_3^2)^2 \\
& \quad - (G_{000}^0 u_3 v_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) + (G_{000}^0 u_2 u_3 v_1 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) \\
& \quad + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_1 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 v_1^2 v'_2 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2}u_2 u_3 v_1^2 v'_2 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 \\
& \quad + (G_{000}^0 u_3 v_1 v'_2 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) + (G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 v'_2 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2\tilde{u}'_2) - \frac{1}{2}u_2^2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2) \\
& \quad - \frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2) + C_{200}^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (v'_2)^2 (p_1^2)^3 (p_2^2) + C_{100}^2 \tilde{u}'_2 v_1 (v'_2)^2 (p_1^2)^3 (p_2^2) \\
& \quad - G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 (p_1^2)^3 (p_2^2) - G_{000}^0 u'_2 u_3 (p_1^2)^3 (p_2^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u'_2 v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2 u'_2 v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2) \\
& \quad - u_1 u_2^2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2) - u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 u_3 v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2) + C_{100}^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_2^2) - \frac{1}{2}u_1 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_2^2) \\
& \quad - \frac{1}{2}u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_2^2) + G_{000}^0 u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2) - u_1 u_2 u'_2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 (p_1^2)^3 (p_2^2) - u'_2 \tilde{u}'_2 u_3 v_1 v'_2 (p_1^2)^3 (p_2^2) \\
& \quad + (G_{000}^0 u_2^2 u'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)) / (2v_1) + (G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)) / (2v_1) - \frac{1}{2}u_1 u_2^2 u'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_3^2) \\
& \quad - \frac{1}{2}u_1 u_2^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2}u_2 u'_2 u_3 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2}u_2 \tilde{u}'_2 u_3 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 (p_1^2)^3 (p_3^2) \\
& \quad - \frac{1}{2}G_{000}^0 u_3 v_1 (p_1^2)^3 (p_3^2) - (G_{000}^0 u'_2 u_3 v_1 (p_1^2)^3 (p_3^2)) / (2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 v_1 (p_1^2)^3 (p_3^2)) / (2\tilde{u}'_2) \\
& \quad - \frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2}u_1 u_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2}u'_2 u_3 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2}\tilde{u}'_2 u_3 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^3 (p_3^2) \\
& \quad + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 u'_2 v_1^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2}u_2 u'_2 u_3 v_1^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2}u_2 \tilde{u}'_2 u_3 v_1^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& \quad + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_3 v_1 (p_2^2)^3 (p_3^2) + (G_{000}^0 u'_2 u_3 v_1 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2\tilde{u}'_2) \\
& \quad + (G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 v_1 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2\tilde{u}'_2) + \frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 v_1^2 v'_2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2}u_1 u_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& \quad + \frac{1}{2}u'_2 u_3 v_1^2 v'_2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2}\tilde{u}'_2 u_3 v_1^2 v'_2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + G_{000}^0 u_1 u_2^2 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& \quad - C_{100}^2 v_1^2 (v'_2)^2 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) - C_{101}^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (v'_2)^2 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + G_{000}^0 u_2 u_3 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& \quad + (G_{000}^0 u_2 u'_2 u_3 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / \tilde{u}'_2 + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_2^2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2}G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& \quad + (G_{000}^0 u_2^2 u'_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2\tilde{u}'_2) + (G_{000}^0 u_1 u_2 u'_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2\tilde{u}'_2) \\
& \quad - G_{000}^0 u_2^2 v_1' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2}u_2^2 u'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2}u_1 u_2 u'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} u_2^2 \tilde{u}_2' v_1' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_1 u_2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + G_{000}^0 u_3 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + (G_{000}^0 u_2' u_3 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / \tilde{u}_2' + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + u_1 u_2^2 u_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + u_1 u_2^2 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + u_2 u_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) + u_2 \tilde{u}_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + (G_{000}^0 u_1 u_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2') - (G_{000}^0 u_2^2 \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / \tilde{u}_2' \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2 u_3 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' (p_1^2) (p_2^2)^2 (p_3^2)) / \tilde{u}_2' - G_{000}^0 u_1 u_2^2 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) + C_{100}^2 v_1^2 (v_2')^2 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) \\
& + C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_1^2 (v_2')^2 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - G_{000}^0 u_2 u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - (G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / \tilde{u}_2' \\
& - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2^2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 u_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - (G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2') \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2') + G_{000}^0 u_2^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2^2 u_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_1 u_2 u_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2^2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 u_2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) \\
& - G_{000}^0 u_3 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - (G_{000}^0 u_2' u_3 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / \tilde{u}_2' - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) \\
& - u_1 u_2^2 v_1' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - u_1 u_2^2 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - u_2 u_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) \\
& - u_2 \tilde{u}_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2) - (G_{000}^0 u_1 u_2' v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2') \\
& + (G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / \tilde{u}_2' + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2 u_3 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 v_1) + (G_{000}^0 u_2 u_2' u_3 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 u_1 u_2^2 u_2' (p_1^2)^2 (p_2^2) (p_3^2)) / \tilde{u}_2' \Big) \Lambda^{12} \\
& + \Big( + \frac{1}{2} u_1 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 + \frac{1}{2} u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (v_2')^2 (p_1^2)^4 + u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 \\
& + u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_1 (p_1^2)^4 - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 - C_{100}^2 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^4 \\
& - (G_{000}^0 u_2 u_2' v_2' (p_1^2)^4) / (2 v_1) - C_{100}^2 \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + \frac{1}{2} u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 \\
& - C_{100}^2 \tilde{u}_2' (v_2')^2 (p_1^2)^3 - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (v_2')^2 (p_1^2)^3 + G_{000}^0 u_1 u_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 \\
& + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + \frac{1}{2} u_2 u_2' \tilde{u}_2' u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 \\
& + u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + \frac{1}{2} u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 - G_{000}^0 u_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 \\
& - \frac{1}{2} u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + \frac{1}{2} u_2' \tilde{u}_2' u_3 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 - C_{100}^2 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 + u_1 u_2' \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2' v_2' (p_1^2)^3) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2 u_2' v_2' (p_1^2)^3) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2^2 u_2' (p_1^2)^3) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2' u_3 (p_1^2)^3) / (2 v_1) + C_{100}^2 \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - \frac{1}{2} u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 \\
& + C_{100}^2 \tilde{u}_2' (v_2')^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 + C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (v_2')^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - G_{000}^0 u_1 u_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 \\
& - \frac{1}{2} u_2 u_2' \tilde{u}_2' u_3 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - u_1 u_2 u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 \\
& + C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 - \frac{1}{2} u_2' \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 + G_{000}^0 u_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 + \frac{1}{2} u_2^2 u_2' \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}u'_2\tilde{u}'_2u_3v'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^2 + C_{100}^2\tilde{u}'_2v_1v'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^2 - u_1u'_2\tilde{u}'_2v_1v'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^2 \\
& + (G_{000}^0u_1u'_2v'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^2)/(2v_1) + (G_{000}^0u_2u'_2v'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^2)/(2v_1) + (G_{000}^0u_2^2u'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^2)/(2v_1) \\
& - (G_{000}^0u'_2u_3(p_1^2)^3(p_2^2)^2)/(2v_1) - \frac{1}{2}u_1u_2^2v_1^2(p_1^2)^3(p_3^2)^2 - \frac{1}{2}u_2u_3v_1^2(p_1^2)^3(p_3^2)^2 \\
& - (G_{000}^0u_3v_1(p_1^2)^3(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0u_1u_2v_1(p_1^2)^3(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) - \frac{1}{2}u_1u_2v_1^2v'_2(p_1^2)^3(p_3^2)^2 \\
& - \frac{1}{2}u_3v_1^2v'_2(p_1^2)^3(p_3^2)^2 + \frac{1}{2}u_1u_2^2v_1^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 + \frac{1}{2}u_2u_3v_1^2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 + (G_{000}^0u_3v_1(p_2^2)^3(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) \\
& + (G_{000}^0u_1u_2v_1(p_2^2)^3(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) + \frac{1}{2}u_1u_2v_1^2v'_2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 + \frac{1}{2}u_3v_1^2v'_2(p_2^2)^3(p_3^2)^2 \\
& - C_{101}^2v_1^2(v'_2)^2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2 + (G_{000}^0u_2u_3(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 + (G_{000}^0u_2^2v_1(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) \\
& + (G_{000}^0u_1u_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) + \frac{1}{2}u_2^2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2 + \frac{1}{2}u_1u_2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2 \\
& + (G_{000}^0u_3v_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 + u_1u_2^2v_1v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2 + u_2u_3v_1v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2 \\
& + (G_{000}^0u_1v_1v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) - (G_{000}^0u_2^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0u_2u_3v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2v_1) - (G_{000}^0u_1u_2^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2v_1) \\
& + (G_{000}^0u_1u_2^2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 + C_{101}^2v_1^2(v'_2)^2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2 \\
