

Markus Becker

Nichtperturbative
Strukturuntersuchung
der Quantenelektrodynamik
mittels genäherter
Schwinger-Dyson-Gleichungen
in dimensioneller Regularisierung

– 1995 –

– Theoretische Physik –

Nichtperturbative
Strukturuntersuchung
der Quantenelektrodynamik
mittels genäherter
Schwinger-Dyson-Gleichungen
in dimensioneller Regularisierung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Markus Becker
aus Oelde

– 1995 –

Dekan: Prof. Dr. F. -K. Holtmeier
Erster Gutachter: Prof. Dr. M. Stingl
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. G. Münster
Tag der mündlichen Prüfungen:
Tag der Promotion:

Like all other arts, the Science of Deduction and Analysis is one which can only be acquired by long and patient study, nor is life long enough to allow mortal to attain the highest possible perfection in it. Before turning to those moral and mental aspects of the matter which present the greatest difficulties, let the inquirer begin by mastering more elementary problems.

Sherlock Holmes, *A Study in Scarlet*
Sir Arthur Conan Doyle, 1887

Für Mirko

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Der Zugang zur QED mittels der Schwinger-Dyson-Gleichungen	5
1.1 Die funktionalen Grundgleichungen der QED	6
1.2 Die SDE's für die drei Basisvertices der QED	12
1.3 Näherungsverfahren für die SDE's	17
2 Definition der formalen SDE's in nichtperturbativer dimensioneller Regularisierung und Durchführung des Kontinuumslimes	24
2.1 Nichtperturbative dimensionelle Regularisierbarkeit der SDE's	25
2.1.1 Realisierung des kinematischen Teils der NPDR	26
2.1.2 Realisierung des dynamischen Teils der NPDR	30
2.2 Durchführung des Kontinuumslimes in NPDR	37
2.2.1 Der Kontinuumslimes in DR gemäß den perturbativen RG-Funktionen	39
2.2.2 Der Kontinuumslimes in NPDR am Beispiel eines echt nichtperturbativen Effekts	40
2.2.3 Die zentralen Fragestellungen zur Strukturuntersuchung der QED	43
3 Die Quenched-Rainbow-Näherung der SDE's in NPDR	45
3.1 Die SDE's der QRBA	46
3.2 Lösung der SDE im UV-Bereich	47
3.3 Summationsmethoden für die UV-Asymptotik	53
3.4 Lösung der SDE in der Bifurkationsnäherung	59
3.4.1 IRBN-I in NPDR	60
3.4.2 IRBN-II in NPDR	67
4 Die Rainbow-Näherung der SDE's in NPDR	71
4.1 Die SDE's der RBA	71
4.2 Die SDE's im UV-Bereich	75
4.3 Numerische Lösung der SDE's in NPDR	80
4.4 Der Kontinuumslimes gemäß der multiplikativen Renormierung	83
4.5 Untersuchungen zur D_x SB	93
5 Bemerkungen zu den SDE's für die Vertexfunktion	104

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	2
Zusammenfassung und Ausblick	112
A Die SD-Hierarchien für die Greenschen Funktionen der QED	115
A.1 Die SD-Z-Hierarchie	115
A.2 Die SD-W-Hierarchie	120
A.3 Die SD- Γ -Hierarchie	123
A.4 Die Bethe-Salpeter-Resummation der Vertexgleichung	127
B SDE's und die Ward-Takahashi-Identitäten der QED	130
B.1 Herleitung der WTI aus dem Funktionalintegral	130
B.2 Konsistenz der SDE's mit den WTI	135
B.3 Die WI und ihre Konsistenz mit den SDE's	137
B.4 Minimale Auswertung der WTI für reguläre Vertexfunktionen	140
C SDE's und die Eichkovarianzeigenschaften der QED	151
C.1 Herleitung der LKT aus dem Funktionalintegral	151
C.2 Konsistenz der SDE's mit den LKT	156
C.3 Eichkovariante Entkopplungs Näherungen der SDE's	158
D Die multiplikative Renormierung der SDE's	165
Literaturverzeichnis	173
Schlußwort	177

Einleitung

Für die Überprüfung der Konzepte der Quantenfeldtheorie (QFT) ist die QED von besonderer Bedeutung, da sie von denjenigen QFT, die den Anspruch erheben, einen Teil der Physik der Elementarteilchen zu beschreiben, den strukturell einfachsten Aufbau besitzt. Die für die nichtperturbative Kontinuums-QED₄ nach wie vor offene Existenzfrage zeigt, daß den Voraussagen der perturbativen QED, die bekanntlich zu den am besten überprüften der Theoretischen Physik zählen, ein noch unvollständiges Verständnis der nichtperturbativen QED gegenübersteht. Der Fortschritt in der Computertechnologie hat allerdings in den letzten Jahren die Durchführung einer detaillierten numerischen nichtperturbativen Strukturuntersuchung der QED₄, die auf Gitterrechnungen [GÖ 91] und genäherten SDE's [RA 91] beruht, ermöglicht. Danach scheint sich für die Kontinuums-QED₄ die zuerst von [LP 55] formulierte Trivialitätshypothese, wonach der Kontinuumslijmes zu einer Entkopplung von Boson- und Fermionfeld führt (Trivialität), zu bestätigen. Die gängige Deutung dieses Phänomens ist, daß die nichtperturbative QED₄ als eine Cut-Off-Theorie zur Beschreibung der Niederenergiephysik angesehen werden muß.

Aufgrund der Willkür, die grundsätzlich mit der Wahl eines Regularisierungsverfahrens verbunden ist, fällt es allerdings schwer zu akzeptieren, daß der Definitionsprozeß für die QED₄ auf dem Niveau der regularisierten Theorie endet, zumal die obengenannten Untersuchungen zeigen, daß die QED₄ nur im Schwachkopplungsbereich eine (annähernd) konsistente, d.h. (multiplikativ) renormierbare Cut-Off-Theorie darstellt. Die vollständige Beantwortung der Existenzfrage für die nichtperturbative Kontinuums-QED₄ impliziert auch die kritische Überprüfung der einzelnen Konzepte, die dem jeweiligen Definitionsversuch zugrundeliegen. Dazu zählen das Regularisierungsverfahren, die Art der Renormierung und die Vorschriften zur Durchführung bzw. Approximation des Kontinuumslijmes.

Wir unternehmen in dieser Arbeit den Versuch, die Aussagen über die Existenz und Struktur der Kontinuums-QED₄ auf ihre Unabhängigkeit vom verwendeten Regularisierungsverfahren zu testen. Dazu wählen wir den Zugang zur QED mittels der Schwinger-Dyson-Gleichungen (SDE's), für die es prinzipiell denkbar ist [ST 92], andere als das herkömmlicherweise für nichtperturbative Untersuchungen verwendete Gitter- bzw. Impuls-Cut-Off-Regularisierungsverfahren zu verwenden. Es ist ein Hauptanliegen dieser Arbeit, Argumente und explizite Beispiele dafür beizubringen, daß sich speziell das dimensionelle Regularisierungsverfahren, das mit den wesentlichen Strukturmerkmalen der QED, z.B. der Poincaré- und Eichkovarianz,

von vornherein verträglich ist, auf nichtperturbative Lösungsversuche der SDE's übertragen läßt. Dieser Umstand gründet sich wesentlich auf die Formulierung der Theorie in Form von dynamischen Grundgleichungen, die Loop-Integrale enthalten und stellt unserer Kenntnis nach ein Novum des SD-Zugangs dar.

Die Arbeit ist im einzelnen wie folgt gegliedert:

In Kapitel 1.1 problematisieren wir den nichtperturbativen SD-Zugang zur QED anhand einer Diskussion des Problems der Randbedingungen für die funktionalen SDE's, wonach diese nur bei Hinzunahme geeigneter Randbedingungen eindeutige nichtperturbative Lösungen besitzen, vgl. [R1 88] und [BE 89]. In Kapitel 1.2 referieren wir die als dynamische Grundgleichungen für diese Arbeit dienenden SDE's für die drei oberflächlich primitiv divergenten (Basis-) Vertices der QED. Die Herleitung und Diskussion der SD-Hierarchien für die verschiedenen Typen Greenscher Funktionen ist in Anhang A zusammengestellt. Als Grundlage für die Bewertung und Etablierung von Näherungsverfahren für die SD-Hierarchien ist in den Anhängen B-D die Diskussion von drei der wichtigsten Strukturmerkmale der QED, die Ward-Takahashi- bzw. Ward-Identitäten, die Eichkovarianzeigenschaften in Form der Landau-Khalatnikov-Transformationen und die störungstheoretische multiplikative Renormierbarkeit aus der Sicht der SDE's dargestellt. Näherungsverfahren, die diese Strukturmerkmale zumindest z.T. respektieren, stellen wir in Form von Ansätzen für die Vertexfunktion in Kapitel 1.3 und in Form einer Näherung für eine der SDE's der Vertexfunktion, die auf einer regulären Auswertung der Ward-Takahashi-Identität des Bethe-Salpeter-Kerns beruht, in dem abschließenden Kapitel 5 dieser Arbeit vor.

Unabhängig von speziellen Näherungen für die SDE's der drei Basisvertices zeigen wir in Kapitel 2.1, daß die UV-asymptotische Freiheit der $\text{QED}_{D<4}$, die wir anhand einer Renormierungsgruppenanalyse studieren, dazu verwendet werden kann, auch den nichtperturbativen Gehalt der formalen SDE's auf der Basis der Wilsonschen Axiome der dimensionellen Regularisierung zu definieren. Das Kapitel 2.2 enthält eine Gegenüberstellung der Vorschriften, die in nichtperturbativer dimensioneller Regularisierung bzw. einer Cut-Off-Regularisierung die Durchführung des Kontinuumslimes bestimmen.

Konkrete nichtperturbative Strukturuntersuchungen der QED in dimensioneller Regularisierung führen wir im Rahmen von Entkopplungsnäherungen für die SDE's, die das Problem der Randbedingungen weitgehend zu umgehen gestatten, durch. Dazu betrachten wir in Kapitel 3/4 die Quenched-Rainbow- und die Rainbow-Approximation, die bereits ausführlich im Rahmen einer Cut-Off-Regularisierung betrachtet worden sind, so daß am Beispiel dieser Näherung die Unabhängigkeit der Strukturuntersuchungen vom verwendeten Regularisierungsverfahren explizit überprüft werden kann. Die numerischen und analytischen Lösungsversuche dieser beiden Näherungen erlauben es, in nichtperturbativer dimensioneller Regularisierung für die QED die Trivialitätsfrage und – als Beispiel für einen rein nichtperturbativen Effekt – die dynamische chirale Symmetriebrechung zu studieren.

Kapitel 1

Der Zugang zur QED mittels der Schwinger- Dyson-Gleichungen

Wir betrachten die reine QED_D , formuliert in

$$D = 4 - 2\varepsilon \quad (1.1)$$

raumzeitlichen Dimensionen. In den nackten Feldern $\Psi(x)$, $A^\mu(x)$ und Parametern g, m, ξ ausgedrückt lautet die Lagrangedichte mit lorentzkovariantem Eichfixierungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}_D}(x) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \\ &+ \bar{\Psi}(x)\left[i\gamma_\mu\vec{\partial}^\mu - m\mathbf{1}\right]\Psi(x) \\ &- g\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) \\ F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Das zugehörige Wirkungsfunktional lässt sich durch partielle Integration auf die Gestalt

$$\begin{aligned} S_{\text{QED}_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}] &= \int d^Dx \mathcal{L}_{\text{QED}_D}(x) \\ &= -i\left\{ \int d^Dx \int d^Dy \left[A_\mu(x)\frac{1}{2}\Gamma_{0,2}^{(0),\mu\nu}(x,y)A_\nu(y) + \bar{\Psi}(x)\Gamma_{2,0}^{(0)}(x,y)\Psi(y) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int d^Dx \int d^Dy \int d^Dz \bar{\Psi}(x)\Gamma_{2,1}^{(0),\mu}(x,y,z)\Psi(y)A_\mu(z) \right\} \\ &= S_{\text{QED}_D}^0 + S_{\text{QED}_D}^I \end{aligned} \quad (1.3)$$

bringen. Die drei Integralkerne können mit eigentlichen Vertices in nullter Ordnung Störungsrechnung identifiziert werden¹

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,2}^{(0),\mu\nu}(x,y) &= -i\delta^D(x-y)\left[-g^{\mu\nu}\square_y + (1-\frac{1}{\xi})\partial_y^\mu\partial_y^\nu\right] \\ \Gamma_{2,0}^{(0)}(x,y) &= -i\delta^D(x-y)\left[-i\gamma_\mu\vec{\partial}_y^\mu + m\mathbf{1}\right] \\ \Gamma_{2,1}^{(0),\mu}(x,y,z) &= -i\delta^D(x-y)\delta^D(y-z)g\gamma^\mu.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Wie durch die Schreibweise für die Lorentzindices bereits angedeutet gehen wir für formale Umformungen zunächst von einer Formulierung der Theorie in der physikalischen Minkowskimetrik aus.

1.1 Die funktionalen Grundgleichungen der QED

Im Vergleich zum Operatorformalismus, der nichtlineare Feldgleichungen für operatorwertige Felder postuliert, besteht der funktionale Zugang zur QED in einer Charakterisierung der Theorie durch zahlenwertige Amplituden, d.h. der Angabe einer definierenden Gleichung für das normierte erzeugende Funktional (EZF) $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$, das gemäß

$$\begin{aligned}G_{2k,l}^{\mu_1\cdots\mu_l}(x_1, \dots, x_k; z_1, \dots, z_l; y_1, \dots, y_k) \\ = \frac{(-i)^{2k+l}\delta^{2k+l}Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}(x_1)\cdots\delta\bar{\eta}(x_k)\delta J_{\mu_1}(z_1)\cdots\delta J_{\mu_l}(z_l)\delta(\eta(y_1))\delta(\eta(y_k))}\Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0}\end{aligned}$$

die Gesamtheit der gewöhnlichen Greenschen Funktionen der QED, aus denen sich die Feldoperatoren und der physikalische Hilbertraum rekonstruieren lassen, erzeugt. Der funktionale Zugang kann auf der Basis einer funktional-integralen oder einer funktional-differentiellen Grundgleichung für das EZF Z formuliert werden.

Der funktional-integrale Zugang

Die kompakteste, manifest lorentzkovariante Fassung der QED stellt die funktional-integrale Darstellung für das normierte EZF Z dar

$$\begin{aligned}Z[J, \eta, \bar{\eta}] &= \frac{I[J, \eta, \bar{\eta}]}{I[0, 0, 0]} \\ I[J, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi})e^{i\{S_{\text{QED}}[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^Dx[A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta]\}}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Die störungstheoretische Auswertung des Funktionalintegrals erfordert neben der Berechnung des Gaußschen Funktionalintegrals der freien QED, das durch die beiden Propagatoren nullter Ordnung

$$\begin{aligned}\left[i\gamma_\mu\vec{\partial}_x^\mu - m\mathbf{1}\right]G_{2,0}^{(0)}(x-y) &= i\delta^D(x-y) \\ \left[g^\mu_\varrho\square_x - (1-\frac{1}{\xi})\partial_x^\mu\partial_{x,\varrho}\right]G_{0,2}^{(0),\varrho\nu}(x-y) &= ig^{\mu\nu}\delta^D(x-y)\end{aligned}\quad (1.6)$$

¹Den Ordnungsbegriff verwenden wir in Bezug auf die Loop- und nicht die Kopplungsordnung.

definiert ist

$$\begin{aligned} I^{(0)}[J, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) e^{i \left\{ S_{QED_D}^0[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^D x [A_\mu J^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta] \right\}} \\ &= e^{- \int d^D x \int d^D y \left[\bar{\eta}(x) G_{2,0}^{(0)}(x,y) \eta(y) + J_\mu(x) \frac{1}{2} G_{0,2}^{(0),\mu\nu}(x,y) J_\nu(y) \right]}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

lediglich die funktionale Ableitung dieser Größe

$$\begin{aligned} I[J, \eta, \bar{\eta}] &= e^{i S_{QED_D}^I[\frac{-i\delta}{\delta J^\mu}, \frac{-i\delta}{\delta \eta}, \frac{-i\delta}{\delta(-\eta)}]} I^{(0)}[J, \eta, \bar{\eta}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \left(\int d^D x \gamma_\mu \frac{(-i)^3 \delta^3}{\delta \bar{\eta}(x) \delta J_\mu(x) \delta(-\eta(x))} \right)^n I^{(0)}[J, \eta, \bar{\eta}]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die große Bedeutung des funktional-integralen Zugangs liegt in der Hoffnung begründet, daß sich die QED₄ auch nichtperturbativ durch die formale aber geschlossene Funktionalintegraldarstellung (1.5) für das EZF definieren läßt. Dazu wird heute üblicherweise von der Funktionalintegraldarstellung für das euklidische EZF auf einem endlichen und diskreten raumzeitlichen Gitter ausgegangen. Die Wahl der euklidischen Metrik ist insofern zweckmäßig, als sie die Definition des euklidischen Funktionalintegrals wesentlich vereinfacht. Andererseits sind aus der Axiomatischen QFT nur hinreichende Bedingungen dafür bekannt, daß der Lösung der euklidischen QFT durch eine im Ortsraum durchzuführende analytische Fortsetzung eine physikalisch sinnvolle QFT in der minkowskischen Metrik zugeordnet werden kann [GJ 87]. Es ist prinzipiell möglich, daß diese Bedingungen von einer nichtperturbativen Lösung der euklidischen QFT nicht erfüllt werden. In diesem Fall kann die analytische Fortsetzung nicht dazu verwendet werden, die Lösung der euklidischen QFT mit der (als unabhängig von diesem Vorgang als existent angenommenen) Lösung der minkowskischen QFT in Beziehung zu setzen und die Wahl der Metrik, in der die Ausgangsgleichungen formuliert werden, muß deshalb als *Teil der Definition* der Theorie angesehen werden.² Um den nach unserer Kenntnis zumindest aus der Sicht der SDE's ungeklärten Zusammenhang zwischen dem nichtperturbativen Gehalt einer minkowskischen und einer euklidischen Formulierung einer QFT zum Ausdruck zu bringen, formulieren wir in dieser Arbeit die Grundgleichungen und formale Umformungen in der minkowskischen Metrik und folgen erst bei konkreten Lösungsversuchen der Euklidischen Strategie, d.h. führen die naive Wick-Rotation

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} &\rightarrow \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \\ p \cdot k, \dots &\rightarrow -(p \cdot k)_E, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

²Für einen SD-Zugang wiegt dieser Umstand umso schwerer, als auf genäherten SDE's beruhende nichtperturbative Untersuchungen der Impulssingularitätsstruktur des Fermionpropagators [AB 79] auf (von der Eichkopplung abhängige) komplexe Verzweigungspunkte geführt haben, so daß zumindest die Wickrotation, als Übergang von einer euklidischen zu einer minkowskischen Formulierung, nicht naiv aus der Störungsrechnung übernommen werden kann. Vgl. hierzu auch die Untersuchung [RWK 92] von Modellpropagatoren in der QCD.

durch.

Für einen nichtperturbativen, funktional-integralen Zugang scheint nach heutiger Kenntnis das einzige praktikable Regularisierungsverfahren in einer Gitterregularisierung zu bestehen. Einerseits ermöglicht die Gitterregularisierung prinzipiell eine nichtperturbative Definition des Maßes des Funktionalintegrals, andererseits scheint sie aufgrund der gebrochenen Poincaré-Invarianz, des Problems der Behandlung fermionischer Freiheitsgrade und der gegenwärtig bei praktischen Berechnungen verwendeten geringen Anzahl von Gitterpunkten die wesentliche Beschränkung des funktional-integralen Zugangs auszumachen.

Der funktional-differentielle Zugang

Postulieren wir die Translationsinvarianz des Maßes in der Funktionalintegraldarstellung (1.5) für das EZF Z sowie die Vertauschbarkeit von funktionaler Integration und Differentiation, dann ergeben sich wie folgt die funktionalen SDE's für das EZF Z ³

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{-i}{I[0, 0, 0]} \left[\begin{array}{c} \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}(x)} \\ \frac{\delta}{\delta \Lambda(x)} \end{array} \right] \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) e^{i\{S_{\text{QED}_D}[A + \Lambda, \Psi + \varphi, \bar{\Psi} + \bar{\varphi}] + \dots\}} \Big|_{\varphi = \bar{\varphi} = \Lambda = 0} \\
&= \frac{-i}{I[0, 0, 0]} \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) \left[\begin{array}{c} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(x)} \\ \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \end{array} \right] e^{i\{S_{\text{QED}_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \dots\}} \\
&= \left\{ \left[\begin{array}{c} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(x)} \\ \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \end{array} \right] S_{\text{QED}_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}] \Big| \begin{array}{lcl} \Psi &\rightarrow& \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}} \\ \bar{\Psi} &\rightarrow& \frac{-i\delta}{\delta(-\eta)} \\ A_\mu &\rightarrow& \frac{-i\delta}{\delta J^\mu} \end{array} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\begin{array}{c} -\bar{\eta}(x) \\ \eta(x) \\ J^\mu(x) \end{array} \right] \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Ihre explizite Form ist

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[-i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m\mathbf{1} \right] \frac{-i\delta}{\delta(\eta(x))} - g\gamma_\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta(\eta(x)) \delta J_\mu(x)} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\eta}(x) \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \\
&\left\{ \left[i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m\mathbf{1} \right] \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} - g\gamma_\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta \bar{\eta}(x) \delta J_\mu(x)} \right.
\end{aligned}$$

³Da wir keinen Bezug auf die Gitterregularisierung nehmen möchten, machen wir an dieser Stelle die starke Annahme der Existenz des dimensionell regularisierten (euklidischen) Funktionalintegrals.

$$\begin{aligned}
& + \eta(x) \left. \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 \\
& \left. \begin{aligned}
& \left[g^{\mu\nu} \square - (1 - \frac{1}{\xi}) \vec{\partial}^\mu \vec{\partial}^\nu \right] \frac{-i\delta}{\delta J^\nu(x)} + g\gamma^\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta \bar{\eta}(x) \delta(\eta(x))} \\
& + J^\mu(x)
\end{aligned} \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Sie stellen eine funktional-differentielle Charakterisierung der QED in Form von drei linearen, homogenen, funktional-partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar.

Da der Übergang von einer integralen zu einer differentiellen Formulierung i.allg. mit dem Verlust von Randbedingungen verbunden ist, müssen die SDE's (1.11) um diese explizit ergänzt werden, sofern ihre Lösung mit der Funktionalintegraldarstellung (1.5) für das EZF Z identisch sein soll. Unserer Kenntnis nach ist in systematischer Art und Weise zum ersten Mal von [BE 89] im Zusammenhang mit auf den SDE's beruhenden Untersuchungen zur Starkkopplungs-Entwicklung für die $\varphi_{D=0}^4$ -Theorie darauf hingewiesen worden, daß die funktionalen SDE's i.allg. mehrere Lösungen besitzen und daß die kanonischen Randbedingungen für das EZF Z , d.h. die Normierungsbedingung und das Verschwinden der Einpunktfunction, i.allg. nicht ausreichen, um die spezielle Lösung dieser Gleichungen, die durch die Funktionalintegraldarstellung (1.5) gegeben ist, eindeutig festzulegen.⁴

In Form von einfachen Analogieschlüssen bzgl. der Verhältnisse in der $\varphi_{D=0}^4$ -Theorie untersuchen wir nachfolgend das Problem der Randbedingungen für die funktionalen SDE's (1.11) der QED. Betrachten wir diesbezüglich zunächst die Störungsrechnung. Fordern wir die Existenz einer Schwachkopplungsentwicklung

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \sum_{n=0}^{\infty} g^n Z^{(n)}[J, \eta, \bar{\eta}] \quad (1.12)$$

für das EZF, dann sind die funktionalen Entwicklungskoeffizienten $Z^{(n)}[J, \eta, \bar{\eta}]$ rekursiv durch die Lösung der folgenden inhomogenen funktionalen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left[-i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m \right] \frac{-i\delta}{\delta(-\eta(x))} + \bar{\eta}(x) \\
& \left[i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m \right] \frac{-i\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} + \eta(x) \\
& \left[g^{\mu\nu} \square - (1 - \frac{1}{\xi}) \vec{\partial}^\mu \vec{\partial}^\nu \right] \frac{-i\delta}{\delta J^\nu(x)} + J^\mu(x)
\end{aligned} \right\} Z^{(n+1)}[J, \eta, \bar{\eta}] = 0$$

⁴Für die φ^4 -Theorie reduziert sich die funktionale SDE für das EZF $Z[J]$ in null raumzeitlichen Dimensionen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung bzgl. der skalaren Quelle J und besitzt demnach drei Fundamentallösungen, von denen die spezielle Lösung, die durch das Funktionalintegral gegeben ist, durch die kanonischen Randbedingungen $Z[0] = 1$ und $Z'[0] = 0$ allein nicht ausgesondert werden kann. Dazu ist beispielsweise die Spezifikation des vollen Propagators, d.h. von $Z''[0]$, notwendig.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta(-\eta(x)) \delta J_\mu(x)} \\ \gamma_\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta \bar{\eta}(x) \delta J_\mu(x)} \\ \gamma^\mu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta(-\eta(x)) \delta \bar{\eta}(x)} \end{array} \right\} Z^{(n)}[J, \eta, \bar{\eta}] \quad (1.13)$$

gegeben, wobei für die Bestimmung der nullten Ordnung von $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$ die rechten Seiten dieser drei Gleichungen identisch null zu setzen sind. Zusammen mit den kanonischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} Z[0, 0, 0] &= 1 \\ \frac{\delta Z[0, 0, 0]}{\delta J_\mu(x)} &= \frac{\delta Z[0, 0, 0]}{\delta \eta(x)} = \frac{\delta Z[0, 0, 0]}{\delta \bar{\eta}(x)} = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

ist die Lösung dieser Rekursion eindeutig und identisch mit der auf der Basis der Funktionalintegraldarstellung (1.5) gewonnenen Schwachkopplungsentwicklung (1.8) für das EZF Z , d.h. die Formulierung der SDE's in der Form Gl.(1.11/1.14) ist ausreichend, um zumindest den perturbativen Gehalt des EZF Z eindeutig zu erzeugen, und deshalb eine darüberhinausgehende Nichteindeutigkeit der Lösung dieser Gleichungen ein *rein nichtperturbatives* Phänomen.⁵ Aus mathematischer Sicht ergibt sich die Eindeutigkeit der perturbativen Lösung der funktionalen SDE's durch die Umwandlung der Wechselwirkungssterme in Inhomogenitäten, was bzgl. der Ableitungsordnung reduzierte Differentialgleichungen zur Folge hat. Da die Wechselwirkungssterme die höchsten Ableitungsordnungen aufweisen, sind sie für die Festlegung der für die Eindeutigkeit der Lösung von Gl.(1.11) notwendigen Randbedingungen verantwortlich. In einem nichtperturbativen Zugang muß diesen Ableitungstermen voll Rechnung getragen werden und aufgrund der i.allg. großen Lösungsmannigfaltigkeit von partiellen Differentialgleichungen ist zu vermuten, daß die Randbedingungen (1.14) nicht ausreichen, um die Lösung der SDE's jenseits der Störungsrechnung eindeutig zu machen. Konkret läßt sich die Existenz mehrerer nichtperturbativer Lösungen der SDE's (1.11) auf zweierlei Art motivieren:

- Setzen wir die Lösung der SDE's (1.11) in Form einer funktionalen Laplacetransformierten

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int_{C_A} \int_{C_\Psi} \int_{C_{\bar{\Psi}}} \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) F[A, \Psi, \bar{\Psi}] e^{i \int d^D y [A_\mu J^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta]} \quad (1.15)$$

mit noch zu bestimmenden Integrationskonturen $C_A, C_\Psi, C_{\bar{\Psi}}$ an, dann folgt nach partieller Integration

$$0 = \int_{C_A} \int_{C_\Psi} \int_{C_{\bar{\Psi}}} \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) e^{i \int d^D y [A_\mu J^\mu + \dots]} \left\{ \right.$$

⁵[Ri 88] bemerkt hierzu, p.11: There is a general truth that under-determined equations do permit unique perturbation series. The resolution of this paradox lies in the fact that Feynman series need not converge...

Thus the indeterminacy of the SDE's will be translated into the non-unique summation of the perturbation series, in absence of any further information. That is, by choosing a perturbative solution we have displaced the problem of how to complement the SDE's in such a way that, for small coupling strength at least, the problem can usually be ignored.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c} \frac{\delta}{\delta \Psi(x)} \\ \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}(x)} \\ \frac{\delta}{\delta A_\mu} \end{array} \right] S_{QED_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}] - \left[\begin{array}{c} \frac{-i\delta}{\delta \Psi(x)} \\ \frac{-i\delta}{\delta \bar{\Psi}(x)} \\ \frac{-i\delta}{\delta A_\mu(x)} \end{array} \right] \Big\} F[A, \Psi, \bar{\Psi}] \\
& + \left[\begin{array}{c} \int_{C_A} \int_{C_{\bar{\Psi}}} \mathcal{D}(A, \bar{\Psi}) F[A, \Psi, \bar{\Psi}] e^{i \int d^D y [A_\mu J^\mu + \dots]} \Big|_{C_{\bar{\Psi}}} \\ \int_{C_A} \int_{C_{\bar{\Psi}}} \mathcal{D}(A, \Psi) F[A, \Psi, \bar{\Psi}] e^{i \int d^D y [A_\mu J^\mu + \dots]} \Big|_{C_{\bar{\Psi}}} \\ \int_{C_{\bar{\Psi}}} \int_{C_A} \mathcal{D}(\Psi, \bar{\Psi}) F[A, \Psi, \bar{\Psi}] e^{i \int d^D y [A_\mu J^\mu + \dots]} \Big|_{C_A} \end{array} \right]. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Die funktionalen SDE's (1.11) werden durch den Ansatz (1.15) gelöst, wenn wir

$$F[A, \Psi, \bar{\Psi}] = e^{i S_{QED_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}]} \quad (1.17)$$

setzen und die von der partiellen Integration stammenden Randterme durch die Wahl geeigneter Integrationskonturen zum Verschwinden bringen können. Innerhalb einer euklidischen Formulierung ist dies, die Positivität der Wirkung für betragsmäßig große reelle Felder vorausgesetzt, durch die Wahl der reellen Achse als gemeinsamer Integrationsweg für alle Felder möglich und rechtfertigt die Herleitung der SDE's aus der Annahme, daß das Funktionalintegral über eine Ableitung nach *irgendeinem* der Felder verschwindet. Die Lösung einer Differentialgleichung mittels Laplacetransformation führt i.allg. nicht auf alle linear unabhängigen Lösungen, so daß wir nur schließen können, daß sich die Mehrdeutigkeit in der Lösungsmannigfaltigkeit der funktionalen SDE's u.U. in der Wahl verschiedener Integrationskonturen in der Funktionalintegraldarstellung (1.15) für das EZF ausdrücken läßt.

- Die Untersuchung der SD-Z-Hierarchie in Anhang A zeigt, daß die Mehrdeutigkeiten in der Lösungsmannigfaltigkeit der SDE's (1.11) *mindestens* durch die beiden Propagatoren $G_{2,0}$ und $G_{0,2}$ zu parametrisieren sind, da diese zu den Startwerten für die aus den SDE's (1.11) folgenden Rekursionsbeziehungen für die funktionalen Taylorkoeffizienten des EZF Z gehören.

Es stellt sich die Frage, wie die vollständige Charakterisierung der Lösungsmannigfaltigkeit der funktionalen SDE's (1.11) vorgenommen werden kann und ob den neben der gewöhnlichen Funktionalintegraldarstellung (1.5) existierenden Lösungen physikalische Bedeutung zukommt. Im Hinblick auf den von uns angestrebten nichtperturbativen SD-Zugang wäre es wünschenswert, zumindest ein praktikables Kriterium, daß die Bestimmung einer eindeutigen Lösung der funktionalen SDE's sicherstellt, zu besitzen. Die folgenden beiden Beobachtungen legen es nahe, dieses Auswahlkriterium unter Bezugnahme auf das Verhalten der nichtperturbativen Lösungen der SDE's (1.11) für $g \rightarrow 0$ zu formulieren. Da die höchsten Ableitungsterme in den SDE's (1.11) mit den Wechselwirkungstermen verbunden sind, wird es einerseits Lösungen dieser Gleichungen geben, die von Randbedingungen leben, die sich in den Gleichungen zur Bestimmung der nullten Ordnung nicht aufprägen lassen, so daß es für diese Lösungen im Limes $g \rightarrow 0$ beim Festhal-

ten an diesen Randbedingungen zu Singularitäten kommt.⁶ Andererseits ist für die spezielle nichtperturbative Lösung der funktionalen SDE's (1.11), die durch die Funktionalintegraldarstellung (1.5) gegeben ist, zwar zu vermuten, daß sie die aus der Renormierungsgruppe bekannten, mit spontanen Massenskalen verknüpften Nichtanalytizitäten bzgl. der Eichkopplung besitzt, jedoch aufgrund der Existenz der formalen Schwachkopplungsentwicklung (1.8) keine Singularitäten aufweist, die einen Limes $g \rightarrow 0$ vereiteln. Insgesamt kommen wir zu der folgenden Klassifikation:

1. Wir unterteilen die Lösungsmenge der funktionalen SDE's (1.11) zunächst in diejenigen nichtperturbativen Lösungen, die eine (formale) Schwachkopplungsentwicklung besitzen, d.h. insbesondere für $g \rightarrow 0$ in die Lösung der wechselwirkungsfreien QED mit zugehörigem EZF (1.7) übergehen, und solche, für die dies nicht der Fall ist.⁷
2. Besteht die erste Klasse nur aus einer Lösung, dann ist diese mit dem Funktionalintegral Gl.(1.5) identisch. Gibt es mehrere Elemente in dieser Lösungsklasse, dann haben sie entweder verschiedene Schwachkopplungsentwicklungen oder sie unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Kopplungsabhängigkeit um Terme, die in eine Taylorreihe entwickelt identisch Null ergeben.

Um mit Gl.(1.15) von der Funktionalintegraldarstellung (1.5) linear unabhängige Lösungen, die keinen Limes für $g \rightarrow 0$ besitzen, zu erhalten, müssen die Integrationskonturen so gewählt werden, daß nach dem Herausziehen des Wechselwirkungsterms gemäß Gl.(1.8) die Existenz des Funktionalintegrals (1.15) verloren geht.

Die vollständige Lösung des Problems der Randbedingungen für die SDE's (1.11) geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, in der wir uns auf eine pragmatische Lösung dieses Problems beschränken müssen, indem wir einerseits nur Entkopplungsnäherungen für die SD-Hierarchien betrachten und zur Elimination der sich darin beispielsweise bei der dynamischen Fermionmassenerzeugung noch zeigenden Restmehrdeutigkeiten spezielle Auswahlkriterien aufprägen. Es erscheint uns jedoch eine weitergehende Untersuchung dieses Problems als lohnend.

1.2 Die SDE's für die drei Basisvertices der QED

Aus den funktionalen SDE's (1.11) für das EZF Z können durch funktionale Taylorentwicklung nach den Quellen dynamische Grundgleichungen für

⁶Für gewöhnliche Differentialgleichungen sind die durch das Verschwinden der höchsten Ableitungsordnungen bedingten Singularitäten in der Lösung ein bekanntes Phänomen und werden als boundary-layers bezeichnet, vgl. [Bo 78].

⁷[BE 89] vermutet, durch diesen Fall das Problem der Randbedingungen, zumindest für die $\varphi_{D=0}^4$ -Theorie bereits *vollständig* erfaßt zu haben, und verdeutlicht dies an einem einfachen Beispiel aus der Analysis: The first order equation $xy' + y = e^x$ has an infinite number of solutions $y = (e^x + c)/x$ parametrized by c . All of these solutions are singular at $x = 0$ except when $c = -1$. Thus, requiring that the solution have a Taylor expansion at $x = 0$ (this is like requiring that the Green's functions have weak coupling expansions) uniquely determines the solution.

die Greenschen Funktionen, die wir als SD-Z-Hierarchie bezeichnen, gewonnen werden. Die gewöhnlichen Greenschen Funktionen stellen einen zwar vollständigen aber redundanten Satz dynamischer Grundgrößen dar, da sie durch die elementareren zusammenhängenden Greenschen Funktionen

$$\begin{aligned} {}^c G_{2k,l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_k; z_1, \dots, z_l; y_1, \dots, y_k) = \\ \frac{(-i)^{2k+l-1} \delta^{2k+l} W[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}(x_1) \dots \delta \bar{\eta}(x_k) \delta J_{\mu_1}(z_1) \dots \delta J_{\mu_l}(z_l) \delta(-\eta(y_1)) \dots \delta(-\eta(y_k))} \Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} \end{aligned} \quad (1.18)$$

bzw. durch die eigentlichen, zusätzlich noch bzgl. voller Propagatoren amputierten und 1-Teilchen-irreduziblen (1PI) Greenschen Funktionen

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k,l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1, \dots, x_k; z_1, \dots, z_l; y_1, \dots, y_k) = \\ \frac{i \delta^{2k+l} \Gamma[V, \xi, \bar{\xi}]}{\delta \bar{\xi}(x_1) \dots \delta \bar{\xi}(x_k) \delta V_{\mu_1}(z_1) \dots \delta V_{\mu_l}(z_l) \delta(-\xi(y_1)) \dots \delta(-\xi(y_k))} \Big|_{V=\xi=\bar{\xi}=0} \end{aligned} \quad (1.19)$$

ausgedrückt werden können. Für die EZF

$$\begin{aligned} W[J, \eta, \bar{\eta}] &= -i \ln Z[J, \eta, \bar{\eta}] \\ \Gamma[V, \xi, \bar{\xi}] &= W[J, \eta, \bar{\eta}] - \int d^D x \{ J_\mu V^\mu + \bar{\eta} \xi + \bar{\xi} \eta \} \end{aligned} \quad (1.20)$$

ergeben sich aus den funktionalen SDE's (1.11) dynamische Grundgleichungen, aus denen sich durch funktionale Taylorentwicklung die SD-W- bzw. SD- Γ -Hierarchie für die Greenschen Funktionen (1.18/1.19) ableiten lässt. Die Umschreibung der dynamischen Grundgleichungen auf elementarere Größen wird aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen den EZF W , Γ und Z mit dem Verlust der Linearität bezahlt. Auf dem Niveau der eigentlichen Greenschen Funktionen kann aufgrund der (perturbativen) Divergenzstruktur der QED eine weitere Ausdünnung vorgenommen werden. In jeder (perturbativ) renormierbaren QFT ist eine *endliche* Subklasse der eigentlichen Greenschen Funktionen durch ihre Divergenzstruktur ausgezeichnet. Nach der Beziehung

$$\delta_{\tilde{\Gamma}}(n_F, n_A; p, \epsilon) = 4 - 2\epsilon - p\epsilon - (1 - \epsilon)n_A - \left(\frac{3}{2} - \epsilon\right)n_F \quad (1.21)$$

für den oberflächlichen Divergenzgrad $\delta_{\tilde{\Gamma}}$ einer nackten eigentlichen Impulsraumvertexfunktion $\tilde{\Gamma}_{n_F, n_A}$ mit n_F äußeren Fermion- und n_A äußeren Bosonbeinen in p -ter Ordnung Störungsrechnung sind dies in der QED_D:

- der Bosonpropagator $\tilde{\Gamma}_{0,2}^{\mu\nu}$

$$\delta_{\tilde{\Gamma}}(0, 2; p, \epsilon) = 2 - p\epsilon \quad (1.22)$$

- der Fermionpropagator $\tilde{\Gamma}_{2,0}$

$$\delta_{\tilde{\Gamma}}(2, 0; p, \epsilon) = 1 - p\epsilon \quad (1.23)$$

- der Wechselwirkungsvertex $\tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu$

$$\delta_{\tilde{\Gamma}}(2,1;p,\epsilon) = 0 - \varepsilon(p-1) \quad . \quad (1.24)$$

Der Divergenzgrad dieser drei oberflächlich primitiv divergenten Vertices, die wir nachfolgend als Basisvertices bezeichnen, stimmt in $D = 4$ mit ihrer kanonischen Impulsraummassendimension überein und es sind darüberhinaus genau diejenigen Vertices, die in Form ihrer nullten Ordnung bereits in der Wirkung enthalten sind⁸. Höhere, oberflächlich konvergente Greensche Funktionen besitzen eine Darstellung in Form einer unendlichen Skelettentwicklung nach den drei Basisvertices.

Wir geben nachfolgend die SDE's für die drei Basisvertices an und verweisen für ihre Herleitung, sowie eine ausführliche Diskussion der drei SD-Hierarchien auf Anhang A. Um in euklidischer Metrik auf rein reelle Vertices zu kommen, nehmen wir die Umskalierung

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) &= -\tilde{\Gamma}_{2,0}^{-1}(p) = i\tilde{S}(p) \\ {}^c\tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(k) &= -\tilde{\Gamma}_{0,2}^{-1,\mu\nu}(k) = i\tilde{D}(k) \\ \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p;k;\cdot) &\equiv -ig\tilde{V}^\mu(p;k;\cdot) \end{aligned} \quad (1.25)$$

vor. Die SDE's für die drei Basisvertices \tilde{S} , $\tilde{D}^{\mu\nu}$ und \tilde{V}^μ lauten

$$\tilde{S}^{-1}(p) = \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \tilde{\Sigma}(p)$$

$$(\overrightarrow{p})^{-1} = (\overrightarrow{p})^{-1} + g^2 \rightarrow \text{Diagram showing a loop with vertex } v \text{ and label } l.$$

$$\tilde{D}^{-1,\mu\nu}(k) = -k^2(t^{\mu\nu}(k) + \frac{1}{\xi}l^{\mu\nu}(k)) - g^2\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)$$
$$(\text{wavy line } k)^{-1} = (\text{wavy line } k)^{-1} - g^2 \text{ (loop with vertex } V \text{ and wavy line } k\text{)}$$

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu - g^2 \tilde{\Lambda}_{(1)}^\mu(p; k; \cdot)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1} \\
 \text{Diagram 2} \\
 \text{Diagram 3}
 \end{array}$$

⁸Der Dreibosonenvertex $\tilde{\Gamma}_{0,3}$ mit dem Divergenzgrad $\delta_{\tilde{\Gamma}}(0,3;p,\epsilon) = 1 - \epsilon(p-1)$ verschwindet aufgrund des Furry'schen Theorems, vgl. [JR 76]. Der Divergenzgrad des Vierbosonenvertex $\tilde{\Gamma}_{0,4}$, $\delta_{\tilde{\Gamma}}(0,4;p,\epsilon) = 2\epsilon - p\epsilon$ lässt sich aufgrund der von ihm zu erfüllenden Ward-Takahashi-Identität (dieser Vertex ist rein transversal bzgl. aller vier äußeren Bosonimpulse) um vier verringern und ist deshalb in $D = 4$ effektiv oberfl. konvergent.

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu - g^2 \tilde{\Lambda}_{(2)}^\mu(p; k; \cdot)$$

$$= \text{wavy line } k - g^2 \text{ wavy line } k \text{ loop diagram } , \quad (1.26)$$

mit den folgenden analytischen Ausdrücken für die Selbstenergien bzw. Vertexkorrekturen

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{D}_{\mu\nu}(p-l) \tilde{V}^\nu(l; p-l; \cdot) \\ \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{V}^\nu(l; k; \cdot) \tilde{S}(k+l) \\ \tilde{\Lambda}_{(1)}^\mu(p; k; \cdot) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}^\varrho(p; l-p; \cdot) \tilde{D}_{\varrho\sigma}(p-l) \tilde{S}(l) \\ &\times {}_{ss} \tilde{K}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p-l, k; \cdot) \\ \tilde{\Lambda}_{(2)}^\mu(p; k; \cdot) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}^\mu(l-k; k; \cdot) \tilde{S}(l) {}_{ss} \tilde{K}_{4,0}(p, l, k-l, \cdot) \\ &\times \tilde{S}(l-k) .\end{aligned} \quad (1.27)$$

Für ihre diagrammatische Darstellung haben wir die folgenden Graphenelemente für die vollen Basisvertices verwendet

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{\mu\nu}(k) &= \text{wavy line } k \\ \tilde{S}(p) &= \text{thin arrow } p \\ \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \text{vertex } V \text{ with momentum } p \text{ and wave vector } k .\end{aligned} \quad (1.28)$$

Im Vergleich hierzu stellen wir die nullten Ordnungen dieser Größen durch dünne Linien dar

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k) &= -\frac{1}{k^2} [t_{\mu\nu}(k) + \xi l_{\mu\nu}(k)] \\ &= \text{wavy line } k \\ \tilde{S}^{(0)}(p) &= (\not{p} - m)^{-1} \\ &= \text{thin arrow } p \\ \tilde{V}_\mu^{(0)} &= \gamma_\mu \\ &= \text{thin line with dot} .\end{aligned} \quad (1.29)$$

Das Graphenelement



bezeichnet den im s-Kanal mit erhaltenem Gesamtviererimpuls $p + k_1$ 1- Ψ - und 2- ΨA -PI Bethe-Salpeter-Kern ${}_{ss}\tilde{T}_{2,2} = -ig^2 {}_{ss}\tilde{K}_{2,2}$ und entsprechend bezeichnet



den im s-Kanal mit erhaltenem Gesamtviererimpuls $p_2 + q_1$ 1- A - und 2- $\Psi\bar{\Psi}$ -PI Bethe-Salpeter-Kern ${}_{ss}\tilde{T}_{4,0} = -ig^2 {}_{ss}\tilde{K}_{4,0}$. Diese beiden Kerne können nicht geschlossen, sondern nur in Form einer unendlichen Skelettgraphenentwicklung angegeben werden. Die niedrigsten Terme dieser Entwicklung lauten

(1.32)

Durch diese Entwicklung werden die beiden Bethe-Salpeter-Kerne zu einem Funktional der drei Basisvertices, das wegen der oberflächlichen Konvergenz der Loop-Integrale in Gl.(1.32) nur Divergenzen in Form von Selbstenergie- oder Vertexeinschüben aufweist, d.h. endlich ist, falls die drei Basisvertices endlich sind. Diese Beobachtung zeigt, daß mit den SDE's (1.26) eine Freilegung der Divergenzstruktur auf dem Niveau dynamischer Grundgleichungen

erreicht ist, die als Grundlage für den in Anhang D in groben Zügen skizzierten Beweis der störungstheoretischen multiplikativen Renormierbarkeit der QED mittels der SDE's herangezogen werden kann.

1.3 Näherungsverfahren für die SDE's

Von den drei Basisvertices ist die für Näherungsverfahren zentrale Größe die Vertexfunktion \tilde{V}^μ , da deren SDE's (1.26) die beiden 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kerne ${}_{ss}\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}$ und ${}_{ss}\tilde{K}_{4,0}^{\mu\nu}$, die nicht in geschlossener Form angegeben werden können, enthalten. Konkrete Näherungsverfahren für \tilde{V}^μ bestehen stets entweder

- in der Formulierung von Ansätzen für \tilde{V}^μ , die in die Propagatorgleichungen (1.26) eingesetzt auf ein geschlossenes Gleichungssystem zur Bestimmung von \tilde{S} und $\tilde{D}^{\mu\nu}$ führen, oder
- in einem Abschneideverfahren für die Skelettentwicklung (1.32) der beiden Bethe-Salpeter-Kerne.

Für diese beiden Methoden ergeben sich in natürlicher Weise Einschränkungen bzw. Bewertungskriterien, wenn wir bestrebt sind, die wesentlichen Strukturmerkmale der QED zu erhalten. In den Anhängen B-D haben wir dazu die Untersuchung von drei der wichtigsten Strukturmerkmale der QED, die Ward-Takahashi (WTI) bzw. Ward-Identitäten (WI), die Eichkovarianzeigenschaften in Form der Landau-Khalatnikov-Transformationen (LKT) und die störungstheoretische multiplikative Renormierbarkeit (STMR) aus der Sicht der SDE's zusammengestellt. Zur Einordnung der in dieser Arbeit für konkrete Lösungsversuche der SDE's gewählten Vertexnäherung, der sog. Rainbow-Approximation, referieren wir zunächst die derzeit am meisten diskutierten Vertexansätze. Die Diskussion von Näherungsverfahren für die SDE's (1.26) der Vertexfunktion ist Gegenstand des letzten Kapitels dieser Arbeit.

Überblick über die aktuellen Vertexansätze

Die Formulierung von Vertexansätzen stellt den Versuch dar, bereits wesentliche Strukturmerkmale der Vertexfunktion ohne das Lösen ihrer komplizierten SDE's (1.26) zu erfassen. Zur Wahrung der wichtigsten Strukturmerkmale der QED müssen die Vertexansätze den folgenden Einschränkungen genügen:

V1 Der Vertexansatz muß die WTI

$$k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) \quad (1.33)$$

erfüllen.

V2 Durch eine reguläre Auswertung der WTI, d.h. der Forderung, daß der Vertexansatz die WI

$$\tilde{V}^\mu(p; 0; \cdot) = \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} \quad (1.34)$$

erfüllen soll, wird nach Gl.(B.32) aus der Lösungsmannigfaltigkeit der SDE's die durch ein masseloses Photon gekennzeichnete und insbesondere in der Störungsrechnung realisierte Coulomb-Phase ausgewählt.

- V3 Aus der \mathcal{PC} -Invarianz der QED folgt für die Vertexfunktion das Transformationsgesetz [Sc 91]

$$\begin{aligned}\tilde{V}^\mu(p; k; -q) &= -\gamma^0 C \left\{ \tilde{V}(-\tilde{q}; \tilde{k}; \tilde{p}) \right\}_\mu^T C^{-1} \gamma^0 \\ C &= -C^{-1} = -C^T = i\gamma^2 \gamma^0 \\ \tilde{P} &= (p_0, -\vec{p}),\end{aligned}\tag{1.35}$$

das ihr Verhalten bei Vertauschung der beiden Fermionimpulse p, q bestimmt.

- V4 Die Eichkovarianz der QED verlangt bei Variation des Eichfixierungsparameters ξ die Änderung der nur bzgl. des Bosonbeins amputierten zusammenhängenden Dreipunktfunktion

$$\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}(p) \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) \tilde{S}(p + k)\tag{1.36}$$

gemäß der LKT

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi) = g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p - l; k; \cdot; \xi) - \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi)}{l^4},\tag{1.37}$$

vgl. Gl.(C.6).

- V5 Der perturbative Gehalt der durch den nichtperturbativen Vertexansatz spezifizierten SDE's soll multiplikativ renormierbar sein. Nach Anhang D erfordert dies zumindest die Gültigkeit der multiplikativen Renormierungsvorschrift

$$\begin{aligned}\tilde{V}^\mu[\tilde{S}] &= Z_1^{-1} \tilde{V}_r^\mu[\tilde{S}_r] \\ \tilde{S} &= Z_2 \tilde{S}_r \stackrel{WTI}{=} Z_1 \tilde{S}_r,\end{aligned}\tag{1.38}$$

die im einfachsten Fall durch ein in \tilde{S}^{-1} lineares Funktional $\tilde{V}^\mu[S]$ erfüllt wird. Ein für die Formulierung von Vertexansätzen verwendbares hinreichendes Kriterium zur Sicherung der STMR ist uns nicht bekannt.

- V6 Anschluß an die Störungsrechnung durch die Forderung

$$\tilde{V}^\mu \rightarrow \gamma^\mu, \quad g \rightarrow 0 \quad .\tag{1.39}$$

Die zur Erfüllung dieser Einschränkungen vorgeschlagenen und zur Zeit am meisten diskutierten Vertexansätze lauten mit der Tensoranalyse

$$\tilde{S}^{-1}(p) = A(p^2) \not{p} - B(p^2) \mathbf{1}\tag{1.40}$$

für den Fermionpropagator:

- Der einfachste Vertexansatz, die sog. Rainbow-Approximation, besteht in der Ersetzung der Vertexfunktion \tilde{V}^μ durch ihren Wert in nullter Ordnung Störungsrechnung

$$\tilde{V}_{RB}^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu \quad . \quad (1.41)$$

- Der von [Bc 80] im Zusammenhang mit der Untersuchung der perturbativen Impulssingularitätsstruktur der Vertexfunktion vorgeschlagene Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; -q) &= \frac{A(q^2) + A(p^2)}{2} \gamma^\mu \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{A(q^2) - A(p^2)}{q^2 - p^2} (\not{p} + \not{q}) - \frac{B(q^2) - B(p^2)}{q^2 - p^2} \mathbf{1} \right\} (p + q)^\mu \end{aligned} \quad (1.42)$$

gilt als Prototyp einer regulären, die WI (1.34) erfüllenden Auswertung der WTI (1.33)

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{BC}^\mu(p; 0; -p) &= A(p^2) \gamma^\mu + 2 \left\{ A'(p^2) \not{p} - B'(p^2) \mathbf{1} \right\} p^\mu \\ &= \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} \quad . \end{aligned} \quad (1.43)$$

- Der Vertexansatz $\tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; \cdot)$ ist durch Hinzufügen eines unter dem Gesichtspunkt der STMR motivierten Transversalanteils von [CP 90] weiterentwickelt worden

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{CP}^\mu(p; k; -q) &= \tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; -q) \\ &+ \frac{1}{2} (A(q^2) - A(p^2)) \frac{\gamma^\mu (q^2 - p^2) - (\not{q} - \not{p})(q + p)^\mu}{d(q, p)} \\ d(q, p) &= \frac{(q^2 - p^2)^2 + ((\frac{B(q^2)}{A(q^2)})^2 + (\frac{B(p^2)}{A(p^2)})^2)^2}{q^2 + p^2} \quad . \end{aligned} \quad (1.44)$$

In [CP 90] wird gezeigt, daß dieser Ansatz, in die SDE (1.26) des Fermionpropagators \tilde{S} eingesetzt, dessen STMR auf Leading-Log- und Next-to-leading-Log-Niveau in der Quenched-Approximation, d.h. für die Setzung

$$\tilde{D}^{\mu\nu} = \tilde{D}^{(0),\mu\nu} \quad (1.45)$$

gewährleistet.