& - (G_{000}^0u_2u_3(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 - (G_{000}^0u_2^2v_1(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) \\
& - (G_{000}^0u_1u_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) - \frac{1}{2}u_2^2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2 - \frac{1}{2}u_1u_2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2 \\
& - (G_{000}^0u_3v_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 - u_1u_2^2v_1v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2 - u_2u_3v_1v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2 \\
& - (G_{000}^0u_1v_1v'_2(p_1^2)(p_2^2)^2(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2) + (G_{000}^0u_2^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 \\
& + (G_{000}^0u_2u_3v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2v_1) + (G_{000}^0u_1u_2^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2)/(2\tilde{u}'_2v_1) \\
& - (G_{000}^0u_1u_2^2(p_1^2)(p_2^2)(p_3^2)^2)/\tilde{u}'_2 - \frac{1}{2}u_1u'_2\tilde{u}'_2v_1^2(p_1^2)^4(p_2^2) - \frac{1}{2}u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1^2(p_1^2)^4(p_2^2) \\
& + C_{200}^2\tilde{u}'_2v_1(v'_2)^2(p_1^2)^4(p_2^2) - u_1u_2u'_2\tilde{u}'_2v_1(p_1^2)^4(p_2^2) - u'_2\tilde{u}'_2u_3v_1(p_1^2)^4(p_2^2) \\
& + C_{200}^2\tilde{u}'_2v_1^2v'_2(p_1^2)^4(p_2^2) + C_{100}^2\tilde{u}'_2v_1v'_2(p_1^2)^4(p_2^2) + (G_{000}^0u_2u'_2v'_2(p_1^2)^4(p_2^2))/(2v_1) \\
& - \frac{1}{2}u_1u_2u'_2v_1^2(p_1^2)^4(p_2^2) - \frac{1}{2}u_1u_2\tilde{u}'_2v_1(p_1^2)^4(p_2^2) - \frac{1}{2}u'_2u_3v_1^2(p_1^2)^4(p_2^2) - \frac{1}{2}\tilde{u}'_2u_3v_1^2(p_1^2)^4(p_2^2) \\
& + \frac{1}{2}u_1u_2u'_2v_1^2(p_2^2)^4(p_3^2) + \frac{1}{2}u_1u_2\tilde{u}'_2v_1^2(p_2^2)^4(p_3^2) + \frac{1}{2}u'_2u_3v_1^2(p_2^2)^4(p_3^2) + \frac{1}{2}\tilde{u}'_2u_3v_1^2(p_2^2)^4(p_3^2) \\
& + \frac{1}{2}u_2^2u'_2v_1^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + \frac{1}{2}u_1u_2u'_2v_1^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + \frac{1}{2}u_2^2\tilde{u}'_2v_1^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& + \frac{1}{2}u_1u_2\tilde{u}'_2v_1^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) - C_{200}^2v_1^2(v'_2)^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) - C_{100}^2v_1(v'_2)^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& - C_{101}^2\tilde{u}'_2v_1(v'_2)^2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + G_{000}^0u_1u_2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + G_{000}^0u_3(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& + (G_{000}^0u'_2u_3(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2))/\tilde{u}'_2 + \frac{1}{2}G_{000}^0u_1v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + \frac{1}{2}G_{000}^0u_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& + u_1u_2^2u'_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + u_1u_2^2\tilde{u}'_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + u_2u'_2u_3v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& + u_2\tilde{u}'_2u_3v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + (G_{000}^0u_1u'_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2))/(2\tilde{u}'_2) \\
& + (G_{000}^0u_2u'_2v_1(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2))/(2\tilde{u}'_2) - C_{100}^2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + \frac{1}{2}u_1u'_2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& + \frac{1}{2}u_2u'_2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) - C_{101}^2\tilde{u}'_2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2) + \frac{1}{2}u_1\tilde{u}'_2v_1^2v'_2(p_1^2)(p_2^2)^3(p_3^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} u_2 \bar{u}_2 v_1' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - G_{000}^0 u_2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) + u_1 u_2 u_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + u_1 u_2 \bar{u}_2 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) + u_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) + \bar{u}_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - (G_{000}^0 u_2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \bar{u}_2' - (G_{000}^0 u_2^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \bar{u}_2' v_1) + (G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \bar{u}_2' \\
& - \frac{1}{2} u_2^2 u_2' v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 u_2 u_2' v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2^2 \bar{u}_2' v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_1 u_2 \bar{u}_2' v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) + C_{200}^2 v_1^2 (v_2')^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) + C_{100}^2 v_1 (v_2')^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + C_{101}^2 \bar{u}_2' v_1 (v_2')^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - G_{000}^0 u_1 u_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - G_{000}^0 u_3 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - (G_{000}^0 u_2' u_3 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \bar{u}_2' - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_1 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} G_{000}^0 u_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - u_1 u_2^2 u_2' v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - u_1 u_2^2 \bar{u}_2' v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - u_2 u_2' u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - u_2 \bar{u}_2' u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - (G_{000}^0 u_1 u_2' v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \bar{u}_2') - (G_{000}^0 u_2 u_2' v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \bar{u}_2') \\
& + C_{100}^2 v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 u_2' v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 u_2' v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + C_{101}^2 \bar{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 \bar{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 \bar{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + G_{000}^0 u_2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - u_1 u_2 u_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - u_1 u_2 \bar{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - u_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) - \bar{u}_2' u_3 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2) + (G_{000}^0 u_2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \bar{u}_2' \\
& + (G_{000}^0 u_2^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) + (G_{000}^0 u_1 u_2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2^2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \bar{u}_2' v_1) + (G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \bar{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2 u_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \bar{u}_2' \Big) \Lambda^{10} \\
& + \Big( - C_{200}^2 \bar{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^5 - C_{200}^2 \bar{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 + \frac{1}{2} u_2' \bar{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 - C_{200}^2 \bar{u}_2' (v_2')^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 \\
& + \frac{1}{2} u_1 u_2 u_2' \bar{u}_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 + \frac{1}{2} u_2' \bar{u}_2' u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 - C_{100}^2 \bar{u}_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 + u_1 u_2' \bar{u}_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 \\
& + u_2 u_2' \bar{u}_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 - C_{100}^2 \bar{u}_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 - \frac{1}{2} u_2 u_2' \bar{u}_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 - 2 C_{200}^2 \bar{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^4 \\
& - (G_{000}^0 u_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^4) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2 u_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^4) / (2 v_1) + C_{200}^2 \bar{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 \\
& - \frac{1}{2} u_2' \bar{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 + C_{200}^2 \bar{u}_2' (v_2')^2 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 u_2 u_2' \bar{u}_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 - \frac{1}{2} u_2' \bar{u}_2' u_3 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 \\
& + C_{100}^2 \bar{u}_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 - u_1 u_2' \bar{u}_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 - u_2 u_2' \bar{u}_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 + C_{100}^2 \bar{u}_2' v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 \\
& + \frac{1}{2} u_2 u_2' \bar{u}_2' v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 + 2 C_{200}^2 \bar{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^2 + (G_{000}^0 u_2' v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^2) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2 u_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^2) / (2 v_1) - \frac{1}{2} u_1 u_2 v_1^2 (p_1^2)^4 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_3 v_1^2 (p_1^2)^4 (p_3^2)^2 \\
& + \frac{1}{2} u_1 u_2 v_1^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_3 v_1^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_2^2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_1 u_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& - C_{101}^2 v_1 (v_2')^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + (G_{000}^0 u_3 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \bar{u}_2' + u_1 u_2^2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& + u_2 u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + (G_{000}^0 u_1 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \bar{u}_2') + (G_{000}^0 u_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \bar{u}_2') \\
& - C_{101}^2 v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_1 v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_2 v_1^2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_1 u_2 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + u_3 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - (G_{000}^0 u_2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0 u_2^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0 u_1 u_2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_1 u_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}'_2 - \frac{1}{2} u_2^2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 u_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& + C_{101}^2 v_1 (v'_2)^2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - (G_{000}^0 u_3 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}'_2 - u_1 u_2^2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& - u_2 u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - (G_{000}^0 u_1 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2) - (G_{000}^0 u_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2) \\
& + C_{101}^2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& - u_1 u_2 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - u_3 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + (G_{000}^0 u_2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}'_2 \\
& + (G_{000}^0 u_2^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) + (G_{000}^0 u_1 u_2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_1 u_2 (p_1^2) (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}'_2 + C_{200}^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 (p_1^2)^5 (p_2^2) + \frac{1}{2} u_1 u'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_1 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& - C_{200}^2 v_1 (v'_2)^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) + u_1 u_2 u'_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) + u_1 u_2 \tilde{u}'_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& + u_2^2 u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) + \tilde{u}'_2 u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) - C_{200}^2 v_1^2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) - C_{100}^2 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& - C_{101}^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2) - (G_{000}^0 u_2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2 u'_2 v'_2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& - C_{100}^2 v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - C_{101}^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (v'_2)^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - C_{100}^2 (v'_2)^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - C_{101}^2 \tilde{u}'_2 (v'_2)^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - C_{200}^2 v_1 (v'_2)^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + G_{000}^0 u_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 \tilde{u}'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2 u'_2 u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}'_2 u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} G_{000}^0 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + u_2^2 u'_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + u_1 u_2 u'_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + u_2^2 \tilde{u}'_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + u_1 u_2 \tilde{u}'_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + (G_{000}^0 u'_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2) \\