- Eine ganze Klasse von Vertexansätzen ist von [DMR 94] im Rahmen der Untersuchung der Eichkovarianzeigenschaften der QED durch die Bedingung

$$\tilde{\Sigma}^T(p, \xi = 0) = g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{D}_{T,\mu\nu}^{(0)}(l) \tilde{S}(p - l) \tilde{V}_{DMR}^\nu(p - l; l; \cdot) = 0 \quad , \quad (1.46)$$

d.h. dem Verschwinden der Fermionselbstenergie für die Quenched-Approximation in Landau-Eichung $\xi = 0$, charakterisiert worden. Hierdurch wird sichergestellt, daß \tilde{V}_{DMR}^μ in der chiral-symmetrischen Phase der Quenched-Approximation, gekennzeichnet durch $B(p^2) = 0$, der LKT (1.37) genügt. Der Ansatz \tilde{V}_{CP}^μ ist ein spezielles Element aus dieser Klasse, es ist jedoch von [BR 93] darauf hingewiesen worden, daß er in der chiral-symmetrischen Phase kinematische Singularitäten aufweist

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{CP}^\mu(p; k; -q) &\rightarrow \frac{A(q^2)q^2 - A(p^2)p^2}{q^2 - p^2} \gamma^\mu \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{A(q^2) - A(p^2)}{q^2 - p^2} \frac{\not{p}q^2 - \not{q}p^2}{q^2 - p^2} \right\} (p + q)^\mu, \quad B(p^2) \rightarrow 0\end{aligned}\quad (1.47)$$

und deshalb in diesem Fall nicht die WI (1.34) erfüllt. Einer der einfachsten Vertexansätze, der gleichzeitig die WI (1.34) und die Bedingung (1.46) erfüllt, ist von der Form [BR 93]

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{DMR}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; \cdot) \\ &+ \frac{A(q^2) - A(p^2)}{q^2 - p^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} - 1 \right) (\gamma^\mu k^2 - k^\mu \not{k}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\not{p} \not{q} \gamma^\mu - \gamma^\mu \not{q} \not{p}) \right\} f_8(q^2, p^2, D)\end{aligned}\quad (1.48)$$

Zu diesen drei Ansätzen nehmen wir die durch Gl.(B.50) definierte, die WTI (1.33) minimal regulär auswertende Vertexfunktion

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k) \\ &= \gamma^\mu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx A(z^2) \\ &+ \frac{(q+p)^\mu}{2} \left\{ \frac{\not{p} + \not{q}}{2} \int_{-1}^1 dx A'(z^2) - \frac{\not{q} - \not{p}}{2} \int_{-1}^1 dx x A'(z^2) \right. \\ &- 1 \int_{-1}^1 dx B'(z^2) \Big\} \\ &+ \frac{(q-p)^\mu}{2} \left\{ - \frac{\not{p} + \not{q}}{2} \int_{-1}^1 dx x A'(z^2) + \frac{\not{q} - \not{p}}{2} \int_{-1}^1 dx x^2 A'(z^2) \right. \\ &+ 1 \int_{-1}^1 dx x B'(z^2) \Big\} \\ z(x) &= \frac{p+q}{2} - x \frac{q-p}{2}\end{aligned}\quad (1.49)$$

hinzu.

Die Tabelle (1.1) zeigt, welche der obigen Einschränkungen für welche Vertexansätze erfüllt sind. Aus ihr geht hervor, daß es noch nicht gelungen ist, einen alle Einschränkungen V1 – V6 vollständig erfüllenden Ansatz zu formulieren. Allen dargestellten Vertexansätzen gemeinsam ist, daß sie die

	WTI	WI	\mathcal{PC}	LKT	STMR	$Lim_{g \rightarrow 0}$
\tilde{V}_{RB}^μ	\ominus	\ominus	\oplus	\ominus	\ominus	\oplus
\tilde{V}_{BC}^μ	\oplus	\oplus	\oplus	\ominus	\ominus	\oplus
\tilde{V}_{MR}^μ	\oplus	\oplus	\oplus	?	?	\oplus
\tilde{V}_{CP}^μ	\oplus $(B \neq 0)$	\oplus	\oplus $(QA, B = 0)$	\oplus (QA, NLL)	\oplus (QA, NLL)	\oplus
\tilde{V}_{DMR}^μ	\oplus	\oplus	\oplus $(QA, B = 0)$	\oplus (QA, NLL)	\oplus	\oplus

Tabelle 1.1: Bewertung der aktuellen Vertexansätze mit den Abkürzungen: Quenched-Approximation (QA) und Next-to-leading-Log (NLL).

volle Vertexfunktion allein durch den Fermionpropagator \tilde{S} nähern. Des Weiteren sind alle Ansätze bis auf \tilde{V}_{DMR}^μ symmetrisch unter der Transformation $q \leftrightarrow p$ und vermögen deshalb nicht das anomale magnetische Moment des Elektrons, das mit der antisymmetrischen Tensorstruktur

$$\frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu](q - p)^\nu \quad (1.50)$$

von \tilde{V}_μ verknüpft ist, richtig zu beschreiben. Für eine quantitativerere Beurteilung betrachten wir die Vertexansätze in Ein-Loop Störungsrechnung für den masselosen Fall $B(p^2) = 0$ in dimensioneller Regularisierung. Dazu benötigen wir lediglich das Ein-Loop Resultat für die invariante Funktion $A(p^2)$

$$A^{(1)}(p^2) = 1 + 2\xi \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (-p^2)^{-\varepsilon}. \quad (1.51)$$

Die in den Ansätzen $\tilde{V}_{BC}^\mu, \tilde{V}_{CP}^\mu$ enthaltene Differenzbildung aus zwei invarianten Funktionen $A(p^2)$ und die Ableitungsterme in dem Ansatz \tilde{V}_{MR}^μ stellen sicher, daß in Ein-Loop Störungsrechnung nur die γ^μ -Tensorstruktur der einzelnen Ansätze divergenzbehaftet ist

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{BC}^{(1),\mu}(p; k; \cdot) &= \gamma^\mu \left\{ 1 \right. \\ &\quad \left. + \xi \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} ((-q^2)^{-\varepsilon} + (-p^2)^{-\varepsilon}) \right\} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{CP}^{(1),\mu}(p; k; \cdot) &= \gamma^\mu \left\{ 1 \right. \\
&+ 2\xi \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{(-q^2)^{1-\varepsilon} - (-p^2)^{1-\varepsilon}}{(-q^2) - (-p^2)} \Big\} + \dots \\
\tilde{V}_{MR}^{(1),\mu}(p; k; \cdot) &= \gamma^\mu \left\{ 1 \right. \\
&+ 2\xi \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \left(-\frac{q^2 p^2 - (q \cdot p)^2}{(q-p)^2} \right)^{-\varepsilon} \\
&\times \frac{p \cdot (p-q) {}_2F_1[\varepsilon, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{(p^2-p \cdot q)^2}{q^2 p^2 - (p \cdot q)^2}] + q \leftrightarrow p}{(q-p)^2} \Big\} + \dots . \quad (1.52)
\end{aligned}$$

Da die drei Vertexansätze die WI (1.34) erfüllen und die Divergenz von \tilde{V}^μ impulsunabhängig ist, führen alle auf das korrekte Resultat für die Divergenz von \tilde{V}^μ auf Ein-Loop-Niveau

$$\tilde{V}_{DIV}^{(1),\mu} = \xi \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma^\mu . \quad (1.53)$$

Von [Hw 91] ist im Rahmen der $1/N$ -Entwicklung mittels der SDE's darauf hingewiesen worden, daß der Ansatz \tilde{V}_{CP}^μ im Limes $q^2 \gg p^2$ bzw. $p^2 \gg q^2$, der zu dem für die WI (1.34) relevanten Limes $k \rightarrow 0$ entgegengesetzt ist, auf das korrekte Resultat

$$\tilde{V}^{(1),\mu}(p; k; -q) \rightarrow \gamma^\mu \left\{ 1 + 2\xi \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (\max(-q^2, -p^2))^{-\varepsilon} \right\} \quad (1.54)$$

führt. Für die anderen beiden Ansätze ergeben sich in diesem Limes die davon um einen Faktor 2 bzw. $\frac{1}{1-2\varepsilon}$ abweichenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{BC}^{(1),\mu}(p; k; -q) &\rightarrow \gamma^\mu \left\{ 1 + \xi \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (\max(-q^2, -p^2))^{-\varepsilon} \right\} \\
\tilde{V}_{MR}^{(1),\mu}(p; k; -q) &\rightarrow \gamma^\mu \left\{ 1 + \frac{2\xi}{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right. \\
&\times \left. (\max(-q^2, -p^2))^{-\varepsilon} \right\} . \quad (1.55)
\end{aligned}$$

Im Hinblick auf die komplexe Impulsstruktur der einzelnen Vertexansätze \tilde{V}_{BC}^μ , \tilde{V}_{CP}^μ , \tilde{V}_{DMR}^μ und \tilde{V}_{MR}^μ erscheint die Rainbow-Approximation zunächst als eine drastische Näherung der Vertexfunktion. Analytische und numerische Lösungen der aus den einzelnen Vertexansätzen resultierenden SDE's für \tilde{S} in der Quenched-Approximation haben allerdings gezeigt, daß ihr wesentlicher Effekt in einer eichkovarianten Fortsetzung der Ergebnisse der Rainbow-Approximation in Landau-Eichung besteht.⁹ Der Grund hierfür ist, daß in Landau-Eichung der Ein-Loop-Beitrag zur invarianten Funktion

⁹Beispielsweise führt der Ansatz \tilde{V}_{CP}^μ in der Quenched-Approximation und Cut-Off-Regularisierung zu einer nur noch schwach vom Eichfixierungsparameter ξ abhängigen kritischen Kopplung für den Übergang von der chiral-symmetrischen zur dynamisch chiral gebrochenen Phase im Fall $m = 0$. Die mit diesem Ansatz in Landau-Eichung $\xi = 0$ berechnete kritische Kopplung $\alpha_c = 0.92$ stimmt jedoch gut mit denjenigen der Rainbow-Approximation $\alpha_c = \frac{\pi}{3} = 1.04$ überein, vgl. [CP 93].

$A(p^2)$ nach Gl.(1.51) verschwindet, so daß sich die einzelnen Vertexansätze – bis auf nicht divergente Massenterme – erst auf Zwei-Loop-Niveau von der Rainbow-Approximation unterscheiden. Dies bedeutet, daß der perturbative Gehalt der Rainbow-Approximation für $\xi = 0$ auf Leading-Log-Niveau mit dem der Vertexansätze und mit dem der vollen Theorie übereinstimmt. Konkrete Rechnungen sollten in der Rainbow-Approximation demnach für $\xi = 0$ durchgeführt werden, womit wegen den LKT (C.12) keine Einschränkung in der Kenntnis der ξ -Abhängigkeit der Ergebnisse einhergeht, jedoch der Effekt der für diese Näherung gebrochenen WTI/WI (1.33/1.34) minimiert wird.

Im Rahmen dieser Arbeit steht bei konkreten Lösungsversuchen der SDE's die Durchführung der nichtperturbativen dimensionellen Regularisierung im Mittelpunkt. Wir wählen deshalb als Näherung für die Vertexfunktion die Rainbow-Approximation, die bereits ausführlich im Rahmen einer Impuls-Cut-Off-Regularisierung studiert wurde [RA 91], so daß ein direkter Vergleich der beiden Regularisierungsmethoden möglich ist. Aus den Untersuchungen des zweiten Kapitels dieser Arbeit geht hervor, daß der Ersetzung der Rainbow-Approximation durch einen der oben genannten Vertexansätze bzgl. der nichtperturbativen dimensionellen Regularisierbarkeit der SDE's nichts Grundsätzliches im Wege steht.

Kapitel 2

Definition der formalen SDE's in nichtperturbativer dimensioneller Regularisierung und Durchführung des Kontinuumslimes

Die bislang einzige erfolgreiche Methode, die formalen Grundgleichungen einer QFT zu definieren, besteht darin, sie zunächst zu regularisieren und anschließend durch eine Analyse der Singularitätsstruktur der Lösung bzgl. des Regularisierungsparameters darüber zu entscheiden, wie die Regularisierung im Rahmen eines Renormierungsprozesses wieder abzuschalten ist. Über die Verwendbarkeit einer speziellen Regularisierungsmethode kann nur insofern entschieden werden, als durch explizite Lösung der regularisierten Theorie überprüft werden muß, ob ein solcher Definitionsprozeß möglich ist und auf eine physikalisch sinnvolle Theorie führt. Vor diesem Hintergrund ist die dimensionelle Regularisierung (DR) ein attraktives Regularisierungsverfahren, da es die als Konstruktionsprinzipien für die Theorie dienenden Symmetrien, wie beispielsweise die Poincaré- und Eichkovarianz, respektiert, so daß ihre Reinstallierung beim Abschalten der Regularisierung nicht explizit nachgeprüft werden muß. Es hat jedoch bislang nur wenig Versuche gegeben, die DR auf nichtperturbative Fragestellungen zu übertragen¹ und die Hoffnung, dies in systematischer Weise tun zu können, scheint gering zu sein.²

¹Im Zusammenhang mit den SDE's ist der einzige uns bekannte Versuch in [KA 81] vorgenommen worden. In [CK 81] wird auf der Basis des Funktionalintegrals eine Kontinuums-Starkkopplungsentwicklung für die QED_D durchgeführt, allerdings wird zur Regularisierung neben der raumzeitlichen Dimension D ein Impuls-Cut-Off verwendet.

²[Co 85] bemerkt hierzu: It is very convenient to use dimensional continuation as an ultra-violet cut-off in perturbation theory. However, there is no known construction of a complete theory in an arbitrary complex dimension, so one must beware of assigning

Gegenstand dieses Kapitels ist es, unabhängig von speziellen Näherungen für die SDE's (1.26) zu zeigen, wie die DR zur Definition und nichtperturbativen Lösung dieser Gleichungen verwendet werden kann

2.1 Nichtperturbative dimensionelle Regularisierbarkeit der SDE's

Die Bestimmung der perturbativen Lösung der SDE's in DR erfordert die Definition eines D-dimensionalen Loop-Integrals mit analytisch bekanntem Integranden. Dazu wird dieses auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt, für das durch Anwendung von Subtraktionen oder partiellen Ableitungen eine explizite Fortsetzungsvorschrift bzgl. der raumzeitlichen Dimension D angegeben werden kann. Abstrakt gesprochen handelt es sich bei diesem Vorgehen um die Angabe einer speziellen Realisierung des D-dimensionalen Wilsonschen Funktional

$$W_D[f] \equiv \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} f(l), \quad (2.1)$$

das durch die folgenden Axiome definiert ist, vgl. [Wi 73] und [Co 85].

W1 Linearität:

Für beliebige komplexe Zahlen a, b soll gelten

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \left\{ af(l) + bg(l) \right\} = a \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} f(l) + b \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} g(l). \quad (2.2)$$

W2 Skalierungsgesetz:

Für beliebiges α soll gelten

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} f(\alpha l) = \alpha^{-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} f(l) \quad (2.3)$$

W3 Translationsinvarianz:

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} f(l + p) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} f(l) \quad (2.4)$$

W4 Anschlußbedingung:

Für ganzzahlige (positive) D soll $W_D[f]$ mit dem gewöhnlichen Integral übereinstimmen, sofern dieses existiert.

Diese Axiome sind nicht nur notwendige Bedingungen für einen Integrationsbegriff, sondern legen diesen sogar bis auf eine Normierungskonstante eindeutig fest. Eine der wichtigsten und gleichzeitig im Vergleich zum gewöhnlichen Integrationsbegriff obskursten Konsequenzen aus diesen Axiomen ist

too much physical significance to use of dimensional continuation. This is especially true when we use minimal subtraction, which is a procedure that exploits the form of the cut-off dependence of the theory.

das Verschwinden skalenfreier Integrale in DR

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} (sl^2)^\alpha \left\{ \begin{array}{ll} \stackrel{W_1}{=} & s^\alpha \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} (l^2)^\alpha \\ \stackrel{W_2}{=} & s^{-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} (l^2)^\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} (l^2)^\alpha = 0 . \quad (2.5)$$

Gegenüber anderen Regularisierungsverfahren bietet die axiomatische Fassung der DR den Vorteil, konsistente formale Umformungen vornehmen zu können, ohne eine konkrete Realisierung des D-dimensionalen Loop-Integrals im Auge haben zu müssen, ein Umstand, von dem wir beim Umformulieren der SDE's bereits stillschweigend Gebrauch gemacht haben.

Da die SDE's eine Formulierung der dynamischen Grundgleichungen der QED_D darstellen, die Loop-Integrale enthalten, ist prinzipiell die Voraussetzung dafür gegeben, auch den nichtperturbativen Gehalt der QED_D in DR, d.h. auf der Basis der Wilsonschen Axiome, zu definieren. Nichtperturbativ betrachtet stellen die SDE's jedoch ein Selbstkonsistenzproblem dar und wir definieren deshalb zunächst, was wir im Rahmen dieser Arbeit unter "nichtperturbativer dimensioneller Regularisierung" (NPDR) der SDE's verstehen möchten. Zwei Vorgaben legen die genaue Form dieser Definition weitgehend fest. Zum einen können wir nur für einfache Modell-SDE's hoffen, diese noch analytisch lösen zu können, so daß die NPDR numerisch durchführbar sein muß. Zum anderen halten wir aus Gründen, die wir nachfolgend noch diskutieren werden, an dem Prinzip der analytischen Fortsetzung bzgl. der raumzeitlichen Dimension D auch innerhalb nichtperturbativer Lösungsversuche der SDE's fest. Zusammengenommen legen diese beiden Vorgaben die folgende Definition nahe.

Im Rahmen dieser Arbeit bedeutet die NPDR der SDE's, daß sich die in D raumzeitlichen Dimensionen formulierten formalen SDE's (1.26) für die drei Basisvertices \tilde{S} , $\tilde{D}^{\mu\nu}$ und \tilde{V}^μ auf ein zahlenwertiges, i.allg. nichtlineares Selbstkonsistenzproblem der gewöhnlichen Analysis mit der raumzeitlichen Dimension D als reellwertigen Parameter abbilden lassen (kinematischer Teil der NPDR), von dem gezeigt werden kann, daß es zumindest bei kontinuierlicher Variation von D in einem endlichen Intervall wohldefinierte, nicht notwendig eindeutige, Lösungen besitzt (dynamischer Teil der NPDR).

2.1.1 Realisierung des kinematischen Teils der NPDR

Wir diskutieren nachfolgend die einzelnen Schritte, die notwendig sind, um den kinematischen Teil in der Definition der NPDR für die SDE's (1.26) der QED_D zu realisieren.

Skalare Projektion der tensoriellen SDE's

Ausgehend von der allgemeinen Tensoranalyse für die drei Basisvertices \tilde{S} , $\tilde{D}^{\mu\nu}$ und \tilde{V}^μ bzgl. Dirac- und Lorentzstrukturen³

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{-1}(p) &= A(p^2)\not{p} - B(p^2)\mathbf{1} \\ \tilde{S}(p) &= \underbrace{\frac{A(p^2)}{A^2(p^2)p^2 - B^2(p^2)}}_{=-S_1(p^2)}\not{p} + \underbrace{\frac{B(p^2)}{A^2(p^2)p^2 - B^2(p^2)}}_{=-S_0(p^2)}\mathbf{1} \\ \tilde{D}_{\mu\nu}(k) &= -\underbrace{D_T(k^2)}_{=\frac{d(k^2)}{k^2}}t_{\mu\nu}(k) - \frac{\xi}{k^2}l_{\mu\nu}(k) \\ \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \sum_{i=1}^{12} f_i(p^2, p \cdot q, q^2) V_i^\mu(p; k; \cdot),\end{aligned}\tag{2.6}$$

lassen sich deren tensorielle SDE's (1.26) durch die Anwendung der Projektoren⁴

$$\begin{aligned}A(p^2) &= \frac{1}{4p^2} \text{tr} \left\{ \not{p} \tilde{S}^{-1}(p) \right\} \\ -B(p^2) &= \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ \tilde{S}^{-1}(p) \right\} \\ -D_T(k^2) &= \frac{1}{(D-1)} t_{\mu\nu}(k) \tilde{D}^{\mu\nu}(k)\end{aligned}\tag{2.7}$$

auf SDE's für die invarianten Funktionen $A(p^2)$, $B(p^2)$ und $D_T(k^2)$ umschreiben. Die skalare Projektion der SDE's (1.26) für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ erfordert aufgrund ihrer umfangreichen Tensorbasis $\{V_i^\mu(p; k; \cdot) | i = 1 \dots 12\}$ zunächst die Konstruktion einer bzgl. des Skalarprodukts

$$\frac{1}{4} \text{tr} V_i^\mu V_{j,\mu}\tag{2.8}$$

biorthogonalen Basis $\{\tilde{V}_i^\mu(p; k; \cdot) | i = 1 \dots 12\}$ aus der Bedingung

$$\frac{1}{4} \text{tr} V_i^\mu \tilde{V}_{j,\mu} = \delta_{ij},\tag{2.9}$$

die dann dazu verwendet werden kann, die skalaren SDE's für die einzelnen invarianten Funktionen gemäß

$$f_i(p^2, p \cdot q, q^2) = \frac{1}{4} \text{tr} \tilde{V}_i^\mu(p; k; \cdot) \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)\tag{2.10}$$

zu ermitteln, vgl. [Kö 90].

Im Hinblick auf das sog. Fermion-Doubler-Problem der Gitterregularisierung weisen wir darauf hin, daß die skalare Projektion der SDE's und der Umstand, daß die DR keinen Einfluß auf die analytische Gestalt des Fermionpropagators nullter Ordnung nimmt, eine vollkommen unproblematische Behandlung fermionischer Freiheitsgrade mittels der SDE's erlaubt.

³Eine Tensorbasis $\{V_i^\mu(p; k; \cdot) | i = 1 \dots 12\}$ für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ ist in Gl.(B.65) angegeben.

⁴Wir verwenden die Konvention $\text{tr}[\mathbf{1}_{D \times D}] = 4$, davon abweichende Konventionen haben zumindest in der Störungsrechnung nur auf die endlichen Anteile der Greenschen Funktionen einen Einfluß.

Übergang auf die euklidische Metrik

Die SDE's für die invarianten Funktionen der Basisvertices enthalten nur noch aus den inneren und äußeren Impulsen aufgebaute invariante Bildungen in Form von Skalarprodukten, so daß sich für diese Gleichungen der Übergang zur euklidischen QED_D durch Ausführung einer naiven Wick-Rotation

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} &\rightarrow \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \\ p \cdot k, \dots &\rightarrow -(p \cdot k)_E, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

vollziehen läßt. Auf diese Weise kann zunächst die Definition euklidischer Dirac- bzw. Lorentztensoren umgangen werden.⁵

Abbildung des D-dimensionalen Loop-Integrals auf ein gewöhnliches Integral

Der entscheidende Schritt innerhalb des kinematischen Teils der NPDR ist die Angabe einer expliziten, prinzipiell numerisch auswertbaren Berechnungsvorschrift für das D-dimensionale Loop-Integral. Für die im Rahmen dieser Arbeit bei konkreten Lösungsversuchen der SDE's verwendeten Näherungen ist es ausreichend, Ein-Loop-Integrale, die nur von einem äußeren Impuls abhängig sind, zu betrachten. In den skalaren SDE's kommen diese in der allgemeinen Form

$$W_D[f, p^2] = \int \frac{d_E^D l}{(2\pi)^D} f(l^2, p \cdot l, p^2; D) \quad (2.12)$$

vor und können durch Übergang auf D-dimensionale Polarkoordinaten mit der Polarachse in Richtung des äußeren Impulses p auf ein zweidimensionales gewöhnliches Integral, bestehend aus einem Betrags- und einem Winkelintegral, abgebildet werden⁶

$$\begin{aligned} W_D[f, p^2] & \rightarrow S_D \int_0^\infty dl l^{D-1} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{D-3}{2}} f(l^2, p l x, p^2; D) \\ S_D &= \frac{1}{\Gamma(\frac{D-1}{2}) 2^{D-1} \pi^{\frac{D+1}{2}}}, \quad x = \hat{p} \cdot \hat{l} \quad . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Für die Reduktion von Mehrfach-Loop-Integralen bzw. Loop-Integralen, die von mehreren äußeren Impulsen abhängig sind, vgl. [NA 78] und [To 71]. Die Gl.(2.13) stellt eine spezielle Realisierung des durch die Wilsonschen Axiome nicht eindeutig festgelegten D-dimensionalen Wilsonschen Funktions dar, in der die raumzeitliche Dimension D nur noch als reeller Parameter, der über die Betragsintegration prinzipiell regularisierend wirken kann,

⁵Den Index E unterdrücken wir im folgenden meistens.

⁶Wir führen für den Betrag eines Vektors keine neue Bezeichnung ein, kennzeichnen dafür aber Skalarprodukte, zur Unterscheidung von gewöhnlichen Produkten, stets durch einen Punkt.

vorkommt. Die Nichteindeutigkeit der Vorschrift (2.13), symbolisiert durch einen Pfeil anstatt eines Gleichheitszeichens, besteht darin, sie um (multiplikative) Terme ergänzen zu können, die aufgrund der Anschlußbedingung (W3) für ganzzahliges D identisch Eins sein müssen (z.B. $\cos(2\pi D)$), und ist vergleichbar mit der Möglichkeit, verschiedene Diskretisierungsvorschriften für die Ableitungsoperatoren im Rahmen einer Gitterregularisierung verwenden zu können. Wir gehen auf diese Mehrdeutigkeiten nicht weiter ein, in der Hoffnung, daß sie sich wie in der Störungsrechnung nur in den endlichen Anteilen der Greenschen Funktionen bemerkbar machen. Für detailliertere Untersuchungen der SDE's in NPDR kann es jedoch nötig sein, eine genauere Definition des Wilsonschen Funktionalen vorzunehmen.

Übergang auf vollständig dimensionslose Größen

Für eine numerische Behandlung der SDE's müssen diese vollständig dimensionslos gemacht werden. Die nackte, dimensionell regularisierte QED_D enthält die beiden Massenskalen $\{m, g^{\frac{1}{\varepsilon}}\}$, d.h. die nackte Fermionmasse m und die für $D \neq 4$ dimensionsbehaftete nackte Eichkopplung g mit Massendimension $\varepsilon = \frac{4-D}{2}$. Anders als für ein Cut-Off-Regularisierungsverfahren (COR) wird in DR zwischen dem (dimensionslosen) Regularisierungsparameter (ε) und der (davon abhängigen) Regularisierungsmassenskala ($g^{\frac{1}{\varepsilon}}$) unterschieden, was weitreichende Konsequenzen für die Parametrisierung des Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ hat. Im Zusammenhang mit dem Renormierungsverfahren kommen zwei weitere Massenskalen in die Theorie, die Renormierungsmassenskala μ ("Subtraktionspunkt") und die unter Bezugnahme auf μ geeignet definierte renormierte Fermionmasse m_r . Für den Übergang auf vollständig dimensionslose Größen können wir damit allgemein schreiben⁷

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{m}{\Lambda}, & \hat{g} &= \Lambda^{-\varepsilon} g \\ \bar{p} &= \frac{p}{\Lambda}, & \bar{B}(\bar{p}^2) &= \frac{B((\Lambda \bar{p})^2)}{\Lambda} \\ &\vdots \\ \Lambda &\in \{g^{\frac{1}{\varepsilon}}, m; \mu, m_r\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Die zweckmäßigste Wahl für die Massenskala Λ hängt von der konkreten Fragestellung ab. Es lassen sich diesbezüglich zwei Fälle unterscheiden:

- **Wahl von Λ in der regularisierten Theorie:**

Für die regularisierte Theorie mit $\varepsilon \neq 0$ ist die natürlichste Wahl

$$\Lambda = g^{\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{2.15}$$

wie dies beispielsweise für Lösungsversuche der SDE's der QED_3 , für die $[g] = \frac{1}{2}$ gilt, üblich ist. Die Wahl $\Lambda = m$ ist prinzipiell auch möglich, aber im Hinblick auf den chiralen Limes $m \rightarrow 0$ ungeschickt. Durch die Wahl (2.15) für Λ läßt sich die Anzahl der unabhängigen

⁷Wir verwenden die Bezeichnung \hat{m}, \hat{g} und nicht \bar{m}, \bar{g} , um Verwechslungen mit den laufenden Parametern zu vermeiden.

Parameter in den nackten, dimensionell regularisierten SDE's von vier auf drei dimensionslose Größen reduzieren

$$\{m, g, \xi, \varepsilon\} \rightarrow \left\{ \frac{m}{g^{\frac{1}{\varepsilon}}}, \xi, \varepsilon \right\}, \quad (2.16)$$

und für eine bestimmte nackte Greensche Funktion G können wir infolgedessen schreiben

$$\begin{aligned} G(p; g, m, \xi, \varepsilon) &= \Lambda^{[G]} f(\bar{p}; \hat{m}, \xi, \varepsilon) \\ p &= (p_1, p_2, \dots), \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei $[G]$ die kanonische Massendimension von G und f eine dimensionslose Funktion bezeichnet.

- **Wahl von Λ zur Durchführung des Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$:** Die Zahl der unabhängigen Parameter, die nach Vorgabe eines Renormierungsverfahrens im Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ überleben, wird nicht durch eine Dimensionsanalyse, sondern durch die Divergenzstruktur der Theorie bestimmt. Die dimensionsbehafteten Größen müssen auf Massenskalen bezogen werden, die im Kontinuumslimes singularitätsfrei bleiben. Dies ist für $\Lambda \in \{m_r, \mu\}$, nicht aber für $\Lambda \in \{m, g^{\frac{1}{\varepsilon}}\}$, der Fall. Die Wahl $\Lambda = m_r$ wird üblicherweise im Rahmen der sog. intermediären Renormierung getroffen, in der die renormierten Größen durch den Wert bestimmter Greenscher Funktionen beim Impuls null definiert werden ($\mu = 0$). Wegen etwaiger IR-Singularitäten ist dagegen für eine masselose Theorie die Wahl $\Lambda = \mu$ zwingend.

Wir denken uns die SDE's zunächst mit der allgemeinen Massenskala Λ dimensionslos gemacht und spezifizieren Λ und die genaue Anzahl der unabhängigen Parameter der Theorie erst bei konkreten Fragestellungen.

2.1.2 Realisierung des dynamischen Teils der NPDR

Nach Ausführung der einzelnen Schritte des kinematischen Teils der NPDR sind beispielsweise die im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich studierten SDE's der beiden Propagatoren auf die allgemeine skalare Form

$$\begin{aligned} f(\bar{p}^2) &= f^{(0)} \\ &+ \hat{g}^2 S_D \int_0^\infty d\bar{l} \bar{l}^{D-1} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{D-3}{2}} K_f[\{f\}; (\bar{l})^2, \bar{p}^2, x] \\ f(\bar{p}^2) &\in \{A(\bar{p}^2), \bar{B}(\bar{p}^2), d(\bar{p}^2)\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

reduziert, wobei $f^{(0)}$ die nullte Ordnung der einzelnen invarianten Funktionen und $K_f[\{f\}; \cdot]$ ein aus ihnen aufgebautes nichtlineares Funktional bezeichnet. Es gilt nun, einen Bereich für D zu spezifizieren, in dem sich die skalaren SDE's singularitätsfrei lösen lassen. Obwohl zum Definitionsakt für die formalen SDE's gehörend, besitzt diese Spezifikation insofern einen dynamischen Aspekt, als wir zur Beurteilung der Konvergenzeigenschaften der Loop-Integrale des SD-Selbstkonsistenzproblems vorab Kenntnisse über dessen Lösung im divergenzerzeugenden UV-Bereich benötigen.

Diese Information ergibt sich aus der UV-asymptotischen Freiheit (UV-AF) der $\text{QED}_{D<4}$, die wir, um die Argumentation frei von speziellen Näherungen für die SDE's halten zu können, nachfolgend mittels RG-Methoden für die nackte und multiplikativ renormierte QED_D diskutieren. Im Rahmen konkreter Lösungsversuche der SDE's werden wir zeigen, daß ihre Lösung im UV-Bereich mit den aus der RG gewonnenen Aussagen konsistent ist.

UV-AF der nackten $\text{QED}_{D<4}$

Gehen wir von der Existenz einer dimensionell regularisierten QED_D in einem gewissen Bereich für D aus, dann folgt aus der Dimensionsanalyse (2.17) für eine beliebige *nackte* Greensche Funktion G , mit kanonischer Massendimension $[G]$, das in diesem Bereich für D wohldefinierte Skalierungsgesetz

$$G(e^t p; g, m, \xi, \varepsilon) = e^{t[G]} G(p; \bar{g}(t), \bar{m}(t), \xi, \varepsilon), \quad (2.19)$$

mit den "laufenden nackten Parametern"⁸

$$\begin{aligned} \bar{g}(t, \varepsilon) &= g e^{-\varepsilon t} \\ \bar{m}(t) &= m e^{-t}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da diese für $\varepsilon > 0$ im Limes $t \rightarrow \infty$ verschwinden

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{g}(t, \varepsilon > 0) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{m}(t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

ist das UV-Verhalten der Greenschen Funktionen durch ihren Wert in nullter Ordnung bzgl. der nackten Parameter g, m beschränkt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(e^t p; g, m, \xi, \varepsilon > 0) = e^{t[G]} G(p; 0, 0, \xi, \varepsilon). \quad (2.22)$$

Nehmen wir noch die in Anhang D diskutierte Divergenzstruktur der SDE's (1.26) hinzu, dann ist die Argumentation in sich konsistent und demnach die nackte, dimensionell regularisierte $\text{QED}_{D<4}$ UV asymptotisch frei.

UV-AF der multiplikativ renormierten $\text{QED}_{D<4}$

Wir nehmen nachfolgend in DR eine RG-Analyse der multiplikativ renormierten QED_D vor, die einerseits zeigen soll, daß die UV-AF der nackten QED_D nicht im Widerspruch zu einem etwaigen Landau-Pol in den laufenden renormierten Parametern steht. Andererseits dient die Analyse dazu, die wesentlichen Beziehungen für die Diskussion des Kontinuumslices in NPDR bereitzustellen. Um die Formeln übersichtlich halten zu können, wählen wir ein massenunabhängiges Renormierungsschema⁹ in Landau-

⁸Wir werden diese Begriffsbildung nachfolgend genauer begründen.

⁹Das einzige uns bekannte massenunabhängige Renormierungsschema, das sich prinzipiell auch innerhalb nichtperturbativer Studien etablieren läßt, ist das Weinberg-Schema [CM 73]. Dagegen macht das massenunabhängige MS/\overline{MS} -Renormierungsschema spezielle Annahmen über die Singularitätsstruktur der Theorie bzgl. ε .

Eichung $\xi = \xi_r = 0$.¹⁰ Die für das UV-Verhalten der Theorie wesentlichen laufenden renormierten Parameter $\bar{g}_r(t, \varepsilon)$ und $\bar{m}_r(t, \varepsilon)$ sind in DR durch die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{g}_r(t, \varepsilon)}{dt} &= \beta(\bar{g}_r(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ \frac{d\bar{m}_r(t, \varepsilon)}{dt} &= -(1 - \gamma_m(\bar{g}_r(t, \varepsilon), \varepsilon))\bar{m}_r(t, \varepsilon) \\ \bar{g}_r(0, \varepsilon) &= g_r \\ \bar{m}_r(0, \varepsilon) &= m_{c,r}\end{aligned}\tag{2.23}$$

definiert.¹² Die RG-Funktionen β, γ_m lassen sich aus den gemäß Gl.(D.1) definierten Renormierungskonstanten Z_g, Z_m gewinnen, die in einem massenunabhängigen Renormierungsschema nur von g_r und ε abhängig sind

$$\begin{aligned}\beta(g_r, \varepsilon) &\equiv \mu \frac{d}{d\mu} \Big|_g g_r(\mu) \\ &= -\varepsilon g_r - g_r \beta(g_r, \varepsilon) \frac{1}{Z_g(g_r, \varepsilon)} \frac{\partial Z_g(g_r, \varepsilon)}{\partial g_r} \Rightarrow \\ \beta(g_r, \varepsilon) &= \frac{-\varepsilon g_r}{1 + g_r \frac{1}{Z_g(g_r, \varepsilon)} \frac{\partial Z_g(g_r, \varepsilon)}{\partial g_r}} \\ &= -\varepsilon g_r + \beta_1(\varepsilon) g_r^3 + \beta_2(\varepsilon) g_r^5 + \mathcal{O}(g_r^7) \\ \gamma_m(g_r, \varepsilon) &\equiv \frac{\mu}{m_{c,r}} \frac{d}{d\mu} \Big|_{g,m} m_{c,r}(\mu) \\ &= -\beta(g_r, \varepsilon) \frac{1}{Z_m(g_r, \varepsilon)} \frac{\partial Z_m(g_r, \varepsilon)}{\partial g_r} \\ &= \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2 + \mathcal{O}(g_r^4).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Mit diesen Relationen können die laufenden renormierten durch die laufenden nackten Parameter ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}\bar{g}_r(t, \varepsilon) &= g_r(\hat{g}, \varepsilon) \Big|_{\hat{g} \rightarrow \hat{g}(t, \varepsilon)} \\ \bar{m}_r(t, \varepsilon) &= m_{c,r}(m, \hat{g}, \varepsilon) \Big|_{\hat{g} \rightarrow \hat{g}(t, \varepsilon), m \rightarrow \bar{m}(t, \varepsilon)} \\ \hat{g}(t, \varepsilon) &\equiv \mu^{-\varepsilon} \bar{g}(t, \varepsilon) = \hat{g} e^{-\varepsilon t} \\ \hat{g} &= \mu^{-\varepsilon} g,\end{aligned}\tag{2.25}$$

wodurch insbesondere die Bezeichnung "laufende nackte Parameter" für $\hat{g}(t, \varepsilon)$ und $\bar{m}(t, \varepsilon)$ gerechtfertigt wird. Die Funktionen $g_r(\hat{g}, \varepsilon)$ und $m_{c,r}(m, \hat{g}, \varepsilon)$ lassen sich aus ihren Umkehrfunktionen bestimmen, für die sich aus den Differentialgleichungen (2.24) die Integraldarstellungen [SY 70]

$$\begin{aligned}\hat{g}(g_r, \varepsilon) &= g_r \exp\left\{-\int_0^{g_r} dx \frac{\varepsilon x + \beta(x, \varepsilon)}{x \beta(x, \varepsilon)}\right\} \\ m(m_{c,r}, g_r, \varepsilon) &= m_{c,r} \exp\left\{-\int_0^{g_r} dx \frac{\gamma_m(x, \varepsilon)}{\beta(x, \varepsilon)}\right\}\end{aligned}\tag{2.26}$$

¹⁰Renormierte Größen kennzeichnen wir durch einen Index "r".

¹¹ $\xi_r = 0$ ist ein Fixpunkt der laufenden Eichfixierungskonstante.

¹² $m_{c,r}$ bezeichnet die von einem etwaigen rein dynamischen Beitrag freie Strommasse (current-mass), d.h. $m_{c,r} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow 0$ und $\varepsilon > 0$.

ergeben.¹³ Die UV-AF der (multiplikativ) renormierten QED_{D<4} folgt aus den Identitäten (2.25), sofern die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} g_r(\hat{g}, \varepsilon) &\rightarrow \hat{g} \\ m_{c,r}(m, \hat{g}, \varepsilon) &\rightarrow m \end{aligned} \right\}, \quad \hat{g} \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

erfüllt sind, wonach die laufenden renormierten Parameter für $\varepsilon > 0$ und $t \rightarrow \infty$ in die laufenden nackten Parameter übergehen und damit nach Gl.(2.21) verschwinden

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_r(t, \varepsilon > 0) &\rightarrow \hat{g}(t, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ \bar{m}_r(t, \varepsilon > 0) &\rightarrow \bar{m}(t, \varepsilon) \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Daß bei diesem Limes kein Landau-Pol überstrichen wird, läßt sich an den Ein-Loop-RG-Beziehungen für $\bar{g}_r(t, \varepsilon)$ und $\bar{m}_r(t, \varepsilon)$ überprüfen. Mit der Ein-Loop-Näherung

$$\begin{aligned} \beta(g_r, \varepsilon) &\approx -\varepsilon g_r + \beta_1(\varepsilon) g_r^3 \\ \gamma_m(g_r, \varepsilon) &\approx \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

erhalten wir aus Gl.(2.26)

$$\begin{aligned} \hat{g}(g_r, \varepsilon) &= \frac{g_r}{\sqrt{1 - \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g_r^2}} \\ g_r(\hat{g}, \varepsilon) &= \frac{\hat{g}}{\sqrt{1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \hat{g}^2}} \\ m(m_{c,r}, g_r, \varepsilon) &= m_{c,r} \left(1 - \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g_r^2\right)^{-\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\beta_1(\varepsilon)}} \\ m_{c,r}(m, \hat{g}, \varepsilon) &= m \left(1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \hat{g}^2\right)^{-\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\beta_1(\varepsilon)}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

und mit Gl.(2.25) folgt

$$\begin{aligned} \bar{g}_r^2(t, \varepsilon) &= \frac{g_r^2 e^{-2\varepsilon t}}{1 - \beta_1(\varepsilon) g_r^2 \frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{\varepsilon}} \\ \bar{m}_r(t, \varepsilon) &= m_{c,r} e^{-t} \left(1 - \beta_1(\varepsilon) g_r^2 \frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\beta_1(\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da der Ausdruck

$$\ln_\varepsilon(x) \equiv \frac{1 - x^{-\varepsilon}}{\varepsilon} = \ln(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.32)$$

für $\varepsilon > 0$ und $x > 1$ durch $\frac{1}{\varepsilon}$ beschränkt bleibt, weisen die laufenden renormierten Parameter trotz des für die QED₄ positiven ersten β -Koeffizienten¹⁴

$$\beta_1(0) = \frac{1}{12\pi^2} > 0 \quad (2.33)$$

¹³Die Lösungen der Differentialgleichungen (2.24) haben wir durch das Aufprägen der Randbedingungen $Z_g, Z_m \rightarrow 1, g_r \rightarrow 0$ eindeutig gemacht; wir kommen auf diese Wahl der Randbedingungen an späterer Stelle nochmals zurück.

¹⁴An dieser Stelle muß kein Renormierungsschema spezifiziert werden, da $\beta_1(0)$ (und $\beta_2(0)$) bekanntlich davon unabhängig sind.

in dem Bereich $t = 0 \dots \infty$ keinen Landau-Pol auf, sofern die renormierte Kopplung im Attraktionsgebiet des UV-stabilen Fixpunkts (FP) $g_r^{UV} = 0$

$$\begin{aligned}\beta(g_r^{UV}, \varepsilon) &= 0 \\ \frac{\partial \beta(g_r^{UV}, \varepsilon)}{\partial g_r} &= -\varepsilon < 0,\end{aligned}\quad (2.34)$$

das durch den IR-stabilen FP $g_r^{IR}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)}}$

$$\begin{aligned}\beta(g_r^{IR}(\varepsilon), \varepsilon) &= 0 \\ \frac{\partial \beta(g_r^{IR}(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial g_r} &= 2\varepsilon > 0\end{aligned}\quad (2.35)$$

der Ein-Loop β -Funktion (2.29) beschränkt wird, liegt. Jeder renormierten Kopplung g_r aus diesem Attraktionsgebiet, dem nach Gl.(2.30) bereits der gesamte Bereich $0 \dots \infty$ für die nackte Kopplung \hat{g} zugeordnet ist, entspricht eine Trajektorie $g_r(t, \varepsilon)$, die für $t \rightarrow \infty$ und $\varepsilon > 0$ im UV-stabilen FP $g_r = 0$ endet. Dieser Effekt beruht auf dem (kinematischen) $-\varepsilon g_r$ -Term in der β -Funktion, der für $\varepsilon > 0$ den Punkt $g_r = 0$ immer zu einem UV-stabilen FP macht.¹⁵ Die RG-Argumentation ist demnach für $D < 4$ in sich konsistent, insbesondere die Approximation (2.29) der RG-Funktionen durch ihre perturbativen Ausdrücke. Ein Landau-Pol t_L ergibt sich in den renormierten laufenden Parametern erst im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\bar{g}_r^2(t, 0) &= \frac{g_r^2}{1 - \frac{t}{t_L}} \\ \bar{m}_r(t, 0) &= m_{c,r} e^{-t} \left(1 - \frac{t}{t_L}\right)^{-\frac{\gamma_m^{(1)}(0)}{2\beta_1(0)}} \\ t_L &= \frac{1}{2\beta_1(0)g_r^2}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Dieser Limes ist jedoch für die QED nur für $g_r = 0$ mit der Beziehung (2.30) konsistent (RG-Trivialität), so daß die Beziehungen (2.36) höchstens im Rahmen der Störungsrechnung dazu verwendet werden können, das UV-Verhalten der $\text{QED}_{D<4}$ zu analysieren.

Im Hinblick auf den dynamischen Teil des Definitionsproblems für die SDE's in NPDR können wir aus der RG-Analyse für die nackte bzw. multiplikativ renormierte $\text{QED}_{D<4}$ die folgende Feststellung treffen:

Eine konsistente Definition (und gleichzeitig Teillösung) der nackten SDE's kann in NPDR vorgenommen werden, wenn die QED_D für $D < 4$ als UV-asymptotisch frei betrachtet wird, da für dieses UV-Verhalten nach Anhang D die Loop-Integrale in den SDE's (1.26) für die drei Basisvertices effektiv logarithmisch divergent sind und folglich die ihnen gemäß dem kinematischen Teil der NPDR zugeordneten skalaren SDE's in dem endlichen Intervall $[D_{IR}, 4]$ wohldefinierte Lösungen besitzen. D_{IR} ist durch die IR-Struktur

¹⁵Dabei machen wir die Annahme, daß dieser Term nicht durch einen echt nichtperturbativen Anteil in der β -Funktion überspielt wird. Insofern ist die auf der RG-Analyse beruhende UV-AF der $\text{QED}_{D<4}$ eine Selbstkonsistenzaussage.

der QED_D bestimmt. Für eine (explizit oder dynamisch) massive QED_D , d.h. $B(0) \neq 0$, treten für die Wahl $D_{IR} = 2$ keine IR-Singularitäten auf.

Wir betonen, daß es für die Definition der $QED_{D<4}$ ausreicht, die UV-AF allein als Beschränkung des UV-Verhaltens der Greenschen Funktionen durch ihre nullte Ordnung aufzufassen. Für die invarianten Funktionen A, B, d der beiden Propagatoren bedeutet dies

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} A(p^2, \varepsilon > 0), d(p^2; \varepsilon > 0) &= 1 \\ \lim_{p \rightarrow \infty} B(p^2, \varepsilon > 0) &= m.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Eine darüberhinausgehende Darstellung der UV-Asymptotik der invarianten Funktionen durch ihre (nackten) Störungsreihen, in denen aus Dimensionsgründen die Eichkopplung nur in der Kombination $g^2 p^{-2\varepsilon}$ vorkommen kann

$$\begin{aligned}A^{UV}(p^2, \varepsilon > 0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\dots} a_n(\varepsilon, \xi) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\right)^n \\ B^{UV}(p^2, \varepsilon > 0) &= m \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_n(\varepsilon, \xi) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\right)^n \right\} \\ d^{UV}(p^2, \varepsilon > 0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\dots} d_n(\varepsilon, \xi) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\right)^n,\end{aligned}\quad (2.38)$$

setzt im Gegensatz zu der strengen Aussage (2.37) voraus, daß es sich nicht nur um asymptotische Reihen, die für sich allein genommen nicht zur Definition der UV-Asymptotik der invarianten Funktionen verwendet werden könnten, handelt.¹⁶

Definition der Theorie für allgemeines D

Es ist zur begrifflichen Seite hin ganz wesentlich, daß nach den Prinzipien der analytischen Fortsetzung mit der Kenntnis der Lösung der SDE's auf dem endlichen Intervall $]D_{IR}, 4[$ die Analytizitätseigenschaften der Lösung in der gesamten komplexen D-Ebene festliegen, auch wenn wir genötigt sind, diese i.allg. im Rahmen einer numerischen Fortsetzung, die im Hinblick auf die Fehler im numerischen Input mit Instabilitäten verbunden sein kann, zu analysieren. Nachfolgend verdeutlichen wir an einem einfachen Beispiel, daß es auch für praktische Fragestellungen sinnvoll sein kann, eine analytische Fortsetzung bzgl. D in NPDR durchzuführen.

Die Kenntnis der drei Basisvertices auf dem Intervall $]D_{IR}, 4[$ impliziert noch nicht, daß wir in NPDR auch daraus aufgebaute Größen berechnen können. Beispielsweise konvergiert das Loop-Integral in der Darstellung für das nackte chirale Fermionkondensat

$$\langle \psi \bar{\psi} \rangle := \langle 0 | \psi_\alpha(0) \bar{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle_c$$

¹⁶Auch für eine numerische Lösung der SDE's in NPDR ist es prinzipiell ausreichend, nur den UV-Limes der zu bestimmenden Funktionen zu kennen. Es kann jedoch hilfreich sein, die UV-Asymptotik durch die (u.U. asymptotischen) Reihen (2.38) zu approximieren.

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} i \tilde{S}(k) e^{-ik \cdot x} \Big|_{x=0} \\
&= 4 \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)}, \tag{2.39}
\end{aligned}$$

als gewöhnliches Integral aufgefaßt

$$\langle \psi \bar{\psi} \rangle \propto \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)}, \tag{2.40}$$

nur für $D \in]0, 2[$, falls die IR-Bedingung

$$B(0) \neq 0 \tag{2.41}$$

und die UV-Bedingungen (2.37) erfüllt sind. Eine Möglichkeit, den Wert dieses Integrals für $D \approx 4$ zu definieren, besteht in der analytischen Fortsetzung der wohldefinierten Werte aus dem Intervall $D \in]0, 2[$.¹⁷ Eine direkte Berechnung des Kondensat-Integrals (2.40) für $D \approx 4$ erfordert dagegen die Durchführung von Subtraktionen zur Erweiterung seines Konvergenzbereichs bzgl. D . Dazu kann bei Vorgabe der Asymptotik (2.38) für das Verhältnis

$$\frac{B(p^2)}{A^2(p^2)} \rightarrow m \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} c_n(\varepsilon, \xi) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\}, \quad p \rightarrow \infty \tag{2.42}$$

von dem Verschwinden skalenfreier Integrale, vgl. Gl.(2.5), Gebrauch gemacht werden, d.h. unter Ausnutzung des Wilsonschen Postulats (W1) die Umschreibung

$$\begin{aligned}
\langle \psi \bar{\psi} \rangle &= 4 \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \\
&= 4 \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \right. \\
&\quad - \left. \frac{m}{k^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} c_n(\varepsilon, \xi) \left(\frac{g^2 k^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \right\} \\
&+ \underbrace{m \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} c_n(\varepsilon, \xi) \left(\frac{g^2 k^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\}}_{\stackrel{\text{Gl. (2.5)}}{=} 0} \tag{2.43}
\end{aligned}$$

vorgenommen werden. Dieses Vorgehen zeigt zwar, daß es in NPDR prinzipiell möglich ist, jedem Loop-Integral ein äquivalentes, effektiv logarithmisch divergentes Loop-Integral zuzuordnen, aufgrund der für kleines ε geringen Differenz der Exponenten in der UV-Asymptotik (2.38) der invarianten Funktionen muß dazu jedoch u.U. die Subtraktion von sehr vielen

¹⁷Dies erfordert die Lösung der SDE's in diesem Intervall, die aufgrund etwaiger IR-Singularitäten erst noch zu definieren wäre, gegebenenfalls selbst durch analytische Fortsetzung.

Termen vorgenommen werden, wodurch ebenfalls numerische Instabilitäten entstehen können. Angesichts dieser Problematik ist es sehr instruktiv sich vor Augen zu halten, daß die regularisierende Wirkung einer COR nicht von dem Divergenzgrad des zu berechnenden Integrals abhängig ist.

2.2 Durchführung des Kontinuumslimes in NPDR

Derjenige Bereich der raumzeitlichen Dimension D, für den wir die SDE's in NPDR direkt lösen können, schließt sich beliebig nahe an D = 4 an. Infolgedessen sind wir zur Durchführung des Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ in der Lage, das numerische Fortsetzungsproblem bzgl. D in ein Extrapolationsproblem umwandeln zu können, und damit in einer Situation, wie sie zunächst auch für die COR typisch ist. Für letztgenanntes Regularisierungsverfahren ist der Kontinuumslime in der Sprache der Statistischen Mechanik formuliert, wonach dieser mit den kritischen Punkten im Raum der nackten Parameter verbunden ist, für die die Korrelationslänge

$$\xi_k \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\Lambda}{m_r} & , \quad \text{COR mit Impuls-Cut-Off } \Lambda \\ \frac{1}{a m_r} & , \quad \text{COR mit Gitterkonstante } a \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

(i.allg.) gemäß Potenzgesetzen mit zugehörigen kritischen Exponenten divergiert, vgl. z.B. [MM 94]. Es ist für eine COR charakteristisch, daß sich aus der Parametrisierung des Kontinuumslimes durch RG-Funktionen, z.B. durch die renormierte

$$\beta^{COR}(g_r) \equiv -\xi_k \frac{\partial g_r(g, \xi_k)}{\partial \xi_k} \Big|_g \quad (2.45)$$

bzw. nackte β -Funktion¹⁸

$$\beta_b^{COR}(g) \equiv \xi_k \frac{\partial g(g_r, \xi_k)}{\partial \xi_k} \Big|_{g_r}, \quad (2.46)$$

schon im Rahmen der regularisierten Theorie eindeutige Kriterien für die Existenz des Kontinuumslimes und die Struktur der dadurch definierten Theorie ableiten lassen. Da für eine COR der Regularisierungsparameter dimensionsbehaftet ist, können die RG-Funktionen so gewählt werden, daß sie vom Regularisierungsparameter unabhängig sind, so daß nach Gl.(2.45/2.46) die Divergenz der Korrelationslänge ξ_k mit der Existenz von Nullstellen der RG-Funktionen in Bezug auf ihre Kopplungsabhängigkeit

$$\begin{aligned} \ln(\xi_k) &= - \int^{g_r} dx \frac{1}{\beta^{COR}(x)} \\ \ln(\xi_k) &= \int^g dx \frac{1}{\beta_b^{COR}(x)}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

die prinzipiell im Rahmen der regularisierten Theorie bestimmt werden können, verknüpft ist. Dagegen ist in NPDR der Kontinuumslime allein durch

¹⁸Die beiden Funktionen sind über die Beziehung $\beta^{COR}(g_r) = \beta_b^{COR}(g) \frac{\partial g_r(g, \xi_k)}{\partial g}$ miteinander verknüpft, so daß ihre ersten beiden Taylorkoeffizienten in einer Entwicklung nach g_r bzw. g übereinstimmen, vgl. [MM 94].

das Verschwinden der dimensionslosen Größe ε charakterisiert und hierfür scheint die obige Sprechweise aus der Statistischen Mechanik keine angemessene Beschreibung zu sein, da mit ε eine Größe variiert wird, die die durch gleiche kritische Exponenten charakterisierten Universalitätsklassen mitbestimmt. In NPDR hängen die renormierte

$$\begin{aligned}\beta^{DR}(g_r, \varepsilon) &= \mu \frac{d}{d\mu} \Big|_g g_r(\hat{g} = \mu^{-\varepsilon} g, \varepsilon) = -\varepsilon \hat{g} \frac{\partial g_r(\hat{g}, \varepsilon)}{\partial \hat{g}} \\ &= -\varepsilon g_r + g_r \hat{\beta}(g_r, \varepsilon) \\ \hat{\beta}(g_r, \varepsilon) &= \beta_1(\varepsilon) g_r^2 + \beta_2(\varepsilon) g_r^4 + \mathcal{O}(g_r^6)\end{aligned}\quad (2.48)$$

bzw. nackte β -Funktion

$$\beta_b^{DR}(\hat{g}, \varepsilon) \equiv \frac{d\hat{g}(g_r, \varepsilon)}{d \frac{1}{2\varepsilon}} \Big|_{g_r} = -2\varepsilon^2 \frac{d\hat{g}(g_r, \varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{g_r} \quad (2.49)$$

vom Regularisierungsparameter ε ab und infolgedessen ist der Zusammenhang zwischen gewissen Strukturmerkmalen dieser Funktionen für $\varepsilon > 0$ und der Existenz bzw. Struktur etwaiger Kontinuumslimits wesentlich indirekter. Aus Gl.(2.48) erhalten wir die Beziehung

$$\hat{g}(g_r, \varepsilon) = g_r \exp \left\{ - \int_0^{g_r} dx \frac{\hat{\beta}(x, \varepsilon)}{-\varepsilon x + x \hat{\beta}(x, \varepsilon)} \right\}, \quad (2.50)$$

die selbst im (nur perturbativ implementierbaren) MS/\overline{MS} -Renormierungsschema¹⁹ nicht nach ε aufgelöst werden kann. Demnach lassen sich für $\varepsilon > 0$ keine eindeutigen Signale hinsichtlich der Existenz und Struktur des Kontinuumslimes ableiten, so daß in NPDR die Durchführung des Kontinuumslimes unausweichlich mit einem Extrapolationsprozeß verbunden zu sein scheint. Dieser Umstand mag als eine Schwäche der NPDR erscheinen, oder aber die Voraussetzung dafür sein, daß die wesentliche Natur des Kontinuumslimes richtig erfaßt werden kann. Unserer Meinung nach drückt sich hierdurch jedenfalls der wesentliche Unterschied zwischen einer COR und der DR aus. Zur Durchführung des Kontinuumslimes in NPDR muß demnach direkt eine Analyse der Beziehung $\hat{g}(g_r, \varepsilon)$ im Sinne eines Extrapolationsprozesses vorgenommen werden. Um eine Vorstellung davon zu bekommen, für welche raumzeitlichen Dimensionen D die SDE's dazu numerisch gelöst werden müssen, betrachten wir die Entsprechung

$$\frac{1}{2\varepsilon} \leftrightarrow \ln(\xi_k), \quad (2.51)$$

die sich beispielsweise aus dem Vergleich der Ein-Loop-RG-Beziehung

$$g(g_r, \xi_k) = \frac{g_r}{\sqrt{1 - \beta_1(0) g_r^2 \ln(\xi_k^2)}} \quad (2.52)$$

¹⁹Für dieses Renormierungsschema hängt $\hat{\beta}$ nicht von ε ab.

mit der ihr in NPDR entsprechenden Beziehung (2.30) ablesen läßt. Die derzeitige Grenze für die in numerischen Lösungsversuchen der SDE's erreichbaren Korrelationslängen liegt in der Größenordnung²⁰ $\xi_r < 10^{12}$, vgl. [RA 91], der nach Gl.(2.51) eine raumzeitliche Dimension

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0.018 \\ D &= 4 - 2\varepsilon = 3.963\end{aligned}\tag{2.53}$$

entspricht.