& - C_{200}^2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} u'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} \tilde{u}'_2 v_1^2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - G_{000}^0 v_1' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2^2 u'_2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2^2 \tilde{u}'_2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_2 u_3 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + \frac{1}{2} \tilde{u}'_2 u_3 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - C_{100}^2 v_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& + u_1 u'_2 v_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) - C_{101}^2 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) + u_1 \tilde{u}'_2 v_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2) \\
& - (G_{000}^0 u'_2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \tilde{u}'_2 - (G_{000}^0 u_1 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_1 u'_2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2 u'_2 v'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) + (G_{000}^0 u_1 u'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / \tilde{u}'_2 \\
& - (G_{000}^0 u_2^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) + (G_{000}^0 u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u'_2 u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) - (G_{000}^0 u_2^2 u'_2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& + C_{100}^2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 u'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{101}^2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}'_2 v_1^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{100}^2 (v'_2)^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{101}^2 \tilde{u}'_2 (v'_2)^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{200}^2 v_1 (v_2')^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - G_{000}^0 u_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_1 u_2^2 \tilde{u}_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 u_2' u_3 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}_2' u_3 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} G_{000}^0 v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_2^2 u_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_1 u_2 u_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - u_2^2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_1 u_2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - (G_{000}^0 u_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2') \\
& + C_{200}^2 v_1^2 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} \tilde{u}_2' v_1^2 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + G_{000}^0 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2^2 u_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2^2 \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_2' u_3 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} \tilde{u}_2' u_3 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{100}^2 v_1 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - u_1 u_2' v_1 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_1 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + (G_{000}^0 u_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / \tilde{u}_2' + (G_{000}^0 u_1 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2 v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) + (G_{000}^0 u_1 u_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2 u_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 u_1 u_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / \tilde{u}_2' \\
& + (G_{000}^0 u_2^2 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_3 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2' u_3 (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) + (G_{000}^0 u_2^2 u_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& - \frac{1}{2} u_1 u_2' v_1^2 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 u_2' v_1^2 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}_2' v_1^2 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) + C_{200}^2 v_1 (v_2')^2 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) - u_1 u_2 u_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) \\
& - u_1 u_2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) - u_2' u_3 v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) - \tilde{u}_2' u_3 v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) \\
& + C_{200}^2 v_1^2 v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) + C_{100}^2 v_1 v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) + C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_1 v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2) \\
& + (G_{000}^0 u_2 v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 v_1) + (G_{000}^0 u_2 u_2' v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \Big) \Lambda^8 \\
\\
& + \Big( - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^5 - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^5 - C_{100}^2 \tilde{u}_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 + \frac{1}{2} u_1 u_2' \tilde{u}_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 \\
& - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 + u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 - C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 - \frac{1}{2} u_2' \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^4 \\
& - (G_{000}^0 u_2' (p_1^2)^3 (p_2^2)^4) / (2 v_1) + C_{100}^2 \tilde{u}_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 - \frac{1}{2} u_1 u_2' \tilde{u}_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 + C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 \\
& - u_2' \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 + C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 + \frac{1}{2} u_2' \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^3 + (G_{000}^0 u_2' (p_1^2)^4 (p_2^2)^3) / (2 v_1) \\
& + C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_1 (p_1^2)^5 (p_2^2)^2 + C_{200}^2 \tilde{u}_2' v_2' (p_1^2)^5 (p_2^2)^2 + \frac{1}{2} u_1 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_2 v_1^2 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 \\
& + u_1 u_2 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 + u_3 v_1 (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 - C_{101}^2 v_1 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)^2 \\
& - (G_{000}^0 u_2 v_2' (p_1^2) (p_2^2)^4 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - C_{101}^2 v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& + \frac{1}{2} u_2 v_1^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - C_{101}^2 (v_2')^2 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_2 u_3 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 \\
& + u_2^2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + u_1 u_2 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + (G_{000}^0 v_1 (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2') \\
& - \frac{1}{2} u_2^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} v_1^2 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_3 v_2' (p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_{101}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 + u_1 v_1 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2 - (G_{000}^0 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}_2' \\
& - (G_{000}^0 u_1 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 u_2 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / \tilde{u}_2' + (G_{000}^0 u_3(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2^2(p_1^2)^2 (p_2^2)^3 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - \frac{1}{2} u_1 u_2^2(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 + C_{101}^2 v_1^2(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 \\
& - \frac{1}{2} u_2 v_1^2(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 + C_{101}^2 (v_2')^2(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_2 u_3(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 \\
& - u_2^2 v_1(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 - u_1 u_2 v_1(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 - (G_{000}^0 v_1(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2') \\
& + \frac{1}{2} u_2^2 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} v_1^2 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_3 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 \\
& + C_{101}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 - u_1 v_1 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2 + (G_{000}^0 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / \tilde{u}_2' \\
& + (G_{000}^0 u_1 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) + (G_{000}^0 u_2 v_2'(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_1(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / \tilde{u}_2' - (G_{000}^0 u_3(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2^2(p_1^2)^3 (p_2^2)^2 (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - \frac{1}{2} u_1 v_1^2(p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_2 v_1^2(p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)^2 \\
& - u_1 u_2 v_1(p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)^2 - u_3 v_1(p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)^2 + C_{101}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)^2 \\
& + (G_{000}^0 u_2 v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2) (p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - C_{200}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^5 (p_3^2) - C_{200}^2 v_1^2(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_2' v_1^2(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + \frac{1}{2} \tilde{u}_2' v_1^2(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) - C_{200}^2 (v_2')^2(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_1 u_2 u_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_1 u_2 \tilde{u}_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2' u_3(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} \tilde{u}_2' u_3(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) - C_{100}^2 v_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + u_1 u_2' v_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + u_2 u_2' v_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& - C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + u_1 \tilde{u}_2' v_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) + u_2 \tilde{u}_2' v_1(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& - C_{100}^2 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2 u_2' v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) - C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}_2' v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) - 2 C_{200}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2) - (G_{000}^0 v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2' v_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) - (G_{000}^0 u_2(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2 u_2'(p_1^2)^2 (p_2^2)^4 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) + C_{200}^2 v_1^2(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2' v_1^2(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} \tilde{u}_2' v_1^2(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{200}^2 (v_2')^2(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 u_2 u_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_1 u_2 \tilde{u}_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} u_2' u_3(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - \frac{1}{2} \tilde{u}_2' u_3(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + C_{100}^2 v_1(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_1 