2.2.1 Der Kontinuumslimes in DR gemäß den perturbativen RG-Funktionen

Da für die QED₄ nach Gl.(2.33) $\beta_1(0) > 0$ und im massenunabhängigen Weinberg-Renormierungsschema

$$\gamma_m^{(1)}(0) = -\frac{3}{8\pi^2} < 0\tag{2.54}$$

gilt, nehmen die renormierten Parameter $m_{c,r}, g_r$ gemäß den Ein-Loop-RG-Beziehungen (2.30) Werte in den Intervallen

$$\begin{aligned}m_{c,r} &\in [0, \infty[\geq m \\ g_r &\in [0, g_r^{IR}(\varepsilon)] \leq \hat{g}\end{aligned}\tag{2.55}$$

an, falls die nackte Kopplung \hat{g} in dem Intervall $[0, \infty[$ läuft. Die renormierte Kopplung g_r ist durch den IR-stabilen FP der Ein-Loop- β -Funktion beschränkt

$$g_r^{IR}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)}},\tag{2.56}$$

so daß es für die QED_D auf Ein-Loop-RG-Niveau im Kontinuumslimes unabhängig davon, wie die nackte Kopplung von ε abhängig gemacht wird, zu einer Entkopplung von Boson- und Fermionfeld kommt (Trivialität). Aus den Beziehungen (2.30) folgt, daß die nackten Parameter m, \hat{g} komplex würden, hielten wir im Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ an einem $g_r > 0$ fest.²¹ Es ist schwer vorstellbar, daß die Trivialität durch die Berücksichtigung von weiteren störungstheoretischen Beiträgen zur β -Funktion umgangen werden kann. Gemäß der Darstellung (2.50) wird die renormierte Kopplung im allgemeinen Fall durch die kleinste positive Nullstelle $g_r^*(\varepsilon)$ der β -Funktion, die durch die Lösung der Gleichung

$$\varepsilon = \hat{\beta}(g_r^*(\varepsilon), \varepsilon)\tag{2.57}$$

gegeben ist, beschränkt

$$g_r \in [0, g_r^*(\varepsilon)].\tag{2.58}$$

²⁰Die im Rahmen von Gitterrechnungen erreichbaren Korrelationslängen sind wesentlich kleiner.

²¹Dagegen muß nach diesen Beziehungen für die QCD_D, mit $\beta_1(0) < 0$, zur Durchführung des Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ die nackte Kopplung $\hat{g}(\varepsilon)$ gegen null geführt werden, was auf eine nichttriviale QCD₄ führt.

Für die QED ist die perturbative $\hat{\beta}$ -Funktion bekanntlich positiv und folglich kann die Bedingung (2.57) zumindest für kleine ε gelöst werden, wobei wegen der perturbativen Entwicklung (2.48)

$$g_r^*(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.59)$$

gilt. Beispielsweise folgt für $g_r^*(\varepsilon)$ auf Zwei-Loop-Niveau im MS/ $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungsschema

$$\begin{aligned} (g_r^*)^2(\varepsilon) &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_2(0)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_1(0)}{\beta_2(0)} \right)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1(0)}{\beta_2(0)} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta_1(0)} - \frac{\beta_2(0)}{\beta_1^3(0)} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Der Zwei-Loop-Beitrag zur β -Funktion macht sich erst in der $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ bemerkbar.

Einerseits ist für die Definition der QED_D in NPDR die Existenz des UV-stabilen FP $g_r^{UV} = 0$ mit seinem zugehörigen, “kleinen” Attraktionsgebiet $0 \dots g_r^*(\varepsilon)$ wesentlich, andererseits liegt die Vermutung nahe, daß durch dieses Attraktionsgebiet die wesentliche nichtperturbative Struktur der β -Funktion nur maskiert wird. Es ist uns nicht klar, ob die Beziehung (2.50) bzgl. g_r auf Werte jenseits des Attraktionsgebietes (2.58) hin fortgesetzt werden kann und welche Strukturmerkmale die β -Funktion für $\varepsilon > 0$ dort besitzen müßte, damit ein nichttrivialer Kontinuumslime $\varepsilon \rightarrow 0$ existiert. Zumindest wäre in diesem Fall die untere Integrationsgrenze in der Darstellung (2.50) abzuändern, und damit ginge nach den Gl.(2.26/2.27) u.U. die UV-AF der renormierten Theorie verloren.²²

2.2.2 Der Kontinuumslime in NPDR am Beispiel eines echt nichtperturbativen Effekts

Eine Möglichkeit, wie die Trivialität eventuell umgangen werden könnte, ist die Existenz echt nichtperturbativer Effekte, die keine Entsprechung in der Störungsrechnung besitzen und einer nichtperturbativen Kopplungsrenormierung bedürfen. Als Beispiel betrachten wir die Ausbildung einer dynamischen Masse in der masselosen, chiral invarianten QED_D , die als einzige Massenskala die Regularisierungsmassenskala besitzt. Die Parametrisierung dieses Effekts in DR und einer COR ist in Tabelle (2.1) in Form einer Gegenüberstellung dargestellt, da der Unterschied in den beiden Regularisierungsverfahren für diesen Fall besonders deutlich zum Ausdruck kommt. In DR ist die Bedeutung der nackten Kopplung g vollständig auf das Setzen der (nichtanalytisch von g abhängigen) Massenskala $g^\frac{1}{\varepsilon}$ reduziert, so daß M entweder für alle g von null verschieden ist, oder identisch verschwindet. Für die masselose QED_D macht es im Gegensatz zur COR in NPDR demnach

²²Jenseits des Attraktionsgebietes (2.58) des UV-stabilen FP $g_r^{UV} = 0$ kommt dem Term $-\varepsilon x$ in der Integraldarstellung (2.50) nicht mehr die entscheidende Bedeutung zu, die er für $x \approx 0$ besitzt. Demnach scheint es so, als ob dieser Term in dieses Gebiet überführt werden, d.h. eventuell die Beziehung $g_r = Z_g^{-1}(g_r, \varepsilon) \mu^{-\varepsilon} g$ hinsichtlich der expliziten μ -Abhängigkeit abgeändert werden müßte.

	COR	DR
Regularisierungs-Parameter	Λ	$\varepsilon = \frac{4-D}{2}$
Massenskala	Λ	$g^{\frac{1}{\varepsilon}} = \mu \hat{g}^{\frac{1}{\varepsilon}}$
dynamische Masse	$M(g, \Lambda) = \Lambda f_{COR}(g)$	$M(g, \varepsilon) = g^{\frac{1}{\varepsilon}} f_{DR}(\varepsilon)$
Kontinuumslimes	$\xi_k = \frac{\Lambda}{M} \rightarrow \infty$	$\varepsilon \rightarrow 0$
Ren.-Bedingung	$0 < M < \infty$	$0 < \hat{M} = \frac{M}{\mu} < \infty$
Subtraktion	$g \rightarrow g(\xi_k) _M$	$\hat{g} \rightarrow \hat{g}(\varepsilon) _{\hat{M}}$
kritische nackte Kopplung	$g_k \equiv \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} g(\xi_k) _M$ $f_{COR}(g_k) = 0$	$\hat{g}_k \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{g}(\varepsilon) _{\hat{M}}$ $\hat{g}_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\hat{M}^\varepsilon}_{\rightarrow 1} \tilde{f}_{DR}^{-\varepsilon}(\varepsilon)$
nackte β -Funktion	$\beta_b^{COR}(g) \equiv \xi_k \frac{dg(\xi_k)}{d\xi_k} _M$ $= -\frac{f_{COR}(g)}{f'_{COR}(g)}$	$\beta_b^{DR}(\hat{g}, \varepsilon) \equiv -2\varepsilon^2 \frac{d\hat{g}(\varepsilon)}{d\varepsilon} _{\hat{M}}$ $= -2\varepsilon \hat{g} \ln(\hat{g}) + 2\varepsilon^3 \hat{g} \frac{\tilde{f}'_{DR}(\varepsilon)}{\tilde{f}_{DR}(\varepsilon)}$

Tabelle 2.1: Vergleich der Parametrisierung einer dynamischen Masse in DR und einer COR.

keinen Sinn, von einer ‘‘Starkkopplungsphase’’ bzgl. der nackten Kopplung zu sprechen. Ob es zur Ausbildung einer rein dynamischen Masse kommt oder nicht, hängt in NPDR nur von der raumzeitlichen Dimension ε ab. Die dynamische Masse $M(g, \varepsilon)$ ist gemäß ihrer Parametrisierung in Tabelle (2.1)

$$M(g, \varepsilon) = g^{\frac{1}{\varepsilon}} f_{DR}(\varepsilon) \quad (2.61)$$

eine RG-Invariante und folglich besitzt sie als Funktion der renormierten Kopplung die Darstellung

$$M(g_r(\mu), \mu, \varepsilon) = C_M(\varepsilon) \Lambda_\varepsilon(g_r(\mu), \mu), \quad (2.62)$$

wobei Λ_ε die RG-invariante Massenskala der QED_D bezeichnet

$$\Lambda_\varepsilon(g_r(\mu), \mu) = \mu \exp \left\{ - \int_{g_r^0(\varepsilon)}^{g_r(\mu)} dx \frac{1}{\beta(x, \varepsilon)} \right\}, \quad (2.63)$$

die erst nach Festlegung der unteren Integrationsgrenze $g_r^0(\varepsilon)$ eindeutig definiert ist und für die auf Ein-Loop-RG-Niveau folgt²³

$$\Lambda_\varepsilon(g_r, \mu) = \mu \left\{ \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon) g_r^2}}{1 - \frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon) (g_r^0(\varepsilon))^2}} \right\}^{-\frac{1}{2\varepsilon}}. \quad (2.64)$$

Um den Zusammenhang zwischen den Darstellungen (2.61/2.62) herzustellen, schreiben wir die Λ_ε -Skala mit Hilfe der Beziehung

$$\beta(g_r, \varepsilon) = -\varepsilon \hat{g} \frac{\partial g_r(\hat{g}, \varepsilon)}{\partial \hat{g}} \quad (2.65)$$

auf die nackte Kopplung g um

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon(g) &= \mu \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\hat{g}(g_r^0, \varepsilon)}^{\hat{g}(g_r, \varepsilon)} dx' \frac{1}{x'} \right\} \\ &= \mu \left(\frac{\hat{g}}{\hat{g}_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{g}{\hat{g}_0(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ \hat{g}_0(\varepsilon) &\equiv \hat{g}(g_r^0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.66)$$

so daß folgt

$$C_M(\varepsilon) = \hat{g}_0^{\frac{1}{\varepsilon}}(\varepsilon) f_{DR}(\varepsilon). \quad (2.67)$$

Damit die dynamische Masse im Kontinuumslimes endlich gehalten werden kann (Renormierungsbedingung), muß die nackte Kopplung vom Regulärarisierungsparameter abhängig gemacht

$$\begin{aligned} g &\xrightarrow{\text{COR}} g(\xi_k)|_M \\ \hat{g} &\xrightarrow{\text{DR}} \hat{g}(\hat{M}, \varepsilon)|_{\hat{M}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

²³Nach Gl.(2.64) verschwindet Λ_ε für $\varepsilon > 0$ und kleine g_r gemäß $g_r^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Für die QCD_D, d.h. $\beta_1(0) < 0$, folgt aus Gl.(2.64) im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ und der Wahl $g_r^0(\varepsilon) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ das wohlbekannte Ein-Loop-RG-Resultat $\Lambda_0(g_r, \mu) = \mu \exp \left\{ \frac{1}{2\beta_1(0) g_r^2} \right\}$. Für die QED_D ist ein solcher Limes wegen $\beta_1(0) > 0$ nicht möglich.

und im Kontinuumslimes gegen eine universelle “kritische” Kopplung geführt werden

$$\begin{aligned} g_k &\stackrel{\text{COR}}{\equiv} \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} g(\xi_k)|_M \\ \hat{g}_k &\stackrel{\text{DR}}{\equiv} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{g}(\hat{M}, \varepsilon)|_{\hat{M}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die Werte für die (u.U. mehreren) kritischen Kopplungen sind in einer COR durch die Nullstellen der Skalierungsfunktion $f_{COR}(g)$ bestimmt, d.h. können prinzipiell bei endlichen Korrelationslängen ξ_k bestimmt werden, wohingegen ihre Bestimmung in DR die Kenntnis der Skalierungsfunktion $f_{DR}(\varepsilon)$ für beliebig kleine ε erfordert. Ob durch die nichtperturbative Kopplungsrenormierung (2.68/2.69) die Trivialität der QED₄ umgangen werden kann, hängt davon ab, ob die geeignet definierte renormierte Kopplung g_r an den kritischen Punkten verschwindet

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} g_r(g(\xi_k), \xi_k) &= ? \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_r(\hat{g}(\hat{M}, \varepsilon), \varepsilon) &= ?. \end{aligned} \quad (2.70)$$

In NPDR ist damit die Trivialitätsfrage für die QED₄ auf die Untersuchung der strukturellen Eigenschaften der beiden Funktionen $\beta(g_r, \varepsilon)$ und $f_{DR}(\varepsilon)$ zurückgeführt.

2.2.3 Die zentralen Fragestellungen zur Strukturuntersuchung der QED

Aus der Diskussion des Kontinuumslimes in NPDR ergeben sich für die nichtperturbative Strukturuntersuchung der QED die folgenden zentralen Fragestellungen:

- Liegt nach [LP 55] für die QED₄ die “zero charge situation” vor, d.h. ist in DR die auf der Ein-Loop β -Funktion beruhende RG-Beziehung

$$g_r^2(\hat{g}, \varepsilon) = \frac{\hat{g}^2}{1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \hat{g}^2} \leq \frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)} \quad (2.71)$$

auch für große nackte Kopplungen \hat{g} korrekt, so daß die renormierte Kopplung im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet?

- Wird dieses Trivialitätsszenario durch nichtperturbative Effekte umgangen, die
 - durch eine über RG-Summationen hinausgehende Aufsummation störungstheoretischer Terme beschrieben werden können, z.B. die zuerst von [GML 54] vermutete Existenz einer Nullstelle der renormierten β -Funktion bei großen renormierten Kopplungen?
 - echt nichtperturbative Effekte darstellen, d.h. nichtanalytisch von der Kopplung abhängen und eine nichtperturbative Renormierung erfordern, z.B. die diesbezüglich zuerst von [MN 74] untersuchte dynamische chirale Symmetriebrechung?

- Impliziert die etwaige Entkopplung von Fermion- und Bosonfeld auch einen trivialen Fermionsektor, oder existieren im Fall der dynamischen chiralen Symmetriebrechung im Kontinuumslices trotz verschwindender renormierter Kopplung nichttriviale S-Matrixelemente zur Beschreibung des pseudoskalaren Goldstone-Bosons ? In der Sprache der COR würden in diesem Fall die Nullstellen der renormierten und nackten β -Funktion nicht übereinstimmen.
- Sind die Aussagen über die Struktur und Existenz etwaiger Kontinuumslimits vom verwendeten Regularisierungsverfahren abhängig ?
- Ist im Fall der Trivialität der QED_4 das Konzept der Cut-Off-Theorie von der COR auf die NPDR übertragbar ?

Eine vorläufige Antwort auf Teile der obigen Fragestellungen nehmen wir nachfolgend durch die explizite Lösung von zwei Entkopplungsnäherungen der SDE's in NPDR vor.

Kapitel 3

Die Quenched-Rainbow-Näherung der SDE's in NPDR

Die Quenched-Rainbow-Approximation (QRBA) der SDE's (1.26) besteht in der Ersetzung

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{\mu\nu}(k) &\rightarrow \tilde{D}^{(0),\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} [t^{\mu\nu}(k) + \xi l^{\mu\nu}(k)] \\ \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &\rightarrow \tilde{V}^{(0),\mu}(p; k; \cdot) = \gamma^\mu\end{aligned}\quad (3.1)$$

und stellt aus verschiedenen Gründen eine besonders attraktive Entkopplungsnäherung dar:

- Die QRBA kann im Rahmen einer COR weitgehend analytisch gelöst werden.
- Die Näherung (3.1) des Bosonpropagators schaltet den in Kapitel 2 diskutierten Trivialitätsmechanismus aus, so daß die QRBA einen nicht-trivialen Kontinuumsstates besitzt.
- Die QRBA ist eine vereinfachte Version der Quenched-Approximation (QA), die in der Unterdrückung aller Fermion-Loops in den SDE's (1.26) für die drei Basisvertices besteht. Die QA stellt den Grenzfall unendlich schwerer Fermionen dar und läßt sich im funktional-integralen Zugang durch die Vernachlässigung der Fermiondeterminante, die nach Ausintegration der nur bilinear in der Wirkung enthaltenen Fermionfelder entsteht, implementieren, so daß ein Vergleich der Ergebnisse von Gitterrechnungen [BK 84] mit denjenigen des SD-Zugangs möglich ist.

Seit der grundlegenden Arbeit von [MN 74] ist die QRBA vielfach als Ausgangspunkt für nichtperturbative Strukturuntersuchungen der QED₄, die beispielsweise die Untersuchung der Impussingularitätsstruktur des Fermionpropagators oder das Studium der dynamischen chiralen Symmetriebrechung zum Gegenstand hatten, verwendet worden, vgl. z.B. [FK 76] und

[MI 85]. Uns dient die QRBA als übersichtliche Modell-SDE, um analytisch nichtperturbative Effekte in dimensioneller Regularisierung studieren zu können.

3.1 Die SDE's der QRBA

Die Näherung (3.1) reduziert die SDE's (1.26) für die drei Basisvertices auf eine geschlossene, nichtlineare SDE für den Fermionpropagator

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{-1}(p) &= \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \tilde{\Sigma}(p) \\ (\overrightarrow{p})^{-1} &= (\overrightarrow{p})^{-1} + g^2 \overrightarrow{p} \cdot \text{Loop} \\ \tilde{\Sigma}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(k) \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(p-k) \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Gemäß dem in Kapitel 2 diskutierten kinematischen Teil der NPDR ergeben sich für seine beiden invarianten Funktionen

$$\tilde{S}^{-1}(p) = A(p^2) \not{p} - B(p^2) \mathbf{1} \quad (3.3)$$

in euklidischer Metrik die gekoppelten, skalaren SDE's

$$\begin{aligned} A(p^2) &= 1 + g^2 \tilde{\Sigma}_A(p^2) \\ B(p^2) &= m + g^2 \tilde{\Sigma}_B(p^2) \\ \tilde{\Sigma}_A(p^2) &= (D-2)\xi \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{p \cdot k}{p^2(p-k)^2} \\ &= \frac{2(D-2)\xi}{\Gamma(3-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{k}{p} \\ &\times \underbrace{\frac{\Gamma(3-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx \frac{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{p^2 - 2pkx + k^2}}_{\equiv K_A(p,k,\varepsilon)} \\ \tilde{\Sigma}_B(p^2) &= (D-1+\xi) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2} \\ &= \frac{2(D-1+\xi)}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \\ &\times \underbrace{\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{p^2 - 2pkx + k^2}}_{\equiv K_B(p,k,\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

die sich durch Ausführen der Winkelintegrationen in eindimensionale Integralgleichungen mit den symmetrischen Kernen

$$K_A(p,k,\varepsilon) = \Theta(k-p) \frac{p}{k^3} {}_2F_1[\varepsilon, 2; 3-\varepsilon; (\frac{p}{k})^2] + k \leftrightarrow p$$

$$\begin{aligned}
&= \Theta(k-p) \frac{p}{k^3} \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon}{3-\varepsilon} \left(\frac{p}{k}\right)^2 + \frac{3\varepsilon(1+\varepsilon)}{(3-\varepsilon)(4-\varepsilon)} \left(\frac{p}{k}\right)^4 + \dots \right\} + k \leftrightarrow p \\
K_B(p, k, \varepsilon) &= \frac{\Theta(k-p)}{k^2} {}_2F_1[\varepsilon, 1; 2-\varepsilon; (\frac{p}{k})^2] + k \leftrightarrow p \\
&= \frac{\Theta(k-p)}{k^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left(\frac{p}{k}\right)^2 + \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{6-5\varepsilon+\varepsilon^2} \left(\frac{p}{k}\right)^4 + \dots \right\} + k \leftrightarrow p \quad (3.5)
\end{aligned}$$

überführen lassen. In Landau-Eichung $\xi = 0$ entkoppeln die beiden SDE's (3.4)

$$\begin{aligned}
A(p^2) &= 1 \\
B(p^2) &= m + (D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2} \\
&= m + \frac{2(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} K_B(p, k, \varepsilon). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Darüberhinaus kann in dieser Eichung durch die Ersetzung¹

$$\gamma^\mu \rightarrow \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu + \frac{k^\mu}{k^2} [B(p^2) - B((p+k)^2)] \mathbf{1} \quad (3.7)$$

die \tilde{V}^μ -WTI (B.16) erfüllt werden

$$\begin{aligned}
k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \not{k} + [B(p^2) - B((p+k)^2)] \mathbf{1} \\
&= \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p), \quad (3.8)
\end{aligned}$$

ohne das sich die skalaren SDE's (3.6) ändern. Allerdings kommt es für diese Vertexfunktion im Limes $k \rightarrow 0$ zu kinematischen Singularitäten, so daß die \tilde{V}^μ -WI (B.26) selbst in Landau-Eichung gebrochen bleibt

$$\begin{aligned}
\tilde{V}^\mu(p; k \rightarrow 0; \cdot) &\rightarrow \gamma^\mu - k^\mu \frac{2p \cdot k}{k^2} B'(p^2) \mathbf{1} \\
&\stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{S}^{-1}(p) \\
&= \gamma^\mu - 2p^\mu B'(p^2) \mathbf{1}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Wir betrachten in diesem Kapitel die SDE's (3.4) ausschließlich in Landau-Eichung, Resultate für andere Eichungen können eichkovariant mittels der LKT (C.12) ermittelt werden.

3.2 Lösung der SDE im UV-Bereich

In Kapitel 2 haben wir die UV-AF der $QED_{D<4}$ mittels RG-Methoden studiert und betont, daß es für die Definition der formalen SDE's (1.26) ausreichend ist, die UV-AF als Beschränkung des UV-Verhaltens der Greenschen Funktionen durch ihre nullte Ordnung aufzufassen. Auf der Basis der SDE

¹ Diese Ersetzung ist für den nackten Vertex γ^ν in Gl.(3.2) durchzuführen.

(3.6) ergibt sich diese Beschränkung für die invariante Funktion $B(p^2)$, indem nach Durchskalieren des Integrationsimpulses gemäß

$$k' = \frac{k}{|p|}, \quad \hat{p} = \frac{p}{|p|} \quad (3.10)$$

der Limes $p \rightarrow \infty$ durchgeführt wird

$$\begin{aligned} B(p^2) &= m + (D - 1)g^2 p^{-2\varepsilon} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{B((pk')^2)}{k'^2 + (\frac{B((pk')^2)}{p})^2} \frac{1}{(\hat{p} - k')^2} \\ &= m \left\{ 1 + (D - 1)g^2 p^{-2\varepsilon} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{1}{k'^2} \frac{1}{(\hat{p} - k')^2} + \mathcal{O}(p^{-4\varepsilon}) \right\} \\ &= m \left\{ 1 + \frac{(D - 1)\Gamma^2(1 - \varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)} \frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} + \mathcal{O}(p^{-4\varepsilon}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für eine vollständige Bestimmung der UV-Asymptotik von $B(p^2)$ ist es sinnvoll, die beiden Fälle der expliziten chiralen Symmetriebrechung (E_χ SB, $m \neq 0$) bzw. der dynamischen chiralen Symmetriebrechung (D_χ SB, $m = 0$) getrennt zu betrachten.

Die UV-Asymptotik für den Fall der E_χ SB

Der Integrand der SDE (3.6) kann unter abwechselnder Benutzung der beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + B^2(k^2)} &= \frac{1}{k^2} - \frac{B^2(k^2)}{k^2(k^2 + B^2(k^2))} \\ \frac{1}{(p - k)^2} &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \frac{(p - k)^2 - p^2}{(p - k)^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

wie folgt umgeschrieben werden²

$$\begin{aligned} B(p^2) &= \left\{ m + (D - 1)g^2 p^{-2\varepsilon} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{B((pk')^2)}{k'^2(\hat{p} - k')^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{p^2} \left\{ -(D - 1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^3(k^2)}{k^2(k^2 + B^2(k^2))} \right. \\ &+ (D - 1)g^2 p^{-2\varepsilon} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{B^3((pk')^2)}{k'^4} \frac{(\hat{p} - k')^2 - 1}{(\hat{p} - k')^2} \Big\} \\ &- \frac{(D - 1)g^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^5(k)}{k^4(k^2 + B^2(k^2))} \frac{(p - k)^2 - p^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Das letzte Loop-Integral in dieser Gleichung ist für $D < 4$ IR- und UV-konvergent und verhält sich im UV-Bereich wie

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^5(k^2)}{k^4(k^2 + B^2(k^2))} \frac{(p - k)^2 - p^2}{(p - k)^2}$$

²Gegenüber einer Entwicklung nach $(\frac{B(k^2)}{k})^2$ führt dieses Vorgehen zu keinen IR-Divergenzen.

$$\begin{aligned} &\stackrel{UV}{=} \frac{1}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^5(k^2)(1 - 4(\hat{p} \cdot \hat{k})^2)}{k^2(k^2 + B^2(k^2)^2)} \\ &= \mathcal{O}(p^{-2}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

so daß sich aus Gl.(3.13) für die UV-Asymptotik von $B(p^2)$ das Schema

$$\begin{aligned} B(p^2) &\stackrel{UV}{=} m \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_{0,n}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\ &+ \frac{b_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \varepsilon)m^3}{p^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_{1,n}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\ &+ \frac{b_{2,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \varepsilon)m^5}{p^4} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_{2,n}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \dots, \end{aligned} \quad (3.15)$$

bestehend aus einer Mischung gebrochener $(p^{-2\varepsilon})^n$ - und ganzzahliger $(p^{-2})^n$ -Potenzen, ergibt. Die mit den gebrochenen Potenzen verbundenen Anteile in der UV-Asymptotik von $B(p^2)$ bezeichnen wir aufgrund der Beziehung (2.32) als \ln_ε -Anteile. Die Koeffizienten $b_{j,k}$ sind dimensionslose Zahlen, die für $k = 0$ neben ε von der dimensionslosen Kombination $(gm^{-\varepsilon})^2$ abhängen.

³ Die Koeffizienten $b_{j,0}$ besitzen i.allg. neben einem perturbativen Anteil, der beispielsweise für den Koeffizienten $b_{1,0}$ in dem Ausdruck

$$\begin{aligned} b_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \varepsilon) &= \frac{(1-D)g^2}{m^3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^3(k^2)}{k^2(k^2 + B^2(k^2))} \\ &= \frac{(1-D)\Gamma(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \frac{(gm^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} + \mathcal{O}(gm^{-\varepsilon})^4 \end{aligned} \quad (3.16)$$

enthalten ist, bzgl. g nichtanalytische Anteile, die jedoch durch die perturbativen Beiträge unterdrückt werden und deshalb erst im Fall der D_χ SB sichtbar gemacht werden können. Die Bestimmung des Koeffizienten $b_{1,0}$ erfordert bereits die Kenntnis der gesamten Funktion $B(p^2)$, so daß der quantitative Gehalt des UV-Schemas (3.15) auf die Bestimmung des führenden \ln_ε -Anteils, der danach in den Lösungen der SDE ⁴

$$B(p^2) \stackrel{UV}{=} m + (D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (3.17)$$

enthalten ist, beschränkt bleibt. Ihre iterative Lösung führt für die zugehörigen Koeffizienten $b_{0,k}(\varepsilon)$ auf die Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} b_{0,k+1}(\varepsilon) &= (D-1)\Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma(1-\varepsilon(k+1))\Gamma(\varepsilon(k+1))}{\Gamma(1+\varepsilon k)\Gamma(2-\varepsilon(2+k))} b_{0,k}(\varepsilon) \\ b_{0,0} &= 1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

³Diese Abhängigkeit spiegelt den allgemeinen Sachverhalt wider, wonach die Greenschen Funktionen bzgl. m i.allg. nur zweimal an der Stelle $m = 0$ differenzierbar sind.

⁴Da die lineare Faltungsgleichung (3.17) nach Gl.(3.89) zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent ist, besitzt sie zwei linear unabhängige Lösungen. Der für $m \neq 0$ führende \ln_ε -Anteil ist durch ihre iterative Lösung gegeben.

die sich geschlossen lösen läßt⁵

$$\begin{aligned} B(p^2) &\stackrel{UV}{=} m \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{0,k}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^k \right\} \\ b_{0,k}(\varepsilon) &= \left\{ \frac{(D-1)\Gamma(1-\varepsilon)}{-\varepsilon^2} \right\}^k \\ &\times \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1+k\varepsilon)\Gamma(1-\frac{1}{\varepsilon})}{\Gamma(2-(k+1)\varepsilon)\Gamma(1+k)\Gamma(1-\frac{1}{\varepsilon}+k)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die UV-Asymptotik für den Fall der D_χ SB

Für $m = 0$ wird die Integralgleichung (3.6) homogen

$$B(p^2) = (D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (3.20)$$

und besitzt insbesondere die triviale Lösung

$$B(p^2) = 0, \quad (3.21)$$

die die perturbative Lösung dieser Gleichung darstellt. Existieren nichttriviale Lösungen⁶, dann müssen diese nichtanalytisch von der Eichkopplung g abhängig sein. Führen wir zur Bestimmung des führenden UV-Verhaltens von $B(p^2)$ den Limes $p \rightarrow \infty$ unter dem Integral in Gl.(3.20) durch

$$\begin{aligned} B(p^2) &= (D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2} \\ &\stackrel{UV}{=} \frac{(D-1)g^2}{p^2} \underbrace{\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)}}_{\text{UV-konvergent für } D < 4}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

dann ist die sich dabei ergebende UV-Asymptotik für $B(p^2)$ selbstkonsistent, da das verbleibende Loop-Integral für ein derart reguläres UV-Verhalten konvergent für $D < 4$ ist. Das Loop-Integral in Gl. (3.22) kann mit dem nackten chiralen Fermionkondensat identifiziert werden, das für den Fall $A(p^2) = 1$ durch

$$\begin{aligned} <\psi\bar{\psi}> &\equiv <0|\psi_\alpha(0)\bar{\psi}_\alpha(0)|0>_c \\ &= \text{tr} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} i \tilde{S}(k) e^{-ik \cdot x} \Big|_{x=0} \\ &= -\text{tr} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} i \frac{\not{k} + B(k^2) \mathbf{1}}{k^2 + B^2(k^2)} \\ &= 4 \int \frac{d_E^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

⁵Aus der Singularitätsstruktur der Koeffizienten $b_{0,k}(\varepsilon)$ wird deutlich, daß durch diese Reihe in Strenge nur für $\frac{1}{\varepsilon} \notin N$ eine Funktion definiert wird. Durch die Aufsummation dieser Reihe kann eine Fortsetzung auf die Werte $\frac{1}{\varepsilon} \in N$, für die es zu Mischungen zwischen ganzzahligen- und gebrochenen Potenzen im UV-Schema (3.15) kommt, vorgenommen werden.

⁶In diesem Fall gibt es mindestens zwei nichttriviale Lösungen, denn mit $B(p^2)$ löst auch $-B(p^2)$ die homogene, nichtlineare SDE (3.20).

definiert ist, so daß gilt

$$B(p^2) \stackrel{UV}{=} \frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2}, \quad (3.24)$$

wobei im Fall $m = 0$ aus Dimensionsgründen

$$g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle \propto (g^{\frac{1}{\varepsilon}})^3 \quad (3.25)$$

gelten muß, woraus die Nichtanalytizität einer etwaigen Lösung der SDE (3.20) ersichtlich wird.⁷ Für eine weitergehende Bestimmung der UV-Asymptotik schreiben wir die homogene SDE (3.20) analog zur Gl.(3.13) um

$$\begin{aligned} B(p^2) &= (D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2} \\ &= \frac{(D-1)g^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k)} \\ &- \frac{(D-1)g^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{(p-k)^2 - p^2}{(p-k)^2} \\ &= \frac{(D-1)g^2}{p^2} \left\{ \frac{\langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4} - p^{-2\varepsilon} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{B((pk')^2)}{k'^2} \frac{(\hat{p}-k')^2 - 1}{(\hat{p}-k')^2} \right\} \\ &+ \frac{(D-1)g^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^3(k^2)}{k^2(k^2 + B^2(k^2))} \frac{(p-k)^2 - p^2}{(p-k)^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da sich das letzte Loop-Integral in dieser Gleichung wegen der regulären UV-Asymptotik (3.22) von $B(p^2)$ im UV-Limes wie

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^3(k^2)}{k^2(k^2 + B^2(k^2))} \frac{(p-k)^2 - p^2}{(p-k)^2} \\ &\stackrel{UV}{=} \frac{1}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B^3(k^2)(1 - 4(\hat{p} \cdot \hat{k})^2)}{(k^2 + B^2(k^2))} \\ &= \mathcal{O}(p^{-2}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

verhält, wird das folgende UV-Schema nahegelegt

$$\begin{aligned} B(p^2) &\stackrel{UV}{=} \frac{D-1}{4p^2} \underbrace{g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}_{\propto g^{\frac{3}{\varepsilon}}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_{1,n}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\ &+ \frac{b_{2,0}(\varepsilon) g^{\frac{5}{\varepsilon}}}{p^4} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_{2,n}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\ &+ \frac{b_{3,0}(\varepsilon) g^{\frac{7}{\varepsilon}}}{p^6} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\dots} b_{3,n}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \dots, \end{aligned} \quad (3.28)$$

⁷ Dies ist ein Beispiel für den im Rahmen des Studiums der Lösungsmannigfaltigkeit der funktionalen SDE's in Kapitel 1 diskutierten Sachverhalt, wonach die Lösung der SDE's durch das Einfordern einer Schwachkopplungsentwicklung nicht notwendig eindeutig wird.

das bis auf das Fehlen der ersten Zeile mit dem UV-Schema (3.15) für den Fall $m \neq 0$ übereinstimmt, jedoch anstatt der nackten Masse m bzgl. g nichtanalytische Terme vor den perturbativen \ln_ε -Anteilen aufweist. Der führende \ln_ε -Anteil ist nach diesem Schema in den Lösungen der SDE

$$B(p^2) \stackrel{UV}{=} \frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2} - \frac{(D-1)g^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2} \frac{(p-k)^2 - p^2}{(p-k)^2} \quad (3.29)$$

enthalten, genauer gesagt, durch ihre iterative Lösung gegeben, die auf die Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} b_{1,k+1}(\varepsilon) &= (D-1)\Gamma(1-\varepsilon) \frac{\Gamma(-\varepsilon(k+1))\Gamma(1+\varepsilon(k+1))}{\Gamma(2+\varepsilon k)\Gamma(1-\varepsilon(2+k))} b_{1,k}(\varepsilon) \\ b_{1,0} &= 1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

führt. Die Lösung dieser Rekursion lautet

$$\begin{aligned} B(p^2) &\stackrel{UV}{=} \frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k}(\varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^k \right\} \\ b_{1,k}(\varepsilon) &= \left\{ \frac{(D-1)\Gamma(1-\varepsilon)}{-\varepsilon^2} \right\}^k \\ &\times \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(2+k\varepsilon)\Gamma(1+\frac{1}{\varepsilon})}{\Gamma(1-(k+1)\varepsilon)\Gamma(1+k)\Gamma(1+\frac{1}{\varepsilon}+k)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Der vom äußeren Impuls unabhängige Subtraktionsterm im Loop-Integral der SDE (3.29)

$$\begin{aligned} B(p^2) &\stackrel{UV}{=} \frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2} \\ &+ \frac{(D-1)g^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2} \left\{ \frac{p^2}{(p-k)^2} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

bewirkt, daß es im Rahmen ihrer iterativen Lösung zu keinen IR-Divergenzen kommt. In dimensioneller Regularisierung, die nicht zwischen IR- und UV-Divergenzen unterscheidet, kann dieser Subtraktionsterm unterdrückt werden, so daß der jeweils führende \ln_ε -Anteil in der UV-Asymptotik von B aus einer SDE

$$B(p^2) \stackrel{UV}{=} m + (D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2} \frac{1}{(p-k)^2}, \quad (3.33)$$

deren Lösungen über die UV-Randbedingungen

$$B(p^2) \rightarrow \begin{cases} \frac{m}{\frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2}}, & m \neq 0 \\ m = 0 & m = 0 \end{cases}, \quad p \rightarrow \infty \quad (3.34)$$

dem Fall der E_χ SB bzw. D_χ SB zugeordnet werden können, gewonnen werden kann. Die UV-Schemata (3.15/3.28) stimmen mit der OPE-Hypothese für eine UV-asymptotisch freie Theorie überein, vgl. [LA 92]. Aus ihrer Herleitung mittels der SDE (3.6) wird deutlich, daß sie der Form nach auch für die volle Theorie Gültigkeit besitzen sollten.

3.3 Summationsmethoden für die UV-Asymptotik

Für jede geschlossene Näherung der SDE's (1.26) der drei Basisvertices lässt sich in NPDR aufgrund der UV-AF für die Koeffizientensätze der führenden \ln_ε -Anteile ihrer UV-Asymptotik zumindest eine Rekursionsbeziehung der Form (3.18/3.30) herleiten, die jedoch i.allg. nicht geschlossen lösbar sein wird. Für die Aufsummation der für $\varepsilon \rightarrow 0$ führenden Terme dieser Reihen ist es am zweckmäßigsten, auf die SDE's zurückzugehen. Auf diese Weise entsteht eine zur RG alternative – z.T. darüberhinausgehende – Technik zur Teilsummation logarithmischer Anteile in der UV-Asymptotik der Greenschen Funktionen, die sich anhand der SDE (3.6) der QRBA einfach darstellen lässt.

LL _{ε} -Summation mittels SDE's

Im Rahmen einer iterativen Lösung der SDE (3.6) trägt zur Bestimmung einer bestimmten Impulspotenz $(p^{-2\varepsilon})^n$ des führenden \ln_ε -Anteils in den UV-Schemata (3.15/3.28) jeder Term in der Entwicklung (3.5) für den K_B bei. Für eine Leading-Log- (LL _{ε} -) Summation, d.h. für die Aufsummation der Pole ε^{-n} höchster Ordnung pro Impulspotenz $(p^{-2\varepsilon})^n$, ist es ausreichend, im Fall $m \neq 0$ den führenden Beitrag der $(\frac{p}{k})^2$ - und im Fall $m = 0$ den führenden Beitrag der $(\frac{k}{p})^2$ -Entwicklung (3.5) des Kerns K_B zu berücksichtigen, da nur diese Beiträge in jedem Iterationsschritt neue Pole bzgl. ε erzeugen. Demnach kann die folgende Ersetzung vorgenommen werden⁸

$$\begin{aligned} B(p^2) &\xrightarrow{\text{LL}_\varepsilon} B^L(p^2) \\ K_B(p, k, \varepsilon) &\xrightarrow{\text{LL}_\varepsilon} K_B^L(p, k) \equiv \begin{cases} \frac{\Theta(k-p)}{\frac{k^2}{p^2}} & , \quad m \neq 0 \\ \frac{\Theta(p-k)}{p^2} & , \quad m = 0 \end{cases} \\ \frac{d}{dp} \left\{ \frac{K_B^L(p, k)}{p^2 K_B^L(p, k)} \right\} &= \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{k^2} \delta(p-k) & , \quad m \neq 0 \\ \delta(p-k) & , \quad m = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Diese Näherung erlaubt es, die SDE (3.6) in eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung umzuwandeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left\{ \frac{B^L(p^2)}{p^2 B^L(p^2)} \right\} &= \mp \frac{2(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{p^{D-3}}{p^2 + (B^L(p^2))^2} \\ &\times \left\{ \begin{array}{ll} B^L(p^2) & , \quad m \neq 0 \\ p^2 B^L(p^2) & , \quad m = 0 \end{array} \right\} \\ B^L(p^2) &\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} m & , \quad m \neq 0 \\ \frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2} & , \quad m = 0 \end{array} \right\}, \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Deren Lösung im UV-Bereich lautet

$$B^L(p^2) \stackrel{E_\chi SB, UV}{=} m \exp \left\{ -\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon} \right\}$$

⁸Allgemein formuliert besteht in NPDR eine LL _{ε} -Summation mittels SDE's in ihrer iterativen Lösung unter alleiniger Berücksichtigung der divergenzerzeugenden, bzgl. der äußeren Impulse polynomiellen Anteile in den Integranden ihrer Loop-Integrale.

$$\begin{aligned}
&= m \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}}{2\varepsilon\Gamma(1+n)} \right)^n}_{\equiv b_{0,n}^L(\varepsilon)} \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\
B^L(p^2) &\stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{(D-1)g^2 < \psi \bar{\psi} >}{4p^2} \exp \left\{ \frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon} \right\} \\
&= \frac{(D-1)g^2 < \psi \bar{\psi} >}{4p^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}}{2\varepsilon\Gamma(1+n)} \right)^n}_{\equiv b_{1,n}^L(\varepsilon)} \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\
\gamma_m^{(1)}(\varepsilon) &\equiv -\frac{2(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \rightarrow -\frac{3}{8\pi^2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Die Koeffizientensätze $\{b_{0,n}^L(\varepsilon), b_{1,n}^L(\varepsilon)\}$ stimmen mit den für $\varepsilon \rightarrow 0$ führenden Beiträgen der exakten Koeffizienten (3.19/3.31) überein.

Aufgrund der Näherung (3.1) für den Bosonpropagator und die Vertexfunktion ist in der QRBA (perturbativ) nur eine (multiplikative) Renormierung der Masse vorzunehmen. Im massenunabhängigen Weinberg-Renormierungsschema (WBRS), das in der QRBA durch

$$\begin{aligned}
Z_m^{-1}(g_r, \varepsilon) &= \frac{m_{c,r}}{m} \equiv \frac{B(p^2, m \neq 0)}{m} \Big|_{p^2=\mu^2, m=0} \\
\gamma_m(g_r, \varepsilon) &\stackrel{\text{Gl.(2.24)}}{=} -\beta(g_r, \varepsilon) \frac{1}{Z_m} \frac{\partial Z_m(g_r, \varepsilon)}{\partial g_r} \\
&\stackrel{\text{QRBA}}{=} \varepsilon g_r \frac{1}{Z_m} \frac{\partial Z_m(g_r, \varepsilon)}{\partial g_r} \\
g_r &= \mu^{-\varepsilon} g = \hat{g} \\
\bar{g}_r(t, \varepsilon) &= g_r \exp\{-\varepsilon t\} \tag{3.38}
\end{aligned}$$

definiert ist, folgt mit Gl.(3.37) auf LL $_\varepsilon$ -Niveau

$$\begin{aligned}
Z_m(g_r, \varepsilon) &= \exp \left\{ \frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\varepsilon} g_r^2 \right\} \\
\gamma_m(g_r, \varepsilon) &= \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die in der QRBA renormierungsinvariante Funktion $B(p^2)$ als Funktion der renormierten Strommasse

$$\begin{aligned}
B^L(\bar{p}^2, g_r, m_{c,r}, \varepsilon) &\stackrel{E_\chi SB, UV}{=} m_{c,r} \exp \left\{ \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2 \left(\frac{1 - (\bar{p})^{-2\varepsilon}}{2\varepsilon} \right) \right\} \\
&= m_{c,r} \left\{ (\bar{p})^{-\frac{3}{2}\frac{g_r^2}{4\pi^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \\
\bar{p} &= \frac{p}{\mu}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Das Resultat (3.40) ist mit der RG konsistent, wonach die Funktion $B(p^2)$ im WBRS (3.38) die Darstellung

$$B(\bar{p}^2, g_r, m_{c,r}, \varepsilon) = m_{c,r} \exp \left\{ \int_0^{\ln(\bar{p})} dy \gamma_m(\bar{g}_r(t, \varepsilon), \varepsilon) \right\}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{UV-AF}}{=} m_{c,r} \exp \left\{ \int_0^{\ln(\bar{p})} dy \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) \bar{g}_r^2(y, \varepsilon) + \mathcal{O}(\bar{g}_r^4) \right\} \\ & \stackrel{\text{Gl.(3.38)}}{=} m_{c,r} \exp \left\{ \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2 \frac{1 - (\bar{p})^{-2\varepsilon}}{2\varepsilon} + \mathcal{O}((\bar{p})^{-4\varepsilon}) \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

besitzt. Für die laufende renormierte Masse (2.23) ergibt sich hieraus das Resultat

$$\begin{aligned} \bar{m}_r(t, \varepsilon) & \stackrel{WBRSS}{=} e^{-t} B(\bar{p} = e^t) \\ & \stackrel{QRBA}{=} m_{c,r} e^{-t} \exp \left\{ \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2 \left(\frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{2\varepsilon} \right) \right\} \\ & = m_{c,r} \left\{ e^{-(1+\frac{3}{2}\frac{g_r^2}{4\pi^2})t} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

das mit dem Limes $\beta_1 \rightarrow 0$ der Ein-Loop RG-Beziehung (2.31) übereinstimmt.

Das LL_ε -Resultat (3.37) für den Fall der D_χ SB geht über eine RG-Summation mit perturbativem Input hinaus. Die Überprüfung der für diesen Fall naheliegenden Renormierungsvorschrift

$$\begin{aligned} B^L(\bar{p}^2, g_r, \varepsilon) & \stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{(D-1)g_r^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle_r}{4\bar{p}^2} \exp \left\{ -\gamma_m^{(1)}(\varepsilon) g_r^2 \frac{1 - (\bar{p})^{-2\varepsilon}}{2\varepsilon} \right\} \\ & = \frac{3g_r^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle_r}{4\bar{p}^2} \left\{ (\bar{p})^{\frac{3}{2}\frac{g_r^2}{4\pi^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \\ & \langle \psi \bar{\psi} \rangle_r \equiv Z_m(g_r, \varepsilon) \mu^{2\varepsilon} \langle \psi \bar{\psi} \rangle \end{aligned} \quad (3.43)$$

erfordert die Kenntnis der Singularitätsstruktur des chiralen Fermionkondensats im Fall $m=0$, die nur aus einer Analyse der SDE gewonnen werden kann, die auch den IR-Bereich mitberücksichtigt.

NLL $_\varepsilon$ -Summation mittels SDE's

Wir diskutieren nachfolgend eine Näherung der SDE (3.6), die wir zwar als eine Next-to-Leading-Log- (NLL_ε) Näherung konstruieren, von der wir jedoch zeigen werden, daß sie den vollständigen Kontinuumsgehalt der QRBA enthält.

Eine Aufsummation, die die beiden höchsten Pole $\varepsilon^{-n}, \varepsilon^{-(n-1)}$ pro Impulsgröße $(p^{-2\varepsilon})^n$ in den führenden \ln_ε -Anteilen (3.15/3.28) der UV-Asymptotik für $B(p^2)$ richtig berücksichtigt, ergibt sich durch die Ersetzung

$$\begin{aligned} B(p^2) & \xrightarrow{\text{NLL}_\varepsilon} B^N(p^2) \\ K_B(p, k, \varepsilon) & \xrightarrow{\text{NLL}_\varepsilon} K_B^N(p, k) \equiv \frac{\Theta(p-k)}{p^2} + \frac{\Theta(k-p)}{k^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{d}{dp} p^3 \frac{d}{dp} K_B^N(p, k) & = \delta(p-k). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die weiteren Terme in der Entwicklung (3.5) des Kerns K_B sind nicht mehr divergenzerzeugend und zusätzlich von der $\mathcal{O}(\varepsilon)$, also erst relevant, wenn

mindestens die pro Impulspotenz $(p^{-2\varepsilon})^n$ drei höchsten ε -Pole richtig berücksichtigt werden sollen. Mit dieser Kernnäherung geht die SDE (3.6) in die folgende nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung über

$$\left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} + 3p \frac{d}{dp} + \tilde{g}^2(\varepsilon) \frac{p^{2-2\varepsilon}}{p^2 + (B^N(p))^2} \right\} B^N(p) = 0 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}^2(\varepsilon) &= \frac{4(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \\ B^N(p^2) &\rightarrow \begin{cases} \frac{m}{\frac{(D-1)g^2<\psi\bar{\psi}>}{4p^2}}, & m \neq 0 \\ , & m = 0 \end{cases}, \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ihre Lösung im UV-Bereich ist durch Besselfunktionen zum Index $\pm\frac{1}{\varepsilon}$ gegeben, die über ihre Asymptotik [As 84]

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad x \rightarrow 0 \quad (3.47)$$

dem Fall der E_χ SB bzw. D_χ SB zugeordnet werden können.⁹

$$\begin{aligned} B^N(p^2) &\stackrel{E_\chi SB, UV}{=} m\Gamma(1-\frac{1}{\varepsilon}) \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{p} J_{-\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)p^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \\ &= m \left\{ 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\varepsilon})(\frac{1-D}{\Gamma(2-\varepsilon)\varepsilon^2})^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-\frac{1}{\varepsilon}+k)} \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\right)^k}_{\equiv b_{0,k}^N(\varepsilon)} \right\} \\ B^N(p^2) &\stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{(D-1)g^2<\psi\bar{\psi}>}{4p^2} \Gamma(1+\frac{1}{\varepsilon}) \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} p J_{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)p^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{(D-1)g^2<\psi\bar{\psi}>}{4p^2} \left\{ 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\varepsilon})(\frac{1-D}{\Gamma(2-\varepsilon)\varepsilon^2})^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\frac{1}{\varepsilon}+k)} \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\right)^k}_{\equiv b_{1,k}^N(\varepsilon)} \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ein Vergleich der Laurententwicklung bzgl. ε für die ersten Entwicklungskoeffizienten $b_{0,k}(\varepsilon)$ der exakten UV-Asymptotik (3.19) mit derjenigen für die Koeffizienten $b_{0,k}^N(\varepsilon)$ der NLL $_\varepsilon$ -Näherung zeigt explizit die Übereinstimmung der beiden führenden ε -Pole

$$\begin{aligned} b_{0,1}(\varepsilon) &= (D-1)\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma + (4 - 2\gamma + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12})\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \\ b_{0,1}^N(\varepsilon) &= (D-1)\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2 - \gamma + (3 - 2\gamma + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12})\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \\ b_{0,2}(\varepsilon) &= (D-1)^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{\frac{5}{2} - \gamma}{\varepsilon} + \frac{19}{2} - 5\gamma + \gamma^2 - \frac{\pi^2}{12} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \\ b_{0,2}^N(\varepsilon) &= (D-1)^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{\frac{5}{2} - \gamma}{\varepsilon} + 8 - 5\gamma + \gamma^2 - \frac{\pi^2}{12} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

⁹Die Funktionen $J_{\pm\frac{1}{\varepsilon}}(x)$ sind nur für $\frac{1}{\varepsilon} \notin N$ linear unabhängig, eine Fortsetzung auf Werte $\frac{1}{\varepsilon} \in N$ kann durch die Ersetzung $J_{-\frac{1}{\varepsilon}}(x) \rightarrow Y_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)$ vorgenommen werden.

Eine entsprechende Übereinstimmung ist für den Fall der D_χ SB zwischen den Koeffizienten $b_{1,k}(\varepsilon)$ und $b_{1,k}^N(\varepsilon)$ gegeben.

Für die Renormierungskonstante Z_m bzw. die RG-Funktion γ_m ergibt sich im WBRS (3.38) mit Gl.(3.48) auf NLL $_\varepsilon$ -Niveau

$$\begin{aligned}
 Z_m(g_r, \varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{\varepsilon})} \left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{2\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{J_{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)} \\
 \gamma_m(g_r, \varepsilon) &= \tilde{g}_r(\varepsilon) \frac{J_{1-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)}{J_{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)} \\
 &= - \underbrace{\frac{4(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)(D-2)}}_{\rightarrow 6, \quad \varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \\
 &- \underbrace{\frac{8(D-1)^2}{\Gamma^2(2-\varepsilon)(D-2)^2(D-3)}}_{\rightarrow 18, \quad \varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^2 + \mathcal{O}(g_r^6) \\
 \tilde{g}_r^2(\varepsilon) &\equiv (\mu^{-\varepsilon} \tilde{g}(\varepsilon))^2 = \frac{4(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Als Funktion der renormierten Masse folgt für $B(p^2)$

$$B^N(\bar{p}^2, g_r, m_{c,r}, \varepsilon) \stackrel{E_\chi SB, UV}{=} \frac{m_{c,r}}{\bar{p}} \frac{J_{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)(\bar{p})^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)}{J_{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)}. \tag{3.51}$$

Für diese Darstellung kann mit der Beziehung [As 84]

$$J_{-\nu}(x) = \cos(\pi\nu) J_\nu(x) - \sin(\pi\nu) Y_\nu(x) \tag{3.52}$$

und den Debyeschen asymptotischen Entwicklungen der Besselfunktionen für $\nu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 J_\nu(\nu x) &\xrightarrow{x \leq 1} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left\{\nu\left(\sqrt{1-x^2} - \text{Arccosh}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\} \\
 J_\nu(\nu x) &\xrightarrow{x > 1} \frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{2}}} \cos\left\{\nu\left(\sqrt{x^2-1} - \text{Arccos}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \frac{\pi}{4}\right\} \\
 Y_\nu(\nu x) &\xrightarrow{x \leq 1} -\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi\nu}{2}}} \exp\left\{-\nu\left(\sqrt{1-x^2} - \text{Arccosh}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\} \\
 Y_\nu(\nu x) &\xrightarrow{x > 1} \frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}} \sin\left\{\nu\left(\sqrt{x^2-1} - \text{Arccos}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \frac{\pi}{4}\right\} \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

der Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ studiert werden. Mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_r(0) &= \frac{g_r}{g_k} \\
 g_k &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \simeq 3.628 \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

geht die Fallunterscheidung $x \leq 1$ bzw. $x > 1$ in eine Unterteilung $g_r < g_k$ bzw. $g_r > g_k$ hinsichtlich der Kopplungsabhängigkeit von $B(p^2)$ im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ über

$$\begin{aligned} B^{UV}(\bar{p}^2, g_r, m_{c,r}, \varepsilon \rightarrow 0) &\rightarrow \begin{cases} m_{c,r}(\bar{p})^{\gamma_m(g_r, 0)} & , \quad g_r \leq g_k \\ \frac{m_{c,r}}{\bar{p}} \frac{\cos(\frac{1}{\varepsilon}\phi(\bar{p}, \varepsilon))}{\cos(\frac{1}{\varepsilon}\phi(1, \varepsilon))} & , \quad g_r > g_k \end{cases} \\ \gamma_m(g_r, 0) &\equiv -1 + \sqrt{1 - (\frac{g_r}{g_k})^2} \\ &= -\frac{1}{2}(\frac{g_r}{g_k})^2 + \mathcal{O}(g_r^4), \quad g_r \leq g_k, \end{aligned} \quad (3.55)$$

wobei die Funktion $\phi(\bar{p}, \varepsilon)$ für $\bar{p} \neq 0$ eine Taylorentwicklung bzgl. ε besitzt, so daß für den Fall $g_r > g_k$ kein wohldefinierter Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ existiert.

Das potenzartige UV-Verhalten für $B(\bar{p}^2)$ im Fall $g_r \leq g_k$ ist wegen

$$\bar{g}_r(t, \varepsilon) \rightarrow g_r, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.56)$$

konsistent mit der RG-Darstellung für $B(p^2)$

$$\begin{aligned} B(\bar{p}^2) &= m_{c,r} \exp \left\{ \int_0^{\ln(\bar{p})} dy \gamma_m(\bar{g}_r(y, \varepsilon), \varepsilon) \right\} \\ &\rightarrow m_{c,r}(\bar{p})^{\gamma_m(g_r, 0)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Die alleinige Berücksichtigung des ersten Terms in der Taylorentwicklung (3.55) der γ_m -Funktion führt auf das LL_ε -Ergebnis (3.41) zurück.

Zu den NLL_ε -Ergebnissen geben wir die folgenden Erläuterungen:

- Da die γ_m -Funktion (3.55) in jeder Ordnung bzgl. g_r einen endlichen Beitrag ausbildet, stellt Gl.(3.51) eine Lösung der SDE (3.6) im UV-Bereich in NPDR dar, die – obwohl als NLL_ε -Näherung konstruiert – eine über RG-Summationen hinausgehende Aufsummation störungstheoretischer Terme beinhaltet. Ihr Kontinuumslimes (3.55) stimmt für $g_r \leq g_k$ mit der sog. BJW-UV-Kontinuumslösung¹⁰

$$B^{BJW}(p, g) \equiv B^{BJW}(\mu, g) \begin{cases} (\bar{p})^{-1 + \sqrt{1 - (\frac{g}{g_k})^2}}, & g < g_k \\ \frac{1}{\bar{p}} \cos(\ln(\bar{p}) \sqrt{(\frac{g}{g_k})^2 - 1}) & , \quad g > g_k \end{cases} \quad (3.58)$$

überein, die von [BJW 67] im Rahmen des endliche-QED₄-Projekts ohne Verwendung eines Regularisierungsverfahrens als UV-Lösung der SDE (3.6) in $D = 4$ und für $m = 0$ gefunden wurde. Daß der vollständige Kontinuumslimes in der NLL_ε -Kernnäherung (3.44) erhalten bleibt, wird aufgrund der Entwicklung (3.5) verständlich, wofür nach

$$K_B(p, k, \varepsilon) = K_B^N(p, k) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.59)$$

¹⁰I.allg. wird nur die Lösung für $g_r < g_k$ so bezeichnet.

gilt, d.h. diese Näherung ist exakt, wenn nur im Winkelintegral in Gl.(3.4) $D = 4$ gesetzt wird, wobei die Variation von D nach wie vor über das Betragsintegral regularisierend wirkt.

- Die BJW-Kontinuumslösung (3.58) für $g_r < g_k$ benötigt innerhalb der dimensionell regularisierten Theorie eine endliche nackte Masse $m(m_{c,r}, \varepsilon)$, die zwar im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet, aber auf eine endliche Strommasse $m_{c,r}$ führt und deshalb eine E_χ SB-Lösung der SDE (3.6) darstellt. Dies zeigt, daß es i.allg. wenig aussagt, wenn die nackte Masse in einer formalen Kontinuums-SDE null gesetzt wird.
- Aus der oszillierenden Asymptotik (3.53) der Besselfunktionen resultiert, daß im Kontinuumslimes für $g_r > g_k$ die D_χ SB-Lösung (3.48) nicht mehr gegenüber der E_χ SB-Lösung unterdrückt ist. Infolgedessen ist zu vermuten, daß sich selbst im Fall der E_χ SB für $g_r > g_k$ nur dann das BJW-Kontinuumsresultat (3.58) ergibt, wenn beide Anteile in der UV-Asymptotik von $B(p^2)$ zusammen betrachtet und geeignet renormiert werden. Wir gehen auf dieses Problem im nächsten Abschnitt näher ein.

3.4 Lösung der SDE in der Bifurkationsnäherung

In der UV-Asymptotik von $B(p^2)$ sind die echt nichtperturbativen Effekte im Fall der E_χ SB aufgrund der UF-AF unterdrückt und können im Fall der D_χ SB nur durch das nackte chirale Fermionkondensat parametrisiert werden. Um sie erfassen zu können, studieren wir nachfolgend die nichtlineare SDE (3.6) in der Nähe des chiralen Limes $m = 0$ im Rahmen einer Bifurkationsnäherung, die sich analytisch durchführen läßt.

Es ist zu vermuten, daß die Funktion $B(p^2)$ für $m \approx 0$ "klein" ist, so daß es naheliegt, die nichtlineare SDE (3.6) für diesen Fall zu linearisieren

$$\begin{aligned} B(p^2) &= m + (D - 1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \frac{1}{(p - k)^2} \\ &= m + (D - 1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{B(k^2)}{k^2} + \mathcal{O}(B^3) \right\} \frac{1}{(p - k)^2}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

wodurch jedoch künstliche IR-Divergenzen erzeugt werden, so daß eine IR-reguläre Bifurkationsnäherung (IRBN) formuliert werden muß. Die beiden gängigsten IRBN sind wie folgt definiert:

- **IRBN-I**

Es wird in der nichtlinearen SDE (3.60) die Ersetzung

$$\frac{B(k^2)}{k^2 + (B(k^2))^2} \rightarrow \frac{\delta B(k^2)}{k^2} \quad (3.61)$$

vorgenommen und ein IR-Cut-Off δm_t (totale- bzw. Konstituentenmasse) eingeführt, der selbstkonsistent aus der Bedingung

$$\delta B(\delta m_t^2) = \delta m_t \quad (3.62)$$

zu bestimmen ist, d.h. demjenigen Impuls entspricht, ab dem die Näherung (3.61) gerechtfertigt ist. Die Werte von $B(k^2)$ für $k \in [0, \delta m_t]$ sind durch Extrapolation der Werte $B(k^2 \approx \delta m_t^2)$ definiert.

• IRBN-II

In der SDE (3.60) wird die Ersetzung

$$\begin{aligned} \frac{B(k^2)}{k^2 + (B(k^2))^2} &\rightarrow \frac{\delta B(k^2)}{k^2 + \delta m_t^2} \\ \delta m_t = \delta B(0) \end{aligned} \quad (3.63)$$

vorgenommen.

Beide Verfahren führen aufgrund der Definition der δm_t 's auf ein nichtlineares Problem. Ist $B(k^2)$ für $k \approx 0$ regulär, dann stimmen die beiden totalen Massen δm_t für kleine Werte näherungsweise überein und stellen eine Approximation für $m_t = B(0)$ dar. Sollte die nichtlineare SDE (3.6) den Effekt der D_χ SB in NPDR erst ab einem gewissen "kritischen" ε zeigen, dann wird dieses nach der klassischen Problemstellung der Bifurcationstheorie durch die IRBN exakt bestimmt.

3.4.1 IRBN-I in NPDR

Zur Durchführung der IRBN-I überführen wir die SDE (3.6) durch die Kernnäherung (3.44) in das folgende nichtlineare Randwertproblem (RWP), bestehend aus der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} + 3p \frac{d}{dp} + \tilde{g}^2(\varepsilon) \frac{p^{2-2\varepsilon}}{p^2 + B^2(p^2)} \right\} B(p) &= 0 \\ \tilde{g}^2(\varepsilon) &= \frac{4(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

der IR-Randbedingung

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p^3}{2} \frac{d}{dp} \right) B(p) &= \frac{\tilde{g}^2(\varepsilon)}{2} \int_0^p dk k^{D-1} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \\ &\stackrel{!}{\rightarrow} 0, \quad p \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

und der UV-Randbedingung

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} p \frac{d}{dp} + 1 \right) B(p) &= m + \frac{\tilde{g}^2(\varepsilon)}{2} \int_p^\infty dk k^{D-3} \frac{B(k^2)}{k^2 + B^2(k^2)} \\ &\stackrel{!}{\rightarrow} m, \quad p \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.66)$$

das nach Gl.(3.59) bis auf Terme der $\mathcal{O}(\varepsilon)$ zur SDE (3.6) äquivalent ist.¹¹ In IRBN-I nimmt es die folgende Gestalt an

$$\left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} + 3p \frac{d}{dp} + \tilde{g}^2(\varepsilon)p^{-2\varepsilon} \right\} \delta B(p) = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{d}{dp} \delta B(p) \Big|_{p=\delta m_t} = 0 \quad (3.68)$$

$$\left(\frac{1}{2}p \frac{d}{dp} + 1 \right) \delta B(p) \Big|_{p=\infty} = m \quad (3.69)$$

$$\delta m_t = \delta B(\delta m_t). \quad (3.70)$$

Dieses RWP unterscheidet sich nur hinsichtlich der IR-Randbedingung (3.68) von der NLL_ε -UV-Näherung und stellt demnach eine minimale Fortsetzung der UV-Asymptotik in den IR-Bereich dar. Dementsprechend lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.67)

$$\delta B(p^2) = \frac{1}{p} \left\{ \alpha J_{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)p^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right) + \beta Y_{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)p^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right\}. \quad (3.71)$$

Aus der IR- und Normierungsbedinung (3.68/3.70) folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2\varepsilon} \delta m_t^2 \tilde{g}(\varepsilon) \delta m_t^{-\varepsilon} Y_{\frac{1}{\varepsilon}-1} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)\delta m_t^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \\ \beta &= -\frac{\pi}{2\varepsilon} \delta m_t^2 \tilde{g}(\varepsilon) \delta m_t^{-\varepsilon} J_{\frac{1}{\varepsilon}-1} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)\delta m_t^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die nackte Masse m als Funktion der totalen Masse δm_t und des Regularisierungsparameters ε ergibt sich aus der UV-Randbedingung (3.69)

$$m(\delta m_t, \varepsilon) = \delta m_t \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)\delta m_t^{-\varepsilon}}{2\varepsilon} \right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) J_{\frac{1}{\varepsilon}-1} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)\delta m_t^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (3.73)$$

In der Abbildung (3.1) ist die numerische Lösung des nichtlinearen RWP (3.64-3.66) im Vergleich zur IRBN-I (3.71/3.72) für zwei verschiedene Werte der totalen Masse $m_t = B(0)$ und $\varepsilon = 0.1$ dargestellt.¹² Die Funktion $B(p^2)$ zeigt auf einer logarithmischen Skala, für die sie nach Gl.(3.42) bis auf einen Vorfaktor mit der laufenden renormierten Masse übereinstimmt, ein stufenfunktionsartiges Verhalten, d.h. für den IR- bzw. UV-Bereich sind zwei unterschiedliche Massenskalen relevant. In der untersten Abbildung (3.1) besitzt $B(p^2)$ eine Nullstelle und strebt im UV-Bereich gegen eine negative nackte Masse $m = \lim_{p \rightarrow \infty} B(p^2)$. Demnach ist zu vermuten, daß ein spezieller Wert $m_t = m_d$ (dynamische Masse), der zwischen

¹¹Das RWP (3.64-3.66) für $D = 4$ ist zuerst von [FK 76] in einer COR vollständig (analytisch) gelöst worden. In $D = 4$ ist die nichtlineare Differentialgleichung (3.64) skaleninvariant und kann deshalb in eine Differentialgleichung erster Ordnung überführt werden. Unserer Kenntnis nach ist das Randwertproblem für $D \neq 4$ bislang noch nicht formuliert worden und aufgrund der Brechung der Skaleninvarianz für $D \neq 4$ scheint keine analytische Lösung der vollen nichtlinearen Differentialgleichung (3.64) möglich zu sein.

¹²Wir haben das nichtlineare RWP (3.64-3.66) bei Vorgabe der Anfangswerte $m_t = B(0)$ und $B'(0) = 0$ mit der NDSOLVE-Routine von MATHEMATICA gelöst. Alle dimensionsbehafteten Größen sind gemäß Gl.(2.15) auf die Skala $g^{\frac{1}{\varepsilon}}$ bezogen, so daß die Lösung nur noch von ε abhängt (die nackte Masse ist aus dem RWP eliminiert).

den beiden Werten für m_t in den Abbildungen (3.1) liegt, existiert, für den $m = \lim_{p \rightarrow \infty} B(p^2, m_d) = 0$ gilt, so daß es zur D_χ SB kommt. Um diese Vermutung zu überprüfen, ist in der Abbildung (3.2) die Relation $m(m_t, \varepsilon)$ in der Nähe des chiralen Limes $m \approx 0$ für $\varepsilon = 0.1, 0.04$ dargestellt, wobei zur Verdeutlichung des Effekts der Kernnäherung (3.44) zusätzlich die exakte numerische Lösung der Integralgleichung (3.6) dargestellt ist.¹³¹⁴ Aus dieser Abbildung läßt sich die mit der D_χ SB verbundene Hysterese ablesen, d.h. für eine verschwindende nackte Masse gibt es (mehrere) von null verschiedene totale Massen $m_t = m_d$. Darüberhinaus zeigt die Abbildung (3.2), daß die Ergebnisse der IRBN-I für kleines ε gegen die exakten Ergebnisse konvergieren, so daß der Kontinuumslimes anhand der analytischen Beziehungen der IRBN-I studiert werden kann.

Der Kontinuumslimes im Fall der E_χ SB

In der Darstellung (3.71/3.72) für $\delta B(p^2)$ ist das zur Einhaltung der Renormierungsbedingung $0 < \delta m_t = \delta B(\delta m_t) < \infty$ notwendige Nachführen der nackten Masse $m \rightarrow m(\delta m_t, \varepsilon)$ gemäß Gl.(3.73) bereits implementiert, so daß sich für diese Darstellung im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ ein endliches Ergebnis ergeben sollte. Mit der asymptotischen Entwicklung (3.53) der Besselfunktionen folgt das Kontinuumslimesresultat

$$\delta B(p^2, \delta m_t) = \frac{\delta m_t^2}{p} \begin{cases} \frac{\gamma(g_r)-1}{2\gamma(g_r)} \left(\frac{p}{\delta m_t} \right)^{-\gamma(g_r)} + \frac{\gamma(g_r)+1}{2\gamma(g_r)} \left(\frac{p}{\delta m_t} \right)^{\gamma(g_r)} & , \quad g_r < g_k \\ 1 + \ln \left(\frac{p}{\delta m_t} \right) & , \quad g_r = g_k \\ \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma'^2(g_r)}} \cos(\gamma'(g_r) \ln(\frac{p}{\delta m_t}) + \phi(g_r)) & , \quad g_r > g_k \end{cases} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \gamma(g_r) &= \sqrt{1 - \left(\frac{g_r}{g_k} \right)^2}, & g_r < g_k \\ \gamma'(g_r) &= \sqrt{\left(\frac{g_r}{g_k} \right)^2 - 1}, & g_r > g_k \\ \cos(\phi(g_r)) &= \left(1 + \frac{1}{\gamma'^2(g_r)} \right)^{-\frac{1}{2}}, & g_r > g_k \\ g_r &= \delta m_t^{-\varepsilon} g \\ g_k &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

das mit demjenigen der COR [M1 85] und, abgesehen von der unterschiedlichen Renormierungsbedingung (3.70), mit der BJW-UV-Kontinuumslösung (3.58) übereinstimmt.¹⁵ Die Formulierung der Renormierungsbedingung

¹³Das dazu verwendete Lösungsverfahren beschreiben wir im Rahmen des Studiums der Rainbow-Näherung im nächsten Kapitel.

¹⁴In der Abbildung (3.2) kommt die Symmetrie der SDE (3.6) bzgl. der Transformation $(m, B) \rightarrow (-m, -B)$ zum Ausdruck.

¹⁵Im Fall $g_r < g_k$ ist im UV-Bereich der erste Term in der Darstellung (3.74) für $\delta B(p^2)$ unterdrückt.

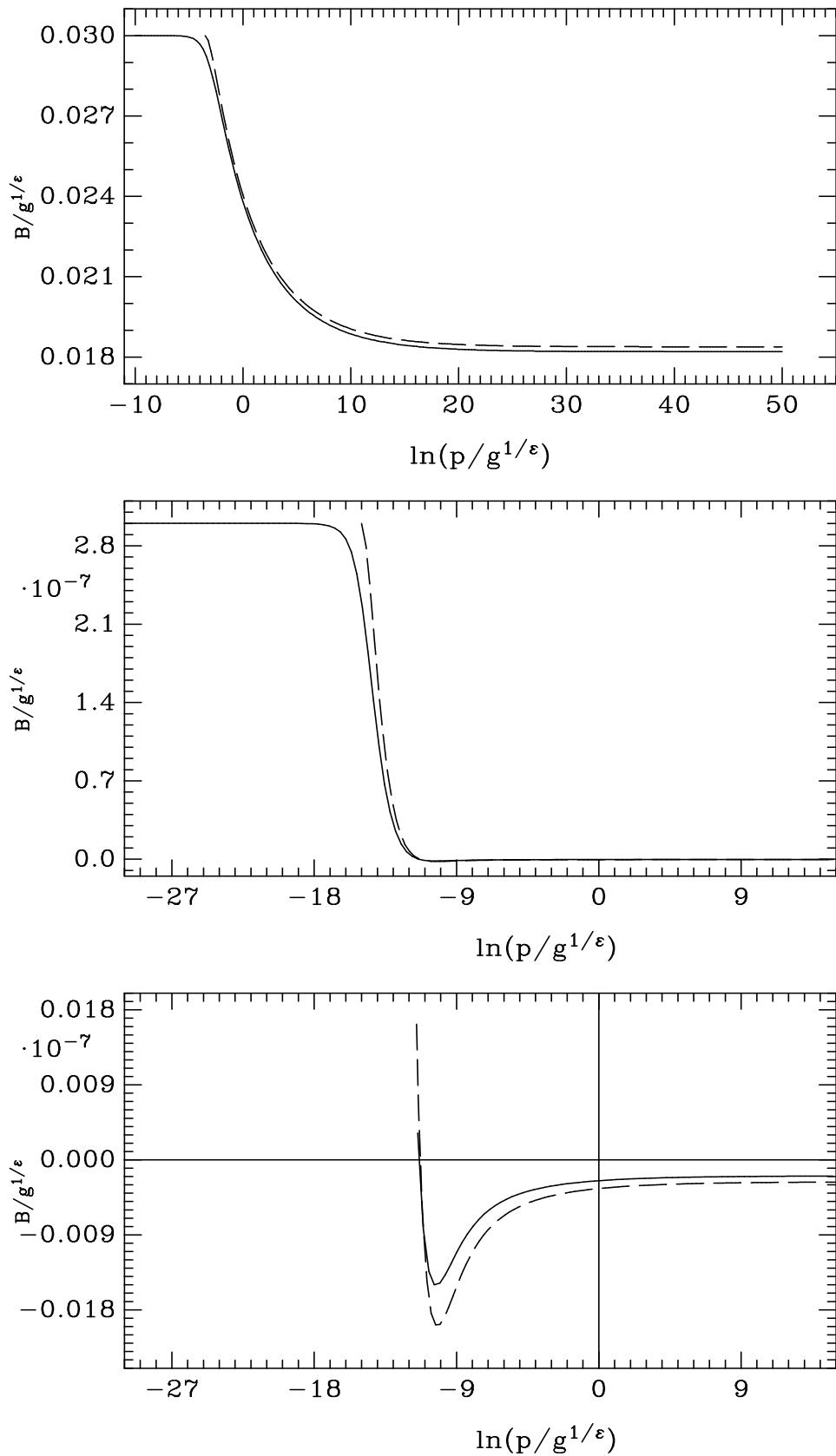


Abbildung 3.1: Die Funktion $B(p^2)$ gemäß der exakten Lösung des RWP (3.64-3.66) (durchgezogene Linie) und der IRBN-I (3.71/3.72) (gestrichelte Linie) für $\varepsilon = 0.1$ ($D = 3.8$). Die unterste Abbildung stellt einen Ausschnitt aus der mittleren Abbildung dar. Die Werte für m_t sind durch die Funktionswerte $B(p = 0)$ gegeben.

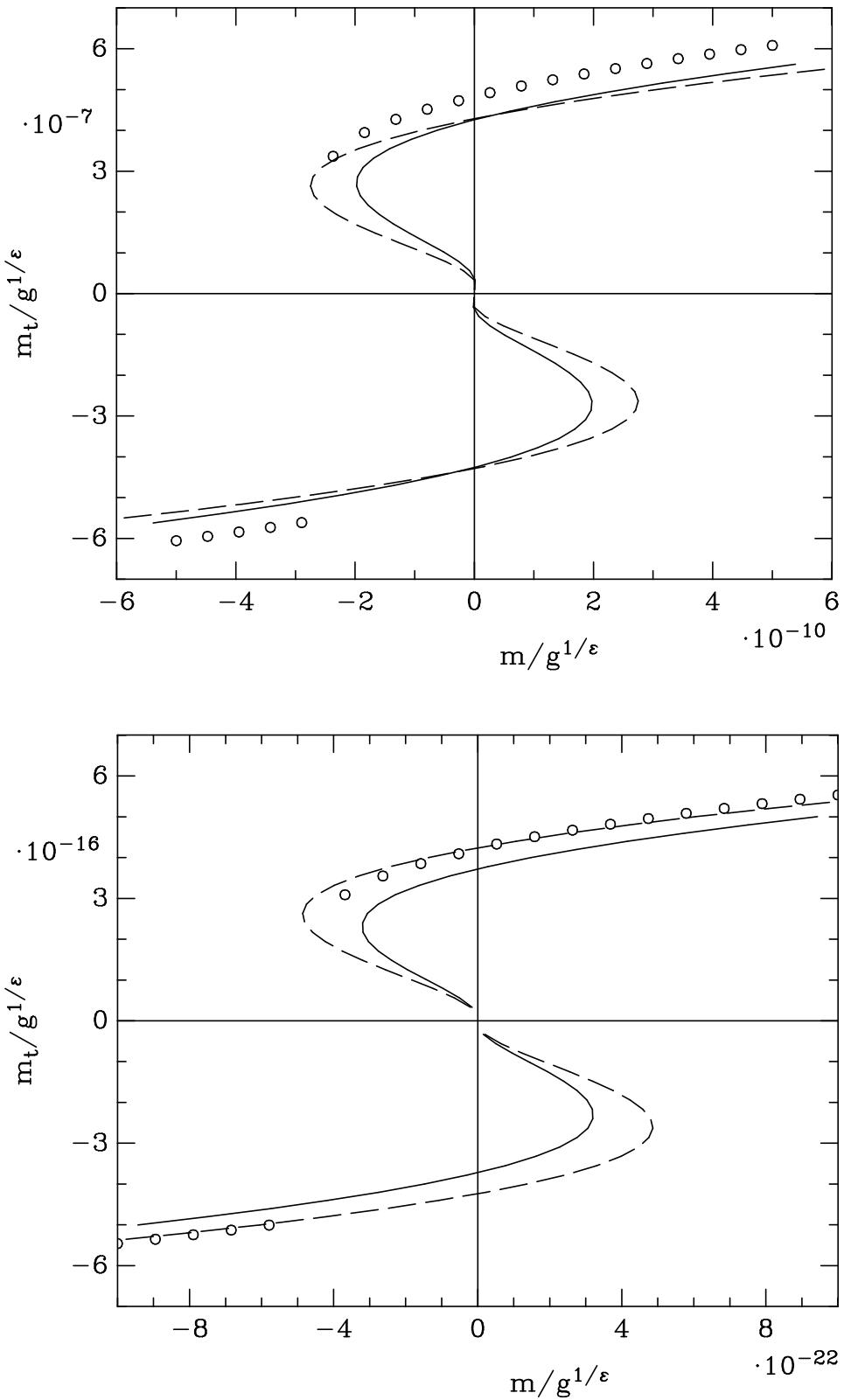


Abbildung 3.2: In der oberen Abbildung ist die Relation $m(m_t, \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0.1$ ($D=3.8$) und in der unteren Abbildung für $\varepsilon = 0.04$ ($D = 3.92$) dargestellt. Die durchgezogene Linie entspricht der numerischen Lösung des RWP (3.64-3.66), die gestrichelte Linie der IRBN-I (3.73) und die Kreise der exakten numerischen Lösung der Integralgleichung (3.6).

über die totale Masse $0 < \delta m_t = \delta B(\delta m_t) < \infty$, die auf beide Anteile in Gl.(3.71) Bezug nimmt, führt auch für $g_r > g_k$ auf ein endliches Kontinuumsresultat, wohingegen dem singulären Kontinuumslices (3.55) eine Renormierungsbedingung zugrunde liegt, die über die Strommasse $m_{c,r}$ formuliert ist, d.h. nur einen Anteil in der UV-Asymptotik von $B(p^2)$ berücksichtigt. Dafür muß für das Kontinuumsresultat (3.74) die Strommasse erst noch aus der totalen Masse extrahiert werden. Anders als in einer COR enthält die totale Masse m_t nach Abbildung (3.2) in NPDR stets einen dynamischen Anteil m_d ¹⁶, der implizit durch die Beziehung (3.73) definiert ist

$$\begin{aligned} m(m_d, \varepsilon) &= 0 \\ m_{c,r} &= m_t - m_d. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Die Strommassenrenormierung ist mit der Renormierungskonstanten Z_m durchzuführen, die sich massenunabhängig durch die Vorschrift¹⁷

$$\begin{aligned} Z_m(g_r, \varepsilon) &\equiv \lim_{m_{c,r} \rightarrow 0} \frac{m(m_t, \varepsilon)}{m_{c,r}} = \lim_{m_t \rightarrow m_d} \frac{m(m_t, \varepsilon) - m(m_d, \varepsilon)}{m_t - m_d} \\ &= \left. \frac{\partial m(m_t, \varepsilon)}{\partial m_t} \right|_{m_t=m_d} \end{aligned} \quad (3.76)$$

definieren lässt und für die sich nach Gl.(3.73) in der IRBN-I die Darstellung

$$\begin{aligned} Z_m(g_r, \varepsilon) &= 2\varepsilon\Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^{2-\frac{1}{\varepsilon}} J_{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\tilde{g}_r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \\ \tilde{g}_r^2(\varepsilon) &\equiv (\delta m_d^{-\varepsilon} \tilde{g}(\varepsilon))^2 = \frac{4(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

ergibt. Ob die Kontinuumslösung (3.74) eine E_χ SB- oder D_χ SB-Lösung der SDE (3.6) darstellt, hängt davon ab, ob die Strommasse

$$m_{c,r} \equiv m(m_t, \varepsilon)Z_m^{-1}(m_t, \varepsilon) \quad (3.78)$$

im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ von null verschieden ist oder nicht.¹⁸ Wird die nackte Masse bereits in der regularisierten Theorie auf null gesetzt, dann ist für die D_χ SB die Existenz einer nichttrivialen Lösung der SDE (3.6) hinreichend¹⁹. Diesen Fall betrachten wir im folgenden Abschnitt.

¹⁶In der QRBA haben wir kein kritisches ε gefunden, ab dem es erst zur Ausbildung nichttrivialer Lösungen der chiral-symmetrischen SDE kommt.

¹⁷Die Definition von Z_m unter Bezugnahme auf die Strommasse anstatt die totale Masse stellt sicher, daß im chiralen Limes $m \rightarrow 0$ die Beziehung $Z_m \rightarrow 1$ gilt. In Bezug auf die totale Masse m_t ist die Renormierung damit nicht mehr multiplikativ $m_t = m_d + Z_m^{-1}m$.

¹⁸Das Verschwinden von $m_{c,r} = mZ_m^{-1}$ im Kontinuumslices stellt erhaltene (Anomaliefreie) Axialvektorströme sicher, vgl. [Mi 85].

¹⁹Wir übernehmen diese Bedingung aus der COR, vgl. [Mi 85], ohne auf die Problematik des Studiums der chiralen Symmetriebrechung in dimensioneller Regularisierung näher einzugehen.

Der Kontinuumslimes im Fall der $D_\chi \mathbf{S}\mathbf{B}$

Als Kandidat für den Grundzustand (minimales effektives Potential) der chiral-symmetrischen Theorie $m = 0$ konkurriert die *größte* positive Nullstelle $m_{d,0}$ der Funktion $m(m_t, \varepsilon)$ in Abbildung (3.2) mit der trivialen Nullstelle $m_d = 0$. In IRBN-I ist $\delta m_{d,0}$ gemäß Gl.(3.73) durch die *kleinste* positive Nullstelle der Besselfunktion $J_\nu(z)$ bezüglich des Arguments

$$z = \frac{\tilde{g}(\varepsilon)\delta m_d^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (3.79)$$

und dem Index

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.80)$$

gegeben²⁰, für die sich die folgende asymptotische Entwicklung angeben lässt [As 84]

$$\begin{aligned} z &= \frac{\tilde{g}(\varepsilon)(\delta m_{d,0})^{-\varepsilon}}{\varepsilon} = \nu + a_1\nu^{\frac{1}{3}} + a_2\nu^{-\frac{1}{3}} + a_3\nu^{-1} + \mathcal{O}(\nu^{-\frac{5}{3}}) \\ a_1 &= 1.8557571 \\ a_2 &= 1.033150 \\ a_3 &= -0.00397. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Hieraus ergibt sich die Darstellung

$$\delta m_{d,0}(g, \varepsilon) = g^{\frac{1}{\varepsilon}} f_{DR,0}(\varepsilon) \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} f_{DR,0}(\varepsilon) &= \left\{ \sqrt{\frac{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}}{4(3-2\varepsilon)}} (1 + a_1\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \varepsilon + a_2\varepsilon^{\frac{4}{3}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1}{3}\varepsilon^{\frac{5}{3}} + a_3\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{3}})) \right\}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

und für das herkömmlicherweise als Ordnungsparameter für die chirale Symmetrie verwendete nackte chirale Fermionkondensat folgt

$$\begin{aligned} \delta < \psi \bar{\psi} > &\stackrel{m=0}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{4p^2 \delta B(p^2)}{(D-1)g^2} \\ &= \frac{(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{2\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}-1} (\delta m_{d,0})^{2-\varepsilon}}{\Gamma(\frac{1}{\varepsilon})(4\pi)^{1-\varepsilon} \Gamma(2-\varepsilon)\varepsilon^2} Y_{\frac{1}{\varepsilon}-1} \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)(\delta m_{d,0})^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Betrachten wir die nackte Kopplung g entsprechend der perturbativen Renormierung der QRBA als Konstante, dann ist $\delta m_{d,0}(g, \varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ singulär. Folglich erfordert die Einhaltung der Renormierungsbedingung $0 < \delta m_{d,0} < \infty$ eine echt nichtperturbative Renormierung der nackten Kopplung gemäß der Skalierungsfunktion $f_{DR}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} g &\rightarrow g(\delta m_{d,0}, \varepsilon) = (\delta m_{d,0})^\varepsilon f_{DR,0}^{-\varepsilon}(\varepsilon) \\ &= (\delta m_{d,0})^\varepsilon \sqrt{\frac{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}}{4(3-2\varepsilon)}} (1 + a_1\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \varepsilon + a_2\varepsilon^{\frac{4}{3}} \\ &\quad - \frac{a_1}{3}\varepsilon^{\frac{5}{3}} + a_3\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{3}})). \end{aligned} \quad (3.85)$$

²⁰ $J_\nu(z)$ besitzt für $\nu > 0$ unendlich viele einfache reelle Nullstellen.

Im Kontinuumslimes strebt $g(\delta m_{d,0}, \varepsilon)$ gegen die universelle kritische Kopplung

$$g_k \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\delta m_{d,0}, \varepsilon) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \simeq 3.628, \quad (3.86)$$

so daß sich gemäß Gl.(3.74) das folgende Kontinuumsresultat für $\delta B(p^2)$ ergibt

$$\delta B(p^2, \delta m_{d,0}) = \frac{(\delta m_{d,0})^2}{p} \left(1 + \ln\left(\frac{p}{\delta m_{d,0}}\right)\right). \quad (3.87)$$

Dieses Kontinuumsresultat stimmt mit demjenigen der COR [M1 85] überein, für das sich die kritische Kopplung g_k als Nullstelle der Skalierungsfunktion $f_{COR}(g)$ zeigt

$$\begin{aligned} \delta m_{d,0}(g, \Lambda) &= \Lambda f_{COR,0}(g) \\ f_{COR,0}(g) &= \exp\left\{-\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{g}{g_k}\right)^2 - 1}}\right\}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

d.h. g_k kann ohne Ausführung des Kontinuumslimes gewonnen werden. Vgl. hierzu die Diskussion in Kapitel 2, insbesondere die Tabelle (2.1).

3.4.2 IRBN-II in NPDR

Um die Unabhängigkeit der obigen Aussagen über die Kontinuums-QRBA von der verwendeten Näherung zu zeigen, geben wir nachfolgend die wesentlichen Schritte, die für die Durchführung der IRBN-II nötig sind, an. Dazu ist es am zweckmäßigsten, die gemäß Gl.(3.63) linearisierte SDE auf die Funktion

$$\begin{aligned} \chi(p^2) &= \frac{\delta B(p^2)}{p^2 + \delta m_t^2} \\ (p^2 + \delta m_t^2)\chi(p^2) &= m + (D - 1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \chi(k^2) \frac{1}{(p - k)^2} \end{aligned} \quad (3.89)$$

umzuschreiben.²¹ ²² Die lineare Faltungsgleichung (3.89) läßt sich durch D -dimensionale Fouriertransformation

$$\begin{aligned} R(r) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \chi(k^2) e^{-ik \cdot r} \\ r &= |x| \end{aligned} \quad (3.90)$$

in eine zweidimensionale Differentialgleichung überführen

$$\left\{ -\partial_\mu \partial^\mu + V(r) \right\} R(r) = E R(r) + m \delta^D(x) \quad (3.91)$$

²¹Für eine Lösung dieser Gleichung in $D = 4$ und einer COR vgl. [H1 91].

²²Die Funktion $\chi(p^2)$ entspricht in der hier betrachteten Näherung der Bethe-Salpeter-Wellenfunktion für das mit der dynamischen chiralen Symmetriebrechung verbundene pseudoskalare Goldstone-Boson.

$$\begin{aligned}
E &= -\delta m_t^2 \\
V(r) &= -(D-1)g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} e^{-ik \cdot x} \\
&= -\underbrace{\frac{(D-1)\Gamma(\frac{D-2}{2})g^2}{4\pi^{\frac{D}{2}}}}_{\equiv \tilde{g}'^2(\varepsilon)} \frac{1}{r^{D-2}}.
\end{aligned}$$

Wir interessieren uns für die zur Partialwelle $l(D) = 0$ gehörenden radial-symmetrischen Lösungen $R_0(r)$. Für diese folgt mit

$$\partial_\mu \partial^\mu R(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} \right) R(r) \quad (3.92)$$

die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}
\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} + V(r) \right\} R_0(r) &= E_0 R_0(r) \quad (r \neq 0) \\
R_0(r) &\rightarrow \frac{m\Gamma(\frac{D-2}{2})}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{D-2}}, \quad r \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (3.93)$$

Ihre für $r \rightarrow 0$ irreguläre Lösung

$$\begin{aligned}
R_0^{irr}(r) &= \frac{m\Gamma(\frac{D-2}{2})}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma(2 - \frac{1}{\varepsilon}) \left(\frac{\tilde{g}'(\varepsilon)}{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}-1} r^{-1+\varepsilon} J_{1-\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{g}'(\varepsilon)}{\varepsilon} r^\varepsilon \right) \\
&\rightarrow \frac{m\Gamma(\frac{D-2}{2})}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{D-2}}, \quad r \rightarrow 0
\end{aligned} \quad (3.94)$$

entspricht der E_χ SB-Lösung der SDE (3.89), die reguläre Lösung

$$\begin{aligned}
R_0^{reg}(r) &\propto r^{-1+\varepsilon} Y_{1-\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\tilde{g}'(\varepsilon)}{\varepsilon} r^\varepsilon \right) \\
&\rightarrow \text{const.}, \quad r \rightarrow 0
\end{aligned} \quad (3.95)$$

ist nur mit der Randbedingung $m = 0$ verträglich, d.h. stellt die D_χ SB-Lösung dar. Wir betrachten nachfolgend ausschließlich den Fall $m = 0$, für den wir Gl.(3.93) durch die Transformation

$$R_0(r) \equiv r^{\frac{1-D}{2}} f_0(r) \quad (3.96)$$

in eine radiale Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l_3(D)(l_3(D)+1)}{r^2} + \frac{\tilde{g}'^2(\varepsilon)}{r^{D-2}} + E_0 \right\} f_0(r) = 0 \quad (3.97)$$

in der Partialwelle

$$l_3(D) \equiv \frac{D-3}{2} \quad (3.98)$$

überführen können. Das effektive Potential

$$V_{eff}(r) \equiv \frac{1}{r^2} (l_3(l_3+1) - \tilde{g}'^2(\varepsilon) r^{2\varepsilon}) \quad (3.99)$$

besitzt für $D > 3$ ein Minimum bei

$$r_0 = \left(\frac{(D-3)(D-1)}{2(D-2)\tilde{g}'^2(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}} \propto g^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (3.100)$$

so daß Bindungszustände $f_{0,n}(r)$ mit zugehörigen Bindungsenergien $E_{0,n} = -(\delta m_{d,n})^2$ existieren. Radiale Schrödinger-Gleichungen mit einem allgemeinen potenzartigen Potential (3.99) sind im Rahmen der Potentialmodelle zur Beschreibung der Spektren schwerer Quarkonia studiert worden. Eine WKB-Behandlung führt auf das folgende diskrete Spektrum [QR 79]

$$\begin{aligned} E_{0,n} &= -(\delta m_{d,n})^2 \\ &= -\tilde{g}'(\varepsilon)^{\frac{2}{\varepsilon}} \left\{ \frac{2(D-2)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1-D}{2-D})}{\Gamma(\frac{D-4}{2(2-D)})} \left(n + \frac{D-3}{4-D} \right) \right\}^{\frac{2(2-D)}{4-D}}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich für die Skalierungsfunktion $f_{DR}(\varepsilon)$ das Resultat

$$\begin{aligned} \delta m_{d,n}(g, \varepsilon) &= g^{\frac{1}{\varepsilon}} f_{DR,n}(\varepsilon) \\ f_{DR,n}(\varepsilon) &= \left\{ \sqrt{\frac{4\pi^{\frac{D}{2}}}{(D-1)\Gamma(\frac{D-2}{2})}} \left(\frac{2(D-2)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1-D}{2-D})}{\Gamma(\frac{D-4}{2(2-D)})} \left(n + \frac{D-3}{4-D} \right) \right)^{\frac{D-2}{2}} \right\}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \left\{ \sqrt{\frac{4\pi^{\frac{D}{2}}}{(D-1)\Gamma(\frac{D-2}{2})}} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2(-1+2n-2\ln(2)-\ln(\frac{\pi}{4}))}{2} \varepsilon \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \right\}^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

das die für die Existenz eines Kontinuums-limes $0 < \delta m_{d,n} < \infty$ wesentliche Struktur

$$\begin{aligned} f_{DR}(\varepsilon) &= \{g_k + h(\varepsilon)\}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ h(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

aufweist. Allerdings weicht die kritische Kopplung

$$g_k = \frac{\pi^3}{2\sqrt{3}} \simeq 8.951 \quad (3.104)$$

erheblich von dem exakten Wert $g_k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \simeq 3.628$ ab. Trotz dieser Abweichung sehen wir die analytischen Resultate der IRBN-II als eine Bestätigung der Resultate der IRBN-I an, so daß die Aussagen über den Kontinuums-limes übernommen werden können. Eine exakte numerische Lösung der radialen Schrödinger-Gleichung (3.97) haben wir bislang nicht vorgenommen.

Wir fassen unsere Untersuchungen zur D_χ SB in der QRBA und NPDR wie folgt zusammen:

Die analytischen und numerischen Ergebnisse des Studiums der QRBA in der Nähe des chiralen Limes zeigen, daß in NPDR der echt nichtperturbative

Effekt der D_χ SB eintritt. Obwohl sich dieser Effekt in der dimensionell regulisierten Theorie auf eine vollkommen andere Art als in einer COR zeigt, können die in der COR gewonnenen Aussagen über die Kontinuums-QRBA bestätigt werden. Für die Durchführung des Kontinuumslimes haben wir die Renormierungsvorschriften der COR, wonach die E_χ SB eine Massen- und die D_χ SB eine (echt nichtperturbative) Kopplungsrenormierung erfordert, übernommen. Wünschenswert ist eine Renormierungsvorschrift, die zwischen diesen beiden Fällen interpoliert.

Kapitel 4

Die Rainbow-Näherung der SDE's in NPD^R

4.1 Die SDE's der RBA

Für die Rainbow-Näherung (RBA)

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) \rightarrow \tilde{V}^{(0),\mu}(p; k; \cdot) = \gamma^\mu \quad (4.1)$$

reduzieren sich die SDE's (1.26) für die drei Basisvertices auf die folgenden geschlossenen Bestimmungsgleichungen für die beiden Propagatoren

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}^{-1}(p) &= \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \tilde{\Sigma}(p) \\
 (\overrightarrow{p})^{-1} &= (\overrightarrow{p})^{-1} + g^2 \text{ (Feynman diagram)} \\
 \tilde{D}^{-1,\mu\nu}(p) &= -p^2 (t^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{\xi} l^{\mu\nu}(p)) - g^2 \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) \\
 (\overrightarrow{p})^{-1} &= (\overrightarrow{p})^{-1} - g^2 \text{ (Feynman diagram)} .(4.2)
 \end{aligned}$$

Die analytischen Ausdrücke für die Selbstenergien lauten

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(k) \tilde{D}_{\mu\nu}(p-k) \gamma^\nu \\ \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) &= \text{tr} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(k) \gamma^\nu \tilde{S}(p+k).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Der Gegenüber der QRBA wesentlich neue Effekt besteht darin, daß sich das Boson gemäß der SDE (4.2) anziehen kann, so daß in der RBA neben der D_x -SB die Trivialitätsfrage untersucht werden kann.

Die RBA (4.1) bricht sowohl die WTI (B.16) als auch die WI (B.26) der Vertexfunktion. Infolgedessen ist nach Gl.(B.15) die WTI (B.14) des Bosonpropagators ebenfalls gebrochen und nach Gl.(B.32) das Boson nicht masselos. Gemäß der Diskussion auf Seite 171 wird in der RBA die Beschreibung eines der Regularität der Vertexfunktion (4.1) angemessenen, masselosen Bosons, mit effektiv logarithmisch divergenter Vakuumpolarisation, durch die folgende Vorschrift zur Bestimmung der Polarisationsfunktion $\tilde{\Pi}(p^2)$ sichergestellt

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) &= p^2 t^{\mu\nu}(p) \tilde{\Pi}(p^2) \\ \tilde{\Pi}(p^2) &= \frac{1}{(D-1)p^2} \left\{ g^{\mu\nu} - D \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right\} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Entsprechend dem in Kapitel 2 diskutierten kinematischen Teil der NPDR ergeben sich damit für die drei invarianten Funktionen der beiden Propagatoren

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{-1}(p) &= A(p^2) \not{p} - B(p^2) \mathbf{1} \\ \tilde{D}^{\mu\nu}(p) &= -\frac{d(p^2)}{p^2} t^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{\xi} l^{\mu\nu}(p)\end{aligned}\quad (4.5)$$

in euklidischer Metrik die skalaren SDE's

$$\begin{aligned}A(p^2) &= 1 + g^2 \tilde{\Sigma}_A(p^2) \\ B(p^2) &= m + g^2 \tilde{\Sigma}_B(p^2) \\ d^{-1}(p^2) &= 1 + g^2 \tilde{\Pi}(p^2),\end{aligned}\quad (4.6)$$

mit den folgenden skalaren Selbstenergien

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_A(p^2) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \left\{ \underbrace{(D-2) \frac{p \cdot k}{p^2} \frac{\xi}{q^2}}_{\text{oberfl. lin. div.}} \right. \\ &\quad \left. + (-2 + \underbrace{(D-1) \frac{p \cdot k}{p^2}}_{\text{oberfl. lin. div.}} + 2 \frac{(p^2 - p \cdot k)^2}{p^2 q^2}) \frac{d(q^2)}{q^2} \right\} \\ &= \frac{2}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{k}{p} K_A(p, k, \varepsilon) \\ \tilde{\Sigma}_B(p^2) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{\xi + (D-1)d(q^2)}{q^2} \\ &= \frac{2}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} K_B(p, k, \varepsilon) \\ \tilde{\Pi}(p^2) &= 4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \frac{A(q^2)}{A^2(q^2)q^2 + B^2(q^2)} \\ &\quad \times \underbrace{\left\{ 1 + 2 \left(\frac{k}{p} \right)^2 \frac{1 - D(\hat{k} \cdot \hat{p})^2}{D-1} \right\}}_{\text{oberfl. quad. div.}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{\text{D}-1} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} K_D(p, k, \varepsilon) \\
q^2 &= p^2 - 2p \cdot k + k^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die drei Integralkerne K_A , K_B und K_D enthalten Winkelintegrationen

$$\begin{aligned}
K_A(p, k, \varepsilon) &\equiv \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left\{ \frac{\xi(\text{D}-2)x}{q^2(x)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-2kp(1-x^2) + (\text{D}-1)xq^2(x)}{q^4(x)} d(q^2(x)) \right\} \\
K_B(p, k, \varepsilon) &\equiv \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{\xi + (\text{D}-1)d(q^2(x))}{q^2(x)} \\
K_D(p, k, \varepsilon) &\equiv \frac{4\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\
&\quad \times \frac{A(q^2(x))}{A^2(q^2(x))q^2(x) + B^2(q^2(x))} \left\{ 1 - 2\left(\frac{k}{p}\right)^2 \frac{1-\text{D}x^2}{1-\text{D}} \right\} \\
q^2(x) &= p^2 + k^2 - 2pkx,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

die im Gegensatz zu denjenigen der QRBA nicht mehr analytisch ausgeführt werden können. Allerdings kann für die Kerne eine zu Gl.(3.5) analoge $\frac{p}{k}$ -bzw. $\frac{k}{p}$ -Entwicklung durchgeführt werden. Die niedrigsten Terme dieser Entwicklung lauten

$$\begin{aligned}
K_A(p, k, \varepsilon) &= \frac{\Theta(p-k)}{p^2} \left\{ [2\frac{\text{D}-2}{\text{D}}\xi + 2\frac{1-\text{D}}{\text{D}}p^2d'(p^2)]\left(\frac{k}{p}\right) \right. \\
&\quad + \left[-4\frac{(\text{D}-2)(\text{D}-4)}{\text{D}(2+\text{D})} + 2\left(\frac{12}{\text{D}(2+\text{D})} + \frac{\text{D}-5}{\text{D}} + 1\right)(p^2d'(p^2) - p^4d''(p^2)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(1-\text{D})}{\text{D}(2+\text{D})}p^4d''(p^2) \right]\left(\frac{k}{p}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{k}{p}\right)^4 \Big\} + p \leftrightarrow k \\
K_B(p, k, \varepsilon) &= \frac{\Theta(p-k)}{p^2} \left\{ (\text{D}-1)d(p^2) + \xi \right. \\
&\quad + \left[\frac{4-\text{D}}{\text{D}}((\text{D}-1)(d(p^2) - p^2d'(p^2)) + \xi) - 2\frac{1-\text{D}}{\text{D}}p^4d''(p^2) \right]\left(\frac{k}{p}\right)^2 \\
&\quad \left. + \mathcal{O}\left(\frac{k}{p}\right)^4 \right\} + p \leftrightarrow k \\
K_D(p, k, \varepsilon) &= \frac{\Theta(p-k)}{p^2} \left\{ 4\frac{A(p^2)}{A^2(p^2) + (\frac{B(p^2)}{p})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k}{p}\right)^2 \right\} \\
&\quad + \frac{\Theta(k-p)}{k^2} \left\{ 4\frac{A(k^2)}{A^2(k^2) + (\frac{B(k^2)}{k})^2} - \frac{32}{\text{D}(2+\text{D})}k^6\left(\frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)}\right)'' \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}\left(\frac{p}{k}\right)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Aus dieser Entwicklung geht hervor, daß die oberflächlich linear bzw. quadratisch divergenten Selbstenergien $\tilde{\Sigma}_A$ und $\tilde{\Pi}$ in Gl.(4.7) nach Ausführung der Winkelintegrationen effektiv logarithmisch divergent sind, d.h. aus der Beschränkung des UV-Verhaltens der invarianten Funktionen gemäß der UV-AF

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} A(p^2, D < 4), d(p^2, D < 4) &= 1 \\ \lim_{p \rightarrow \infty} B(p^2, D < 4) &= m \end{aligned} \quad (4.10)$$

folgt für $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{k}{p} K_A(p, k, \varepsilon) &= 2 \frac{D-2}{D} \xi \frac{1}{k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{k^{2+2\varepsilon}}\right) \\ K_B(p, k, \varepsilon) &= \frac{D-1+\xi}{k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{k^{2+2\varepsilon}}\right) \\ K_D(p, k, \varepsilon) &= 4\left(1 - \frac{16}{D(2+D)}\right) \frac{1}{k^2} + \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{k^{2+2\varepsilon}}\right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

so daß das führende UV-Verhalten der Integranden der Impulsbetragssintegrale in Gl.(4.7) unabhängig vom äußeren Impuls durch $k^{-1-2\varepsilon}$ gegeben ist. Demnach sind die Loop-Integrale (4.7) für $\varepsilon > 0$ konvergent und können numerisch berechnet werden. Des Weiteren ergibt sich aus dem führenden Term der $\frac{p}{k}$ -Entwicklung (4.9) für den Kern K_D eine für $D < 4$ endliche Polarisationsfunktion beim Impuls null

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(0) = \frac{8}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \left\{ \right. \\ \left. \frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} - \frac{8}{D(2+D)} k^4 \left(\frac{A(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \right)'' \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

d.h. die Vorschrift (4.4) sichert die Masselosigkeit des Bosons.

Die Beseitigung der oberflächlich linear und quadratisch divergenten Anteile in den Selbstenergien durch Winkelintegrale, die nur für große Werte des Betrags der Integrationsimpulse in Gl.(4.8) verschwinden, ist insbesondere für eine numerische Behandlung der SDE (4.6) ungeeignet. Die effektiv logarithmische Divergenz der Selbstenergien kann mittels partieller Integrationen für den Kern K_A

$$\begin{aligned} K_A(p, k, \varepsilon) &= \frac{2\xi(D-2)}{D} \left\{ \Theta(p-k) \frac{k}{p^3} {}_2F_1[\varepsilon, 2; 3-\varepsilon; (\frac{k}{p})^2] + k \leftrightarrow p \right\} \\ &+ \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx d(q^2(x)) \frac{d}{dx} \left(-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}{q^2(x)} \right) \\ &= \frac{2\xi(D-2)}{D} \left\{ \Theta(p-k) \frac{k}{p^3} {}_2F_1[\varepsilon, 2; 3-\varepsilon; (\frac{k}{p})^2] + k \leftrightarrow p \right\} \\ &- 2pk \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon} d'(q^2(x))}{q^2(x)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

und entsprechend für den Kern K_D

$$\begin{aligned}
K_D(p, k, \varepsilon) &= \frac{4\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx \underbrace{\frac{A(q^2(x))}{A^2(q^2(x))q^2(x) + B^2(q^2(x))}}_{=S_1(q^2(x))} \\
&\times \left\{ (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} - \frac{2}{1-D} \left(\frac{k}{p}\right)^2 \frac{d}{dx} (x(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \right\} \\
&= \frac{4\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx \left\{ S_1(q^2(x))(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \right. \\
&- \left. \frac{4}{1-D} \frac{k^3}{p} S'_1(q^2(x)) \underbrace{x(1-x^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}_{=\frac{-1}{1+D} \frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{5}{2}-\varepsilon}} \right\} \\
&= \frac{4\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left\{ S_1(q^2(x)) \right. \\
&\left. + \frac{8(1-x^2)^2 k^4}{1-D^2} S''_1(q^2(x)) \right\} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

manifest gemacht werden. Die zweifache Ableitung von $S_1(q^2)$ lässt sich umgehen, indem vor der Durchführung der zweiten partiellen Integration eine Transformation $k \leftrightarrow q = p - k$ des Integrationsimpulses im Loop-Integral (4.7) für $\tilde{\Pi}(p^2)$ vorgenommen wird, d.h.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}(p^2) &= 4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ S_1(k^2) S_1(q^2) + \frac{4(1-(\hat{p} \cdot \hat{k})^2)}{D-1} k^2 S'_1(k^2) S_1(q^2) \right. \\
&\left. + \frac{8(1-(\hat{p} \cdot \hat{k})^2)^2}{D^2-1} k^2 S'_1(k^2) k^2 S''_1(q^2) \right\}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

4.2 Die SDE's im UV-Bereich

Eine zu Gl.(3.13) analoge Umformung der SDE's (4.6) für die drei invarianten Funktionen $A(p^2)$, $B(p^2)$ und $d(p^2)$ legt für ihre UV-Asymptotik die folgende Verallgemeinerung des UV-Schemas (3.15) nahe¹

$$\begin{aligned}
A(p^2) &\stackrel{UV}{=} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\
&+ \frac{a_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \xi, \varepsilon)m^2}{p^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} + \dots \\
B(p^2) &\stackrel{UV}{=} m \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{0,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\
&+ \frac{b_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \xi, \varepsilon)m^3}{p^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} + \dots
\end{aligned}$$

¹ Im Gegensatz zur vollen Theorie sind in der RBA die Koeffizienten $d_{j,k}$ vom Eichfixierungsparameter ξ abhängig.

$$\begin{aligned}
d(p^2) &\stackrel{UV}{=} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{0,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \\
&+ \frac{d_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \xi, \varepsilon)m^2}{p^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{1,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} + \dots . \quad (4.16)
\end{aligned}$$

In Analogie zu Gl.(3.13) sind die Koeffizientensätze $\{a_{0,n}, b_{0,n}, d_{0,n}\}$ der führenden \ln_ε -Anteile durch die (perturbativ-) iterative Lösung der gekoppelten SDE's

$$\begin{aligned}
A(p^2) &\stackrel{UV}{=} 1 + g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{A(k^2)k^2} \left\{ (D-2) \frac{p \cdot k}{p^2} \frac{\xi}{q^2} \right. \\
&- \left. 2 \frac{1 - (\hat{p} \cdot \hat{k})^2}{q^2} k^2 d'(q^2) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{B(p^2)}{p}\right)^2 \\
B(p^2) &\stackrel{UV}{=} m + g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2} \frac{\xi + (D-1)d(q^2)}{q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{B(p^2)}{p}\right)^2 \\
d^{-1}(p^2) &\stackrel{UV}{=} 1 + 4g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{A(k^2)k^2} \frac{1}{A(q^2)q^2} \left\{ 1 - 2\left(\frac{k}{p}\right)^2 \frac{1 - D(\hat{k} \cdot \hat{p})^2}{1 - D} \right\} \\
&+ \mathcal{O}\left(\frac{B(p^2)}{p}\right)^2
\end{aligned} \quad (4.17)$$

bestimmt.