u_2' v_1(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_2 u_2' v_1(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_1(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_1 \tilde{u}_2' v_1(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) - u_2 \tilde{u}_2' v_1(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + C_{100}^2 v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) + \frac{1}{2} u_2 u_2' v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) + C_{101}^2 \tilde{u}_2' v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_2 \tilde{u}_2' v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) + 2 C_{200}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2) + (G_{000}^0 v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2' v_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) + (G_{000}^0 u_2(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2 u_2'(p_1^2)^4 (p_2^2)^2 (p_3^2)) / (2 \tilde{u}_2' v_1) + C_{200}^2 v_1 v_2'(p_1^2)^5 (p_2^2) (p_3^2) \Big) \Lambda^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -C_{200}^2 \tilde{u}'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^5 + C_{200}^2 \tilde{u}'_2(p_1^2)^5(p_2^2)^3 + \frac{1}{2} v_1^2(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_1 u_2(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 \right. \\
& + \frac{1}{2} u_3(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 - C_{101}^2 v_1(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 + u_1 v_1(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 + u_2 v_1(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 \\
& - C_{101}^2 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_2 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2 - (G_{000}^0 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& - (G_{000}^0 u_2(p_1^2)^2(p_2^2)^4(p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) - \frac{1}{2} v_1^2(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 u_2(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 \\
& - \frac{1}{2} u_3(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 + C_{101}^2 v_1(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 - u_1 v_1(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 - u_2 v_1(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 \\
& + C_{101}^2 v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_2 v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2 + (G_{000}^0 v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& + (G_{000}^0 u_2(p_1^2)^4(p_2^2)^2(p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) - C_{200}^2 v_1(p_1^2)^2(p_2^2)^5(p_3^2) - C_{200}^2 v_2'(p_1^2)^2(p_2^2)^5(p_3^2) \\
& - C_{100}^2 (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) + \frac{1}{2} u_1 u_2'(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) - C_{101}^2 \tilde{u}'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} u_1 \tilde{u}'_2(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) - C_{200}^2 v_1(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) + u_2' v_1(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) + \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) \\
& - C_{200}^2 v_2'(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) - \frac{1}{2} u_2' v_2'(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) - \frac{1}{2} \tilde{u}'_2 v_2'(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2) \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)) / (2 v_1) - (G_{000}^0 u_2'(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) + C_{100}^2 (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& - \frac{1}{2} u_1 u_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) + C_{101}^2 \tilde{u}'_2(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) - \frac{1}{2} u_1 \tilde{u}'_2(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) + C_{200}^2 v_1(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& - u_2' v_1(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) - \tilde{u}'_2 v_1(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) + C_{200}^2 v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) + \frac{1}{2} u_2' v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) \\
& + \frac{1}{2} \tilde{u}'_2 v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2) + (G_{000}^0 (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)) / (2 v_1) + (G_{000}^0 u_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& \left. + C_{200}^2 v_1(p_1^2)^5(p_2^2)^2(p_3^2) + C_{200}^2 v_2'(p_1^2)^5(p_2^2)^2(p_3^2) \right) \Lambda^4 \\
& + \left( -C_{101}^2 (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)^2 + \frac{1}{2} u_1 (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)^2 + v_1 (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)^2 - \frac{1}{2} v_2'(p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)^2 \right. \\
& - (G_{000}^0 (p_1^2)^3(p_2^2)^4(p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) + C_{101}^2 (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)^2 - \frac{1}{2} u_1 (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)^2 \\
& - v_1 (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)^2 + \frac{1}{2} v_2'(p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)^2 + (G_{000}^0 (p_1^2)^4(p_2^2)^3(p_3^2)^2) / (2 \tilde{u}'_2 v_1) \\
& \left. - C_{200}^2 (p_1^2)^3(p_2^2)^5(p_3^2) + C_{200}^2 (p_1^2)^5(p_2^2)^3(p_3^2) \right) \Lambda^2
\end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [AS 72] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, 9th edition*, Dover Publications, inc., New York (1972)
- [BBJ 81] P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, Teubner Verlag, Stuttgart (1981)
- [BC 80] J.S. Ball, T.-W. Chiu, *Analytic properties of the vertex function in gauge theories*, Phys. Rev. D22 (1980) 2542 bzw. 2550
- [BD 65] J.D. Bjorken, S.S. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI Hochschultaschenbücher, McGraw-Hill, New York (1965)
- [Bel 91] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford University Press (1991)
- [Ber 68] J. Bernstein, *Elementray Particles and Their Currents*, Freeman and Company (1968)
- [BRS 74] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Phys. Letters 52 B (1974) 344; Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127
- [Col 85] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1985)