Im Fall $m = 0$ wird die SDE (4.6) für die Funktion $B(p^2)$ wie in der QRBA homogen und besitzt demnach die triviale Lösung $B = 0$, die ihre perturbative Lösung darstellt. Das führende UV-Verhalten einer etwaigen nichttrivialen Lösung kann nach Gl.(3.22) durch das nackte chirale Fermionkondensat parametrisiert werden, indem der Limes $p \rightarrow \infty$ unter dem Loop-Integral (4.7) für $\tilde{\Sigma}_B(p^2)$ durchgeführt wird.

$$B(p^2) \stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{\xi + (D-1)d(p^2)}{p^2} g^2 \underbrace{\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A(k^2)k^2 + B^2(k^2)}}_{\stackrel{\text{Gl. (2.39)}}{=} \frac{<\psi\bar{\psi}>}{4}} + \mathcal{O}(p^{-2-2\varepsilon}) \quad (4.18)$$

Der gemäß dem UV-Schema (4.16) folgende perturbative \ln_ε -Anteil

$$B(p^2) \stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{\xi + D - 1}{4p^2} g^2 <\psi\bar{\psi}> \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n}(\xi, \varepsilon) \left(\frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right)^n \right\} \quad (4.19)$$

ist in Analogie zu Gl.(3.26) durch die (perturbativ-) iterative Lösung der SDE

$$\begin{aligned}
B(p^2) &= \frac{\xi + (D-1)d(p^2)}{p^2} g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \\
&+ g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \left\{ \frac{\xi + (D-1)d(q^2)}{q^2} - (k=0) \right\} \\
&= \frac{1}{p^2} \left\{ \frac{\xi + (D-1)d(p^2)}{4} g^2 <\psi\bar{\psi}> + g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{B(k^2)}{A(k^2)k^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\left. \xi \frac{p^2 - q^2}{q^2} + (D - 1) \frac{p^2 d(q^2) - q^2 d(p^2)}{q^2} \right\} \Bigg\} + \mathcal{O}(p^{-4}), \quad (4.20)$$

die aufgrund der Subtraktion inhomogen wird und im Iterationsprozeß auf IR-konvergente Loop-Integrale führt, bestimmt. Das nackte chirale Fermionkondensat parametrisiert den echt nichtperturbativen Anteil des Koeffizienten $b_{1,0}$ im UV-Schema (4.16)

$$\lim_{m \rightarrow 0} b_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \xi, \varepsilon) m^3 = \frac{D - 1 + \xi}{4} g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle \propto (g^\frac{1}{\varepsilon})^3, \quad (4.21)$$

der für kleine Kopplungen gegenüber den perturbativen Beiträgen

$$b_{1,0}((gm^{-\varepsilon})^2, \varepsilon) = -\frac{2(D - 1 + \xi)\Gamma(\varepsilon)}{D - 2} \frac{(gm^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} + \mathcal{O}(gm^{-\varepsilon})^4 \quad (4.22)$$

unterdrückt ist. Es ist zu vermuten, daß die Koeffizienten $a_{n,0}, d_{n,0}$ ebenfalls bzgl. g nichtanalytische – z.T. von $\langle \psi \bar{\psi} \rangle$ unabhängige – Anteile enthalten, die jedoch nicht leicht sichtbar gemacht werden können, da sich die führenden \ln_ε -Anteile der Funktionen $A(p^2)$ und $d(p^2)$ nicht abschalten lassen. Die Bestimmungsgleichungen (4.17) für $A^{UV}(p^2), d^{UV}(p^2)$ bedürfen im Fall $m = 0$ keiner gesonderten Betrachtung, da sie von der Gleichung für $B^{UV}(p^2)$ entkoppeln.

Auf der Basis der Gl.(4.17/4.20) werden in [SC 95] gekoppelte Rekursionsbeziehungen für die Koeffizientensätze $\{a_{0,n}, b_{0,n}, d_{0,n}\}$ hergeleitet, die jedoch nicht mehr wie in der QRBA geschlossen lösbar sind.² In der RBA ist der Wert für die drei niedrigsten Koeffizienten $\{a_{0,1}, b_{0,1}, d_{0,1}\}$ mit ihrem Wert in der vollen Theorie identisch. Mit den Ein-Loop-Resultaten

$$\begin{aligned} A^{(1)}(p^2) &= 1 + \frac{2\xi\Gamma(\varepsilon)}{2 - \varepsilon} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (p^2 + m^2)^{-\varepsilon} {}_2F_1[\varepsilon, 1 - \varepsilon; 3 - \varepsilon; \frac{p^2}{p^2 + m^2}] \\ B^{(1)}(p^2) &= m \left\{ 1 + \frac{(3 - 2\varepsilon + \xi)\Gamma(\varepsilon)}{1 - \varepsilon} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (p^2 + m^2)^{-\varepsilon} \right. \\ &\quad \times \left. {}_2F_1[\varepsilon, 1 - \varepsilon; 2 - \varepsilon; \frac{p^2}{p^2 + m^2}] \right\} \\ d^{(1)}(p^2) &= 1 - \frac{\Gamma(\varepsilon)4^{1+\varepsilon}}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (p^2 + 4m^2)^{-\varepsilon} {}_2F_1[\varepsilon, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{p^2}{p^2 + 4m^2}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

ergeben sich diese zu

$$\begin{aligned} a_{0,1}(\xi, \varepsilon) &= \frac{2\xi\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(2 - \varepsilon)}{\Gamma(3 - 2\varepsilon)} \\ b_{0,1}(\xi, \varepsilon) &= \frac{(3 - 2\varepsilon + \xi)\Gamma(\varepsilon)\Gamma^2(1 - \varepsilon)}{\Gamma(2 - 2\varepsilon)} \\ d_{0,1}(\varepsilon) &= \frac{4^{1+\varepsilon}\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2 - \varepsilon)}{3\Gamma(\frac{5}{2} - \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

²Anhand einer Auswertung dieser Rekursionsbeziehungen mittels MATHEMATICA wird in [SC 95] das Konvergenzverhalten der führenden Asymptotikreihen (4.16) unter Berücksichtigung der ersten 45 Koeffizienten analysiert.

Im Fall $m = 0$ folgt mit Gl.(4.20)³

$$b_{1,1}(\xi, \varepsilon) = \frac{(3 - 2\varepsilon + \xi)\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon)\Gamma(1 + \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)}. \quad (4.25)$$

Analog zur QRBA kann auf der Basis der SDE's (4.17/4.20) und der Entwicklung (4.9) eine Aufsummation der für $\varepsilon \rightarrow 0$ führenden Beiträge zur UV-Asymptotik vorgenommen werden. Für eine LL_ε -Summation ist es ausreichend, die divergenzerzeugenden, vom äußeren Impuls unabhängigen Anteile der Integranden der Selbstenergie-Loop-Integrale in Gl.(4.7) zu berücksichtigen, die entsprechend der Entwicklung (4.9) durch die folgende Ersetzung für die Integralkerne (4.8) erfaßt werden.

$$\begin{aligned} K_A, K_B, K_D &\xrightarrow{LL_\varepsilon} K_A^L, K_B^L, K_D^L \\ \frac{k}{p} K_A^L(p, k, \varepsilon) &\equiv \frac{\Theta(k-p)}{k^2} \left\{ 2 \frac{D-2}{D} \xi + 2 \frac{1-D}{D} k^2 d'(k^2) \right\} \\ K_B^L(p, k, \varepsilon) &\equiv \begin{cases} \frac{\Theta(k-p)}{k^2} (\xi + (D-1)d(k^2)) & , \quad m \neq 0 \\ \frac{\Theta(p-k)}{p^2} (\xi + (D-1)d(p^2)) & , \quad m = 0 \end{cases} \\ K_D^L(p, k, \varepsilon) &\equiv \frac{\Theta(k-p)}{k^2} 4 \left\{ \frac{1}{A(k^2)} - \frac{8k^6}{D(2+D)} \left(\frac{1}{A(k^2)k^2} \right)'' \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Diejenigen divergenzerzeugenden Anteile der Kerne K_A^L, K_D^L , die Ableitungen invariante Funktionen enthalten, tragen eine explizite Kopplungsordnung und sind deshalb erst für eine NLL_ε -Summation relevant, d.h. es kann die Vereinfachung

$$\begin{aligned} \frac{k}{p} K_A^L(p, k, \varepsilon) &= \frac{\Theta(k-p)}{k^2} 2 \frac{D-2}{D} \xi \\ K_D^L(p, k, \varepsilon) &= \frac{\Theta(k-p)}{k^2} 4 \left\{ 1 - \frac{16}{D(2+D)} \right\} \frac{1}{A(k^2)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

vorgenommen werden. Für die LL_ε -Näherungen (4.26/4.27) gehen die SDE's (4.6) im UV-Bereich in das gekoppelte, nichtlineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{dA^L(p)}{dp} &= -\frac{4(D-2)\xi g^2 p^{-1-2\varepsilon}}{\Gamma(2-\varepsilon)D (4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{1}{A^L(p)} \\ \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{d^L(p)} \right) &= -\frac{8(1 - \frac{16}{D(2+D)}) g^2 p^{-1-2\varepsilon}}{\Gamma(2-\varepsilon) (4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{1}{(A^L(p))^2} \\ \frac{dB^L(p)}{dp} &\stackrel{E_{\chi SB}}{=} -\frac{2}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2 p^{-1-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{(\xi + (D-1)d^L(p))B^L(p)}{(A^L(p))^2} \\ \frac{d}{dp} \frac{p^2 B^L(p)}{\xi + (D-1)d^L(p)} &\stackrel{D_{\chi SB}}{=} \frac{2}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2 p^{-1-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{p^2 B^L(p)}{(A^L(p))^2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

³ $b_{0,1}$ und $b_{1,1}$ stimmen für $\xi = 0$ mit den entsprechenden Koeffizienten der QRBA überein.

mit den UV-Randbedingungen

$$\begin{aligned} A^L(p), d^L(p) &\rightarrow 1, \quad p \rightarrow \infty \\ B^L(p) &\rightarrow \begin{cases} \frac{m}{(D-1+\xi)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}, & m \neq 0 \\ \frac{1}{4p^2}, & m = 0 \end{cases}, \quad p \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.29)$$

über. Dessen Lösung lautet

$$\begin{aligned} A^L(p^2) &\stackrel{UV}{=} \sqrt{1 + \frac{4(D-2)\xi}{D\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \frac{g^2 p^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}} \\ d^L(p^2) &\stackrel{UV}{=} \frac{1}{1 + \frac{2(D-\frac{16}{2+D})}{(D-2)\xi} \ln(A^L(p^2))} \\ B^L(p^2) &\stackrel{E_\chi SB, UV}{=} m(A^L(p^2))^{\frac{D}{2(D-2)}} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{2(D-\frac{16}{2+D})}{(D-2)\xi} \ln(A^L(p^2)) \right\}^{\frac{D-1}{4(1-\frac{16}{D(2+D)})}} \\ B^L(p^2) &\stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{\xi + (D-1)d^L(p^2)}{4p^2} g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle (A^L(p^2))^{-\frac{D}{2(D-2)}} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{2(D-\frac{16}{2+D})}{(D-2)\xi} \ln(A^L(p^2)) \right\}^{-\frac{D-1}{4(1-\frac{16}{D(2+D)})}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Eichabhängigkeit der Funktion $d^L(p^2)$ zeigt explizit, daß in der RBA die Eichkovarianz der Theorie gebrochen ist. Allerdings ergeben sich aus Gl.(4.30) für $\xi \rightarrow 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} A^L(p^2, \xi = 0) &\stackrel{UV}{=} 1 \\ d^L(p^2, \xi = 0) &\stackrel{UV}{=} \frac{1}{1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon}} \\ B^L(p^2, \xi = 0) &\stackrel{E_\chi SB, UV}{=} m \left\{ 1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon} \right\}^{-\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\beta_1(\varepsilon)}} \\ B^L(p^2, \xi = 0) &\stackrel{D_\chi SB, UV}{=} \frac{(D-1)g^2 \langle \psi \bar{\psi} \rangle}{4p^2} \left\{ 1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon} \right\}^{\frac{\gamma_m^{(1)}(\varepsilon)}{2\beta_1(\varepsilon)} - 1} \\ \beta_1(\varepsilon) &= \frac{4(1 - \frac{16}{D(2+D)})}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} = \frac{1}{12\pi^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \gamma_m^{(1)}(\varepsilon) &= \frac{-2(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)(4\pi)^{2-\varepsilon}} = -\frac{3}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.31)$$

die exakt mit den auf nackte invarianten Funktionen umgeschriebenen LL _{ε} -RG-Resultaten *der vollen Theorie in Landau-Eichung* übereinstimmen.⁴ Konkrete Rechnungen sollten demnach in der RBA in Landau-Eichung durchgeführt werden. Darüberhinaus ergeben sich aus Gl.(4.31) im Limes $\beta_1 \rightarrow 0$ die LL _{ε} -Beziehungen (3.37) der QRBA.

⁴Diese können aus der Darstellung (4.45) und den laufenden renormierten Parametern auf Ein-Loop-RG-Niveau im massenunabhängigen WBRS (2.31) gewonnen werden.

Eine weitergehende analytische Lösung der SDE's (4.6), die auf den Entwicklungen (4.9) beruht, nehmen wir im Rahmen des Studiums der D_χ SB vor.

4.3 Numerische Lösung der SDE's in NPDR

Die skalaren SDE's (4.6/4.7) stellen der Definition der NPDR entsprechend ein für $\varepsilon > 0$ wohldefiniertes Problem der gewöhnlichen Analysis in Form von drei gekoppelten, nichtlinearen, zweidimensionalen Integralgleichungen zur Bestimmung der nackten invarianten Funktionen $A(p^2)$, $B(p^2)$ und $d(p^2)$ dar, deren allgemeine Lösung numerisch ermittelt werden muß. Das kanonische Lösungsverfahren für nichtlineare Integralgleichungen besteht in ihrer (nichtperturbativen) Iteration. Als Startwerte $A^{(0)}(p^2), \dots$ dienen die UV-LL $_\varepsilon$ -Lösungen (4.30) der SDE's, die gemäß der Vorschrift

$$A^{(0)}(p^2, m_t^{(0)}) = A_L^{UV}(p^2 \rightarrow p^2 + (m_t^{(0)})^2), \dots \quad (4.32)$$

in den IR-Bereich fortgesetzt werden. Die IR-Massenskala $m_t^{(0)}$ wird selbstkonsistent aus der Bedingung

$$m_t^{(0)} = \frac{B^{(0)}(0, m_t^{(0)})}{A^{(0)}(0, m_t^{(0)})} = \frac{B_L^{UV}((m_t^{(0)})^2)}{A_L^{UV}((m_t^{(0)})^2)} \quad (4.33)$$

bestimmt. Sie approximiert denjenigen Impuls, ab dem für die Nenner in Gl.(4.7) die Ersetzung $A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2) \rightarrow A^2(k^2)k^2$, die auf die SDE's (4.17/4.20) zur Bestimmung der UV-Asymptotik führt, durchgeführt werden kann, d.h. m_t trennt den IR- vom UV-Bereich. Für die Darstellung der invarianten Funktionen verwenden wir kubische Splines, die abschnittsweise definiert sind: im IR-Bereich $0 \dots m_t$ in der Variablen p^2 und im UV-Bereich $m_t \dots \Lambda_{UV}$ in der Variablen $\ln(p)$. Λ_{UV} bezeichnet denjenigen Impuls, ab dem die UV-Asymptotik der invarianten Funktionen (mit einem relativen Fehler von 0.1%) durch die LL $_\varepsilon$ -Beziehungen (4.30), die den ersten nichttrivialen Koeffizienten der \ln_ε -Anteile in der UV-Asymptotik der invarianten Funktionen richtig wiedergeben, ersetzt werden kann. Die Verwendung von kubischen Splines ermöglicht es, numerisch stabile erste Ableitungen für die invarianten Funktionen, die für die manifest logarithmisch divergent gemachten Selbstenergien (4.13/4.15) und die Berechnung von RG-Funktionen benötigt werden, zu ermitteln. Für die numerische Berechnung der Betrags- und Winkelintegrale der skalaren Selbstenergien (4.7) verwenden wir adaptive Integrationsroutinen der NAG [NA 91] und IMSL [IM 91] Bibliothek. Alle Integrationen werden mit einer relativen Fehlervorgabe von 0.1% ausgewertet. Die Stützstellenverteilung, an die die Splines vor jedem Iterationsschritt zur Interpolation der invarianten Funktionen angefittet werden, ist entsprechend der Variation der IR-Massenskala im Iterationsprozeß

$$m_t^{(n)} = \frac{B^{(n)}(0, m_t^{(n-1)})}{A^{(n)}(0, m_t^{(n-1)})} \quad (4.34)$$

zu variieren. Die Anzahl der pro invariante Funktion verwendeten Stützstellen liegt je nach Parameterwerten zwischen ≈ 20 und ≈ 40 . Der Iterationsprozeß wird abgebrochen, wenn sich die Funktionswerte an allen Stützstellen bis auf 0.1% stabilisiert haben. Für diese Akzeptanzbedingung und die obigen Startwerte sind für die meisten Parameterwerte weniger als 20 Iterationen ausreichend, für kleine Kopplungen werden nur zwei bis vier Iterationen benötigt.

Alle dimensionsbehafteten Größen werden auf eine beliebige (Renormierungs-) Massenskala μ bezogen, so daß gemäß Gl.(2.14) die Lösung der SDE's neben ε von dem Satz der dimensionslosen nackten Parameter

$$\{\hat{m}, \hat{g}, \xi\} \quad (4.35)$$

abhängt. Für eine ausführlichere Darstellung des Lösungsverfahrens und Angaben über benötigte Rechenzeiten verweisen wir auf [SC 95].

Die Abbildung (4.1) zeigt einen typischen Satz von Lösungen der SDE's (4.6). Zusätzlich sind die aus den LL_ε -Beziehungen gebildeten Startwerte (4.32) und die erste (nichtperturbative) Iteration der SDE's dargestellt. Wir geben dazu die folgenden Erläuterungen:

- In der Abbildung (4.1) fällt die gute Übereinstimmung zwischen den LL_ε -Startwerten und den exakten Lösungen für die beiden Funktionen $A(p^2)$ und $d(p^2)$ auf. Die geringe Abweichung der Funktion $A(p^2)$ von Eins, die ein Maß für die Brechung der \tilde{V}^μ -WTI/WI (B.16/B.26) durch die RBA (4.1) darstellt, ist aufgrund ihres in Landau-Eichung verschwindenden Ein-Loop-Beitrags (4.23)⁵ zu erwarten und erklärt darüberhinaus das Resultat für den Bosonpropagator, in dessen UV-SDE (4.17) nur noch die Funktion $A(p^2)$ eingeht, d.h. $d(p^2)$ kann nur im IR-Bereich vom LL_ε -Startwert abweichen.⁶
- Die logarithmische Impulsskala in der Abbildung (4.1) empfiehlt sich einerseits aufgrund des für kleine ε enormen Impulsbereichs, der zur Erfassung der Struktur der invarianten Funktionen überstrichen werden muß. Nach Gl.(2.51) gilt für die Korrelationslänge in Abbildung (4.1)

$$\xi_k(\varepsilon = 0.01) = e^{50} \approx 5.2 \cdot 10^{21}. \quad (4.36)$$

Andererseits stellen aufgrund der geringen Abweichung der Funktion $A(p^2)$ von 1 die Funktionen $B(p^2)$ und $d(p^2)$ nach Gl.(4.45) auf einer logarithmischen Impulsskala (bis auf einen Vorfaktor) die laufende renormierte Masse bzw. renormierte Kopplung dar. Die stufenfunktionsartige Struktur der invarianten Funktionen in Abbildung (4.1), die sich für kleinere ε und größere \hat{g} immer deutlicher zeigt, bedeutet, daß

⁵Entsprechend fallen in der obersten Abbildung (4.1) die gepunktete und gestrichelte Linie zusammen.

⁶In Landau-Eichung ist die erste (nichtperturbative) Iteration der $d(p^2)$ -SDE (4.6) mit der LL_ε -Beziehung (4.30) identisch. Die gute Übereinstimmung zwisch $d^{(0)}(p^2)$ und $d(p^2)$ haben wir für alle Parameterwerte beobachtet und deshalb die SDE's für den Bosonpropagator, deren numerische Behandlung sich am schwierigsten gestaltet, erst gegen Ende des Iterationsprozesses wieder mititeriert.

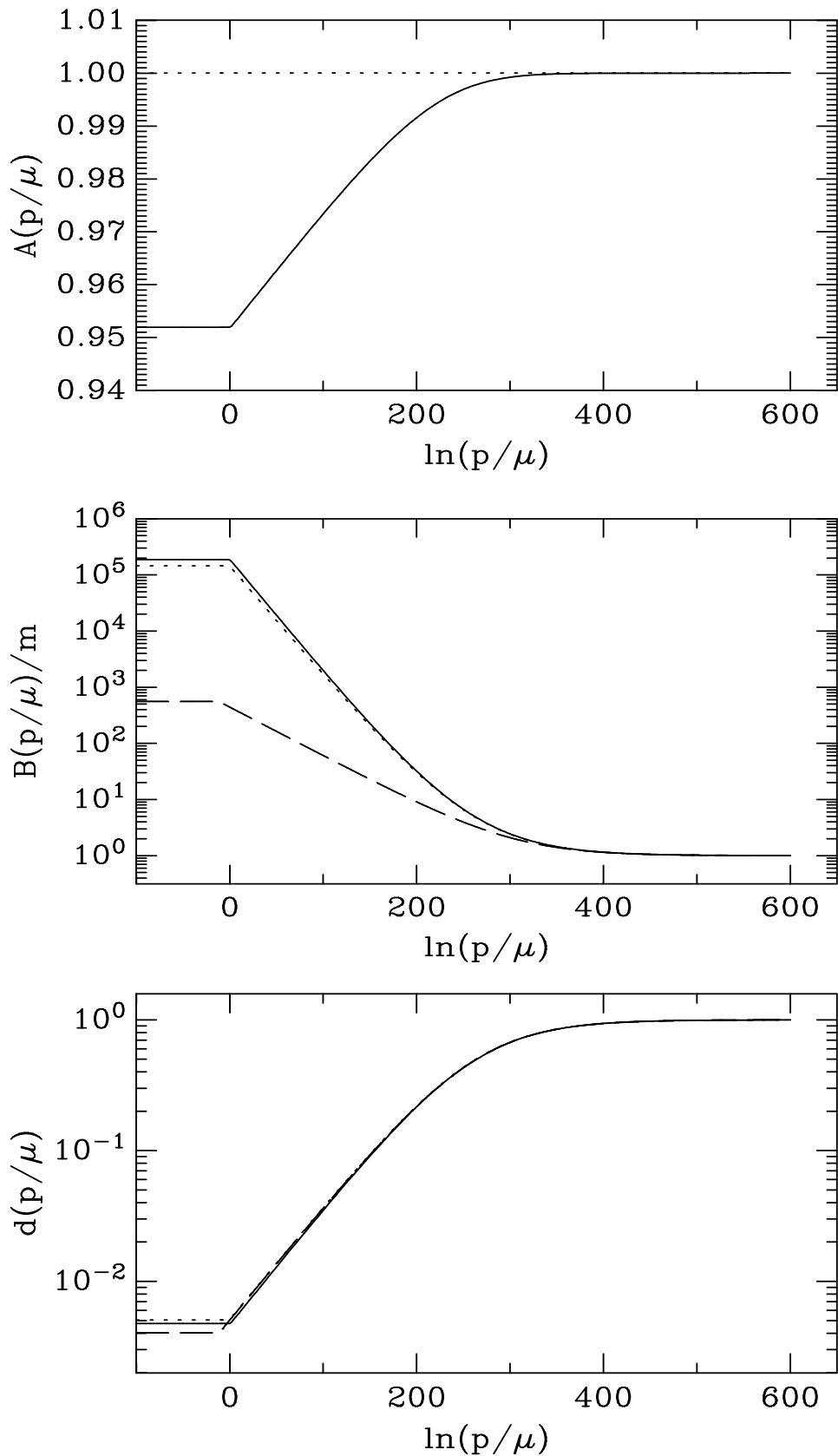


Abbildung 4.1: Die nackten invarianten Funktionen für $\epsilon = 0.01$ ($D = 3.98$), $\hat{g} = 15$, $\hat{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}$ und $\xi = 0$. Die durchgezogenen Linien stellen die exakten Lösungen der SDE's (4.6), die gepunkteten Linien die aus den LL_ϵ -Beziehungen (4.30) gebildeten Startwerte und die gestrichelten Linien die erste (nichtperturbative) Iteration der SDE's (4.6) dar.

sich der Impulsbereich grob in einen IR- und UV-Bereich, mit jeweils eigener Masse bzw. Kopplungskonstante, unterteilen lässt. Die sich für alle invarianten Funktionen in der Abbildung (4.1) beim selben Impuls zeigende ‘‘Kante’’ markiert das Ende des IR-Bereichs⁷ und wird durch die IR-Massenskala $m_t = \frac{B(0)}{A(0)}$, für die in Abbildung (4.1) $m_t \approx 1$ gilt, approximiert.⁸

- Die in Abbildung (4.1) dargestellten Lösungen sind, abgesehen davon, daß sie eine von ε abhängige, auf einem unendlichen Intervall definierte Funktionenschar darstellen, denjenigen Lösungen ähnlich, die in [RA 91] im Rahmen einer Lösung der RBA für eine Impuls-COR gefunden wurden.

In der Abbildung (4.2) sind die nackten invarianten Funktionen für zwei Werte des Eichfixierungsparameters ξ dargestellt. Die beiden invarianten Funktionen des Fermionpropagators zeigen entsprechend ihrer nichttrivialen LKT (C.12) eine starke Änderung beim Übergang von der Landau- zur Feynman-Eichung. Dagegen ist die in dieser Abbildung zum Ausdruck kommende Eichabhängigkeit des Transversalanteils des Bosonpropagators ein Maß für die Brechung der Eichkovarianz durch die RBA (4.1), auf die wir bereits im Zusammenhang mit den LL $_\varepsilon$ -Beziehungen (4.30) hingewiesen haben.

4.4 Der Kontinuumslimes gemäß der multiplikativen Renormierung

Der einfachste Versuch, die bzgl. ε singulären nichtperturbativen Lösungen der nackten SDE's zu renormieren, besteht darin, die im Rahmen der Störungstheorie erfolgreichen multiplikativen Renormierungsvorschriften zu übernehmen. Die multiplikative Renormierung der QEDD sowie die speziellen Vorschriften, die aufgrund der Vertexnäherung (4.1) für die RBA verwendet werden müssen, sind in Anhang D zusammengestellt.

Definition des Off-Shell-Renormierungsschemas

Als Renormierungsschema verwenden wir das Off-Shell-Schema (MOM), das bei Vorgabe einer beliebigen Renormierungsmassenskala μ durch die folgenden Renormierungsbedingungen für die invarianten Funktionen definiert ist

$$\begin{aligned} A_r^{MOM}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} &= Z_2^{MOM} A(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} \stackrel{!}{=} 1 \\ \frac{B_r^{MOM}(p^2)}{A_r^{MOM}(p^2)} \Big|_{p^2=\mu^2} &= \frac{B(p^2)}{A(p^2)} \Big|_{p^2=\mu^2} = m_{t,r}^{MOM} \\ d_r^{MOM}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} &= (Z_3^{MOM})^{-1} d(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

⁷Bei feinerer Auflösung des Impulsbereichs $p \approx m_t$ erweisen sich die invarianten Funktionen selbstverständlich als vollkommen glatt in diesem Bereich.

⁸Um die Struktur der invarianten Funktionen für $p \approx m_t$ richtig zu erfassen, haben wir in diesem Impulsbereich eine hohe Stützstellenzahl verwendet.

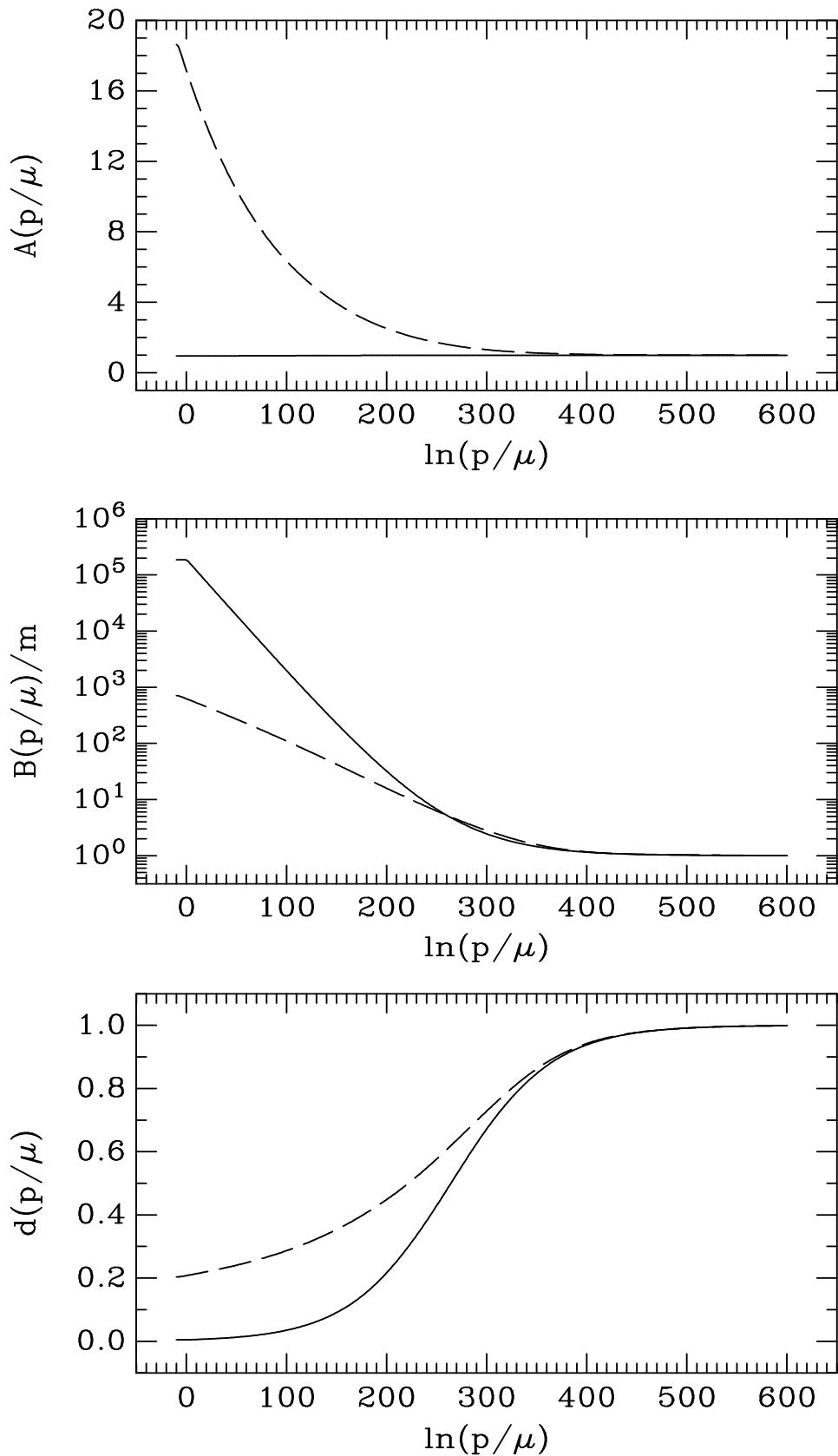


Abbildung 4.2: Die nackten invarianten Funktionen für $\epsilon = 0.01$ ($D = 3.98$), $\hat{g} = 15$, $\hat{m} = 5.14 \cdot 10^{-6}$ in Landau-Eichung $\xi = 0$ (durchgezogene Linien) und Feynman-Eichung $\xi = 1$ (gestrichelte Linien).

Hieraus folgt für die renormierten Parameter als Funktion der nackten, gemäß Gl.(2.14) mit μ dimensionslos gemachten Parameter

$$\begin{aligned} g_r^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= \underbrace{(Z_g^{MOM})^{-1}}_{\stackrel{RBA}{=} Z_2 \sqrt{Z_3}} \hat{g} = \frac{\sqrt{d(p^2)}}{A(p^2)} \Big|_{p^2=\mu^2} \hat{g} \\ m_{t,r}^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= (\tilde{Z}_M^{MOM})^{-1} m = \frac{B(p^2)}{A(p^2)} \Big|_{p^2=\mu^2} \\ \xi_r^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= (Z_3^{MOM})^{-1} \xi = \xi d^{-1}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Durch Inversion dieser Beziehungen können die renormierten invarianten Funktionen (4.37) durch renormierte Parameter ausgedrückt werden. Da die renormierte Masse unter Bezugnahme auf die gesamte Funktion $B(p^2)$ definiert ist, wird sie i.allg. einen dynamischen Anteil besitzen. Wir kennzeichnen sie deshalb mit einem Index "t" (totale Masse) und versehen die zugehörige Renormierungskonstante Z_m mit einer Tilde. Wir gehen auf diese Problematik im Rahmen des Studiums der D χ SB näher ein. Für die Renormierungskonstanten als Funktion der nackten Parameter folgt mit Gl.(4.23) in Ein-Loop-Störungsrechnung

$$\begin{aligned} Z_2^{(1),MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= 1 \\ &- \frac{2\xi\Gamma(\varepsilon)}{2-\varepsilon} \frac{\hat{g}^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (1+\hat{m}^2)^{-\varepsilon} {}_2F_1[\varepsilon, 1-\varepsilon; 3-\varepsilon; \frac{1}{1+\hat{m}^2}] \\ Z_m^{(1),MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= 1 + \Gamma(\varepsilon) \frac{\hat{g}^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (1+\hat{m}^2)^{-\varepsilon} \left\{ \right. \\ &\frac{2\xi}{2-\varepsilon} {}_2F_1[\varepsilon, 1-\varepsilon; 3-\varepsilon; \frac{1}{1+\hat{m}^2}] \\ &\left. - \frac{(3-2\varepsilon+\xi)}{1-\varepsilon} {}_2F_1[\varepsilon, 1-\varepsilon; 2-\varepsilon; \frac{1}{1+\hat{m}^2}] \right\} \\ Z_3^{(1),MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= 1 \\ &- \frac{\Gamma(\varepsilon)4^{1+\varepsilon}}{3} \frac{\hat{g}^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (1+4\hat{m}^2)^{-\varepsilon} {}_2F_1[\varepsilon, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{1+4\hat{m}^2}]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die RG-Funktionen β und γ_m beschreiben die Änderung der renormierten Parameter $g_r(\mu), m_{t,r}(\mu)$ bei infinitesimaler Variation von μ und festgehaltenen nackten Parametern

$$\begin{aligned} \beta^{MOM}(g_r, m_r, \xi_r, \varepsilon) &= \mu \frac{d}{d\mu} \Big|_{g,m,\xi} g_r^{MOM}(\mu) \\ &= -\varepsilon g_r + g_r \hat{\beta}^{MOM}(g_r, m_r, \xi_r, \varepsilon) \\ \tilde{\gamma}_m^{MOM}(g_r, m_r, \xi_r, \varepsilon) &= \frac{\mu}{m_{t,r}} \frac{d}{d\mu} \Big|_{g,m,\xi} m_{t,r}^{MOM}(\mu), \end{aligned} \quad (4.40)$$

die anomale Dimension des Fermion- bzw. Bosonfeldes ist gemäß

$$\begin{aligned} \gamma_F^{MOM}(g_r, m_r, \xi_r, \varepsilon) &= \frac{\mu}{Z_2^{MOM}} \frac{d}{d\mu} \Big|_{g,m,\xi} Z_2^{MOM}(\mu) \\ \gamma_A^{MOM}(g_r, m_r, \xi_r, \varepsilon) &= \frac{\mu}{Z_3^{MOM}} \frac{d}{d\mu} \Big|_{g,m,\xi} Z_3^{MOM}(\mu) \end{aligned} \quad (4.41)$$

definiert. Die Bedeutung der RG-Funktionen liegt darin, daß sie sich zumindest in der Störungsrechnung als Funktion der renormierten Parameter stetig nach $\varepsilon \rightarrow 0$ hin fortsetzen lassen. Mit Gl.(4.38) können sie durch die logarithmischen Ableitungen der invarianten Funktionen am Subtraktionspunkt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}\gamma_A^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= \frac{2p^2 \frac{d}{dp^2} d(p^2, g, m, \xi)}{d(p^2, g, m, \xi)} \Big|_{p^2=\mu^2} \\ \gamma_F^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= -\frac{2p^2 \frac{d}{dp^2} A(p^2, g, m, \xi)}{A(p^2, g, m, \xi)} \Big|_{p^2=\mu^2} \\ \tilde{\gamma}_m^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) &= \gamma_F^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}, \xi, \varepsilon) + \frac{2p^2 \frac{d}{dp^2} B(p^2, g, m, \xi)}{B(p^2, g, m, \xi)} \Big|_{p^2=\mu^2},\end{aligned}\quad (4.42)$$

wobei sich die β -Funktion aus der Beziehung

$$\hat{\beta} \stackrel{RBA}{=} \frac{1}{2} \gamma_A + \gamma_F \quad (4.43)$$

ergibt. Mit den Gl.(4.39/4.42) folgt für die RG-Funktionen als Funktion der renormierten Parameter in Ein-Loop-Störungsrechnung

$$\begin{aligned}\gamma_F^{(1),MOM}(g_r, \hat{m}_r, \xi_r, \varepsilon) &= \frac{8\xi_r \Gamma(1+\varepsilon)}{(2-\varepsilon)(3-\varepsilon)} \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{1}{(1+\hat{m}_r^2)^{(1+\varepsilon)}} \\ &\times {}_2F_1[1+\varepsilon, 1-\varepsilon; 4-\varepsilon; \frac{1}{1+\hat{m}_r^2}] \\ &= 2\xi_r \frac{g_r^2}{(4\pi)^2} \left\{ 1 - 2\hat{m}_r^2 (1 + \hat{m}_r^2 \ln(\frac{\hat{m}_r^2}{1+\hat{m}_r^2})) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \gamma_m^{(1),MOM}(g_r, \hat{m}_r, \xi_r, \varepsilon) &= \gamma_F^{(1),MOM} - \frac{2(3-2\varepsilon+\xi_r)\Gamma(1+\varepsilon)}{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)} \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \\ &\times \frac{1}{(1+\hat{m}_r^2)^{(1+\varepsilon)}} {}_2F_1[1+\varepsilon, 1-\varepsilon; 3-\varepsilon; \frac{1}{1+\hat{m}_r^2}] \\ &= -2 \frac{g_r^2}{(4\pi)^2} \left\{ 3 + \hat{m}_r^2 \left\{ 2\xi_r + \ln(\frac{\hat{m}_r^2}{1+\hat{m}_r^2}) (3 + \xi_r(1+2\hat{m}_r^2)) \right\} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \gamma_A^{(1),MOM}(g_r, \hat{m}_r, \xi_r, \varepsilon) &= \frac{32\Gamma(1+\varepsilon)4^\varepsilon}{15} \frac{g_r^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{1}{(1+4\hat{m}_r^2)^{(1+\varepsilon)}} \\ &\times {}_2F_1[1+\varepsilon, \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{1}{1+4\hat{m}_r^2}].\end{aligned}\quad (4.44)$$

Die durch die RG-Funktionen definierten laufenden renormierten Parameter (2.23) besitzen im MOM-Renormierungsschema die Darstellung

$$\begin{aligned}\bar{m}_r(t) &= e^{-t} \frac{B_r^{MOM}(p^2)}{A_r^{MOM}(p^2)} \Big|_{p^2=(\mu e^t)^2} \\ &= e^{-t} \frac{B(p^2)}{B(p^2)} \Big|_{p^2=(\mu e^t)^2} \\ \bar{g}_r^2(t) &\stackrel{RBA}{=} (g_r^{MOM})^2 e^{-2\varepsilon t} \frac{d_r^{MOM}(p^2)}{(A_r^{MOM}(p^2))^2} \Big|_{p^2=(\mu e^t)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{g}^2 e^{-2\varepsilon t} \frac{d(p^2)}{(A^2(p^2))^2} \Big|_{p^2=(\mu e^t)^2} \\
\bar{\xi}_r(t) &= \frac{\xi_r}{d_r^{MOM}(p^2)} \Big|_{p^2=(\mu e^t)^2} \\
&= \frac{\xi}{d(p^2)} \Big|_{p^2=(\mu e^t)^2}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Überprüfung der Trivialitätshypothese

Zur Überprüfung der in Kapitel 2 diskutierten RG-Trivialitätshypothese für die QED₄ ist in Abbildung (4.3) die renormierte Kopplung (4.38) als Funktion der nackten Kopplung \hat{g} für fünf verschiedene Werte der raumzeitlichen Dimension und für zwei stark unterschiedliche Werte der renormierten Masse $\hat{m}_{t,r}^{MOM}$ in Landau-Eichung dargestellt.⁹ Aus dieser Abbildung geht hervor, daß die renormierte Kopplung stets kleinere Werte als die nackte Kopplung annimmt (Abschirmungseffekt) und durch eine Grenzkopplung

$$g_r^*(\hat{m}_{t,r}^{MOM}, \varepsilon) = \lim_{\hat{g} \rightarrow \infty} g_r^{MOM}(\hat{g}, \hat{m}_{t,r}^{MOM}, \varepsilon), \tag{4.46}$$

die mit kleiner werdenden Werten für ε und $\hat{m}_{t,r}^{MOM}$ abnimmt, beschränkt bleibt. Dies ist ein Hinweis darauf, daß für eine fest vorgegebene renormierte Masse $\hat{m}_{t,r}^{MOM}$ die renormierte Kopplung g_r^{MOM} , unabhängig davon, wie die nackte Kopplung $\hat{g}(\varepsilon)$ bei Variation von ε zur Einhaltung der Renormierungsbedingungen (4.37) nachgeführt wird, im Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts ist in Abbildung (4.4) die Grenzkopplung $g_r^*(\hat{m}_{t,r}^{MOM}, \varepsilon)$ gegen $\sqrt{\varepsilon}$ aufgetragen. Demnach nähern sich für kleines ε alle Grenzkopplungen einer Geraden an, die gemäß der RG-Beziehung (2.56) mit der Steigung $\beta_1^{-\frac{1}{2}}(0) \approx 10.87$ durch den Nullpunkt geht.¹⁰ Eine andere Möglichkeit, die Trivialität zu verdeutlichen, besteht darin, die der RG-Analyse in Kapitel 2 zugrundeliegende Approximation der RG-Funktionen zu überprüfen. In den Abbildungen (4.5/4.6) sind die gemäß Gl.(4.42) berechneten RG-Funktionen β^{MOM} und $\tilde{\gamma}_m^{MOM}$ als Funktion der renormierten Kopplung für zwei Werte der raumzeitlichen Dimension und bei den Parametern $\xi_r^{MOM} = 0$, $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 1$ dargestellt. Die Abbildungen (4.5/4.6) bringen am besten zum Ausdruck, daß sich der (multiplikativ renormierte) nichtperturbative Gehalt der SDE's (4.2) zumindest für kleine ε durch Ein-Loop-RG-Summationen, wie sie der Trivialitätshypothese aus Kapitel 2 zugrunde liegen, zu beschreiben lassen scheint. Erst für große ε kann die renormierte Kopplung g_r^{MOM} nach Abbildung (4.3) Werte annehmen, die so groß sind, daß es zu einer sichtbaren Abweichung

⁹Die raumzeitliche Dimension $\varepsilon = 0.005$ stellt in etwa die untere Grenze dar, für die wir die SDE's numerisch lösen können. Sie entspricht nach Gl.(2.51) einer Korrelationslänge von $\xi_k(0.005) = e^{100} \approx 2.68 \cdot 10^{43}$.

¹⁰Die Konvergenz der Datenpunkte in Abbildung (4.4) erklärt sich aus dem Umstand, daß in dem IR-regulären LL _{ε} -Resultat $g_r^2 = \frac{\hat{g}^2}{1 + \frac{\beta_1(0)}{\varepsilon} (1 + 4\hat{m}_{t,r}^2)^{-\varepsilon}}$ die renormierte Masse für kleine ε keinen Einfluß besitzt.

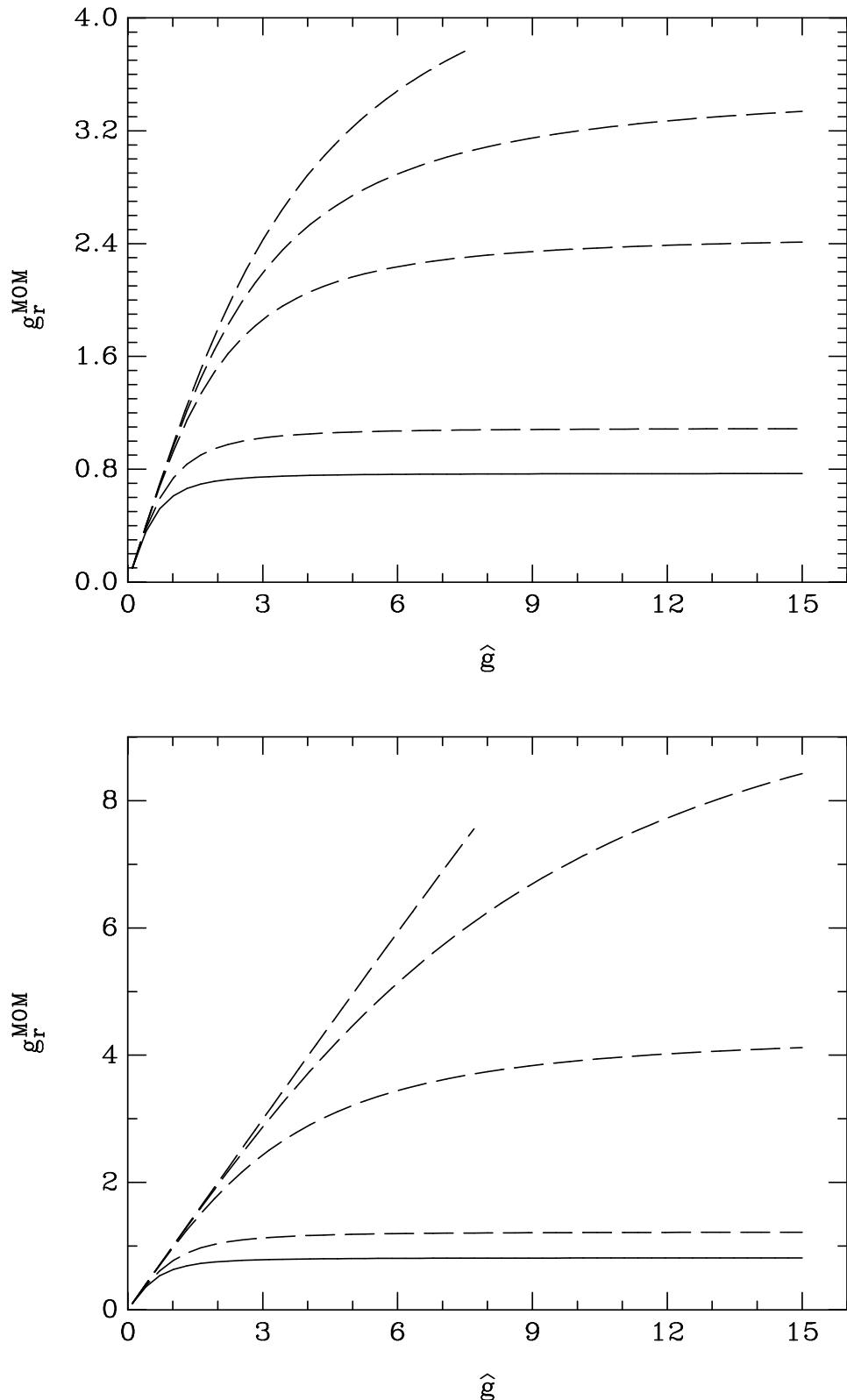


Abbildung 4.3: Die renormierte Kopplung g_r^{MOM} als Funktion der nackten Kopplung \hat{g} in Landau-Eichung und $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 1$ (oben) bzw. $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 10^5$ (unten). Für die durchgezogenen Linien gilt $\epsilon = 0.005$ ($D = 3.99$), für die gestrichelten Linien gilt $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$, ($D = 3.98, 3.9, 3.8, 3.6$).

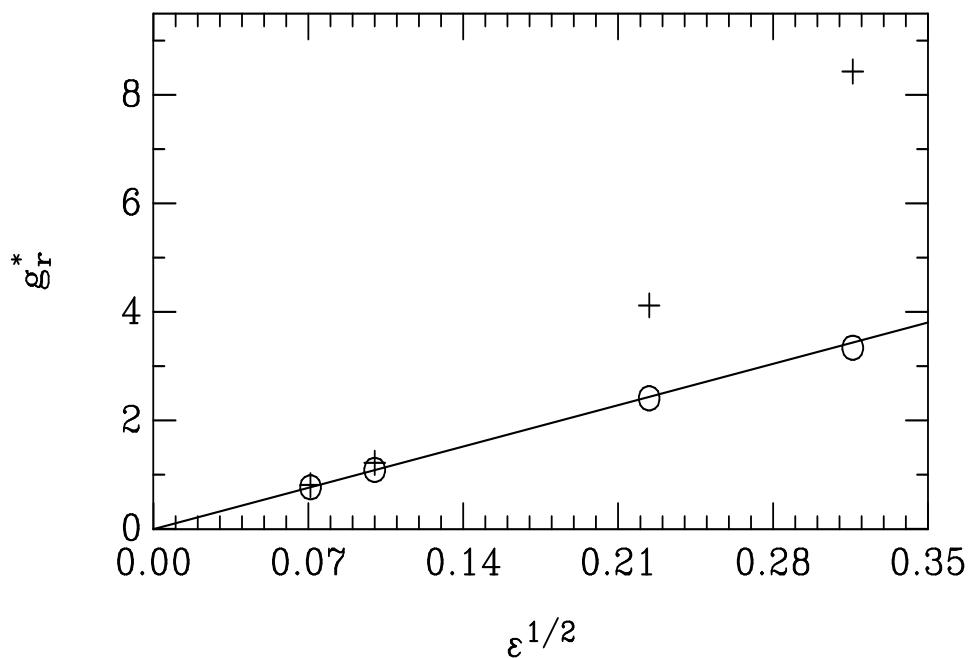


Abbildung 4.4: Die renormierte Grenzkopplung g_r^* als Funktion von $\sqrt{\epsilon}$ für $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 1$ (Kreise) bzw. $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 10^5$ (Kreuze). Die durchgezogene Linie stellt die für ein massenunabhängiges Schema gültige Ein-Loop-RG-Beziehung $g_r^*(\epsilon) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta_1(0)}}$ dar.

zwischen den exakten RG-Funktionen und ihrer Ein-Loop-Approximation (4.44) kommt.¹¹

Die $\text{QED}_{D<4}$ als Cut-Off-Theorie ?

Für eine COR ist es ein gängiges Konzept, triviale Theorien als Cut-Off-Theorien zu betrachten, wobei die obere Grenze für den Cut-Off durch die renormierte Kopplung bestimmt ist. Damit die Niederenergiephysik durch die Cut-Off-Theorie eindeutig beschrieben wird, muß die Theorie schwach renormierbar [Gö 91] sein, d.h. bei Variation des Cut-Off's müssen sich die nackten Parameter so nachführen lassen, daß die renormierten Größen konstant gehalten werden können.¹² Dabei darf es nicht auf die Wahl der renormierten Größen ankommen, d.h. die Linien konstanter Physik im Raum der nackten Parameter, beispielsweise die Linien konstanter renormierter Kopplung und Linien für ein konstantes Verhältnis zweier Massen, müssen übereinstimmen.¹³ Auf dem Niveau der invarianten Funktionen drückt sich die schwache Renormierbarkeit durch ein Skalierungsverhalten aus, d.h. die (dimensionslosen) renormierten invarianten Funktionen hängen auf den Linien konstanter renormierter Kopplung, Masse und Eichfixierungskonstante nur von dem Verhältnis $\frac{p}{m_r}$ ab, so daß sie sich im IR-Bereich bei Variation des Cut-Off's nicht ändern.

Eine naive Übertragung des Konzepts der Cut-Off-Theorie auf die DR impliziert die Frage, ob die QED_D für raumzeitliche Dimensionen $D < 4$, deren genaue Grenzen nach Abbildung (4.3) – wie in einer COR – durch die renormierte Kopplung bestimmt werden, zur eindeutigen Beschreibung der Niederenergiephänomene verwendet werden kann. Am Beispiel des Skalierungsverhaltens der invarianten Funktionen in der Störungsrechnung verdeutlichen wir die sich dabei ergebende Problematik. In einer COR entstehen die perturbativen Logarithmen in den renormierten invarianten Funktionen aus der Kombination

$$\begin{aligned} \ln_\Lambda\left(\left(\frac{p}{\mu}\right)^2\right) &= \ln\left(\left(\frac{p}{\Lambda}\right)^2\right) - \ln\left(\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{p}{\mu}\right)^2\right) \\ p &\in [0, \Lambda], \end{aligned} \tag{4.47}$$

so daß sich die regularisierende Wirkung der COR nur auf den Definitionsbereich der invarianten Funktionen bezieht. Dementsprechend kann das Skalierungsverhalten in einer COR *prinzipiell exakt gegeben sein*. Dagegen entstehen die perturbativen Logarithmen in DR als Grenzwert der Funktio-

¹¹Die gute Übereinstimmung der RG-Funktionen mit ihren perturbativen Ausdrücken ist auch im Rahmen von Gitterrechnungen für die QED_4 [Gö 91] beobachtet worden.

¹²Nach [Gö 91] heißt eine Theorie stark renormierbar, falls zusätzlich zur schwachen Renormierbarkeit der Kontinuumslimes durchgeführt werden kann. In dieser Terminologie ausgedrückt ist eine triviale Theorie entweder nichtrenormierbar oder schwachrenormierbar, jedoch nicht stark renormierbar.

¹³Im Rahmen von Gitterrechnungen [Gö 91] zeigt sich vor allem im Starkkopplungsbe- reich, daß die QED_4 in einer COR nicht schwach renormierbar ist.

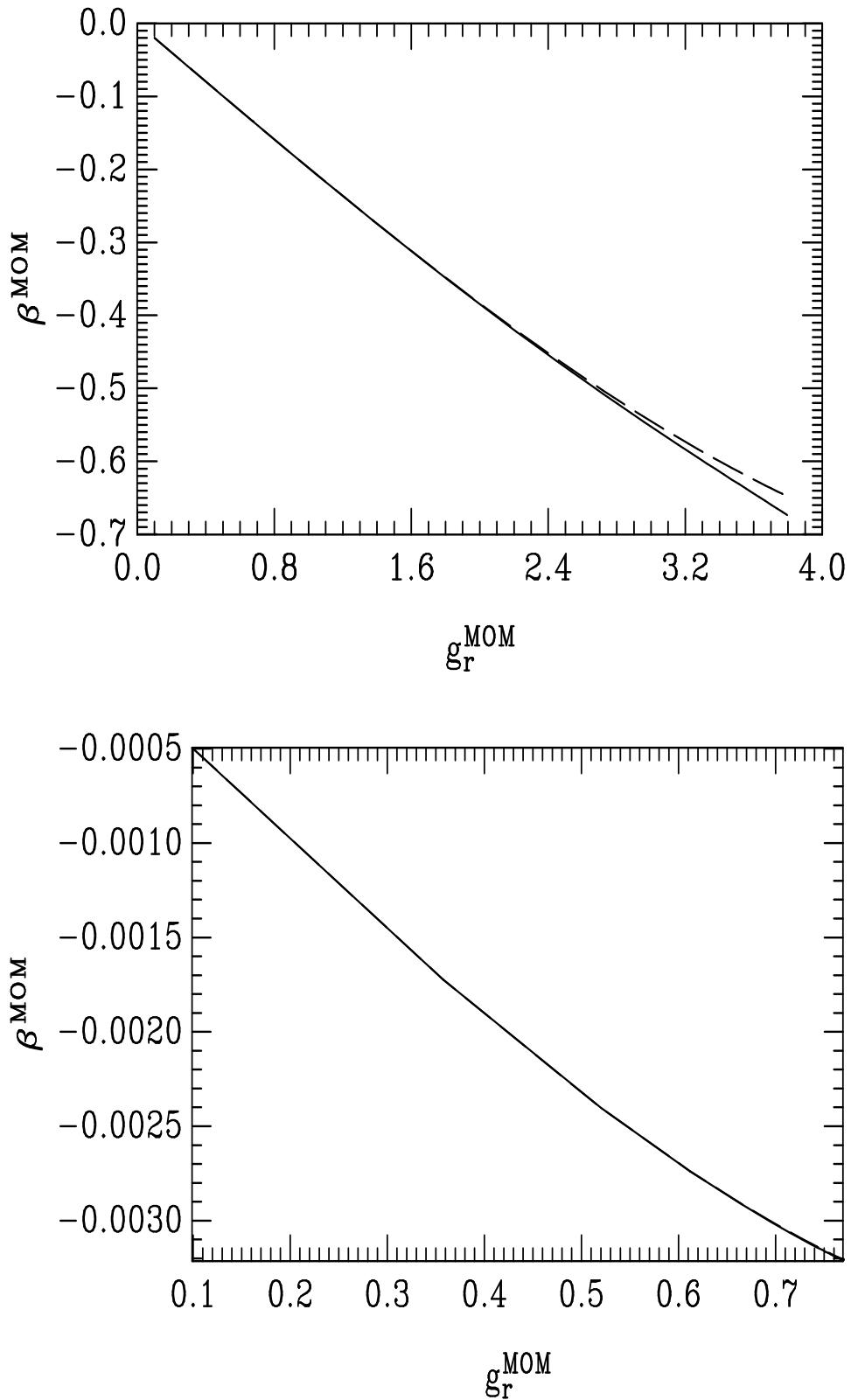


Abbildung 4.5: Die renormierte β^{MOM} -Funktion für $\hat{m}_{t,r}^{\text{MOM}} = 1$, $\xi_r = 0$ und $\varepsilon = 0.2$, ($D = 3.6$) (oben) bzw. $\varepsilon = 0.005$, ($D = 3.99$) (unten). Die durchgezogenen Linien stellen die exakten und die gestrichelten Linien die Ein-Loop-Resultate (4.44) dar.

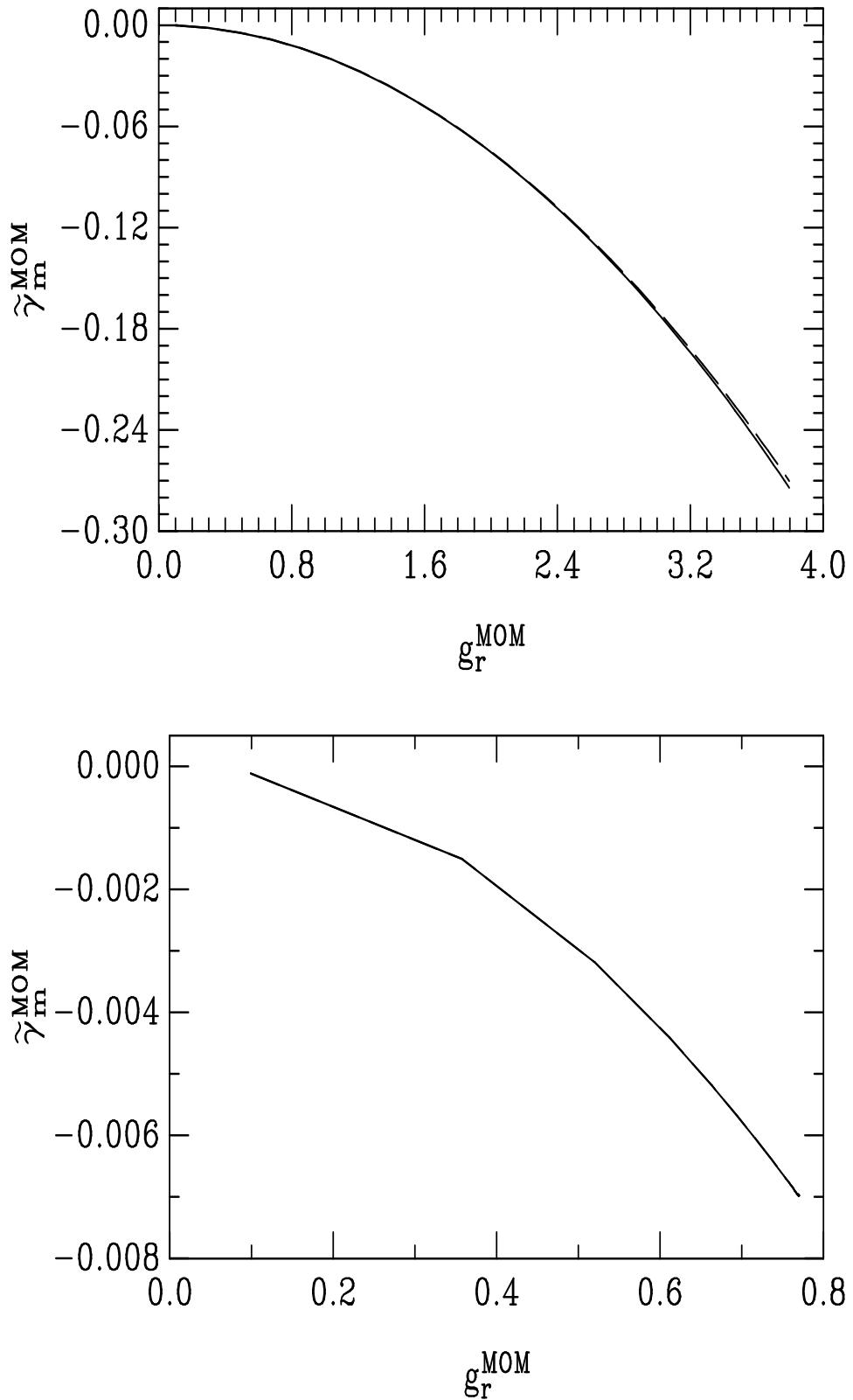


Abbildung 4.6: Die $\tilde{\gamma}_m^{MOM}$ -Funktion für $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 1$, $\xi_r = 0$ und $\varepsilon = 0.2$, ($D = 3.6$) (oben) bzw. $\varepsilon = 0.005$, ($D = 3.99$) (unten). Die durchgezogenen Linien stellen die exakten und die gestrichelten Linien die Ein-Loop-Resultate (4.44) dar.

nenfolge

$$\begin{aligned} \ln_\varepsilon\left(\frac{p}{\mu}\right) &= \frac{1 - \left(\frac{p}{\mu}\right)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} = \ln\left(\frac{p}{\mu}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon \ln^2\left(\frac{p}{\mu}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)^2 \\ p &\in [0, \infty[, \end{aligned} \quad (4.48)$$

die auf dem gesamten Impulsbereich definiert ist. Da sie stetig von ε abhängt, hat die regularisierende Wirkung der Variation von D auf dem gesamten Impulsbereich Auswirkungen. Infolgedessen ist in DR das Skalierungsverhalten im IR-Bereich *prinzipiell nur approximativ gegeben*. Der tiefere Grund hierfür scheint in dem Umstand zu liegen, daß der Regularisierungsparameter in DR dimensionslos ist.

Zur Verdeutlichung des approximativen Skalierungsverhaltens sind in der Abbildung (4.7) die drei renormierten invarianten Funktionen für die renormierten Parameter $g_r^{MOM} = 1, m_{t,r}^{MOM} = 1, \xi_r^{MOM} = 0$ und elf Werte der raumzeitlichen Dimension dargestellt. Aus dieser Abbildung geht hervor, daß sich die invarianten Funktionen ausgehend vom Subtraktionspunkt $\frac{p}{\mu} = 1$ über einen gewissen Impulsbereich, der sich im Gegensatz zur COR vorab nicht eindeutig spezifizieren läßt, stabilisieren, so daß auf diesem Bereich von einem approximativen Skalierungsverhalten gesprochen werden kann. Auch wenn dieses für praktische Fragestellungen ausreichend sein kann, zeigen unserer Meinung nach die grundsätzlichen Unterschiede hinsichtlich des Skalierungsverhaltens, daß eine naive Übertragung des Konzepts der Cut-Off-Theorie von der COR auf die DR fragwürdig ist. Insgesamt scheint die physikalische Interpretierbarkeit einer dimensionell regulisierten Theorie für nichtganzzahlige raumzeitliche Dimensionen wesentlich weniger direkt zu sein, als dies im Rahmen einer COR für endliche Werte des Impuls-Cut-Off's der Fall ist.

4.5 Untersuchungen zur $D_\chi SB$

Das Studium der $D_\chi SB$ in der QRBA zeigt, daß es zweckmäßig ist, diesen rein nichtperturbativen Effekt getrennt zu betrachten, da er sich in DR nur in der unmittelbaren Nähe des chiralen Limes sichtbar machen läßt und gemäß der Diskussion in Kapitel 2 eine echt nichtperturbative Renormierung erfordert. Um zumindest eine gewisse Einsicht zu gewinnen, unternehmen wir nachfolgend den Versuch, die in der QRBA verwendeten analytischen Näherungsmethoden auf die RBA zu übertragen, und Argumente dafür anzugeben, daß das Auftreten der $D_\chi SB$ in der RBA und NPDR von der raumzeitlichen Dimension abhängt.

Näherungsweise Umwandlung der SDE's in ein RWP

Wir approximieren den Kern K_B in der SDE (4.6) für $B(p^2)$ in Landau-Eichung $\xi = 0$ durch den ersten Term der $\frac{p}{k}$ - bzw. $\frac{k}{p}$ -Entwicklung (4.9)

$$\begin{aligned} K_B(p, k, \varepsilon) &\rightarrow K_B^N(p, k, \varepsilon) \\ &= (D - 1) \frac{\Theta(p - k)}{p^2} d(p^2) + p \leftrightarrow k \end{aligned}$$

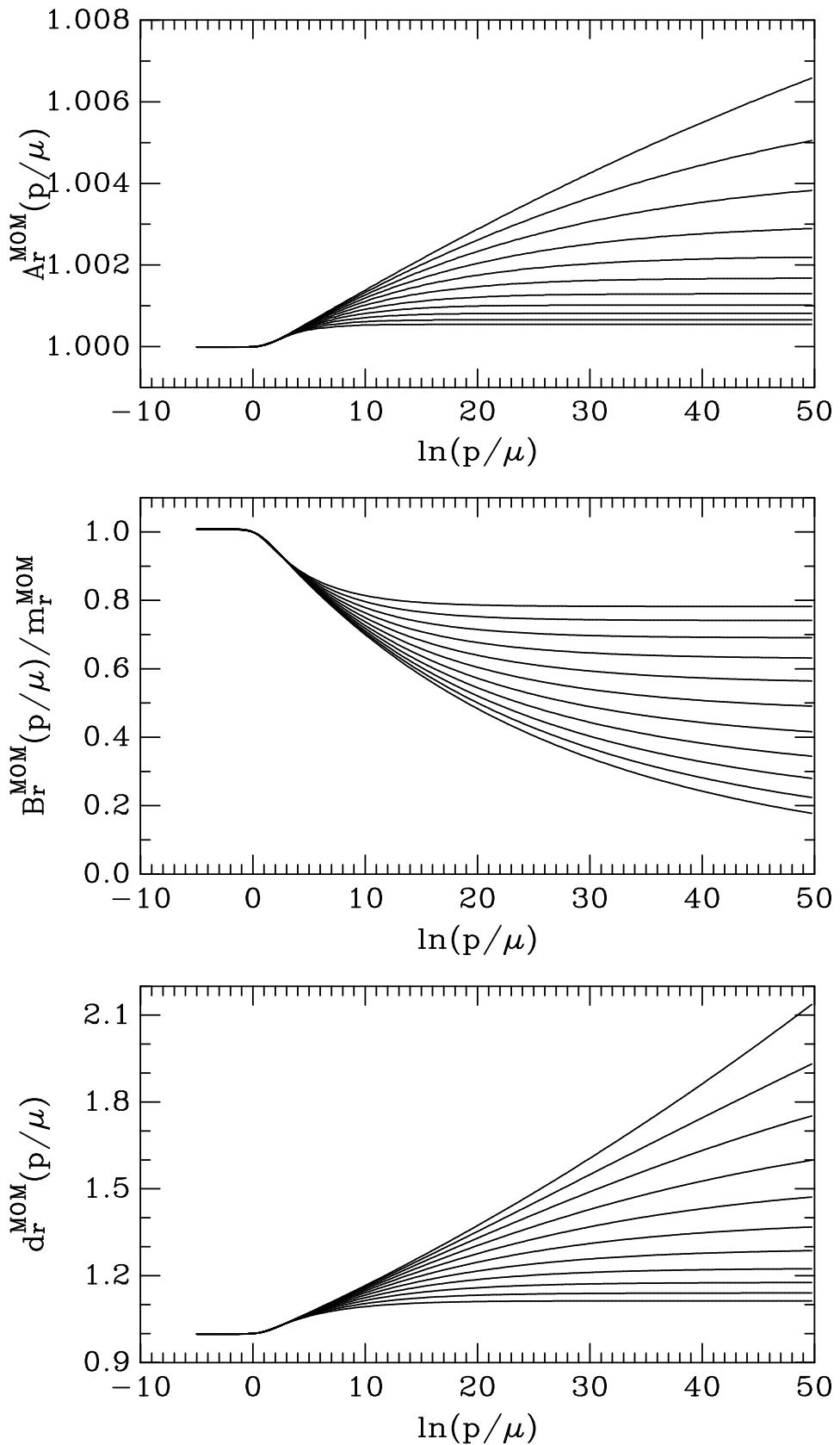


Abbildung 4.7: Die renormierten invarianten Funktionen für $\hat{g}_r^{MOM} = 1$, $\hat{m}_{t,r}^{MOM} = 1$, $\xi_r = 0$ und $\varepsilon = 10^{-(1+\frac{n}{10})}$ mit $n = 0, 1, \dots, 10$, $D \in [3.8, 3.98]$.

$$\begin{aligned} -\frac{D-1}{2} \frac{d}{dp} \frac{p^3}{\varphi(p)} \frac{d}{dp} K_B^N(p, k, \varepsilon) &= \delta(p-k) \\ \varphi(p) &= -\frac{1}{2} p^3 \frac{d}{dp} \frac{d(p)}{p^2}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

die übrigen Terme in der Entwicklung von K_B sind nicht mehr divergenzerzeugend und besitzen darüberhinaus entweder einen expliziten Faktor ε oder weisen mindestens Ableitungen zweiter Ordnung bzgl. der Funktion $d(p^2)$ auf. Die Approximation (4.49) gestattet es, die SDE (4.6) für $B(p^2)$ in das folgende nichtlineare RWP, bestehend aus der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} + \left(3 - \frac{p\varphi'(p)}{\varphi(p)} \right) p \frac{d}{dp} + \tilde{g}^2(\varepsilon) \frac{\varphi(p)p^{2-2\varepsilon}}{A^2(p^2)p^2 + B^2(p^2)} \right\} B(p) &= 0 \\ \tilde{g}^2(\varepsilon) &= \frac{4(D-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

der IR-Randbedingung

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p^3}{2} \frac{1}{\varphi(p)} \frac{d}{dp} \right) B(p) &= \frac{\tilde{g}^2(\varepsilon)}{2} \int_0^p dk k^{D-1} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} \\ &\stackrel{!}{\rightarrow} 0, \quad p \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

sowie der UV-Randbedingung

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{d(p)}{\varphi(p)} p \frac{d}{dp} + 1 \right) B(p) &= m + \frac{\tilde{g}^2(\varepsilon)}{2} \int_p^\infty dk k^{D-3} \frac{B(k^2)}{A^2(k^2)k^2 + B^2(k^2)} d(k) \\ &\stackrel{!}{\rightarrow} m, \quad p \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.52)$$

zu überführen. Für die Setzung $d(p^2), A(p^2) = 1$ erhalten wir das RWP (3.64-3.66) der QRBA zurück. Die Näherung des Kerns K_A in der SDE (4.6) für $A(p^2)$, die der Näherung (4.49) entspricht, besteht in der Vernachlässigung aller Ableitungen der Funktion $d(p^2)$ in seiner Entwicklung (4.9)

$$K_A(p, k, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (4.53)$$

und führt auf die Näherung

$$A(p^2) = 1, \quad (4.54)$$

die nach Abbildung (4.1) keine drastische Näherung darstellt.

Existenz eines kritischen ε für die $D_\chi SB$ in IRBN-I

In Analogie zur QRBA versuchen wir den chiralen Limes $m \rightarrow 0$ zunächst im Rahmen einer IRBN-I (3.61) für das RWP (4.50-4.52) zu erfassen

$$\left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} + \left(3 - \frac{p\varphi'(p)}{\varphi(p)} \right) p \frac{d}{dp} + \tilde{g}^2(\varepsilon) \varphi(p) p^{-2\varepsilon} \right\} \delta B(p) = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{d}{dp} \delta B(p) \Big|_{p=\delta m_t} = 0 \quad (4.56)$$

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d(p)}{\varphi(p)} p \frac{d}{dp} + 1 \right) \delta B(p) \Big|_{p=\infty} = m \quad (4.57)$$

$$\delta m_t = \delta B(\delta m_t). \quad (4.58)$$

Aus der SDE (4.6) folgt aufgrund der Approximation (4.54) in IRBN-I für die Funktion $d(p^2)$ die Näherung

$$\begin{aligned} d(p^2) &\rightarrow \delta d(p^2) = \frac{1}{1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon}} \\ \varphi &\rightarrow \delta \varphi = \frac{1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \beta_1(\varepsilon) g^2 p^{-2\varepsilon}}{(1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g^2 p^{-2\varepsilon})^2} \\ \beta_1(\varepsilon) &= \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(2 - \varepsilon) \Gamma(1 + \varepsilon) 4^{1+\varepsilon}}{3 \Gamma(\frac{5}{2} - \varepsilon) (4\pi)^{2-\varepsilon}} = \frac{1}{12\pi^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.59)$$

die mit der LL_ε -Näherung (4.31) übereinstimmt und die sich nach Abbildung (4.1) ebenfalls als eine gute Näherung erwiesen hat. Wir schreiben die Differentialgleichung (4.55) auf die Variable $x = p^{-\varepsilon}$ um

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\delta \varphi'(x)}{\delta \varphi(x)} + \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{x} \right) \frac{d}{dx} + \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 \delta \varphi(x) \right\} \delta B(x) &= 0 \\ \delta \varphi(x) &= \frac{1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \beta_1(\varepsilon) g^2 x^2}{(1 + \frac{\beta_1(\varepsilon)}{\varepsilon} g^2 x^2)^2} \end{aligned} \quad (4.60)$$

und betrachten die ihr zugeordnete Riccati-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(x)}{dx} &= \delta \varphi(x) \gamma^2(x) + \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\gamma(x)}{x} + \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 \\ \gamma(x) &\equiv -\frac{\delta B'(x)}{\delta \varphi(x) \delta B(x)}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aus dem UV-Verhalten (4.16) der Funktion $B(p^2)$ folgt

$$\gamma(x) \rightarrow \begin{cases} -2b_{0,1}(\varepsilon) \frac{g^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} x, & m \neq 0 \\ -\frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{x}, & m = 0 \end{cases}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.62)$$

und die Übertragung der IR-Randbedingung (4.56) ergibt

$$\begin{aligned} \gamma(x_t) &= 0 \\ \gamma'(x_t) &= \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^2 \\ x_t &\equiv x(p = \delta m_t) = (\delta m_t)^{-\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

wobei die Aussage über die Ableitung von $\gamma(x)$ an der Nullstelle x_t direkt aus der Differentialgleichung (4.61) folgt. Im IR-Bereich $x \rightarrow \infty$ wird die

Differentialgleichung (4.61) nach Umschreibung auf die Funktion $\tilde{\gamma}(x) = \frac{\gamma(x)}{x}$ separabel

$$x\tilde{\gamma}'(x) = \underbrace{\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)g^2}}_{=a(g^2,\varepsilon)} \tilde{\gamma}^2(x) + \underbrace{2\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\tilde{\gamma}(x)}_{=b(\varepsilon)} + \underbrace{\left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^2}_{=c(g^2,\varepsilon)} \quad (4.64)$$

und besitzt im Fall der D_χ SB die Lösung

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\stackrel{\text{IR}}{=} \frac{x}{2a} \begin{cases} -b + \sqrt{4ac - b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2} \ln(x/x_0)\right), & b^2 - 4ac < 0 \\ -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \frac{1 - (\frac{x}{x_0})^{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{1 + (\frac{x}{x_0})^{\sqrt{b^2 - 4ac}}} & , b^2 - 4ac > 0 \end{cases} \\ b^2 - 4ac &= \underbrace{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2} \left(1 - \varepsilon - \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{g}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)}\right)}_{=1-10\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

wobei x_0 eine Integrationskonstante bezeichnet. Aus dieser IR-Asymptotik folgt, daß es für $\varepsilon < \varepsilon_k$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &\equiv \min\{\varepsilon | b^2(\varepsilon) - 4a(g^2, \varepsilon)c(g^2, \varepsilon) = 0\} \\ \varepsilon_k &\approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta_1(0)} \left(\frac{\tilde{g}(0)}{g}\right)^2} = \frac{1}{10} \end{aligned} \quad (4.66)$$

in IRBN-I nicht zur D_χ SB in der RBA der masselosen QED_D mit einem reellen $x_t(m=0) = x_d$ (dynamische Masse) kommen kann, denn für diesen Fall ist nach Gl.(4.65) die führende Asymptotik von $\gamma(x)$ durch die lineare Funktion

$$\gamma(x, \varepsilon < \varepsilon_k) \rightarrow \underbrace{-\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} x}_{<0}, \quad x \rightarrow \infty \quad (4.67)$$

mit negativer Steigung gegeben, so daß $\gamma(x)$ keine Nullstelle $x = x_d$, für die nach Gl.(4.63) $\gamma'(x_d) > 0$ gilt, besitzen kann.¹⁴ Diese Aussage wird durch die Abbildung (4.8), die die numerische Lösung der Differentialgleichung (4.61) für $\varepsilon = 0.2 > \varepsilon_k$ und $\varepsilon = 0.05 < \varepsilon_k$ darstellt, bestätigt, wonach $\gamma(x)$ nur im ersten Fall eine Nullstelle besitzt. Für $\varepsilon > \varepsilon_k$ ist aufgrund der IR-Asymptotik (4.65) eine Nullstelle und eine Singularität für die Funktion $\gamma(x)$ zu erwarten.

WKB-Näherung für $\varepsilon \rightarrow 0$

Die vorausgegangene Darstellung ist die einfachste uns bekannte Möglichkeit, die Existenz eines ε_k zu motivieren und dieses gleichzeitig näherungsweise zu bestimmen. Für eine allgemeine, auch den Fall $m \neq 0$ erfassende

¹⁴Für $\beta_1 \rightarrow 0$ ist die Argumentation wegen der für diesen Fall sinnlosen Gl.(4.64) nicht möglich, d.h. die D_χ SB in der QRBA steht nicht im Widerspruch zu der hier getroffenen Aussage. Des Weiteren ist nach Gl.(4.65) in der nichttrivialen QCD_D mit $\beta_1(0) < 0$ eine D_χ SB zu erwarten.

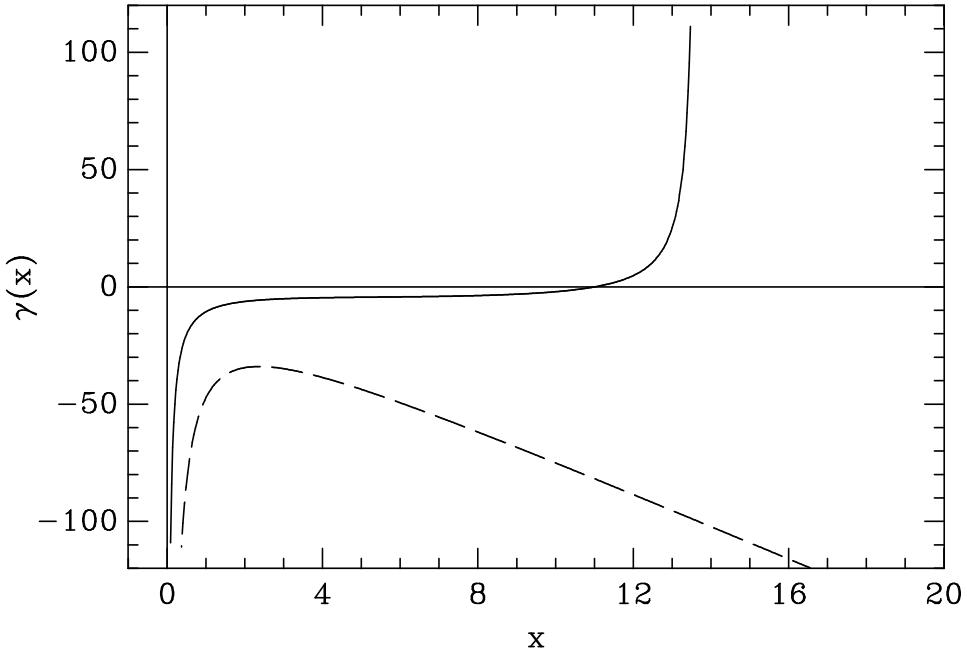


Abbildung 4.8: Die Funktion $\gamma(x)$ gemäß der exakten Lösung der Differentialgleichung (4.61) für $\varepsilon = 0.2 > \varepsilon_k$ (durchgezogene Linie) und $\varepsilon = 0.05 < \varepsilon_k$ (gestrichelte Linie). Alle dimensionsbehafteten Größen sind auf die kanonische Skala $g^{\frac{1}{\varepsilon}}$ bezogen.

Lösung der IRBN-I (4.55) ist die Umschreibung (4.61) allerdings ungeeignet. Wir skizzieren nachfolgend ein Näherungsverfahren, mit dem dieser Fall zumindest prinzipiell analytisch erfaßt werden kann. Dazu empfiehlt es sich, auf die Differentialgleichung (4.60) zurückzugehen, und diese durch die Transformation

$$\delta B(x) = x^{-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon}} \sqrt{\varphi(x)} \delta b(x) \quad (4.68)$$

auf die Standardform

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + U(x, \varepsilon) \right\} \delta b(x) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) &= \underbrace{(\frac{1}{\varepsilon})^2 (\tilde{g}^2(\varepsilon) \delta \varphi(x) - \frac{1}{x^2} - \frac{\varepsilon}{x} \frac{\delta \varphi'(x)}{\delta \varphi(x)})}_{=P(x, \varepsilon)} \\ &+ \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta \varphi'(x)}{\delta \varphi(x)} - \frac{3}{4} (\frac{\delta \varphi'(x)}{\delta \varphi(x)})^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta \varphi''(x)}{\delta \varphi(x)} \end{aligned} \quad (4.69)$$

zu bringen. Diese Differentialgleichung legt für $\varepsilon \rightarrow 0$ die folgende WKB-Näherung nahe

$$U(x, \varepsilon) \stackrel{\text{WKB}}{=} (\frac{1}{\varepsilon})^2 P(x, \varepsilon), \quad (4.70)$$

für die die Lösung der Differentialgleichungen (4.69) nach den Standard-WKB-Methoden [As 84] durch die beiden linear unabhängigen Airy-Funktionen $Ai(x)$, $Bi(x)$ gegeben ist

$$\begin{aligned}\delta b(x) &= \left(\frac{P(x, \varepsilon)}{\eta(x, \varepsilon)}\right)^{-\frac{1}{4}} \left\{ \alpha Ai\left(-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} \eta(x, \varepsilon)\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta Bi\left(-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} \eta(x, \varepsilon)\right) \right\} \\ \frac{2}{3}(\eta(x, \varepsilon))^{\frac{3}{2}} &= \int_{x_T}^x dx' \sqrt{P(x', \varepsilon)}, \quad x > x_T \\ \frac{2}{3}(-\eta(x, \varepsilon))^{\frac{3}{2}} &= \int_x^{x_T} dx' \sqrt{-P(x', \varepsilon)}, \quad x < x_T.\end{aligned}\quad (4.71)$$

Die IR- bzw. UV-Asymptotik der Funktion $P(x, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}P(x, \varepsilon) &\rightarrow -\left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{x}\right)^2, \quad x \rightarrow 0 \\ P(x, \varepsilon) &\rightarrow \frac{1}{x^2} \left\{ \varepsilon \left(2 + \underbrace{\left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{g}\right)^2 \frac{1-\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)}}_{=11+\mathcal{O}(\varepsilon)}\right) - 1 \right\}, \quad x \rightarrow \infty \\ \varepsilon_k &\equiv \min\{\varepsilon | \underbrace{\varepsilon \left(2 + \left(\frac{\tilde{g}(\varepsilon)}{g}\right)^2 \frac{1-\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)}\right) - 1 = 0}\}_{=11+\mathcal{O}(\varepsilon)}\} \\ \varepsilon_k &\approx \frac{1}{2 + \frac{1}{\beta_1(0)} \left(\frac{\tilde{g}(0)}{g}\right)^2} = \frac{1}{11}\end{aligned}\quad (4.72)$$

zeigt, daß die Differentialgleichung (4.69) für $\varepsilon > \varepsilon_k$ einen Umkehrpunkt x_T , für den $P(x, \varepsilon)$ das Vorzeichen wechselt, besitzt, so daß x_T zwei Gebiete mit unterschiedlichem Verhalten der Lösungsfunktion trennt; für $x < x_T$ ist $\delta b(x)$ monoton steigend bzw. monoton fallend und für $x > x_T$ oszillierend. Da in der QRBA ($\beta_1 \rightarrow 0$, $\delta\varphi \rightarrow 1$) stets sowohl ein Umkehrpunkt als auch nach Gl.(3.73) eine dynamische Masse x_d existiert

$$\begin{aligned}\varepsilon_k(\beta_1 \rightarrow 0) &\rightarrow 0 \\ x_T(\beta_1 \rightarrow 0) &\rightarrow \frac{1}{\tilde{g}(\varepsilon)}\end{aligned}\quad (4.73)$$

kann die Nichtexistenz eines Umkehrpunkts in der RBA für $\varepsilon < \varepsilon_k$ als Signal für das Abschalten der D_χ SB angesehen werden, wobei der Wert (4.72) für ε_k gut mit dem exakten Wert (4.66) in IRBN-I übereinstimmt.¹⁵ Die Konstanten α, β in der WKB-Lösung (4.71) können durch die UV-Randbedingung (4.57) und die Normierungsbedingung (4.58) festgelegt werden, so daß in Analogie zu Gl.(3.73) die IR-Randbedingung (4.56) prinzipiell auf die Funktion $\delta m_t(m, \varepsilon)$ führt, deren Nullstellen die dynamischen Massen

$$m_d = g^{\frac{1}{\varepsilon}} f_{DR}(\varepsilon) \quad (4.74)$$

¹⁵Die Nichtexistenz eines Umkehrpunkts für $\varepsilon < \varepsilon_k$ bedeutet, daß $\delta b(x)$ keine Oszillationen, die eine Voraussetzung für die Erfüllung der IR-Randbedingung (4.56) sind, ausbildet.

bestimmen. Wir sehen von einer Darstellung dieser komplizierten Beziehung ab, deren Nullstellen wir bislang nicht analytisch bestimmen konnten.¹⁶ Stattdessen ist in der Abbildung (4.9) die exakte numerische Lösung der SDE's (4.6) in der Nähe des chiralen Limes $m \rightarrow 0$ für $\varepsilon = 0.2 > \varepsilon_k$ und $\varepsilon = 0.05 < \varepsilon_k$ dargestellt. Diese Abbildung zeigt, daß es im ersten Fall zur Ausbildung einer reellen dynamischen Masse kommt und daß sich diese im zweiten Fall bis zu Werten $\frac{m_t}{g^\varepsilon} = 0.5 \cdot 10^{-30}$ nicht andeutet. Daß der in der unteren Abbildung (4.9) überstrichene Wertebereich für m_t ausreichend ist, um die Nichtexistenz eines reellen m_d nahezulegen, ergibt sich einerseits aus einem Fit der Form

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{m_t}{g^\varepsilon}\right) &= a \log\left(\frac{m}{g^\varepsilon}\right) + b \\ \frac{m_t}{g^\varepsilon} &= e^b \left(\frac{m}{g^\varepsilon}\right)^a,\end{aligned}\quad (4.75)$$

für den sich die Werte

$$\begin{aligned}a(\varepsilon = 0.05) &\approx 1.0 \\ b(\varepsilon = 0.05) &\approx 2.7\end{aligned}\quad (4.76)$$

ergeben. Zum anderen wäre im Fall der D_χ SB in Analogie zu Gl.(3.82) für reelle m_d die Darstellung

$$\begin{aligned}m_d &= g^\varepsilon f_{DR}(\varepsilon) \\ f_{DR}(\varepsilon) &= (g_k^{RBA} + \mathcal{O}(\varepsilon))^{-\frac{1}{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (4.77)$$

zu vermuten. Wobei g_k^{RBA} entsprechend den Ergebnissen der analytischen [Ko 91] und numerischen [RA 91] Studien der D_χ SB in der RBA und COR

$$\begin{aligned}m_d(g, \Lambda) &= \Lambda f_{COR}(g) \\ f_{COR}(g) &= \begin{cases} \alpha(g - g_k^{RBA})^\beta & , \quad g \gtrsim g_k^{RBA} \\ 0 & , \quad g < g_k^{RBA} \end{cases} \\ g_k^{RBA} &\approx 5.3 \\ \beta &\approx \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (4.78)$$

mit der kritischen nackten Kopplung g_k^{RBA} , die die chiral-symmetrische von der dynamisch chiral-gebrochenen Phase trennt, gleichzusetzen ist. Für $\varepsilon = 0.05$ folgt aus (4.77)

$$\frac{m_d}{g^\varepsilon} \approx 3 \cdot 10^{-15}, \quad (4.79)$$

d.h. hiernach hätte sich in der unteren Abbildung (4.9) ein reelles m_d andeuten müssen.

¹⁶Eine Analyse der UV-Asymptotik der WKB-Lösung (4.71) zeigt, daß die D_χ SB durch die Fundamentallösung, die die Airy-Funktion $Ai(x)$ enthält, repräsentiert wird.

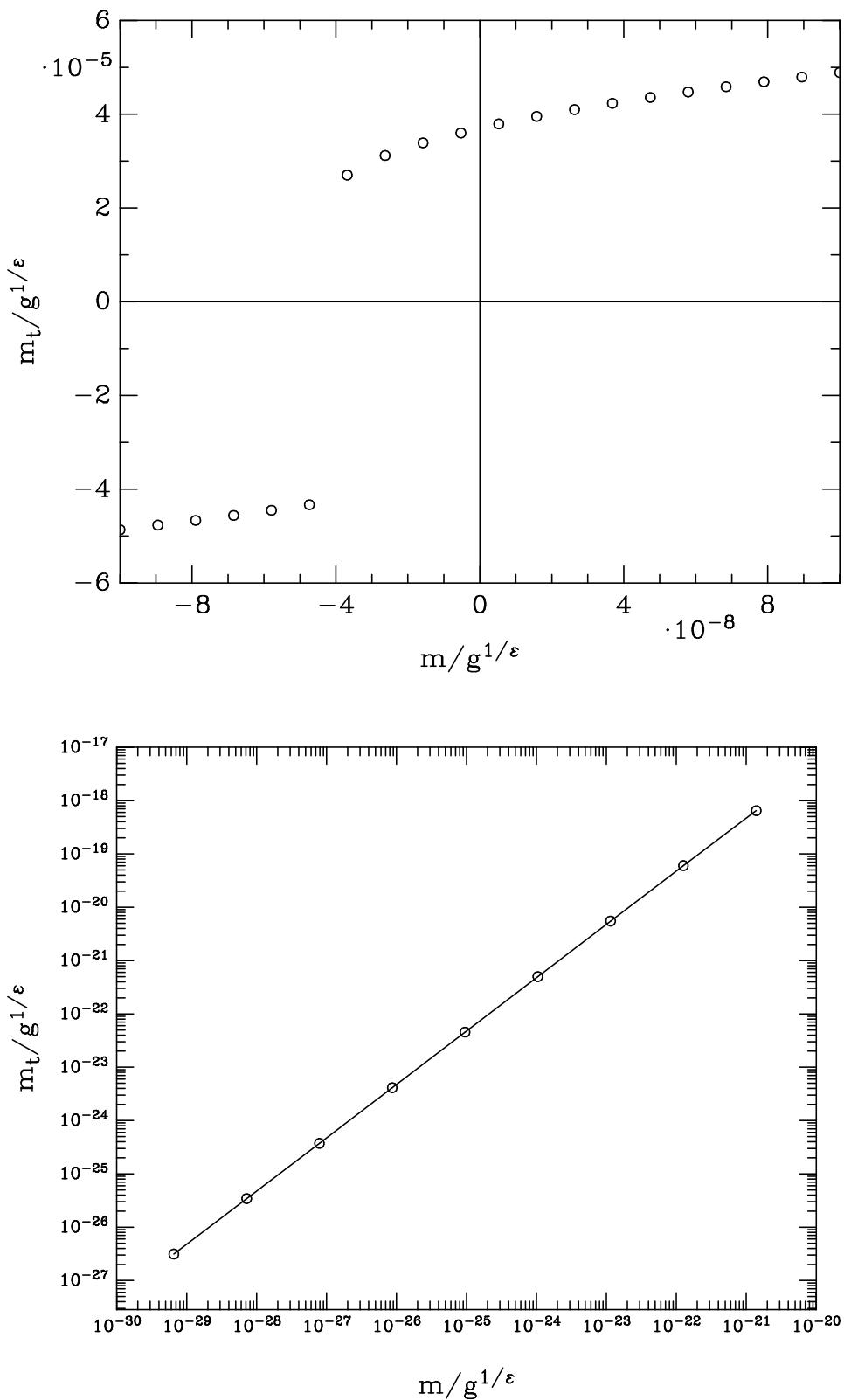


Abbildung 4.9: Totale Masse gegen nackte Masse für $\epsilon = 0.2$ (oben) und $\epsilon = 0.05$ (unten)

Zum Kontinuumslimes unter Berücksichtigung der D_χ SB

Die Darstellung (4.78), wonach die Skalierungsfunktion $f_{COR}(g)$ in der RBA und COR ein Potenzverhalten mit kritischem Exponenten gemäß der Mean-Field Theorie zeigt, ermöglicht es, den Kontinuumslimes für die COR unter Berücksichtigung der D_χ SB zu studieren. Setzen wir für die Kopplungsrenormierung die Gültigkeit der LL-Beziehung (2.52) im intermediären (IM) Renormierungsschema $\mu = 0$ voraus

$$(g_r^{IM})^2 = \frac{g^2}{1 + 2\beta_1 g^2 \ln(\frac{\Lambda}{m_d})}, \quad (4.80)$$

dann verschwindet nach Gl.(4.78) die renormierte Kopplung g_r^{IM} am kritischen Punkt gemäß

$$\begin{aligned} (g_r^{IM})^2 &= \frac{g^2}{1 - 2\beta_1 g^2 \ln(\alpha(g - g_k^{RBA})^\beta)} \\ &\rightarrow 0, \quad g \searrow g_k^{RBA}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

d.h. die QED_4 bleibt unter Einbeziehung der D_χ SB trivial. Allerdings zeigt die nichttriviale Nullstelle g_k^{RBA} der Skalierungsfunktion $f_{COR}(g)$ aus Gl.(4.78), daß die Entkopplung von Boson- und Fermionfeld nicht notwendig auch einen trivialen Fermionsektor impliziert, d.h. es können im Kontinuumslimes nichttriviale S-Matrixelemente zur Beschreibung des pseudoskalaren Goldstone-Bosons, das mit der D_χ SB verbunden ist, existieren.

Die bisherigen Erkenntnisse über die D_χ SB in der RBA und NPDR, die vor allem durch die fehlende Kenntnis über die genaue Struktur der Skalierungsfunktion $f_{DR}(\varepsilon)$ beschränkt sind, sehen wir als nicht ausreichend an, um eindeutige Aussagen über den Kontinuumslimes in NPDR unter Einbeziehung der D_χ SB treffen zu können.

Die Existenz eines ε_k für die D_χ SB in der RBA kann einerseits so gedeutet werden, daß die D_χ SB für den Kontinuumslimes $\varepsilon \rightarrow 0$ – vollständig in der chiral-symmetrischen Phase ($\varepsilon < \varepsilon_k$) durchgeführt – nicht relevant ist. Nach dieser Interpretation besitzt die in Abschnitt 4.4 diskutierte Entkopplung von Boson- und Fermionfeld Gültigkeit und impliziert darüberhinaus einen trivialen Fermionsektor, so daß ein Widerspruch zu dem u.U. nichttrivialen Fermionsektor in der COR entsteht. Eine andere Deutungsmöglichkeit wird durch die folgende Plausibilitätsbetrachtung nahegelegt. Setzen wir für die masselose, dimensionell regularisierte QED_D in der dynamisch chiral-gebrochenen Phase ($\varepsilon > \varepsilon_k$) hinsichtlich der Kopplungsrenormierung die Gültigkeit der LL_ε -Beziehung (2.30) im intermediären Renormierungsschema $\mu = 0$ voraus, dann gilt für kleine ε

$$(g_r^{IM})^2 = \frac{(gm_d^{-\varepsilon})^2}{1 + \frac{\beta_1(0)}{\varepsilon}(gm_d^{-\varepsilon})^2}. \quad (4.82)$$

Auflösen dieser Beziehung nach m_d ergibt

$$m_d = g^{\frac{1}{\varepsilon}} f_{DR}(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} f_{DR}(\varepsilon) &= \left(\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{\varepsilon(g_r^{IM})^2}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ \varepsilon_k &\equiv \beta_1(0)(g_r^{IM})^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Damit im Limes $\beta_1 \rightarrow 0$ an die Beziehung (3.82) der QRBA angeschlossen werden kann, muß die Setzung

$$g_r^{IM} = g_k^{QRBA} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (4.84)$$

vorgenommen werden, für die sich mit den Gl.(4.83/2.33)

$$\varepsilon_k = \frac{1}{9} \quad (4.85)$$

ergibt. Die Skalierungsfunktion in Gl.(4.83) ist mit den analytischen und numerischen Untersuchungen zur D_χ SB in der RBA und NPDR verträglich. Da sie aus der Bedingung dafür resultiert, daß die renormierte Kopplung g_r^{IM} einen festen Wert $\neq 0$ annimmt, erscheint die Existenz des ε_k für die Ausbildung eines reellen m_d geradezu als eine Voraussetzung dafür, die Trivialität der QED₄ unter Einbeziehung der D_χ SB – für $\varepsilon < \varepsilon_k$ gemäß Gl.(4.83) auf komplexe m_d fortgesetzt – umgehen zu können.

Die analoge Plausibilitätsbetrachtung für die COR geht von der Beziehung (4.80) aus, deren Auflösung nach m_d auf

$$\begin{aligned} m_d &= \Lambda f_{COR}(g) \\ f_{COR}(g) &= \exp\left\{\frac{1 - (\frac{g}{g_r})^2}{2\beta_1 g^2}\right\} \end{aligned} \quad (4.86)$$

führt. Diese Skalierungsfunktion ist nicht mit der dynamisch bestimmten Skalierungsfunktion (4.78) identisch, wodurch auf eine andere Art nochmals zum Ausdruck kommt, daß die Trivialität der QED₄ in der COR unter Einbeziehung der D_χ SB nicht umgangen werden kann.

Für ein genauerer Verständnis des Kontinuumslices in NPDR sind weitere Untersuchungen notwendig. Unserer Meinung nach zeigt die vorausgegangene Diskussion, daß die sich dabei ergebenden Ergebnisse durchaus andere Aussagen über die Kontinuums-RBA beinhalten können, als die diesbezüglich im Rahmen der COR getroffenen.

Kapitel 5

Bemerkungen zu den SDE's für die Vertexfunktion

Der wesentliche Gehalt der Vertexfunktion kann unserer Meinung nach nur dynamisch, d.h. durch Lösung ihrer SDE's (1.26) bestimmt werden. Aus den neueren Arbeiten zur QED ist uns kein konkreter Lösungsversuch für die \tilde{V}^μ -SDE's bekannt. Ein Grund für diese Zurückhaltung ist sicherlich der gegenüber einer Lösung der SDE's für einen Vertexansatz um Größenordnungen höhere numerische Aufwand, der für die Lösung der \tilde{V}^μ -SDE's betrieben werden muß. Die Lösung der SDE's für einen Vertexansatz erfordert die Bestimmung der drei invarianten Funktionen einer Veränderlichen der beiden Propagatoren, wohingegen die vollständige Lösung der \tilde{V}^μ -SDE's zusätzlich die Bestimmung der acht invarianten Funktionen dreier Veränderlicher des Transversalanteils von \tilde{V}^μ erfordert. Nach unserer Meinung ist dies jedoch ein mit heutiger Computertechnologie lösbares und im Vergleich zu Gitterrechnungen weniger aufwendiges Problem. Schwerer wiegt, daß es bislang nicht gelungen ist, Näherungsverfahren für diese Gleichungen anzugeben, die die wichtigsten Strukturmerkmale der QED respektieren.

Die Problematik strukturerhaltender Näherungen am Beispiel der BJW-Näherung

Anhand eines der ersten Näherungsversuche für die \tilde{V}^μ -SDE's, der von [BJW 67] im Rahmen des endliche-QED₄-Projekts vorgeschlagenen SDE

$$\begin{aligned}\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \gamma^\mu - g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\varrho \tilde{D}^{(0), \varrho\sigma}(p + k - l) \\ &\quad \times \tilde{S}(l - k) \tilde{V}^\mu(l - k; k; \cdot) \tilde{S}(l) \gamma_\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagramm 5.1: Ein vertikaler Wellepropagator } k \text{ und ein vertikaler } p+k \text{-Kreis mit Vertextion } V \text{ sind gleichwertig.} \\
 = \quad \text{Diagramm 5.1: Ein vertikaler Wellepropagator } k \text{ und ein vertikaler } p+k \text{-Kreis mit Vertextion } V \text{ sind gleichwertig.} \\
 \text{Diagramm 5.1: Ein vertikaler Wellepropagator } k \text{ und ein vertikaler } p+k \text{-Kreis mit Vertextion } V \text{ sind gleichwertig.}
 \end{array} \quad (5.1)$$

lässt sich die Problematik strukturerhaltender Näherungen für die \tilde{V}^μ -SDE's verdeutlichen. Die BJW-Näherung ergibt sich aus den SDE's (1.26) für die drei Basisvertices durch die Approximation des 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kerns $_{ss}\tilde{K}_{4,0}$ durch den Polgraphbeitrag nullter Ordnung in der Skelettentwicklung (1.32)

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagramm 5.2: Der Bethe-Salpeter-Kern } _{ss}\tilde{K}_{4,0} \text{ ist approximativ gleich dem Polgraphen.} \\
 \approx \quad \text{Diagramm 5.2: Der Bethe-Salpeter-Kern } _{ss}\tilde{K}_{4,0} \text{ ist approximativ gleich dem Polgraphen.} \\
 \text{Diagramm 5.2: Der Bethe-Salpeter-Kern } _{ss}\tilde{K}_{4,0} \text{ ist approximativ gleich dem Polgraphen.}
 \end{array} \quad (5.2)$$

und der Näherung des vollen Bosonpropagators durch seine nullte Ordnung

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(k) \rightarrow \tilde{D}^{(0),\mu\nu}(k) \quad . \quad (5.3)$$

Setzen wir die Gültigkeit der WTI (B.16) für die Vertexfunktion zunächst voraus, dann folgt durch longitudinale Projektion der Gl.(5.1)

$$\begin{aligned}
 k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= (\not{p} + \not{k} - m\mathbf{1}) + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(p + k - l) \gamma^\nu \\
 &- \left\{ \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(p - l) \gamma^\nu \right\} \\
 &\stackrel{!}{=} \tilde{S}^{-1}(p + k) - \tilde{S}^{-1}(p) ,
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

d.h. die WTI ist selbstkonsistent erfüllt, wenn wir die Identifikation

$$\tilde{S}^{-1}(p) = \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(p - l) \gamma^\nu \quad (5.5)$$

vornehmen, die auf eine von der SDE (5.1) der Vertexfunktion entkoppelte SDE für den Fermionpropagator führt. Die SDE (5.5) ist mit der (Quenched-) Rainbow-Approximation für den Fermionpropagator identisch, die wegen der Näherung (5.2) für den Bethe-Salpeter-Kern auch als (Quenched-) Ladder-Approximation bezeichnet wird. Von dieser einfachsten Version des allgemeinen nichtperturbativen Näherungsverfahrens, dem Abbrechen der

Skelettentwicklung (1.32) der beiden Bethe-Salpeter-Kerne, ist in [AF 79] gezeigt worden, daß trotz der Gültigkeit der $\tilde{D}^{\mu\nu}/\tilde{V}^\mu$ -WTI (B.14/B.16) und der \tilde{V}^μ -WI (B.26) die störungstheoretische multiplikative Renormierbarkeit (STMR) und die Eichkovarianz schon ab Zwei-Loop-Störungsrechnung verletzt sind.

Bedingungen für strukturerhaltende Näherungen der SDE's

Angesichts der Diskussion der BJW-Näherung stellt sich die Frage, inwieweit es möglich ist, Bedingungen für Näherungen der SDE's, die mit einzelnen Strukturmerkmalen der QED verträglich sind, zu formulieren. Für drei der wichtigsten Strukturmerkmale der QED haben wir in den Anhängen B-D den Versuch unternommen derartige Bedingungen anzugeben:

- **WTI**

Zur Implementierung der WTI können nach Anhang B die longitudinalen Anteile aus den SDE's vollständig eliminiert werden. Neben der transversalen Projektion der äußeren Bosonbeine ist dazu die Elimination aller loopinternen Longitudinalanteile durch Anwendung der WTI nach Aufteilung aller Bosonpropagatoren in ihren Longitudinal- und Transversalanteil gemäß Gl.(B.11) nötig. In Landau-Eichung werden die loopinternen Longitudinalanteile bei Wahrung der WTI (B.14) für den Bosonpropagator automatisch eliminiert, so daß in dieser Eichung mit den SDE's eine Entkopplung von Longitudinal- und Transversalanteilen der Greenschen Funktionen erreicht werden kann.

- **Eichkovarianz**

Die elementarsten kanonischen Eichkovarianten der QED, definiert durch ihr Transformationsverhalten unter Variation des Eichfixierungsparameters ξ gemäß der LKT

$$\frac{\partial \tilde{G}^\mu(p; k; \xi)}{\partial \xi} = g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\tilde{G}^\mu(p - l; k; \xi) - \tilde{G}^\mu(p; k; \xi)}{l^4}, \quad (5.6)$$

sind nach Anhang C die bzgl. aller äußeren Bosonbeine entweder transversal projizierten oder amputierten zusammenhängenden Greenschen Funktionen. Die eichkovariante Auswertung ihrer WTI ist für die Etablierung eichkovarianter Näherungen der SDE's wesentlich und kann für sich allein genommen schon für eine eichkovariante nichtperturbative Entkopplungsnäherung der SDE's in Form der longitudinal-singulären bzw. -regulären Eichnäherung herangezogen werden.

- **STMR**

Der in Anhang D skizzierte Nachweis der STMR der QED mittels der SDE's (1.26) für die drei Basisvertices erlaubt es, eine einfache Bedingung dafür anzugeben, daß der perturbative Gehalt einer nichtperturbativen Näherungslösung dieser Gleichungen multiplikativ renormierbar ist. Dafür müssen sich die Renormierungskonstanten und die

Divergenzen mittels Subtraktionen aus den SDE's für die multiplikativ renormierten Basisvertices vollständig eliminieren lassen. Durch Abbrechen der Skelettentwicklung (1.32) für die beiden Bethe-Salpeter-Kerne ${}_{ss}\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}$ und ${}_{ss}\tilde{K}_{4,0}$ können solche Näherungen generiert werden, falls

- zur Wahrung der multiplikativen Renormierungsvorschriften (D.4) die Skelettentwicklung vollständig durch angezogene Basisvertices ausgedrückt wird, und
- die WTI (B.14/B.16) für $\tilde{D}^{\mu\nu}$ und \tilde{V}^μ , die die effektiv logarithmische Divergenz der Selbstenergie $\tilde{\Sigma}$ und der Vakuumpolarisierung $\tilde{\Pi}^{\mu\nu}$ sicherstellen, erfüllt sind.

Nach diesen Bedingungen für strukturerlhaltende Näherungen der SDE's ist der Verlust der STMR der BJW-Näherung (5.1) nicht durch das Abschneiden der Skelettentwicklung (5.2) für den Bethe-Salpeter-Kern sondern die Tatsache bedingt, daß in dem Polgraphbeitrag in Gl.(5.2) keine vollen Basisvertices stehen, und die Wahrung der Eichkovarianzeigenschaften ist nicht zu erwarten.