- [DFK 98] L. Driesen, J. Fromm, J. Kuhrs, M. Stingl, *Extended iterative scheme for QCD: three-point vertices*, Eur. Phys. J. A4 (1999) 381; MS-TPI-97-4; e-print archive: hep-th/9808152
- [Dri 97] L. Driesen, *Die Basisvertices der QCD und ihr Dyson-Schwinger Selbstkonsistenzproblem im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsreihe*, Dissertation WWU Münster (1997)
- [DS 98] L. Driesen, M. Stingl, *Extended iterative scheme for QCD: the four-gluon-vertex*, Eur. Phys. J. A4 (1999) 401; MS-TPI-98-19; e-print archive: hep-th/9808155
- [Fro 96] J. Fromm, *Dyson-Schwinger-Gleichung des Drei-Gluon-Vertex und Bestimmung des effektiven Gluon-Propagators einer erweiterten Störungstheorie der QCD*, Diplomarbeit an der WWU Münster (1996)

- [HKR 90] U. Häbel, R. Könning, H.-G. Reusch, M. Stingl, S. Wigard: *A Nonperturbative Solution to the Dyson-Schwinger-Equation of QCD*, Z. Physik A 336 (1990) 423 bzw. 435
- [IZ 80] C. Itzkson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980)
- [Kön 90] R. Könning, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Quark-Quark-Gluon-Vertex der Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1990)
- [Kug 97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer Verlag, Berlin (1997)
- [Kuh 97] J. Kuhrs, *Der Fermion-Sektor im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungsrechnung für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1997)
- [LSW 94] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz, U. Wolff, Nuclear Physics B 413 (1994) 481
- [MM 94] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [Mut 87] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics - An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific, Singapore (1987)
- [Nis 94] K. Nishijima, Int. J. Mod. Phys. A 9 (1994) 3799; 10 (1995) 3155
- [Nis 96] K. Nishijima, Int. J. Mod. Phys. A 11 (1996) 2281; Czech. J. Physics 46 (1996) 1
- [Pin 97] G. Pinter, *Behandlung des nichtlinaren  $\sigma$ -Modells mit Hilfe einer erweiterten Störungstheorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster (1997)
- [PS 95] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995)
- [PT 82] P. Pascual, R. Tarrach: *Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag, Cambridge University Press (1982)
- [Reu 89] H.-G. Reusch, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichungen der quarkfreien Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1989)
- [Riv 87] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- [Rom 69] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, inc., New York (1969)
- [Ryd 96] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory, 2nd edition*, Cambridge University Press (1996)
- [Sch 91] F. Scheid, *Numerische Analysis*, McGraw-Hill, New York (1991)

- [Shm 97] M. Schmelling, *Status of the Strong Coupling Constant*, e-print archive: hep-ex/9701002
- [Sla 72] A.A. Slavnov, *Ward Identities in Gauge Theories*, Theor. Math. Phys. 10 (1972) 99
- [Sme 98] L. v. Smekal, *Perspectives for Hadronic Physics from Dyson-Schwinger Equations for the Dynamics of Quark und Glue*, Habilitationsschrift an der FAU Erlangen-Nürnberg (1998)
- [SS 96] D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov, *Analytic QCD running coupling with finite IR behaviour and universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  value*, e-print archive: hep-ph/9604163
- [ST 71] A.A. Slavnov, Sov. J. Particles and Nuclei 5 (1975) 303; J.C. Taylor, Nucl. Phys. B33 (1971) 436
- [Ste 94] S. Sternberg, *Group theory and physics*, Cambridge University Press (1994)
- [Sti 96] M. Stingl, *A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics*, Z. Physik A 353 (1996) 423
- [Sti 99] M. Stingl, Unveröffentlichte Notizen zum 3-Gluon-Vertex
- [Str 96] A.F.-J. Streibl, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1996)
- [tHo 71] G. 't Hooft, *Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields*, Nuclear Phys. B 35 (1971) 167
- [tHo 72] G. 't Hooft, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Phys. B 44 (1972) 189
- [tHo 73] G. 't Hooft, Nuclear Phys. B 61 (1973) 455
- [Voi 99] J. Voigt, *Analytische Berechnung der hadronischen Vakuumpolarisation des Photons mit nicht-perturbativ erweiterten Feynman-Regeln für die Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1999)
- [Wig 89] S. Wigard, *Eine nicht-störungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Fermionpropagator Quantenchromodynamik*, Dissertation an der WWU Münster (1989)
- [Wil 69] K.G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Phys. Rev. 179 (1969) 1499
- [YM 54] C.N. Yang, R. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191
- [Zan 00] F. Zantow, *Der photonische Sektor in niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Kopplung im Rahmen einer systematisch erweiterten Störungstheorie für die Quantenchromodynamik*, Diplomarbeit an der WWU Münster (2000)



# Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während des Studiums und beim Erstellen dieser Arbeit beraten und unterstützt haben. Erwähnen möchte ich

- Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl für den interessanten Themenvorschlag und die hervorragende Betreuung, die sich durch die ständige Bereitschaft zu klärenden Diskussionen auszeichnete. Ich habe viel gelernt. Herrn Prof. Dr. Gernot Münster danke ich für die Übernahme des Koreferats.
- die Mitglieder der eigenen und der weiter gefaßten Arbeitsgruppe für die gute Arbeitsatmosphäre. Insbesondere bedanke ich mich bei Jörn Voigt für die Starthilfe im ersten halben Jahr und bei meinem Zimmerkollegen Felix Zantow für die fruchtbaren Gespräche über die Physik und viele andere Dinge.
- Tobias Galla, Eva Parthe, Ulrich von Poblotzki, Sven Staffeldt und Willy Wenning, die mir beim Korrekturlesen dieser Arbeit geholfen haben. Der sprachliche Teil dieser Arbeit hat durch Euch dazu gewonnen.
- die vielen Freunde aus Münster, die mir geholfen haben, mich jenseits der Physik zu zerstreuen. Namentlich nennen möchte ich Boris Marincel und Frank Thimm.

Mein größter Dank aber gilt meiner Anja für viele ermutigende Worte und meinen Eltern Christa und Willy für die gute Unterstützung und die ein oder andere Zuwendung während meines Studiums. Durch sie ist die Anfertigung dieser Arbeit überhaupt erst möglich geworden.



Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im März 2000