Von den drei betrachteten Strukturmerkmalen scheint uns die STMR am wichtigsten zu sein, da sie die Existenz zumindest des störungstheoretischen Gehalts der Theorie sicherstellt. Wenn wir ihrer Einhaltung die höchste Priorität einräumen, sind wir auf die SDE's (1.26) für die Basisvertices als Ausgangsgleichungen für Näherungen festgelegt. Für diese sehen wir derzeit keine Möglichkeit, Näherungsverfahren anzugeben, die zusätzlich zur STMR auch noch die Eichkovarianz erhalten. Zumindest einfache Näherungsverfahren, die dieses Strukturmerkmal der QED respektieren, scheinen ursächlich mit den SDE's für die eichkovarianten, zusammenhängenden Greenschen Funktionen verbunden zu sein. Dieser Umstand läßt sich beispielsweise daran ablesen, daß nach Gl.(C.31) die alleinige Berücksichtigung der Inhomogenität

$${}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot) = \frac{1}{\not{p} - m\mathbf{1}} \gamma_\varrho \tilde{D}^{T,\varrho\mu}(k) \tilde{S}(p + k) \quad (5.7)$$

der SDE (A.26) für die transversale zusammenhängende Dreipunktfunktion ${}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$ bereits auf eine nichtperturbative, eichkovariante Entkopplungsnäherung für die beiden Propagatoren führt. Umgeschrieben auf die eigentliche Vertexfunktion ergibt sich

$$\tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot) = \tilde{S}^{-1}(p) \frac{1}{\not{p} - m\mathbf{1}} t^{\mu\nu}(k) \gamma_\nu \quad (5.8)$$

und nicht die durch die Inhomogenität in Gl.(1.26) nahegelegte Entkopplungsnäherung

$$\tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot) = t^{\mu\nu}(k) \gamma_\nu \quad . \quad (5.9)$$

Anhand der Herleitung der \tilde{V}^μ -SDE's können wir eine Vorstellung davon bekommen, wodurch ihre eichkovariante Näherung erschwert wird. Ausgehend von der SDE (A.26) für die eichkovariante zusammenhängende Dreipunktfunktion ${}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu$ ergeben sich die für die manifeste 1PI von \tilde{V}^μ nötigen

(Polgraph-) Subtraktionsterme für die T-Matrizen in Gl.(A.44) durch die Elimination des eichinvarianten Fermionpropagators nullter Ordnung zugunsten des eichabhängigen vollen Fermionpropagators sowie durch die Amputation der äußeren Beine durch Herausdividieren der eichabhängigen Propagatoren. Auf diese Weise gelangen in die \tilde{V}^μ -SDE's sich teilweise kompensierende Eichabhängigkeiten, die durch eichkovariante Näherungen gleichzeitig erfaßt werden müssen. Für die Berücksichtigung der Eichkovarianz im Rahmen von Näherungen der SDE's (1.26) für die drei Basisvertices sehen wir derzeit nur die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Wir betrachten die Näherung in Landau-Eichung $\xi = 0$ und setzen die gewonnenen Ergebnisse eichkovariant mittels der LKT (C.12) nach $\xi \neq 0$ hin fort, d.h. verlieren die Eichkovarianz als Bewertungskriterium für die Näherung.
2. Wir behandeln die ξ -Abhängigkeit in den SDE's (1.26) für die Vertexfunktion approximativ, d.h. spezifizieren für allgemeines ξ Abschneideverfahren für die Skelettentwicklung der Bethe-Salpeter-Kerne. Die damit verbundene Brechung der Eichkovarianz kann minimiert werden, indem der loopinterne Longitudinalanteil des Kerns ${}_{ss}\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}$ gemäß seiner integralen WTI aus Tabelle (B.2) vor dem Abbrechen der Skelettentwicklung aus der \tilde{V}^μ -SDE (1.26) eliminiert wird.

Nach den bisherigen Ausführungen liegt die Vermutung nahe, daß die Berücksichtigung der Polgraphbeiträge aus der Skelettentwicklung (1.32) in den transversal projizierten SDE's für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ in Landau-Eichung

$$\begin{aligned}
\tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot) &= t^{\mu\nu} \gamma_\nu - g^2 \tilde{\Lambda}_{(1)}^{T,\mu}(p; k; \cdot) \\
&= t^{\mu\nu} \gamma_\nu - g^2 \tilde{\Lambda}_{(2)}^{T,\mu}(p; k; \cdot) \\
\tilde{\Lambda}_{(1)}^{T,\mu}(p; k; \cdot) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}^\varrho(p; l - p; \cdot) \tilde{D}_{T,\varrho\sigma}(p - l) \tilde{S}(l) \tilde{V}^{T,\mu}(l; k; \cdot) \\
&\quad \times \left. \tilde{S}(l + k) \tilde{V}^{T,\sigma}(l + k; p - l; \cdot) \right|_{\xi=0} \\
&= \left\{ \text{Diagramm: } \begin{array}{c} \text{Three vertices labeled } V. \text{ The top vertex has an incoming } p \text{-line and an outgoing } p-l \text{-line. The middle-left vertex has an incoming } p \text{-line and an outgoing } l \text{-line. The bottom-right vertex has an incoming } l \text{-line and an outgoing } p+k \text{-line. A wavy line connects the top and middle vertices. A vertical line connects the middle and bottom vertices. Labels } k \text{ and } k+l \text{ are shown near the vertical line.} \\ \text{Legend: } T_k, \xi=0 \end{array} \right\} \\
\tilde{\Lambda}_{(2)}^{T,\mu}(p; k; \cdot) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}_\varrho(p; l - p - k; \cdot) \tilde{D}^{T,\varrho\sigma}(p + k - l) \tilde{S}(l - k) \\
&\quad \times \left. \tilde{V}^{T,\mu}(l - k; k; \cdot) \tilde{S}(l) \tilde{V}^\sigma(l; p + k - l; \cdot) \right|_{\xi=0}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagramm mit drei Vertices } V \\ \text{und einem Zirkularloop. Die Vertices sind beschriftet mit } V, k, l-k, p+k-l, p. \\ \text{Die Pfeile zeigen die Fließrichtung der Impulse.} \end{array} \right\}_{T_k, \xi=0} \quad (5.10)$$

zusammen mit den in dieser Eichung nur noch transversale Größen enthaltenden Propagatorgleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{-1}(p) &= \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \tilde{\Sigma}_T(p) \\ \tilde{D}^{-1, T, \mu\nu}(k) &= -p^2 t^{\mu\nu}(k) - g^2 \tilde{\Pi}_T^{\mu\nu}(k) \\ \tilde{\Sigma}_T(p) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{D}_{\mu\nu}^T(p-l) \tilde{V}^\nu(l; p-l; \cdot) \Big|_{\xi=0} \\ \tilde{\Pi}^{T, \mu\nu}(k) &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{V}^{T, \nu}(l; k; \cdot) \tilde{S}(k+l) \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

und den LKT (C.12) eine “gute” erste Näherung der SDE’s (1.26) für die drei Basisvertices darstellt. Da in diesen Gleichungen nur noch transversale Größen vorkommen, kann die WTI (B.16) für die Vertexfunktion im nachhinein erfüllt werden, die Eichkovarianz ist wegen der Verwendung der LKT trivialerweise erfüllt und die multiplikativen Renormierungsvorschriften bleiben gewahrt, da in den Dreiecksdiagrammen für die Vertexkorrekturen ausschließlich volle Basisvertices enthalten sind. Wir betonen jedoch, daß neben der in Anhang A erwähnten Brechung der Crossing-Symmetrie der vollen T-Matrix durch diese Näherung die transversale Projektion bzgl. äußerer Bosonbeine und die Wahl $\xi = 0$ zur Elimination der loopinternen Longitudinalanteile noch nicht die Einhaltung der WI (B.26) für die Vertexfunktion sicherstellt, eine Forderung, die alle aktuellen Vertexansätze erfüllen.¹ Vielmehr zeigt die reguläre Auswertung der \tilde{V}^μ -WTI (B.16) aus Anhang B, daß der zur Erfüllung der \tilde{V}^μ -WI (B.26) nötige Transversalanteil von V^μ vollständig durch die (kinematischen) Singularitäten des Longitudinalanteils festgelegt ist und deshalb die transversale Projektion der \tilde{V}^μ -SDE’s mit dem singulären Projektor $t^{\mu\nu}(k)$ zumindest für reguläre Vertexfunktionen nur scheinbar die Longitudinalanteile aus den \tilde{V}^μ -SDE’s eliminiert.

Gegenüber den anderen divergenzerzeugenden Beiträgen in der Skelettentwicklung (1.32) der Bethe-Salpeter-Kerne sind die aus den Polgraphbeiträgen in der \tilde{V}^μ -SDE resultierenden Dreiecksdiagramme durch den Umstand ausgezeichnet, daß sie zusammen mit den SDE’s für die beiden Propagatoren in allen Eichungen ξ auf das richtige Leading-Log-Verhalten für die drei Basisvertices führen. Vgl. hierzu die explizite Lösung der SDE’s (5.10) auf Leading-Log-Niveau in [LA 65].

¹ Ein Beispiel dafür ist die Näherung (5.7), die nach Gl.(C.34) nicht die \tilde{V}^μ -WI (B.26) erfüllt.

Versuch einer auf der regulären Auswertung der WTI für den Bethe-Salpeter-Kern beruhenden Vertexgleichung

Eine Möglichkeit, für reguläre Vertexfunktionen ein vollständiges, auch die WI (B.26) respektierendes Näherungsverfahren zu etablieren, könnte darin bestehen, die für die Vertexansätze zentrale, reguläre Auswertung der \tilde{V}^μ -WTI (B.16) auf die resummierten SDE's (1.26) für die Vertexfunktion zu übertragen. Als Ausgangsgleichung scheint dazu diejenige \tilde{V}^μ -SDE am geeignetsten zu sein, die den Bethe-Salpeter-Kern ${}_{ss}\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}$ enthält²

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \gamma^\mu \\ - g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}^\sigma(p; -l; \cdot) \tilde{D}_{\sigma\varrho}(l) \tilde{S}(p - l) {}_{ss}\tilde{K}^{\varrho\mu}(p - l; l, k; \cdot), \end{aligned} \quad (5.12)$$

da dieser nach Tabelle (B.2) selbst einer (integralen) WTI

$$\begin{aligned} k_\mu {}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{V}^\nu(p; q; \cdot) \tilde{S}(p + q) \tilde{S}^{-1}(p + q + k) - \gamma^\nu \\ + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}^\sigma(p; -l; \cdot) \tilde{S}(p - l) \tilde{D}_{\sigma\varrho}(l) {}_{ss}\tilde{K}^{\varrho\nu}(p + k - l; l, q; \cdot), \end{aligned} \quad (5.13)$$

die im Gegensatz zur vollen Bethe-Salpeter-Gleichung (A.47) nur noch ${}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}$ als unbekannte Größe enthält, genügt. Diese Relation und die entsprechende WTI aus Tabelle (B.2) für das andere longitudinal projizierte Bosonbein³ sichern in der resummierten \tilde{V}^μ -SDE (5.12) die Einhaltung der WTI/WI (B.16/B.26) der Vertexfunktion. Infolgedessen kann durch eine reguläre Auswertung der beiden WTI für den Bethe-Salpeter-Kern ${}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}$ eine Näherung der resummierten \tilde{V}^μ -SDE (5.12) formuliert werden, die die Gültigkeit der \tilde{V}^μ -WTI/WI (B.16/B.26) sicherstellt. Dazu muß zunächst die noch versteckte Differenzbildung in der Beziehung (5.13) manifest gemacht werden, die sich in dem Umstand ausdrückt, daß das Loop-Integral in Gl.(5.13) zwar nach Maßgabe des Impulses k gebrochen ist⁴, sich aber für $k \rightarrow 0$ mit Hilfe der \tilde{V}^μ -SDE (5.12) auf den Ausdruck $\gamma^\nu - \tilde{V}^\nu(p; q; \cdot)$ reduziert, so daß in diesem Limes die rechte Seite der Gl.(5.13) verschwindet. Wir eliminieren dazu aus der WTI (5.13) die Vertexfunktion nullter Ordnung mittels der \tilde{V}^μ -SDE (5.12)

$$\begin{aligned} k_\mu {}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{V}^\nu(p; q; \cdot) \tilde{S}(p + q) \left\{ \tilde{S}^{-1}(p + q + k) - \tilde{S}^{-1}(p + q) \right\} \\ + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \tilde{V}^\sigma(p; -l; \cdot) \tilde{S}(p - l) \tilde{D}_{\sigma\varrho}(l) \left\{ {}_{ss}\tilde{K}^{\varrho\nu}(p + k - l; l, q; \cdot) \right. \\ \left. - {}_{ss}\tilde{K}^{\varrho\nu}(p - l; l, q; \cdot) \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Es liegt jetzt eine Situation vor, die für das Formulieren von regulären Vertexansätzen auf der Basis der \tilde{V}^μ -WTI (B.16) typisch ist, d.h. es besteht

²Wir unterdrücken nachfolgend die Indizes zur Bezeichnung der äußeren Beine.

³ ${}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}$ ist nicht boosesymmetrisch.

⁴D.h. das zum Loop-Integral in Gl.(5.13) gehörende Feynman-Diagramm erlaubt keine durchgehende, die Impulserhaltung respektierende Führung der Impulse.

die Notwendigkeit, eine reguläre Division des Bosonimpulses, die im Bezug auf den Transversalanteil von ${}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}$ nicht eindeutig ist, vorzunehmen. Wir können dazu die in Anhang B zur minimalen regulären Auswertung der \tilde{V}^μ -WTI (B.16) verwendete Relation heranziehen. D.h. gilt eine Beziehung der Form

$$\begin{aligned} k_\mu F^\mu(p; k) &= G(p+k) - G(p) \\ &= \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} G(x) \Big|_{x=p+\lambda k} \\ &= k_\mu \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} G(x) \Big|_{x=p+\lambda k}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

dann kann eine reguläre Division des Impulses k durch die Setzung

$$F_{MR}^\mu(p; k) = \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} G(x) \Big|_{x=p+\lambda k}, \quad (5.16)$$

die gegenüber anderen Verfahren den Vorteil besitzt, nicht auf die Tensorstruktur der Funktion $F^\mu(p; k)$ Bezug zu nehmen, vorgenommen werden. Wenden wir dieses Verfahren auf die WTI (5.14) an, dann erhalten wir für ${}_{ss}\tilde{K}_{MR}^{\mu\nu}$ den Ansatz

$$\begin{aligned} {}_{ss}\tilde{K}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \int_0^1 d\lambda \left\{ \tilde{V}^\nu(p; q; \cdot) \tilde{S}(p+q) \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p+q+\lambda k)}{\partial p_\mu} \right. \\ &+ g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{V}^\sigma(p; -l; \cdot) \tilde{S}(p-l) \tilde{D}_{\sigma\varrho}(l) \frac{\partial}{\partial p_\mu} {}_{ss}\tilde{K}_{MR}^{\varrho\nu}(p-l+\lambda k; l, q; \cdot) \Big\} \\ &+ \text{Terme zur Auswertung der WTI bzgl. } q^\nu \\ &+ {}_{ss}\Delta_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot), \end{aligned} \quad (5.17)$$

der gemäß der integralen WTI (5.13) zwar eine Integralgleichung darstellt, dafür aber im Gegensatz zur vollen Bethe-Salpeter-Gleichung (A.47) vollständig durch Basisvertices ausgedrückt ist. Diese Gleichung ist im Lichte der beim regulären Auswerten der beiden WTI für die eigentliche Vierpunkt-funktion $\tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}$ gewonnenen Erfahrungen zu sehen, vgl. hierzu Gl.(B.75). Demnach ist die Funktion ${}_{ss}\Delta_{MR}^{\mu\nu}$ so zu bestimmen, daß der Ansatz (5.17) beide WTI für den Kern ${}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}$ aus Tabelle (B.2) erfüllt. Wir haben die Bestimmung der Funktion ${}_{ss}\Delta_{MR}^{\mu\nu}$ aus dieser Bedingung bislang nicht vorgenommen, sind aber im Hinblick auf die reguläre Auswertung der WTI für $\tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}$ zuversichtlich, daß die gegenüber dieser Amplitude fehlende Bose-symmetrie von ${}_{ss}\tilde{K}^{\mu\nu}$ und der integrale Charakter der WTI (5.13) keine grundsätzlichen Schwierigkeiten darstellen.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Beantwortung der in Kapitel 1.1 diskutierten Frage nach dem genauen Verhältnis des funktional-integralen zum funktional-differentiellen Zugang zur QED erfordert die vollständige Charakterisierung der Lösungsmannigfaltigkeit der funktionalen SDE's bzw. der SD-Hierarchien für die Greenschen Funktionen. Hierfür scheint das Studium von Entkopplungsnäherungen für die SD-Hierarchien prinzipiell nicht geeignet zu sein, da die ihnen zugrundeliegende Philosophie, die SD-Hierarchien durch Abschneiden "von oben her" zu lösen, im Widerspruch zu der in Anhang A motivierten Einsicht steht, daß bei echt nichtperturbativer Betrachtung der SD-Hierarchien (mindestens) die beiden Propagatoren als Parameter und nicht als berechenbare Größen angesehen werden müssen. So gesehen erscheinen die auch dieser Arbeit für konkrete Lösungsversuche der SDE's zugrundeliegenden Entkopplungsnäherungen lediglich als eine Technik, die es erlaubt, den eindeutigen dynamischen Bestimmungsgehalt der SDE's in der Störungsrechnung für eine über RG-Summationen hinausgehende Aufsummation störungstheoretischer Terme zu nutzen. Die $D_x SB$, der einzige (sichtbare) echt nichtperturbative Effekt, der durch die im Rahmen dieser Arbeit studierten Entkopplungsnäherungen erfaßt wird, widerspricht dieser Aussage nicht, da sie eindeutig aus der Homogenität der masselosen SDE für die invariante Funktion B des Fermionpropagators resultiert. Wir halten es deshalb für nicht ausgeschlossen, daß die Bestimmung des echt nichtperturbativen Gehalts der QED im Rahmen eines SD-Zugangs weniger die Formulierung und Lösung umfangreicher Entkopplungsnäherungen – beispielsweise in Form der Vertexansätze aus Kapitel 1.3 – als die systematische Komplettierung der dynamischen Grundgleichungen des SD-Zugangs, d.h. die Formulierung von Randbedingungen für die funktionalen SDE's, erfordert.

Die in Kapitel 2.1 diskutierte NPDR der SDE's basiert – von rein kinematischen Aspekten abgesehen – auf der UV-AF der $QED_{D<4}$ und dem Umstand, daß die Loop-Integrale in den SDE's für die drei Basisvertices für diese UF-Asymptotik effektiv logarithmisch divergent sind. Aufgrund der allgemeinen Natur dieser Voraussetzungen liegt der Schluß nahe, daß sich auch der nichtperturbative Gehalt umfangreicherer (Entkopplungs-) Näherungen der formalen SDE's der QED (und anderer QFT) auf der Basis der Wilsonschen Axiome der DR definieren läßt, so daß die SDE's als eine Möglichkeit angesehen werden können, der DR nichtperturbative Fragestellungen

lungen zu erschließen. Die – als vorläufig zu betrachtende – Diskussion des Kontinuumslimes in NPDR in Kapitel 2.2 lässt vermuten, daß es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen gewissen Strukturmerkmalen der RG-Funktionen bei $\varepsilon > 0$ und der Existenz bzw. Struktur etwaiger Kontinuumslimes in NPDR gibt. Danach führt die Durchführung des Kontinuumslimes in NPDR – im Gegensatz zu den Vorschriften der COR – unausweichlich auf einen Extrapolationsprozeß. Die NPDR bringt auf diese Weise offener zum Ausdruck, daß eine regularisierte Theorie stets anders “aussieht” als ihr Kontinuumslimes. Auf dem Niveau der invarianten Funktionen kommt dieser Umstand durch das in NPDR lediglich approximative Skalierungsverhalten der renormierten invarianten Funktionen, das eine naive Übertragung des Konzepts der Cut-Off-Theorie von der COR auf die NPDR vereitelt, zum Ausdruck. Eine weitergehende Untersuchung des Kontinuumslimes für Regularisierungsverfahren, die einen dimensionslosen Regularisierungsparameter besitzen, erscheint uns auch für ein tiefergehendes Verständnis des Kontinuumslimes in einer COR als lohnend.

Die in Kapitel 3 durchgeführte nichtperturbative Strukturuntersuchung der QRBA in NPDR sehen wir als einen positiven Test auf die Unabhängigkeit der bisherigen Aussagen über die Kontinuumslimes-QRBA vom verwendeten Regularisierungsverfahren an. Die Durchführung des Kontinuumslimes in der Nähe des chiralen Limes anhand der analytischen Ergebnisse der Bifurkationsnäherung führt zu einer Bestätigung der Kontinuumslimesresultate der COR. Die unterschiedlichen Renormierungsvorschriften, die derzeit zur Durchführung des Kontinuumslimes im Fall der E_χ SB bzw. D_χ SB verwendet werden müssen, können eventuell durch den Übergang von der totalen Masse bzw. der Eichkopplung auf einen anderen Parameter zur Beschreibung des Kontinuumslimesresultats in eine einheitliche Vorschrift, die zwischen diesen beiden Fällen interpoliert, überführt werden.

Für eindeutige Aussagen über die Struktur und Existenz des Kontinuumslimes für die in Kapitel 4 diskutierte RBA sehen wir derzeit keine Grundlage. Sofern die D_χ SB nicht explizit sichtbar gemacht wird, scheint sich die RBA zumindest für kleine ε bestens durch Ein-Loop-RG-Beziehungen, wonach für $\varepsilon > 0$ eine renormierte Grenzkopplung existiert, die im Kontinuumslimes verschwindet, beschreiben zu lassen. Die numerischen und analytischen Untersuchungen zur D_χ SB zeigen übereinstimmend die Existenz einer kritischen raumzeitlichen Dimension für die Ausbildung einer reellen dynamischen Fermionmasse in der RBA und NPDR, die Bedeutung dieses Phänomens für die Durchführung des Kontinuumslimes ist uns jedoch weitgehend unklar. Ein tiefergehendes Verständnis erfordert die Bestimmung der genauen Struktur der Skalierungsfunktion $f_{DR}(\varepsilon)$, die der dynamischen Masse zugeordnet ist. Die Tatsache, daß sich für die RBA die in einer COR bzw. NPDR gewonnenen Aussagen hinsichtlich des Kontinuumslimes nicht so einfach in Übereinstimmung bringen lassen, wie dies für die QRBA der Fall ist, sehen wir als einen Hinweis darauf an, daß die in der RBA im Vergleich zur QRBA zusätzlich durchzuführende Kopplungsrenormierung im Kontinuumslimes zu echt unterschiedlichen Ergebnissen für die beiden Regularisierungsmethoden führen könnte. Diesbezüglich ist interessant, daß

nach der Plausibilitätsbetrachtung in Kapitel 4.5 die Bedingung für eine nichtverschwindende renormierte Kopplung im Kontinuumslimes in NPDR die Existenz einer kritischen raumzeitlichen Dimension für die $D_\chi SB$ zu implizieren scheint. Demnach beeinflussen sich in NPDR der Effekt der $D_\chi SB$ und die Existenz einer renormierten Grenzkopplung stärker, als dies für die COR der Fall ist, für die sich die $D_\chi SB$ in der QRBA und der RBA, d.h. unabhängig davon, ob eine Kopplungsrenormierung stattfindet oder nicht, auf dieselbe Art und Weise, nämlich durch die Existenz einer nackten kritischen Kopplung, zeigt. Dies könnte eine Voraussetzung dafür sein, in NPDR die beiden Effekte gegeneinander auszuspielen.

Für eine weitergehende Strukturuntersuchung der QED in NPDR, die auf den SDE's für die Basisvertices beruht, ist eine zentrale Aufgabenstellung die Formulierung einer dynamischen Grundgleichung zur Bestimmung der Vertexfunktion. Die Untersuchungen in Kapitel 5 stellen einen ersten Versuch dar, das naheliegende Abschneiden der Skelettentwicklung für die beiden Bethe-Salpeter-Kerne kritisch zu hinterfragen und durch Näherungsvorschriften zu ersetzen, die die durch die Vertexfunktion bedingten wesentlichen Strukturmerkmale der QED respektieren. Für eine dynamisch bestimmte Vertexfunktion ließe sich insbesondere die Frage klären, ob die Bestimmung der renormierten Kopplung unter Bezugnahme auf den Bosonpropagator bzw. die Vertexfunktion zu übereinstimmenden Resultaten führt.

Anhang A

Die SD-Hierarchien für die Greenschen Funktionen der QED

Gegenstand dieses Anhangs ist die Formulierung und Diskussion der SD-Hierarchien für die verschiedenen Typen Greenscher Funktionen.

A.1 Die SD-Z-Hierarchie

Die SD-Z-Hierarchie für die gewöhnlichen Greenschen Funktionen lässt sich am einfachsten durch sukzessive funktionale Ableitung der funktionalen SDE's (1.11) für das EZF Z gewinnen. Es lassen sich auf diese Weise zwei Sätze von SD-Hierarchien, die entweder auf einer der beiden ersten oder der dritten funktionalen SDE (1.11) basieren, ableiten. Mit den für eine kompakte Darstellung zweckmäßigen Abkürzungen

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_k) \\ y &= (y_1, \dots, y_k) \\ z &= (z_1, \dots, z_l) \\ x'_m &= (x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_k), \dots \end{aligned} \tag{A.1}$$

ergeben sich die geschlossenen Darstellungen

$$\begin{aligned} & \left[i\gamma_\mu \partial_{x_1}^\mu - m \mathbf{1} \right] G_{2k,l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x; z; y) \\ &= (-)^{k+1} i \sum_{m=1}^k \delta^D(x_1 - y_m) (-)^{P_m} G_{2(k-1),l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x'_1; z; y'_m) \\ &+ g \gamma_\nu G_{2k,l+1}^{\nu \mu_1 \dots \mu_l}(x; x_1, z; y) \\ k &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, 2, \dots \\ P_m &= \text{Permutation } (m, 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, k) \\ &\quad \text{von } (1, \dots, k) \end{aligned} \tag{A.2}$$

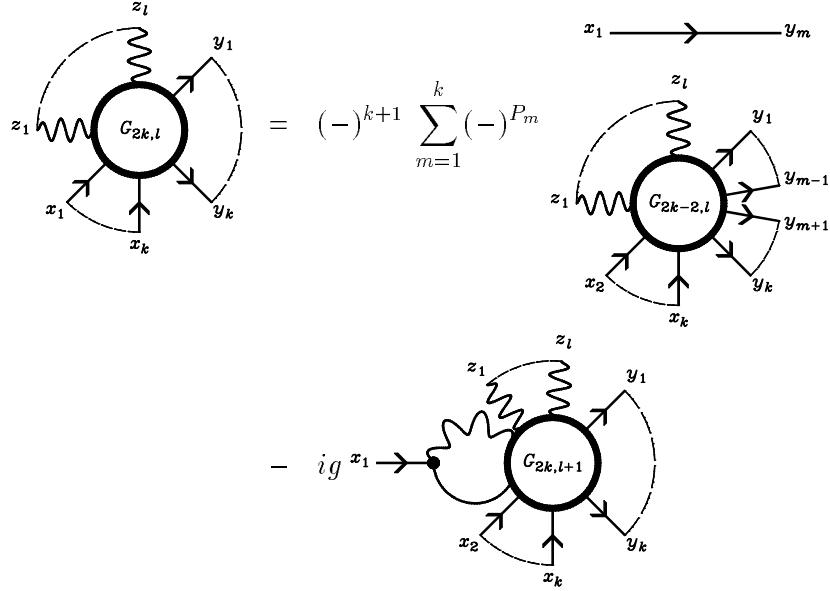
$$\begin{aligned}
& \left[g^{\mu_1} \nu \square_{z_1} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_{z_1}^{\mu_1} \partial_{z_1, \nu} \right] G_{2k,l}^{\nu \mu_2 \cdots \mu_l}(x; z; y) \\
&= i \sum_{m=2}^l g^{\mu_1 \mu_m} \delta^D(z_1 - z_m) G_{2k,l-2}^{\mu_2 \cdots \mu_{m-1} \mu_{m+1} \cdots \mu_l}(x; z'_{1,m}; y) \\
&+ (-)^{k+1} g \gamma^{\mu_1} G_{2(k+1),l-1}^{\mu_2 \cdots \mu_l}(z_1, x; z'_1; z_1, y) \\
l, k &= 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

die durch Faltung mit dem Fermion- bzw. Bosonpropagator nullter Ordnung, implizit definiert durch die Gl.(1.6), in eine integrale Form überführt werden können

$$\begin{aligned}
& G_{2k,l}^{\mu_1 \cdots \mu_l}(x; z; y) \\
&= (-)^{k+1} \sum_{m=1}^k (-)^{P_m} G_{2,0}^{(0)}(x_1 - y_m) G_{2(k-1),l}^{\mu_1 \cdots \mu_l}(x'_1; z; y'_m) \\
&- ig \int d^D s G_{2,0}^{(0)}(x_1 - s) \gamma_\nu G_{2k,l+1}^{\nu \mu_1 \cdots \mu_l}(s, x'_1; s, z; y)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
& G_{2k,l}^{\mu_1 \cdots \mu_l}(x; z; y) \\
&= \sum_{m=2}^l G_{0,2}^{(0),\mu_1 \mu_m}(z_1 - z_m) G_{2k,l-2}^{\mu_2 \cdots \mu_{m-1}, \mu_{m+1}, \cdots \mu_l}(x; z'_{1,m}; y) \\
&+ ig(-)^k \int d^D s G_{0,2}^{(0),\mu_1 \nu}(z_1 - s) \gamma_\mu G_{2(k+1),l-1}^{\mu_2 \cdots \mu_l}(s, x; z'_1; s, y).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Diese Form der SDE's besitzt eine anschauliche diagrammatische Darstellung



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram on the left: A loop with internal line } G_{2k,l} \text{ and external lines } y_k, z_1, z_l, x_1, x_k. \\
 & = \sum_{m=2}^l \text{Diagram on the right: A loop with internal line } G_{2k,l-2} \text{ and external lines } y_k, z_2, z_{m-1}, z_{m+1}, x_1, x_k. \\
 & + ig(-)^k z_1 \text{ (wavy line)} \cdot \text{Diagram below: A loop with internal line } G_{2k+2,l-1} \text{ and external lines } y_k, z_2, z_l, x_1, x_k. \quad (\text{A.6})
 \end{aligned}$$

Die SD-Hierarchien Gl.(A.2/A.4) bzw. Gl.(A.3/A.5) haben jeweils die Form eines unendlichen, gekoppelten, singulären, partiellen Differential- bzw. Integralgleichungssystems. Der singuläre Charakter ergibt sich durch das gleichzeitige Auftreten von Deltadistributionen und Greenschen Funktionen mit gleichen Ortsargumenten. Nachfolgend geben wir die Impulsraum-SDE's für die niedrigsten Greenschen Funktionen explizit an:

SDE's für die beiden Propagatoren $\tilde{G}_{2,0}, \tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p)\tilde{G}_{2,0}(p) &= -\mathbf{1} - \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{2,1;\varrho}(l; p-l; \cdot) \\
 \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\varrho}(k)\tilde{G}_{0,2;\varrho}^{\nu}(k) &= -g^{\mu\nu} + \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} \tilde{G}_{2,1}^{\nu}(l; k; \cdot) \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

SDE's für die Dreipunktfunktion $\tilde{G}_{2,1}^{\mu}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p)\tilde{G}_{2,1}^{\mu}(p; k; \cdot) &= - \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{2,2;\varrho}^{\mu}(l; p-l, k; \cdot) \\
 \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\varrho}(k)\tilde{G}_{2,1;\varrho}(p; k; \cdot) &= - \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} \tilde{G}_{4,0}(k-l, p, l, \cdot) \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

SDE's für die Vierpunktfunktion $\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p)\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) &= -(2\pi)^D \delta^D(k_1 + k_2) \tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(k_1) \mathbf{1} \\
 &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{2,3}^{\varrho\mu\nu}(l; p-l, k_1, k_2; \cdot) \\
 \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\varrho}(k_1)\tilde{G}_{2,2}^{\varrho\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) &= -(2\pi)^D \delta^D(k_1 + k_2) \tilde{G}_{2,0}(p) g^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$+ \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} \tilde{G}_{4,1}^\nu(p, k_1 - l; k_2; l, \cdot) \quad (\text{A.9})$$

SDE für die Vierpunktfunction $\tilde{G}_{4,0}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p_1) \tilde{G}_{4,0}(p_1, p_2, q_1, \cdot) &= (2\pi)^D \delta^D(q_1 + p_1) \tilde{G}_{2,0}(p_2) \mathbf{1} \\ &- (2\pi)^D \delta^D(q_1 + p_2) \tilde{G}_{2,0}(p_2) \mathbf{1} \\ &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{4,1;\varrho}(l, p_2; p_1 - l; q_1, \cdot) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die in diesen Gleichungen enthaltenen Impulsraumvertices nullter Ordnung sind entsprechend Gl.(1.4) durch

$$\tilde{\Gamma}_{0,2;\mu\nu}^{(0)}(k) = -ik^2 \left[t_{\mu\nu}(k) + \frac{1}{\xi} l_{\mu\nu}(k) \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) = -i(-\not{p} + m) \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{\Gamma}_{2,1;\mu}^{(0)} = -ig\gamma_\mu \quad (\text{A.13})$$

$$t_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} = g_{\mu\nu} - l_{\mu\nu}(k) \quad (\text{A.14})$$

gegeben.

Die SD-Z-Hierarchien (A.4/A.5) können als Rekursionsbeziehungen für die Taylorkoeffizienten des EZF Z im Rahmen eines Potenzreihenansatzes zur Lösung der funktionalen SDE's (1.11) aufgefaßt werden. Bei dieser Lösungsmethode bleiben die durch die Ordnung der zu lösenden Differentialgleichung festgelegten Startwerte der Rekursion unbestimmt. Da das Verschwinden der Einpunktfunctionen in den SD-Z-Hierarchie (A.4/A.5) bereits implementiert ist, sind die Startwerte (mindestens) mit den beiden Propagatoren $\tilde{G}_{2,0}$ und $\tilde{G}_{0,2}$ zu identifizieren. Entsprechend sind bei echt nichtperturbativer Betrachtung die sog. Propagatorgleichungen (A.7) als Gleichungen für die Dreipunktfunction $\tilde{G}_{2,1}$, in die die Propagatoren als Input eingehen, anzusehen. Selbst wenn wir die vollen Propagatoren vorgeben würden, könnten wir mit den Gleichungen (A.7) nur in null raumzeitlichen Dimensionen auf die volle Dreipunktfunction schließen. Die Frage nach der Auflösbarkeit der SD-Z-Hierarchien (A.4/A.5) "von unten her" erscheint uns als die einfachste Möglichkeit, die Existenz mehrerer nichtperturbativer Lösungen der funktionalen SDE's (1.11) zu motivieren. Im Rahmen der Störungstheorie drehen sich die Verhältnisse gerade um. Die Propagatorgleichungen (A.7) werden zu echten Bestimmungsgleichungen für die Propagatoren, in die die Dreipunktfunction in niedrigerer Ordnung eingeht, so daß die durch Iteration der integrierten SD-Hierarchien (A.4/A.5) gewonnene Schwachkopplungsentwicklung für die Greenschen Funktionen $G_{2k,l}$ eindeutig ist.

Das einzige uns bekannte nichtperturbative Lösungsverfahren für die SD-Hierarchie, das das Problem der Randbedingungen zu umgehen vermag, besteht in der Formulierung von Entkopplungsnäherungen, d.h. dem Versuch, die SD-Hierarchie durch Abschneiden "von oben her" zu lösen. Sie wurden für die $\varphi_{D=1}^{2N}$ -Theorie mit Erfolg als Niedrigenergiennäherung zur Bestimmung der Ein- und Dreiteilchenpole der Zweipunktfunktion verwendet, vgl. hierzu [BE 76].

Da die SDE's (A.8) für die Dreipunktfunktion $\tilde{G}_{2,1}$ homogen sind und ausschließlich Vierpunktfunctionen enthalten, besteht die einfachste Entkopplungsnäherung für die SD-Z-Hierarchie in der Unterdrückung der Fünfpunktfunktionen $\tilde{G}_{2,3}$ bzw. $\tilde{G}_{4,1}$ in den beiden SDE's für die Vierpunktfunction $\tilde{G}_{2,2}$ bzw. der Unterdrückung der Fünfpunktfunktion $\tilde{G}_{4,1}$ in der SDE für die Vierpunktfunction $\tilde{G}_{4,0}$

$${}_1\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) \approx (2\pi)^d \delta^D(k_1 + k_2) \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p) \tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(k_1) \quad (\text{A.15})$$

$${}_2\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) \approx (2\pi)^d \delta^D(k_1 + k_2) \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p) \tilde{G}_{0,2}^{(0),\mu\nu}(k_1) \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} {}_3\tilde{G}_{4,0}^{\mu\nu}(p_1, p_2, q_1, \cdot) &\approx (2\pi)^d \delta^D(q_1 + p_2) \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p_1) \tilde{G}_{2,0}(p_2) \\ &\quad - (2\pi)^d \delta^D(q_1 + p_1) \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p_1) \tilde{G}_{2,0}(p_2). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Durch diese Näherungsvorschrift ergeben sich insgesamt drei verschiedene Näherungen für die Dreipunktfunktion $\tilde{G}_{2,1}$

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &\approx \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{0,2;\varrho}^\mu(k) \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p+k) \\ {}_2\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &\approx \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{0,2;\varrho}^{(0),\mu}(k) \tilde{G}_{2,0}(p+k) \\ {}_3\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &\approx \tilde{G}_{2,0}(p) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \tilde{G}_{0,2;\varrho}^{(0),\mu}(k) \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p+k), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

in der jeweils einer der drei Propagatoren nicht durch seine nullte Ordnung sondern einen vollen Propagator ersetzt ist. Durch Einsetzen dieser Darstellungen für $\tilde{G}_{2,1}$ in die Propagatorgleichungen (A.7) gehen diese in ein lineares, gekoppeltes aber geschlossenes Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Propagatoren $\tilde{G}_{2,0}$ und $\tilde{G}_{0,2}$ über

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) \tilde{G}_{2,0}(p) &= -\mathbf{1} \\ - \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \underbrace{\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho}}_{(1,2)} \underbrace{\tilde{G}_{2,0}(l)}_{(2,3)} \underbrace{\tilde{G}_{0,2;\sigma\varrho}(p-l)}_{(1,3)} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\sigma} \underbrace{\tilde{G}_{2,0}(p)}_{(1,3)} \\ \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\varrho}(k) \tilde{G}_{0,2;\varrho}^\nu(k) &= -g^{\mu\nu} \\ + \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \underbrace{\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu}}_{(1,2)} \underbrace{\tilde{G}_{2,0}(l)}_{(1,3)} \underbrace{\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho}}_{(1,3)} \underbrace{\tilde{G}_{2,0}(k+l)}_{(2,3)} \underbrace{\tilde{G}_{0,2;\varrho}^\nu(k)}_{(2,3)}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

dabei sollen die Zahlen unterhalb der Propagatoren andeuten, daß in der durch diese Nummer spezifizierten Näherung für $\tilde{G}_{2,1}$ der volle Propagator jeweils durch seine nullte Ordnung zu ersetzen ist. Für die erste Näherung läßt sich eine explizite Lösung für den Bosonpropagator angeben

$${}_1\tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu,-1}(k) = -\tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\nu}(k)$$

$$+ \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(l) \Gamma_{2,1}^{(0),\nu} \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(k+l), \quad (\text{A.20})$$

den Fermionpropagator erhalten wir hieraus durch Quadratur

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{G}_{2,0}^{-1}(p) &= -\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) \\ &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\rho} \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(l) {}_1\tilde{G}_{0,2;\rho\sigma}(p-l) \Gamma_{2,1}^{(0),\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Entsprechend lässt sich für die zweite Näherung eine explizite Lösung für den Fermionpropagator angeben

$$\begin{aligned} {}_2\tilde{G}_{2,0}^{-1}(p) &= -\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) \\ &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\rho} \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(l) \tilde{G}_{0,2;\rho\sigma}^{(0)}(p-l) \Gamma_{2,1}^{(0),\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

aus der wir den Bosonpropagator mittels Quadratur gewinnen können

$$\begin{aligned} {}_2\tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu,-1}(k) &= -\tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\nu,-1}(k) \\ &+ \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(l) \Gamma_{2,1}^{(0),\nu} {}_2\tilde{G}_{2,0}(k+l). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Da die Näherungen (A.18) für die Dreipunktfunktion im Limes $g \rightarrow 0$ alle in die nullte Ordnung für diese Größe übergehen, sind die drei Propagatornäherungen zwar in der Ordnung g^2 untereinander und mit der Ordnung g^2 der vollen Theorie identisch, darüberhinaus greift jedoch jede von ihnen genau einen speziellen Term aus den Beiträgen höherer Ordnungen der Störungsrechnung heraus und summiert diese zu einer nichtperturbativen Näherung auf.

Die Güte der Entkopplungsnäherungen kann aus sich heraus letztlich nur anhand einer Stabilitätsanalyse beurteilt werden. Da die SD-Z-Hierarchie für die gewöhnlichen Greenschen Funktionen $G_{2k,l}$ linear ist, liegt es nahe, die Stabilitätsanalyse anhand umfangreicher Entkopplungsnäherungen für diese SD-Hierarchie durchzuführen. Die diesbezüglich zu beobachtende Zurückhaltung erklären wir uns vor allem durch das unkontrollierte Eingreifen in die Divergenzstruktur und Eichkovarianzeigenschaften der Theorie, das mit Entkopplungsnäherungen für die SD-Z-Hierarchie verbunden ist. Darüberhinaus führen die in der SD-Z-Hierarchie nicht eliminierten unverbundenen Anteile der Greenschen Funktionen $G_{2k,l}$ nach den Gl.(A.9/A.10) selbst im Impulsraum zu Deltadistributionen, ein Umstand, der die numerische Behandlungen dieser Gleichungen erschweren würde.

A.2 Die SD-W-Hierarchie

Die funktionalen SDE's für das EZF $W[J, \eta, \bar{\eta}]$ der zusammenhängenden Greenschen Funktionen lauten

$$\left[-i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m \right] \frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))} - g\gamma_\mu \frac{-i\delta^2 W}{\delta(-\eta(x))\delta J_\mu(x)}$$

$$\begin{aligned}
-g\gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))} + \bar{\eta}(x) &= 0 \\
\left[i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m \right] \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} - g\gamma_\mu \frac{-i\delta^2 W}{\delta \bar{\eta}(x) \delta J_\mu(x)} \\
-g\gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} + \eta(x) &= 0 \\
\left[g^{\mu\nu} \square - (1 - \frac{1}{\xi}) \vec{\partial}^\mu \vec{\partial}^\nu \right] \frac{\delta W}{\delta J^\nu(x)} - g\gamma^\mu \frac{-i\delta^2 W}{\delta(-\eta(x)) \delta \bar{\eta}(x)} \\
+ g\gamma^\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))} + J^\mu(x) &= 0. \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

Sie stellen drei nichtlineare, inhomogene funktional-partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Die Nichtlinearität dieser Gleichungen gefährdet nicht die Existenz wenigstens einer Lösung, erschwert jedoch die Analyse ihrer Eindeutigkeit. Durch funktionale Taylorentwicklung ergibt sich die nichtlineare SD-W-Hierarchie für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen, die sich nicht mehr auf einfache Art in geschlossener Form angeben lässt. Wir geben nachfolgend die SDE's für die niedrigsten zusammenhängenden Greenschen Funktionen explizit an.

Da die beiden Propagatoren und die Dreipunktfunktion wegen des angenommenen Verschwindens der Einpunktfunktionen keine unverbundenen Anteile enthalten, bleibt die Form der Propagatorgleichungen erhalten.

SDE's für die beiden Propagatoren ${}^c\tilde{G}_{2,0}^{\mu\nu}$, ${}^c\tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) &= -1 - \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{2,1;\varrho}(l; p-l; \cdot) \\
\tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\varrho}(k) {}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho}^\nu(k) &= -g^{\mu\nu} + \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{2,1}^\nu(l; k; \cdot) \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

In den SDE's für die Dreipunktfunktion ${}^c\tilde{G}_{2,1}$ entstehen nach Maßgabe der unverbundenen Anteile der Vierpunktfunctionen $\tilde{G}_{2,2}$ und $\tilde{G}_{4,0}$ Propagatorterme.

SDE's für den Wechselwirkungsvertex ${}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) {}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= -\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho}^\mu(k) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \\
&- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{2,2;\varrho}^\mu(l; p-l, k; \cdot) \\
\tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\varrho}(k) {}^c\tilde{G}_{2,1;\varrho}(p; k; \cdot) &= -\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \\
&- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{4,0}(k-l, p, l, \cdot). \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß in der zweiten Form der Vertexgleichung nur einer der beiden unverbundenen Anteile von $G_{4,0}$ eingeht, der andere Anteil würde auf einen unverbundenen Beitrag für ${}^c\tilde{G}_{2,1}$ führen.

SDE's für die Vierpunktfunction ${}^c\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) {}^c\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) &= -\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho}^\nu(k_2) {}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu(p+k_2; k_1; \cdot) \\
 &- \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho}^\mu(k_1) {}^c\tilde{G}_{2,1}^\nu(p+k_1; k_2; \cdot) \\
 &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1;\varrho}^{(0)} {}^c\tilde{G}_{2,3}^{\varrho\mu\nu}(l; p-l, k_1, k_2; \cdot) \\
 \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{2,2}^{\varrho\nu}(k_1) {}^c\tilde{G}_{2,2}^{\varrho\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) &= -{}^c\tilde{G}_{2,1}^\nu(p; k_2; \cdot) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k_1+k_2) \\
 &- {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{2,1}^\nu(p+k_1; k_2; \cdot) \\
 &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{4,1}^\nu(p, k_1-l; k_2; l, \cdot)
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Aufgrund des Furry'schen Theorems [JR 76] haben wir die Dreibosonenfunktion ${}^c\tilde{G}_{0,3}^{\mu\nu\sigma}$, die sich in der ersten Gleichung für ${}^c\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}$ ergibt, identisch null gesetzt.

SDE für die Vierpunktfunction ${}^c\tilde{G}_{4,0}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p_1) {}^c\tilde{G}_{4,0}(p_1, p_2, q_1, \cdot) &= -{}^c\tilde{G}_{2,1}^\varrho(p_2; p_2+q_1; \cdot) \tilde{\Gamma}_{2,1;\varrho}^{(0)} {}^c\tilde{G}_{2,0}(p_1+p_2+q_1) \\
 &+ {}^c\tilde{G}_{2,0}(q_1) \tilde{\Gamma}_{2,1;\varrho}^{(0)} {}^c\tilde{G}_{2,1}^\varrho(p_2; p_1+q_1; \cdot) \\
 &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{4,1;\varrho}(l, p_2; p_1-l; q_1, \cdot)
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Im Vergleich zu den Entkopplungsnäherungen für die gewöhnlichen Greenschen Funktionen setzt die niedrigste Entkopplungsnäherung für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen eine Stufe tiefer, d.h. bereits auf dem Niveau der SDE's für die Dreipunktfunction ${}^c\tilde{G}_{2,1}$ ein und besteht in der Vernachlässigung der Vierpunktfunction ${}^c\tilde{G}_{2,2}$ bzw. ${}^c\tilde{G}_{4,0}$ in diesen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 {}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &\approx {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) \tilde{\Gamma}_{2,1;\varrho}^{(0)} {}^c\tilde{G}_{0,2}^{\varrho\mu}(k) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \\
 {}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &\approx {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) \tilde{\Gamma}_{2,1;\varrho}^{(0)} \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\varrho\mu}(k) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \quad .
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Im Gegensatz zu den Entkopplungsnäherungen für $\tilde{G}_{2,1}$ tritt in diesen Näherungen nur noch einer der drei Propagatoren in Form seiner nullten Ordnung auf. Dies bewirkt einerseits eine Reduktion der Anzahl der möglichen Näherungen von drei für $\tilde{G}_{2,1}$ auf zwei für ${}^c\tilde{G}_{2,1}$ und führt andererseits zu nichtlinearen, gekoppelten Propagatorgleichungen

$$\begin{aligned}
 {}^c\tilde{G}_{2,0}^{-1}(p) &= -\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) \\
 &- \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} \underbrace{{}^c\tilde{G}_{2,0}(l)}_{(1)} \underbrace{{}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho\sigma}(p-l)}_{(2)} \Gamma_{2,1}^{(0),\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\rho}(k) {}^c\tilde{G}_{0,2;\rho}^\nu(k) &= -g^{\mu\nu} \\ + \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} \underbrace{{}^c\tilde{G}_{2,0}(l)}_{(1)} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\rho} {}^c\tilde{G}_{2,0}(k+l) \underbrace{{}^c\tilde{G}_{0,2;\rho}^\nu(k)}_{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

die zwar wiederum echte Bestimmungsgleichungen für diese Größen darstellen, sich jedoch weder entkoppeln, noch analytisch lösen lassen, dafür aber eine umfassendere Aufsummation störungstheoretischer Terme bewirken.

Die SD-W-Hierarchie ist im Rahmen dieser Arbeit für die Untersuchung der Eichkovarianzeigenschaften der QED und zur Etablierung eichkovarianter Näherungsverfahren wichtig.

A.3 Die SD- Γ -Hierarchie

Das EZF $\Gamma[V, \xi, \bar{\xi}]$ für die eigentlichen Vertices (1.19) geht durch Legendre-Transformation der Quellen

$$\begin{aligned} J, \eta, \bar{\eta} &\rightarrow V, \xi, \bar{\xi} \\ V_\mu[J, \eta, \bar{\eta}; x] &= \frac{\delta W[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J^\mu(x)} \\ \bar{\xi}[J, \eta, \bar{\eta}; x] &= \frac{\delta W[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta(\bar{\eta}(x))} \\ \xi[J, \eta, \bar{\eta}; x] &= \frac{\delta W[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta(x)} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

aus dem EZF für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen hervor

$$\begin{aligned} \Gamma[V, \xi, \bar{\xi}] &= W[J, \eta, \bar{\eta}] \\ - \int d^D x \left\{ J_\mu(x) V^\mu(x) + \bar{\eta}(x) \xi(x) + \bar{\xi}(x) \eta(x) \right\} \Big|_{J(x)=J[V, \xi, \bar{\xi}; x]} \dots. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Die Existenz der zusammenhängenden Zweipunktfunktionen in Anwesenheit der Quellen sichert die zumindest lokale Invertierbarkeit der Beziehungen (A.31), d.h. es existieren

$$\begin{aligned} J_\mu[V, \xi, \bar{\xi}; x] &= -\frac{\delta \Gamma[V, \xi, \bar{\xi}]}{\delta V^\mu(x)} \\ \eta[V, \xi, \bar{\xi}; x] &= -\frac{\delta \Gamma[V, \xi, \bar{\xi}]}{\delta \bar{\xi}(x)} \\ \bar{\eta}[V, \xi, \bar{\xi}; x] &= -\frac{\delta \Gamma[V, \xi, \bar{\xi}]}{\delta(\xi(x))}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Für $J = \eta = \bar{\eta} = 0$ gehen die Quellen $V, \xi, \bar{\xi}$ nach Gl.(A.31) in die als verschwindend angenommenen zusammenhängenden Einpunktfunctionen über, so daß gilt

$$J, \eta, \bar{\eta} \rightarrow 0 \Rightarrow V, \xi, \bar{\xi} \rightarrow 0. \quad (\text{A.34})$$

Mit Hilfe der Beziehungen (A.31/A.33) lassen sich die funktionalen SDE's (A.24) für das EZF W auf funktionale Grundgleichungen für das EZF Γ umschreiben

$$\begin{aligned}\frac{\delta \Gamma}{\delta(\xi(x))} &= \left[-i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m \right] \bar{\xi}(x) - g\gamma_\mu \left\{ \frac{-i\delta^2 W}{\delta(-\eta(x))\delta J_\mu(x)} + V^\mu(x)\bar{\xi}(x) \right\} \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\xi}(x)} &= \left[i\gamma_\mu \vec{\partial}^\mu - m \right] \xi(x) - g\gamma_\mu \left\{ \frac{-i\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(x)\delta J_\mu(x)} + V^\mu(x)\xi(x) \right\} \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta V_\mu(x)} &= \left[g^{\mu\nu} \square - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \right] V_\nu(x) \\ &\quad - g\gamma^\mu \left\{ \frac{-i\delta^2 W}{\delta(-\eta(x))\delta\bar{\eta}(x)} + \xi(x)\bar{\xi}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Die Nichtlinearität dieser Gleichungen steckt in den zweifachen Funktionalableitungen bzgl. der alten Quellen, die sich durch Anwendung der funktionalen Kettenregel, z.B. in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(x)\delta J_\mu(x)} &= - \int d^D y \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta J_\mu(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\bar{\eta}(y)\delta(\xi(x))} \\ &= - \int d^D y \int d^D z \left\{ \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta J_\mu(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta J_\nu(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta V^\nu(z)\delta(\xi(x))} \right. \\ &\quad + \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta J_\mu(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta\bar{\eta}(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\xi(z)\delta(\xi(x))} \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta J_\mu(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta(-\eta(z))} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\bar{\xi}(z)\delta(\xi(x))} \right\} \Big|_{J(x)=J[V,\xi,\bar{\xi};x]\dots}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

auf Ableitungen bzgl. der Quellen $V, \xi, \bar{\xi}$ umschreiben lassen. Dies führt bereits im Ortsraum zu Integrationen, so daß die Rückgewinnung der gewöhnlichen aus den eigentlichen Greenschen Funktionen keinen rein algebraischen Prozeß mehr darstellt. Die SDE's (A.35) zeigt, daß die niedrigste Näherung für das EZF Γ durch die Wirkung gegeben ist

$$\Gamma^{(0)}[V, \xi, \bar{\xi}] = S_{\text{QED}_D}[V, \xi, \bar{\xi}]. \quad (\text{A.37})$$

Die Herleitung der nichtlinearen SD- Γ -Hierarchie durch sukzessive funktionale Differentiation der SDE's (A.35) unter Ausnutzung von Gl.(A.34) erfordert ständig die Anwendung der funktionalen Kettenregel, etwa in der Form Gl.(A.36), so daß dieses Vorgehen keine großen Vorteile gegenüber einer expliziten Umschreibung der SD- W -Hierarchie auf die SD- Γ -Hierarchie, die wir nachfolgend vornehmen, mit sich bringt.

Die beiden Propagatoren ${}^c\tilde{G}_{2,0}$, ${}^c\tilde{G}_{2,0}$ und die Dreipunktfunktion ${}^c\tilde{G}_{2,1}$ enthalten keine IPR Anteile, so daß für diese Größen der Übergang auf die eigentlichen Vertices lediglich in der Amputation der äußeren Beine gemäß

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) &= -\tilde{\Gamma}_{2,0}^{-1}(p) \\ {}^c\tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(k) &= -\tilde{\Gamma}_{0,2}^{-1,\mu\nu}(k) \\ {}^c\tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(k) \tilde{\Gamma}_{2,1;\nu}(p; k; \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

besteht.

SDE's für die beiden Propagatoren $\tilde{\Gamma}_{2,0}$, $\tilde{\Gamma}_{0,2}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{2,0}(p) &= \tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}(p) \\ &+ \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c \tilde{G}_{2,0}(l) {}^c \tilde{G}_{0,2;\varrho\sigma}(p-l) \tilde{\Gamma}_{2,1}^\sigma(l; p-l; \cdot)\end{aligned}\quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{0,2}^{\mu\nu}(k) &= \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0),\mu\nu}(k) \\ &- \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c \tilde{G}_{2,0}(l) \tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(l; k; \cdot) {}^c \tilde{G}_{2,0}(k+l)\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

Für die diagrammatische Darstellung dieser beiden Gleichungen haben wir die Graphenelemente

$$\begin{aligned}{}^c \tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(k) &= \text{wavy line with arrow labeled } k \\ {}^c \tilde{G}_{2,0}(p) &= \text{horizontal line with arrow labeled } p \\ \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= \text{circle with wavy line entering from left, arrow labeled } p, \text{ exit labeled } p+k\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

verwendet. Im Vergleich hierzu stellen wir die nullten Ordnungen dieser Größen durch dünne Linien dar

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{0,2;\mu\nu}^{(0)}(k) &= -i \frac{1}{k^2} [t_{\mu\nu}(k) + \xi l_{\mu\nu}(k)] \\ &= \text{wavy line with arrow labeled } k \\ \tilde{G}_{2,0}^{(0)}(p) &= -i(-p + m)^{-1} \\ &= \text{horizontal line with arrow labeled } p \\ \tilde{\Gamma}_{2,1;\mu}^{(0)} &= -ig\gamma_\mu \\ &= \text{line with dot at end, wavy line attached}\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

Die Umschreibung der SDE's (A.26) für die Dreipunktfunktion ${}^c G_{2,1}$ erfordert zunächst die Elimination der eigentlichen Vertices $\tilde{\Gamma}_{2,0}^{(0)}, \tilde{\Gamma}_{0,2}^{(0)}$ nullter

Ordnung zugunsten voller Zweipunktvertices $\tilde{\Gamma}_{2,0}, \tilde{\Gamma}_{0,2}$ mittels der Propagatorgleichungen (A.39) und anschließend die Amputation der äußeren Beine, die für die zusammenhängenden Vierpunktfunctionen gemäß

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k_1, k_2; \cdot) &= {}^c\tilde{G}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{0,2}^{\mu\varrho}(k_1)\tilde{T}_{2,2;\varrho\sigma}(p; k_1, k_2; \cdot) {}^c\tilde{G}_{0,2}^{\sigma\nu}(k_2) \\ &\times {}^c\tilde{G}_{2,0}(p + k_1 + k_2) \\ {}^c\tilde{G}_{4,0}(p_1, p_2, q_1, \cdot) &= {}^c\tilde{G}_{2,0}(p_1) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p_2)\tilde{T}_{4,0}(p_1, p_2, q_1, \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0}(-q_1) \\ &\times {}^c\tilde{G}_{2,0}(p_1 + p_2 + q_1) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

durchzuführen ist und auf die beiden T-Matrizen $\tilde{T}_{2,2}$ und $\tilde{T}_{4,0}$ führt.

SDE's für den eigentlichen Wechselwirkungsvertex $\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} + \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\varrho} {}^c\tilde{G}_{2,0}(l) {}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho\sigma}(p - l) \\ &\times \underbrace{\left\{ \tilde{T}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p - l, k; \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\sigma(l; p - l; \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p)\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) \right\}}_{= {}_s\tilde{T}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p - l, k; \cdot)} \\ \begin{array}{c} \text{Diagram: } \Gamma_{2,1} \text{ (circle with } k \text{, in/out } p, p+k) \\ = \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram: } \text{line with } p \text{, plus } \text{line with } p \text{, plus } \text{loop with } p-l, sT_{2,2} \text{ (circle with } k \text{, in/out } p+k) \end{array} \\ \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} - \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} {}^c\tilde{G}_{2,0}(l) \\ &\times \underbrace{\left\{ \tilde{T}_{4,0}(p, l, k - l, \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\sigma(l; -k; \cdot) {}^c\tilde{G}_{0,2;\sigma\varrho}(k)\tilde{\Gamma}_{2,1}^\varrho(p; k; \cdot) \right\}}_{= {}_s\tilde{T}_{4,0}(p, l, k - l, \cdot)} \\ &\times {}^c\tilde{G}_{2,0}(l - k) \\ \begin{array}{c} \text{Diagram: } \Gamma_{2,1} \text{ (circle with } k \text{, in/out } p, p+k) \\ = \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram: } \text{line with } k \text{, minus } \text{line with } k \text{, plus } \text{loop with } l, sT_{4,0} \text{ (circle with } k \text{, in/out } p) \end{array} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Die Reduzibilitätsanalyse der beiden T-Matrizen

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: } T_{2,2} \text{ (circle with } k_1, k_2 \text{, in/out } p, p+k_1+k_2) \\ = \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram: } \text{line with } k_1 \text{, arrow to } \Gamma_{2,1} \text{ (circle with } k_1 \text{, in/out } p+k_1) \text{, arrow to } \Gamma_{2,1} \text{ (circle with } k_2 \text{, in/out } p+k_1+k_2) \end{array}$$

The diagram consists of two parts separated by an equals sign. The left part shows the 4-point function $T_{4,0}$ with external momenta q_1 , $p_1 + p_2 + q_1$, $-p_2$, and p_1 . The right part shows the subtraction of 1PI contributions. It includes a sum of three terms: 1) A term with two $\Gamma_{2,1}$ loops connected by a vertical line, with momenta k_1 and k_2 at the top, and p and $p + k_1 + k_2$ at the bottom. This is labeled $+ \underbrace{\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}}_{s\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}}$. 2) A term with a single $\Gamma_{2,2}$ loop with momenta k_1 and k_2 at the top, and p and $p + k_1 + k_2$ at the bottom. 3) A term with two $\Gamma_{2,1}$ loops connected by a horizontal line, with momenta q_1 and $p_1 + p_2 + q_1$ at the top, and $-p_2$ and p_1 at the bottom. This is labeled $- \underbrace{\tilde{T}_{4,0}}_{s\tilde{T}_{4,0}}$. The entire right-hand side is labeled $= (A.45)$.

zeigt, daß in den SDE (A.44) durch die Subtraktionsterme die im s-Kanal, gekennzeichnet durch den erhaltenen Gesamtviererimpuls p für $\tilde{T}_{2,2}$ bzw. k für $\tilde{T}_{4,0}$, 1PR Polgraphbeiträge der T-Matrizen, die der 1PI von $\tilde{\Gamma}_{2,1}$ widersprechen würden, eliminiert werden.

Durch analoge Umformungen lassen sich die SDE's für die beiden zusammenhängenden Vierpunktfunctionen auf eigentliche Greensche Funktionen umschreiben. Wir verzichten auf eine Darstellung dieser Gleichungen, da sich unter dem Gesichtspunkt der Divergenzstruktur eine weitere Umschreibung der SDE's, die die Betrachtung dieser Gleichungen überflüssig macht, empfiehlt.

A.4 Die Bethe-Salpeter-Resummation der Vertexgleichung

Die Form der SDE's (A.44) für $\tilde{\Gamma}_{2,1}$ macht zwar die 1PI dieser Größe manifest, bedeutet jedoch trotz der nach Gl.(1.21) oberflächlichen Konvergenz der beiden darin enthaltenen eigentlichen Vierpunktfunctionen $\tilde{\Gamma}_{2,2}, \tilde{\Gamma}_{4,0}$

$$\begin{aligned}\delta_{\tilde{\Gamma}}(2, 2; p, \varepsilon) &= -1 + \varepsilon(2 - p) \\ \delta_{\tilde{\Gamma}}(4, 0; p, \varepsilon) &= -2 + \varepsilon(2 - p)\end{aligned}\quad (A.46)$$

noch keine Freilegung der Divergenzstruktur. Dazu müssen deren Divergenzen und die von höheren, oberflächlich konvergenten Vertices auf die Divergenzen der drei Basisvertices zurückführt werden. Gemäß der Diskussion in Anhang D erfordert dies die Elimination des eigentlichen Vertex nullter Ordnung $\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0)}$ aus den Loop-Integralen für die Vertexkorrekturen in Gl.(A.44). Eine Möglichkeit, eine solche Freilegung der Divergenzstruktur zu erreichen, besteht in der Einführung der beiden 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kerne $_{ss}\tilde{T}_{2,2}$ und $_{ss}\tilde{T}_{4,0}$, die implizit durch die beiden 1-s-PI T-Matrizen definiert sind.

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagramm 1:} \\
 \begin{array}{ccc}
 \text{Linker Teil: } & \text{Mitte: } & \text{Rechter Teil: } \\
 \text{Diagramm mit } sT_{2,2} & = & \text{Diagramm mit } ssT_{2,2} + \text{Diagramm mit } sT_{2,2} \text{ und } ssT_{2,2} \\
 \text{Diagramm mit } sT_{4,0} & = & \text{Diagramm mit } ssT_{4,0} - \text{Diagramm mit } sT_{4,0} \text{ und } ssT_{4,0}
 \end{array}
 \end{array} \quad (\text{A.47})$$

$_{ss}\tilde{T}_{2,2}(p; k_1, k_2; \cdot)$ ist im s-Kanal mit erhaltenem Gesamtviererimpuls $p + k_1$ 1- Ψ - und 2- ΨA -PI und entsprechend ist $_{ss}\tilde{T}_{4,0}(p_1, p_2, q_1, \cdot)$ im s-Kanal mit erhaltenem Gesamtviererimpuls $p_2 + q_1$ 1- A - und 2- $\Psi\Psi$ -PI¹. Durch Einsetzen dieser beiden Beziehungen in die SDE's (A.44) wird der eigentliche Dreipunktvertex nullter Ordnung $\tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0)}$ durch einen vollen Vertex und die 1-s-PI T-Matrizen durch die beiden 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kerne ersetzt. D.h. um den Preis der im Gegensatz zur 1PI künstlichen Auszeichnung des s-Kanals bzgl. 2PI wird eine Resummation von unendlich vielen Vertexeinschüben erreicht

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,1}^{\mu}(p; k; \cdot) &= \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} + \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{\rho}(p; l - p; \cdot) \\
 &\times {}^c\tilde{G}_{2,0}(l) {}^c\tilde{G}_{0,2;\varrho\sigma}(p - l) {}_{ss}\tilde{T}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p - l, k; \cdot) \\
 \text{Diagramm 2:} \\
 \Gamma_{2,1}^{\mu}(p; k; \cdot) &= \text{Diagramm mit } \Gamma_{2,1} + \text{Diagramm mit } \Gamma_{2,1} \text{ und } ssT_{2,2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{2,1}^{\mu}(p; k; \cdot) &= \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} + \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^{\mu}(l - k; k; \cdot) \\
 &\times {}^c\tilde{G}_{2,0}(l) {}_{ss}\tilde{T}_{4,0}(p, l, k - l, \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0}(l - k)
 \end{aligned}$$

¹D.h. $_{ss}\tilde{T}_{2,2}(p; k_1, k_2; \cdot)$ kann weder durch Zerschneiden einer inneren Fermion- noch einer Fermion- und Bosonlinie, die den Impuls $p + k_1$ tragen, in zwei getrennte Anteile zerlegt werden, und entsprechend kann $_{ss}\tilde{T}_{4,0}(p_1, p_2, q_1, \cdot)$ weder durch Zerschneiden einer inneren Boson- noch einer Fermion- und Antifermionlinie, die den Impuls $p_2 + q_1$ tragen, in zwei getrennte Anteile zerlegt werden.

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram:} \\
 \text{Left: } \text{Wavy line } k \text{ enters circle } \Gamma_{2,1} \text{ at } p, \text{ exits at } p+k. \\
 \text{Right: } \text{Wavy line } k \text{ enters circle } \Gamma_{2,1} \text{ at } p, \text{ exits at } l; \text{ circle } \Gamma_{2,1} \text{ connects to circle } ssT_{4,0} \text{ at } l-k; \text{ circle } ssT_{4,0} \text{ exits at } p+k. \\
 = \quad \text{Wavy line } k + \text{Wavy line } k \text{ enters circle } \Gamma_{2,1} \text{ at } p, \text{ exits at } l-k; \text{ circle } \Gamma_{2,1} \text{ connects to circle } ssT_{4,0} \text{ at } l-k; \text{ circle } ssT_{4,0} \text{ exits at } p+k.
 \end{array} \quad (\text{A.48})$$

Die beiden Bethe-Salpeter-Kerne $ss\tilde{T}_{2,2}$ und $ss\tilde{T}_{4,0}$ können nicht geschlossen, sondern nur in Form einer unendlichen Skelettgraphenentwicklung, deren niedrigste Terme in Gl.(1.32) diagrammatisch dargestellt sind, angegeben werden. Approximieren wir die beiden Bethe-Salpeter-Kerne durch die Polgraphen, dann erzeugt die Iteration der Gl.(A.47) nur 2-s-PR Beiträge für $s\tilde{T}_{2,2}$, $s\tilde{T}_{4,0}$ und nach Gl.(A.45) wird dadurch der s-Kanal der vollen T -Matrizen bzgl. 2PR ausgezeichnet, d.h. die Crossing-Symmetrie der vollen T -Matrix wird durch diese Näherung zerstört. Für ein Näherungsverfahren, das zu einer Gleichbehandlung aller Kanäle der T -Matrix bzgl. 2PR führt, vgl. [LÖ 92].

Durch die Umschreibung der SDE's auf die eigentlichen Vertices ergibt sich insbesondere zum ersten Mal eine eindeutige, niedrigste Entkoppelungsnäherung für die SD-Hierarchien. Diese besteht in der Vernachlässigung aller Vertexeinschübe in den SDE's (A.39) für die beiden Propagatoren, d.h. der Setzung

$$\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = -ig\gamma^\mu, \quad (\text{A.49})$$

die dadurch zu einem geschlossenen Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Propagatoren werden.

Anhang B

SDE's und die Ward-Takahashi-Identitäten der QED

In diesem Anhang leiten wir zunächst die Ward-Takahashi-Identitäten (WTI) für die im Zusammenhang mit den SDE's wichtigsten Amplituden aus der Funktionalintegraldarstellung für das EZF Z her. Anhand einer Analyse des Bestimmungsgehalts der SDE's zeigen wir, daß wir ihnen die WTI explizit aufprägen müssen, und geben die dazu nötigen Umschreibungen an. Darüberhinaus betrachten wir den genauen Zusammenhang zwischen den WTI und ihren differentiellen Formen, den Ward-Identitäten (WI).

B.1 Herleitung der WTI aus dem Funktionalintegral

Die WTI der QED lassen sich am einfachsten anhand des Studiums der Transformationseigenschaften der Funktionalintegraldarstellung für das EZF

$$I[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) e^{i\{S_{QED_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^D x (A_\mu J^\mu + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta)\}} \quad (\text{B.1})$$

unter den infinitesimalen lokalen Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = \{1 - ig\Theta(x) + \mathcal{O}(\Theta^2)\}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \{1 + ig\Theta(x) + \mathcal{O}(\Theta^2)\}\bar{\Psi}(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

herleiten. Das Argument der Exponentialfunktion in Gl.(B.1) transformiert sich unter diesen Transformationen gemäß

$$\begin{aligned} S_{QED_D}[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^D x \{A_\mu(x)J^\mu(x) + \bar{\eta}(x)\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\eta(x)\} \\ \rightarrow S_{QED_D}[A', \Psi', \bar{\Psi}'] + \frac{1}{\xi} \int d^D x \Theta(x) \square \partial \cdot A'(x) \\ + \int d^D x \{A'_\mu(x)J^\mu(x) + \bar{\eta}(x)\Psi'(x) + \bar{\Psi}'(x)\eta(x)\} \end{aligned}$$

$$+ \int d^D x \Theta(x) \{ \partial \cdot J + ig [\bar{\eta}(x)\Psi'(x) - \bar{\Psi}'(x)\eta(x)] \} + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (\text{B.3})$$

Unter der Annahme der Anomaliefreiheit der Eichtransformationen, d.h. der Invarianz des Maßes des Funktionalintegrals

$$\mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) = \mathcal{D}(A', \Psi', \bar{\Psi}') \quad (\text{B.4})$$

unter den linearen Eichtransformationen der Felder,¹ folgt für das EZF I nach Umbenennung der Felder und Entwicklung um $\Theta = 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} I[J, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) e^{i\{S[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^D x (A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta)\}} \\ &= \int \mathcal{D}(A, \Psi, \bar{\Psi}) \left\{ 1 + i \int d^D x \Theta(x) \left\{ \partial \cdot J(x) + ig [\bar{\eta}(x)\Psi(x) - \bar{\Psi}(x)\eta(x)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\xi} \square \partial \cdot A \right\} \right\} e^{i\{S[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^D x (A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta)\}} \\ &= \left\{ 1 + i \int d^D x \Theta(x) \left\{ \partial \cdot J(x) + ig \left[\bar{\eta}(x) \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} + \eta(x) \frac{-i\delta}{\delta(-\eta(x))} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\xi} \square \partial_\mu \frac{-i\delta}{\delta J_\mu(x)} \right\} \right\} I[J, \eta, \bar{\eta}] . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Aus der Bedingung, daß diese Beziehung für beliebiges $\Theta(x)$ erfüllt sein muß, folgt die funktionale WTI für das EZF $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$

$$\left\{ \frac{1}{\xi} \square_x \partial_\mu^x \frac{-i\delta}{\delta J_\mu(x)} + \partial_x \cdot J(x) + ig \left[\bar{\eta}(x) \frac{-i\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} + \eta(x) \frac{-i\delta}{\delta(-\eta(x))} \right] \right\} Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0 , \quad (\text{B.6})$$

die sich auf das EZF $W[J, \eta, \bar{\eta}]$ für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen

$$\frac{1}{\xi} \square_x \partial_\mu^x \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} + \partial_x \cdot J(x) + ig \left[\bar{\eta}(x) \frac{-i\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} + \eta(x) \frac{-i\delta W}{\delta(-\eta(x))} \right] = 0 \quad (\text{B.7})$$

und das EZF $\Gamma[V, \xi, \bar{\xi}]$ für die eigentlichen Greenschen Funktionen umschreiben läßt

$$\frac{1}{\xi} \square_x \partial_\mu^x V^\mu(x) - \partial_\mu^x \frac{\delta \Gamma}{\delta V_\mu(x)} - ig \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta(-\xi(x))} \xi(x) - \bar{\xi}(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\xi}(x)} \right] = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Die WTI für die einzelnen Greenschen Funktionen lassen sich aus den WTI der EZF durch funktionale Ableitung nach den Quellen gewinnen. Für die

¹ Die Invarianz des Maßes des Funktionalintegrals unter infinitesimalen Eichtransformationen stellt eine nichttriviale Charakterisierung seiner Transformationseigenschaften dar. Für diese Invarianz ist im Hinblick auf die chirale Anomalie die Linearität der Eichtransformation allein nicht ausreichend.

WTI der zusammenhängenden Greenschen Funktionen ${}^c\tilde{G}_{2k,l}$ im Impulsraum folgt die geschlossene Darstellung

$$\begin{aligned}
 & k_{1,\mu_1} {}^c\tilde{G}_{2k,l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (\underbrace{p_1, \dots, p_k}_{=p}; \underbrace{k_1, \dots, k_l}_{=k}; \underbrace{q_1, \dots, q_k}_{=q}) \\
 &= -i \frac{\xi}{k_1^2} k_1^{\mu_2} (2\pi)^D \delta^D(k_1 + k_2) \delta_{k,0} \delta_{l,2} \\
 &+ \frac{i\xi g}{k_1^2} \sum_{m=1}^k \left\{ {}^c\tilde{G}_{2k,l-1}^{\mu_2 \dots \mu_l} (p_1, \dots, p_{m-1}, p_m + k_1, p_{m+1}, \dots, p_k; k_2, \dots, k_l; q) \right. \\
 &\quad \left. - {}^c\tilde{G}_{2k,l-1}^{\mu_2 \dots \mu_l} (p; k_2, \dots, k_l; q_1, \dots, q_{m-1}, q_m + k_1, q_{m+1}, \dots, q_k) \right\}, \quad (B.9)
 \end{aligned}$$

die sich ihrer Struktur nach auch für die WTI der eigentlichen Vertices $\tilde{\Gamma}_{2k,l}$ ergibt.

In der Tabelle (B.1) sind die WTI für die EZF im Impulsraum und für die, im Zusammenhang mit den SDE's für die drei Basisvertices wichtigsten, eigentlichen Vertices zusammengefaßt. Tabelle (B.2) enthält die WTI für die volle $T_{2,2}$ -Matrix, die 1-s-PI $_sT_{2,2}$ -Matrix und den 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kern $_{ss}\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$. Die WTI für $\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$ und $_s\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$ ergeben sich unmittelbar aus ihren algebraischen Definitionen (A.43/A.44). Die beiden WTI für den Bethe-Salpeter-Kern $_{ss}\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$ in Tabelle (B.2) enthalten nicht geschlossene Loop-Integrale. Dieser Umstand wird durch den Nachweis der WTI für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ aus Tabelle (B.1) auf der Basis ihrer resummierten SDE (A.48), die den Kern $_{ss}\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$ enthält, verständlich. Damit die longitudinale Projektion dieser Gleichung auf die SDE (1.26) für den Fermionpropagator führt, muß die volle Vertexfunktion \tilde{V}^μ im Loop-Integral der Vertexkorrektur durch ihre nullte Ordnung ersetzt werden. Dies leisten gerade die gebrochenen Loop-Integrale in den WTI für $_{ss}\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$, indem sie sich nach Einsetzen in die longitudinal projizierte \tilde{V}^μ -SDE schließen und mit Vertexkorrekturen identifizieren lassen.

Eine Möglichkeit, die WTI auszuwerten, besteht in der Aufteilung der Greenschen Funktionen in bzgl. der Bosonimpulse longitudinale und transversale Anteile durch Anwendung der beiden zueinander orthogonalen Projektoren

$$\begin{aligned}
 t^{\mu\nu}(k) &= g^{\mu\nu} - l^{\mu\nu}(k) \\
 l^{\mu\nu}(k) &= \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}.
 \end{aligned} \quad (B.10)$$

Für den Bosonpropagator $\tilde{D}^{\mu\nu}$ führt dieses Vorgehen auf

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(k) = -\tilde{D}_T(k^2) t^{\mu\nu}(k) - \frac{\xi}{k^2} l^{\mu\nu}(k), \quad (B.11)$$

d.h. der gesamte dynamische Gehalt von $\tilde{D}^{\mu\nu}$ steckt im Transversalanteil. Entsprechend ergibt sich aus der Aufteilung der Vertexfunktion

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \underbrace{t^{\mu\nu}(k) \tilde{V}_\nu(p; k; \cdot)}_{\tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot)} + \underbrace{l^{\mu\nu}(k) \tilde{V}_\nu(p; k; \cdot)}_{\tilde{V}^{L,\mu}(p; k; \cdot)} \quad (B.12)$$

WTI für die EZF	
$\tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}]$	$k_\mu \frac{-i\delta\tilde{Z}}{\delta\tilde{J}_\mu(k)} = \left\{ (2\pi)^D \frac{\xi}{k^2} k_\mu \tilde{J}^\mu(-k) \right.$ $\left. - \xi \frac{g}{k^2} \int d^D l \left[\tilde{\eta}(l) \frac{-i\delta}{\delta\tilde{\eta}(k+l)} + \tilde{\bar{\eta}}(l) \frac{-i\delta}{\delta(-\tilde{\eta})(k+l)} \right] \right\} \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}]$
$\tilde{W}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}]$	$k_\mu \frac{\delta\tilde{W}}{\delta\tilde{J}_\mu(k)} = (2\pi)^D \frac{\xi}{k^2} k_\mu \tilde{J}^\mu(-k)$ $- \xi \frac{g}{k^2} \int d^D l \left[\tilde{\eta}(l) \frac{\delta\tilde{W}}{\delta\tilde{\eta}(k+l)} + \tilde{\bar{\eta}}(l) \frac{\delta\tilde{W}}{\delta(-\tilde{\eta})(k+l)} \right]$
$\tilde{\Gamma}[\tilde{V}, \tilde{\xi}, \tilde{\bar{\xi}}]$	$k_\mu \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\tilde{V}_\mu(-k)} = -\frac{k^2}{(2\pi)^D \xi} k_\mu \tilde{V}^\mu(-k)$ $- g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \left[\tilde{\xi}(k+l) \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta(-\tilde{\xi})(l)} + \tilde{\bar{\xi}}(k+l) \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\tilde{\bar{\xi}}(l)} \right]$
WTI für die Vertices	
$\tilde{\Gamma}_{0,2}^{\mu\nu}$	$k_\mu \tilde{\Gamma}_{0,2}^{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{\xi} k^2 k^\nu$ $k_\mu \tilde{D}^{\mu\nu}(k) = -\frac{\xi}{k^2} k^\nu$
$\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu$	$k_\mu \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = g \left[\tilde{\Gamma}_{2,0}(p) - \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k) \right]$ $k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p)$
$\tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}$	$k_\mu \tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = g \left[\tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p; q; \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p+k; q; \cdot) \right]$ $q_\nu \tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = g \left[\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p+q; k; \cdot) \right]$ $k_\mu q_\nu \tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = g^2 \left\{ \left[\tilde{\Gamma}_{2,0}(p) - \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k) \right] \right.$ $\left. - \left[\tilde{\Gamma}_{2,0}(p+q) - \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+q+k) \right] \right\}$

Tabelle B.1: Ward-Takahashi-Identitäten der QED, 1.Teil

WTI für die T-Matrizen	
	$k_\mu \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = g \left\{ \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p+k; q; \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p; q; \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+q) \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k+q) \right\}$
$\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$	$k_\mu q_\nu \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = -g^2 \left\{ \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) + \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k+q) + \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k) \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k+q) + \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+q) \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k+q) \right\}$
WTI für den Bethe-Salpeter-Kern	
${}_s \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$	$k_\mu {}_s \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = -g \left\{ \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) + \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_2(p+q) \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p+q; k; \cdot) \right\}$
	$k_\mu q_\nu {}_s \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = -g^2 \left\{ \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+k) + \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+q) \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+q+k) \right\}$
${}_{ss} \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}$	$k_\mu {}_{ss} \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = -g \left\{ \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\nu} + \tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p; q; \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+q) \times \tilde{\Gamma}_{2,0}(p+q+k) + \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \tilde{\Gamma}_{2,1}^\sigma(p; -w; \cdot) \tilde{G}_{2,0}(p-w) {}^c\tilde{G}_{2,\sigma\varrho}(w) {}_{ss} \tilde{T}_{2,2}^{\varrho\nu}(p+k-w; w, q; \cdot) \right\}$
	$q_\nu {}_{ss} \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = g \left\{ \tilde{\Gamma}_{2,1}^{(0),\mu} + \tilde{\Gamma}_{2,0}(p) {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+q) \times \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p+q; k; \cdot) + \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} {}_{ss} \tilde{T}_{2,2}^{\mu\sigma}(p; k, -w; \cdot) {}^c\tilde{G}_{2,0;\sigma\varrho}(w) \times {}^c\tilde{G}_{2,0}(p+k+q-w) \tilde{\Gamma}_{2,1}^\varrho(p+k+q-w; w; \cdot) \right\}$

Tabelle B.2: Ward-Takahashi-Identitäten der QED, 2.Teil

die Darstellung

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot) + \frac{k^\mu}{k^2} [\tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p)] . \quad (\text{B.13})$$

B.2 Konsistenz der SDE's mit den WTI

Die WTI

$$k_\mu \tilde{D}^{\mu\nu}(k) = -\frac{\xi}{k^2} k^\nu \quad (\text{B.14})$$

des Bosonpropagators $\tilde{D}^{\mu\nu}$ kann aus seiner SDE (1.26) durch longitudinale Projektion gewonnen werden

$$\begin{aligned} k_\nu \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \underbrace{k_\nu \tilde{V}^\nu(l; k; \cdot)}_{\tilde{S}^{-1}(l+k) - \tilde{S}^{-1}(l)} \tilde{S}(k+l) \\ &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \{ \tilde{S}(l) - \tilde{S}(l+k) \} \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

sofern die Gültigkeit der WTI

$$k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) \quad (\text{B.16})$$

der Vertexfunktion und die Verwendung eines translationsinvarianten Regularisierungsverfahrens vorausgesetzt wird. Demnach folgt in dimensioneller Regularisierung bei Wahrung der Beziehung (B.16)

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) &= t^{\mu\nu}(k) k^2 \tilde{\Pi}(k^2) \Rightarrow \\ \tilde{D}_T(k^2) &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + g^2 \tilde{\Pi}(k^2)} , \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

mit der gemäß

$$\tilde{\Pi}(k^2) = \frac{t_{\mu\nu}(k) \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)}{(D-1)k^2} = \frac{\tilde{\Pi}_\mu{}^\mu(k)}{(D-1)k^2} \quad (\text{B.18})$$

zu berechnenden Polarisationsfunktion $\tilde{\Pi}(k^2)$.

Die zunächst als gültig vorausgesetzte WTI (B.16) für die Vertexfunktion kann ihrerseits durch longitudinale Projektion der SDE (A.44) hergeleitet werden. Mit der WTI für die 1-s-PI T-Matrix aus Tabelle (B.2)

$$\begin{aligned} q_\nu {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) - \tilde{S}^{-1}(p) \tilde{S}(p+q) \tilde{V}^\mu(p+q; k; \cdot) \\ {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu} &= \frac{i}{g^2} {}_s \tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

und der SDE (1.26) für den Fermionpropagator folgt

$$k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = k_\mu \gamma^\mu$$

$$\begin{aligned}
& - g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\varrho \tilde{D}_{\varrho\sigma}(p-l) \tilde{S}(l) \underbrace{k_\mu s \tilde{K}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p-l, k; \cdot)}_{\tilde{V}^\sigma(l; p-l; \cdot) - \tilde{S}^{-1}(l) \tilde{S}(l+k) \tilde{V}^\sigma(l+k; p-l; \cdot)} \\
& = \cancel{\not{p}} - g^2 \underbrace{\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\varrho \tilde{D}_{\varrho\sigma}(p-l) \tilde{S}(l) \tilde{V}^\sigma(l; p-l; \cdot)}_{\tilde{S}^{-1}(p) - \cancel{\not{p}} + m\mathbf{1}} \\
& + g^2 \underbrace{\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\varrho \tilde{D}_{\varrho\sigma}(p-l) \tilde{S}(l+k) \tilde{V}^\sigma(l+k; p-l; \cdot)}_{\tilde{S}^{-1}(p+k) - \cancel{\not{p}} - \cancel{\not{q}} + m\mathbf{1}} \\
& = \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) . \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Dieses Schema setzt sich für höhere Greensche Funktionen so fort, d.h. die SDE's geben entsprechend ihrer hierarchischen Struktur die Bedingung für die Gültigkeit der WTI einer bestimmten Greenschen Funktion an die nächst höhere Greensche Funktion weiter und ermöglichen deshalb jenseits der Störungsrechnung zwar einen Konsistenzcheck bzgl. der WTI, nicht aber ihre Herleitung. Um innerhalb echt nichtperturbativer Lösungsversuche der SDE's sicher gehen zu können, die WTI respektierende Lösungen zu erhalten, müssen diese den SDE's deshalb explizit aufgeprägt werden.

Dies kann entweder durch die Formulierung von mit den WTI verträglichen Ansätzen für die Greenschen Funktionen oder durch Umschreibung der SDE's auf rein transversale Größen geschehen. Die zweite Methode, die wir die Elimination longitudinaler Anteile aus den SDE's nennen möchten, ist für die SDE des Bosonpropagators bereits durch Gl.(B.17) vollzogen, da in diese nach Gl.(B.18) nur noch der transversale Anteil der Vertexfunktion eingeht. Die vollständige Umschreibung der SDE's auf transversale Größen erfordert zusätzlich zur transversalen Projektion bzgl. der äußeren Bosonimpulse die Elimination loopinterner Longitudinalanteile. Dazu ist die Verwendung der WTI nach Aufteilung loopinterner Bosonpropagatoren in ihren Longitudinal- und Transversalanteil gemäß Gl.(B.14) nötig. Am Beispiel der SDE (1.26) für den Fermionpropagator verdeutlicht bedeutet dies

$$\begin{aligned}
& \tilde{S}^{-1}(p) = \cancel{\not{p}} - m\mathbf{1} \\
& + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(p-l) \left\{ \tilde{D}_{\mu\nu}^T(l) - \frac{\xi}{l^2} \frac{l_\mu l_\nu}{l^2} \right\} \tilde{V}^\nu(p-l; l; \cdot) \\
& = \cancel{\not{p}} - m\mathbf{1} + g^2 \underbrace{\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(p-l) \tilde{D}_{\mu\nu}^T(l) \tilde{V}^\nu(p-l; l; \cdot)}_{= \tilde{\Sigma}^T(p)} \\
& - \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p-l) \underbrace{l_\nu \tilde{V}^\nu(p-l; l; \cdot)}_{\tilde{S}^{-1}(p) - \tilde{S}^{-1}(p-l)} \\
& = \cancel{\not{p}} - m\mathbf{1} + g^2 \tilde{\Sigma}^T(p) - \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p-l) \tilde{S}^{-1}(p)
\end{aligned}$$

$$+ \xi g^2 \underbrace{\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4}}_{=0} . \quad (\text{B.21})$$

Ein entsprechendes Vorgehen führt für die transversal projizierte SDE (A.44) der Vertexfunktion unter Verwendung der WTI (B.19) auf zwei explizit ξ -abhängige Terme

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot) &= \gamma^{T,\mu} - g^2 \tilde{\Lambda}^{T,\mu}(p; k; \cdot) \\ &= \gamma^{T,\mu} - g^2 \tilde{\Lambda}^{TT,\mu}(p; k; \cdot) \\ &+ \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p-l) \tilde{V}^{T,\mu}(p-l; k; \cdot) \tilde{S}(p-l+k) \tilde{S}^{-1}(p+k) \\ &- \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(l) \tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \cdot) . \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Das Auftreten niedrigerer Greenscher Funktionen zusammen mit einer expliziten ξ -Potenz in den vollständig auf transversale Größen umgeschriebenen SDE's (B.17/B.21/B.22) ist für die Untersuchung der Eichkovarianzeigenschaften der drei Basisvertices in Anhang C wesentlich.

In Landau-Eichung $\xi = 0$ treten die explizit ξ -abhängigen Terme nicht auf, und wir erhalten mit den SDE's (B.17/B.21/B.22) in dieser Eichung eine Entkopplung longitudinaler und transversaler Anteile der Greenschen Funktionen, verlieren jedoch durch die Festlegung auf eine bestimmte Eichung die Eichkovarianz als Qualitätskriterium für Näherungen.

B.3 Die WI und ihre Konsistenz mit den SDE's

Nach Gl.(B.9) ist der Bosonpropagator die einzige (zusammenhängende) Greensche Funktion, in deren WTI keine Differenzbildung vorkommt. Entsprechend gibt es zwischen der Lösung (B.11) der WTI (B.14) für den Bosonpropagator und der Lösung (B.13) der WTI (B.16) für die Vertexfunktion einen fundamentalen Unterschied. Die Darstellung (B.11) für $\tilde{D}^{\mu\nu}$ ist die Lösung der für $k \rightarrow 0$ singulären WTI (B.14) und entsprechend ist die durch den Longitudinalanteil bedingte Singularität in $\tilde{D}^{\mu\nu}$ echt². Im Hinblick auf die für $k \rightarrow 0$ reguläre WTI (B.16) für \tilde{V}^μ

$$\begin{aligned} k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) \\ &= k_\mu \left\{ \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} + \mathcal{O}(k) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

erscheinen die sich für $k \rightarrow 0$ ergebenden sog. kinematischen Singularitäten des kanonischen Longitudinalanteils (B.13)

$$\tilde{V}^{L,\mu}(p; k; \cdot) = \frac{k^\mu}{k^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu} k_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu \partial p_\sigma} k_\nu k_\sigma + \dots \right\} \quad (\text{B.24})$$

²Hieran kann auch der Transversalanteil von $\tilde{D}^{\mu\nu}$ nichts ändern, da dieser von ξ unabhängig ist.

als Artefakte der Aufteilung von \tilde{V}^μ in \tilde{V}_L^μ und \tilde{V}_T^μ mittels der für $k \rightarrow 0$ für sich betrachtet jeweils singulären Projektionsoperatoren $t^{\mu\nu}(k)$ und $l^{\mu\nu}(k)$. Insofern ist eine reguläre Auswertung der \tilde{V}^μ -WTI (B.16) durch Hinzunahme eines geeigneten Transversalanteils zum singulären Longitudinalanteil (B.13) wünschenswert. Durch explizite Rechnung ist von [BC 80] gezeigt worden, daß die Vertexfunktion als Ganzes, d.h. die Summe aus Longitudinal- und Transversalanteil, in der Störungsrechnung auf Ein- und Zwei-Loop-Niveau keine derartigen Singularitäten ausbildet, wie dies auch aus physikalischen Gesichtspunkten heraus zu erwarten ist. Setzen wir die Regularität der Gesamtvertexfunktion \tilde{V}^μ , d.h. ihre Taylorentwickelbarkeit bzgl. des Bosonimpulses k um $k = 0$ voraus, dann folgt durch Ableiten der WTI (B.16) nach dem Bosonimpuls k

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_\nu} k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{V}^\nu(p; k; \cdot) + k_\mu \frac{\partial}{\partial k_\nu} \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \tilde{S}^{-1}(p+k) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

im Limes $k \rightarrow 0$ die zuerst von Ward [WA 50] angegebene differentielle Form (WI) der WTI³

$$\tilde{V}_R^\mu(p; 0; \cdot) = \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu}, \quad (\text{B.26})$$

die den Wert regulärer Vertexfunktionen \tilde{V}_R^μ für $k = 0$ eindeutig festlegt. Wir betonen ausdrücklich, daß uns die reguläre Auswertung der \tilde{V}^μ -WTI zwar als die gegenüber der singulären Auswertung (B.13) natürlichere Sichtweise erscheint, aber insofern nicht zwingend ist, als zumindest in einem nichtperturbativen SD-Zugang die Regularität der Vertexfunktion $\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)$ für $k \rightarrow 0$ nicht bewiesen werden kann. In Analogie zum Bestimmungsgehalt der SDE's hinsichtlich der WTI kann nur die Konsistenz der WI (B.26) mit der SDE (1.26) gezeigt werden

$$\tilde{V}_R^\mu(p; 0; \cdot) = \gamma^\mu - g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} \gamma^\rho \tilde{D}_{\varrho\sigma}(l) \tilde{S}(p-l) {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\sigma\mu}(p-l; l, 0; \cdot), \quad (\text{B.27})$$

die die Kenntnis der WI für die nächst höhere Greensche Funktion, die 1-s-PI T-Matrix ${}_s \tilde{K}_{2,2}$, erfordert. In Analogie zur Ableitung der WI (B.26) für die Vertexfunktion erhalten wir diese durch Differentiation der WTI (B.19) nach dem Bosonimpuls q

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_\sigma} q_\nu {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\mu\sigma}(p; k, q; \cdot) + q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\sigma} {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) \\ &\stackrel{!}{=} -\tilde{S}^{-1}(p) \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left\{ \tilde{S}(p+q) \tilde{V}^\mu(p+q; k; \cdot) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

unter der Regularitätsannahme

$$\lim_{q \rightarrow 0} q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\sigma} {}_s \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = 0 \quad (\text{B.29})$$

³Wir unterscheiden in dieser Arbeit im Gegensatz zum allgemeinen Sprachgebrauch streng zwischen den WTI und ihren differentiellen Formen, den WI.

im Limes $q \rightarrow 0$

$${}_s\tilde{K}_{R;2,2}^{\mu\nu}(p; k, 0; \cdot) = -\tilde{S}^{-1}(p) \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left\{ \tilde{S}(p) \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) \right\}. \quad (\text{B.30})$$

Damit folgt aus Gl.(B.27)

$$\begin{aligned} \tilde{V}_R^\mu(p; 0; \cdot) &= \gamma^\mu \\ &+ g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\varrho \tilde{D}_{\varrho\sigma}(l) \frac{\partial}{\partial(p-l)_\mu} \left\{ \tilde{S}(p-l) \tilde{V}_R^\sigma(p-l; l; \cdot) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left\{ \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\varrho \tilde{D}_{\varrho\sigma}(l) \tilde{S}(p-l) \tilde{V}_R^\sigma(p-l; l; \cdot) \right\} \\ &\stackrel{\text{SDE}}{=} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{S}^{-1}(p) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Für die Wahl einer regulären Vertexfunktion ergibt sich aus der $\tilde{D}^{\mu\nu}$ -SDE (1.26) für die Vakuumpolarisation beim Impuls null

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(0) &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{S}(l) \tilde{V}_R^\nu(l; 0; \cdot) \tilde{S}(l) \\ &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \underbrace{\tilde{S}(l) \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(l)}{\partial l_\nu} \tilde{S}(l)}_{-\frac{\partial}{\partial l_\nu} \tilde{S}(l)} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

sofern das Regularisierungsverfahren die partielle Integration ohne Randterme erlaubt. Dies ist für die dimensionelle Regularisierung nach den Wilsonschen Axiomen aus Kapitel 2 der Fall.⁴ Das Verschwinden der Vakuumpolarisation beim Impuls null impliziert nach Gl.(B.18) eine für $k \rightarrow 0$ reguläre Polarisationsfunktion $\tilde{\Pi}(k^2)$, so daß nach Gl.(B.17) der Pol im Transversalanteil des Bosonpropagators für $k \rightarrow 0$ nicht durch Wechselwirkung beseitigt werden kann. D.h. durch die explizite Wahl einer bzgl. des Bosonimpulses IR-regulären Lösung der SDE's für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ wählen wir aus der Lösungsmannigfaltigkeit der SDE's der QED die durch ein masseloses Boson gekennzeichnete und insbesondere in der Störungsrechnung realisierte Coulomb-Phase aus. Wir bringen diese Wahl durch die Einführung der invarianten Funktion $d(k^2)$ für den Transversalanteil von $\tilde{D}^{\mu\nu}$ zum Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{\mu\nu}(k) &= -\tilde{D}_T(k^2) t^{\mu\nu}(k) - \frac{\xi}{k^2} l^{\mu\nu}(k) \\ \tilde{D}_T(k^2) &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + g^2 \tilde{\Pi}(k^2)} = \frac{1}{k^2} d(k^2). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Eine reguläre Lösung der SDE's für die Vertexfunktion läßt sich durch die Formulierung regulärer Vertexansätze einfach implementieren. Dagegen ist

⁴Für ein Impuls-Cut-Off-Regularisierungsverfahren kann das Integral in Gl.(B.32) mit dem Satz von Gauß ausgewertet werden.

die Angabe eines entsprechend der regulären Auswertung (B.26) der WTI (B.16) ausgedünnten Satzes von SDE's wesentlich schwieriger. Bevor wir die Lösung dieses Problems diskutieren, nehmen wir die vollständige Auswertung der WTI (B.16) für reguläre Vertexfunktionen \tilde{V}_R^μ vor.

B.4 Minimale Auswertung der WTI für reguläre Vertexfunktionen

Durch eine bzgl. der Regularität minimale aber vollständige Auswertung der WTI (B.16) der Vertexfunktion \tilde{V}^μ streben wir in diesem Abschnitt die Fortsetzung der WI (B.26) zu Bosonimpulsen $k \neq 0$ hin an. Die dazu von [Bc 80] vorgeschlagene Vertexfunktion

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu^{BC}(p; k; -q) &= \frac{A(q^2) + A(p^2)}{2} \gamma_\mu \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{A(q^2) - A(p^2)}{q^2 - p^2} (\not{p} + \not{q}) - \frac{B(q^2) - B(p^2)}{q^2 - p^2} \mathbf{1} \right\} (p + q)_\mu \\ \tilde{S}^{-1}(p) &= A(p^2) \not{p} - B(p^2) \mathbf{1}\end{aligned}\quad (\text{B.34})$$

stellt zwar eine um $k = 0$ reguläre Fortsetzung der WI (B.26) dar, d.h.

$$\tilde{V}_\mu^{BC}(p; 0; -p) = \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu}, \quad (\text{B.35})$$

die Bezugnahme auf die Tensorstruktur des Fermionpropagators zeigt jedoch, daß sie weniger hergeleitet, als durch Verallgemeinerung der Lösung des Problems für die skalare QED konstruiert ist. Darüberhinaus stellt sie keine minimal reguläre Lösung der WTI dar.

Differentielle Charakterisierung regulärer Vertexfunktionen

Das reguläre Verhalten (B.26) für eine Vertexfunktion \tilde{V}^μ mit dem singulären Longitudinalanteil (B.24) kann nur durch Hinzunahme eines gleichfalls für $k \rightarrow 0$ singulären Transversalanteils erreicht werden. Für diesen setzen wir eine zur Taylorentwicklung (B.24) analoge Entwicklung der Form

$$\begin{aligned}\tilde{V}_T^\mu(p; k; \cdot) &= t^\mu{}_\nu(k) \tilde{V}^\nu(p; k; \cdot) \\ &= t^\mu{}_\nu(k) \left\{ \underbrace{\tilde{V}_T^\nu(p; 0; \cdot)}_{=\tilde{V}^\nu(p)} + \underbrace{\frac{\partial \tilde{V}_T^\nu(p; k; \cdot)}{\partial k_\varrho} \Big|_{k=0}}_{=\tilde{V}^{\nu\varrho}(p)} k_\varrho \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_T^\nu(p; k; \cdot)}{\partial k_\varrho \partial k_\sigma} \Big|_{k=0}}_{=\tilde{V}^{\nu\varrho\sigma}(p)} k_\varrho k_\sigma + \mathcal{O}(k^3) \right\}\end{aligned}\quad (\text{B.36})$$

an, so daß durch Kombination dieser beiden folgt

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{V}_T^\mu(p; k; \cdot) + \tilde{V}_L^\mu(p; k; \cdot)$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{V}^\mu(p) + \tilde{V}^{\mu\varrho}(p)k_\varrho + \frac{1}{2}\tilde{V}^{\mu\varrho\sigma}(p)k_\varrho k_\sigma \\
 &+ \frac{k^\mu}{k^2} \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu} - \tilde{V}^\nu(p; 0; \cdot) \right] k_\nu \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu \partial p_\varrho} - 2\tilde{V}^{\nu\varrho}(p) \right] k_\nu k_\varrho \\
 &\left. + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu \partial p_\varrho \partial p_\sigma} - 3\tilde{V}^{\nu\varrho\sigma}(p) \right] k_\nu k_\varrho k_\sigma + \mathcal{O}(k^4) \right\} . \quad (\text{B.37})
 \end{aligned}$$

Nach Symmetrisierung der eckigen Klammern in Gl.(B.37) entsprechend dem Muster

$$\tilde{V}^{\nu\varrho}(p)k_\nu k_\varrho = \frac{1}{2} [\tilde{V}^{\nu\varrho}(p) + \tilde{V}^{\varrho\nu}(p)] k_\nu k_\varrho \quad (\text{B.38})$$

werden durch Aufprägen der Forderungen

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}^\nu(p) &= \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu} \\
 \tilde{V}^{\nu\varrho}(p) + \tilde{V}^{\varrho\nu}(p) &= \frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu \partial p_\varrho} \\
 \tilde{V}^{\nu\varrho\sigma}(p) + \tilde{V}^{\varrho\sigma\nu}(p) + \tilde{V}^{\sigma\nu\varrho}(p) &= \frac{\partial^3 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu \partial p_\varrho \partial p_\sigma} \\
 &\vdots \quad (\text{B.39})
 \end{aligned}$$

die kinematischen Singularitäten in Gl.(B.37) beseitigt und für die reguläre Vertexfunktion \tilde{V}_R^μ folgt die Taylorentwicklung

$$\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{V}^\mu(p) + \tilde{V}^{\mu\varrho}(p)k_\varrho + \frac{1}{2}\tilde{V}^{\mu\varrho\sigma}(p)k_\varrho k_\sigma + \mathcal{O}(k^3) \quad (\text{B.40})$$

mit dem korrekten Wert (B.26) für $k = 0$. Der Einsicht wegen haben wir die Einschränkungen (B.39) unter Bezugnahme auf die kinematischen Singularitäten des Longitudinalanteils (B.13) hergeleitet. Sie lassen sich jedoch in Analogie zur Herleitung der WI (B.25) einfacher durch Mehrfachableitung der WTI (B.16) gewinnen. Beispielsweise ergibt die Zweifachableitung von Gl.(B.16) nach dem Bosonimpuls k

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial k_\nu k_\varrho} k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) &= \frac{\partial \tilde{V}^\nu(p; k; \cdot)}{\partial k_\varrho} + \frac{\partial \tilde{V}^\varrho(p; k; \cdot)}{\partial k_\nu} + k_\mu \frac{\partial^2 \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)}{\partial k_\nu \partial k_\varrho} \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial^2}{\partial k_\nu \partial k_\varrho} \tilde{S}^{-1}(p + k) . \quad (\text{B.41})
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt im Limes $k \rightarrow 0$ für eine reguläre Vertexfunktion, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow 0} k_\mu \frac{\partial^2 \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)}{\partial k_\nu \partial k_\varrho} = 0 , \quad (\text{B.42})$$

die zweite Beziehung in Gl.(B.39). Den Gehalt der durch Gl.(B.39/B.40) gewonnenen differentiellen Charakterisierung der regulären Vertexfunktion

\tilde{V}_R^μ können wir wie folgt ausdrücken: die erste Beziehung in Gl.(B.39) legt den Wert von $\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$ für $k = 0$ eindeutig fest. Die weiteren Beziehungen, die wir verallgemeinerte WI nennen möchten, legen nur noch die symmetrischen Anteile der Taylorkoeffizienten $\tilde{V}^{\mu\nu\cdots}(p)$ von $\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$ fest, wobei sich die Symmetrie auf die Vertauschung des ersten Index μ mit irgendeinem der anderen Indizes $\nu \dots$ von $\tilde{V}^{\mu\nu\cdots}(p)$ bezieht. Hiernach ist die Klassifizierung regulärer Vertexfunktionen \tilde{V}_R^μ nach Transversal- und Longitudinalanteilen nicht geeignet, da diese Klassifizierung die aus der regulären Auswertung der WTI resultierenden Beiträge zum Transversalanteil von \tilde{V}_R^μ nicht erfaßt.

Mit der Tensoranalyse (B.34) des Fermionpropagators kann für die durch Gl.(B.39) festgelegten symmetrischen Anteile $\tilde{V}_S^{\mu\nu\cdots}(p)$ der Taylorkoeffizienten $\tilde{V}^{\mu\nu\cdots}(p)$ von $\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_S^\mu(p) &= \tilde{V}_R^\mu(p; 0; \cdot) \\ \tilde{V}_S^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{2} [\tilde{V}^{\mu\nu}(p) + \tilde{V}^{\nu\mu}(p)] \\ \tilde{V}_S^{\mu\nu\sigma}(p) &= \frac{1}{3} [\tilde{V}^{\mu\nu\sigma}(p) + \tilde{V}^{\nu\sigma\mu}(p) + \tilde{V}^{\sigma\mu\nu}(p)] \\ &\vdots\end{aligned}\tag{B.43}$$

die folgende Tensorzerlegung vorgenommen werden

$$\begin{aligned}\tilde{V}_S^\mu(p) &= \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} \\ &= A(p^2) \gamma^\mu + 2p^\mu [A'(p^2) \not{p} - B'(p^2) \mathbf{1}] \\ \tilde{V}_S^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \\ &= g^{\mu\nu} [A'(p^2) \not{p} - B'(p^2) \mathbf{1}] + [p^\mu \gamma^\nu + p^\nu \gamma^\mu] A'(p^2) \\ &+ 2p^\mu p^\nu [A''(p^2) \not{p} - B''(p^2) \mathbf{1}] \\ \tilde{V}_S^{\mu\nu\sigma}(p) &= \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu \partial p_\sigma} \\ &= \frac{2}{3} [\gamma^\mu g^{\sigma\nu} + \gamma^\nu g^{\mu\sigma} + \gamma^\sigma g^{\mu\nu}] A'(p^2) \\ &+ \frac{4}{3} [\gamma^\sigma p^\mu p^\nu + \gamma^\mu p^\nu p^\sigma + \gamma^\nu p^\mu p^\sigma] A''(p^2) \\ &+ \frac{4}{3} [g^{\mu\nu} p^\sigma + g^{\mu\sigma} p^\nu + g^{\nu\sigma} p^\mu] [A''(p^2) \not{p} - B''(p^2) \mathbf{1}] \\ &+ \frac{8}{3} p^\mu p^\nu p^\sigma [A'''(p^2) \not{p} - B'''(p^2) \mathbf{1}] \\ &\vdots\end{aligned}\tag{B.44}$$

Zu den drei unabhängigen Elementen des symmetrischen Anteil $\tilde{V}_S^{\mu\nu}(p)$ des Taylorkoeffizienten $\tilde{V}^{\mu\nu}(p)$ kommen die beiden Terme

$$\tilde{V}_A^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)}{\partial k_\nu} - \frac{\partial \tilde{V}_R^\nu(p; k; \cdot)}{\partial k_\mu} \right] \Big|_{k=0}$$

$$= \frac{p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu p^\nu}{2} a_4(p) + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] a_5(p) \quad (\text{B.45})$$

des durch die verallgemeinerten WI (B.39) nicht eingeschränkten antisymmetrischen Anteils $\tilde{V}_A^{\mu\nu}(p)$ hinzu. Kontrahiert mit $k_\mu k_\nu$, d.h. in die WTI (B.16) eingesetzt, verschwindet dieser Anteil

$$\tilde{V}_A^{\mu\nu}(p) k_\mu k_\nu = 0, \quad (\text{B.46})$$

so daß er einen regulären Beitrag zum Transversalanteil von $\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$ in der $\mathcal{O}(k)$ darstellt. Entsprechend lassen sich die antisymmetrischen Anteile der höheren Taylorkoeffizienten analysieren.

Integrale Charakterisierung der minimal regulären Vertexfunktion

Haben wir nur die vollständige Auswertung der WTI (B.16) für reguläre Vertexfunktionen im Auge, dann kann nach Gl.(B.39) in der differentiellen Charakterisierung (B.40) über die antisymmetrischen Anteile der Taylorkoeffizienten keine Aussagen gemacht werden. Infolgedessen ist diejenige Vertexfunktion ausgezeichnet, die die WTI in minimaler Weise regulär löst, d.h. für die diese Anteile identisch null gesetzt werden. Diese reguläre Vertexfunktion, die wir die minimal reguläre nennen und mit \tilde{V}_{MR}^μ bezeichnen, läßt sich nach Gl.(B.39/B.40) differentiell durch⁵

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{V}_S^\mu(p) + \tilde{V}_S^{\mu\varrho}(p) k_\varrho + \frac{1}{2} \tilde{V}_S^{\mu\varrho\sigma}(p) k_\varrho k_\sigma + \mathcal{O}(k^3) \\ &= \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} k_\nu + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu \partial p_\varrho} k_\nu k_\varrho \\ &\quad + \mathcal{O}(k^3) \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

definieren. Sie stellt den allen regulären Vertexfunktionen gemeinsamen minimalen Kern dar. Es gibt eine einfache Möglichkeit, die Darstellung (B.47) für \tilde{V}_{MR}^μ unter Umgehung der systematischen Herleitung des vorigen Abschnitts zu erhalten. Dazu entwickeln wir die rechte Seite der WTI (B.16) in eine Taylorreihe bzgl. des Bosonimpulses k

$$\begin{aligned} k_\mu \tilde{V}^\mu(p; k; -q) &= \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) \\ &= k_\mu \left\{ \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} k_\nu + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu \partial p_\varrho} k_\nu k_\varrho \dots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Hieraus ergibt sich \tilde{V}_{MR}^μ , indem die Vertexfunktion mit der geschweiften Klammer identifiziert wird, ungeachtet der Möglichkeit, diese um (reguläre) Transversalanteile ergänzen zu können. Auf diese Art lassen sich auch WTI für höhere Vertices regulär auswerten, allerdings geht dabei die Charakterisierung der durch die WTI nicht festgelegten Anteile verloren.

⁵Wir setzen von dieser unendlichen Reihe voraus, daß sie existiert.

Betrachten wir unter dem Gesichtspunkt der Minimalität den von [Bc 80] vorgeschlagenen Ansatz (B.34). In einer Entwicklung von $\tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; \cdot)$ bzgl. des Bosonimpulses k folgt für die Taylorkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{BC}^\mu(p) &= \tilde{V}_{BC}^\mu(p; 0; \cdot) \\
 &= \gamma^\mu A(p^2) + 2p^\mu \left[A'(p^2) \not{p} - B'(p^2) \mathbf{1} \right] \\
 &= \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} \\
 \tilde{V}_{BC}^{\mu\nu}(p) &= \frac{\partial \tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; \cdot)}{\partial k_\nu} \Big|_{k=0} \\
 &= g^{\mu\nu} \left[A'(p^2) \not{p} - B'(p^2) \mathbf{1} \right] + \left[p^\mu \gamma^\nu + p^\nu \gamma^\mu \right] A'(p^2) \\
 &\quad + 2p^\mu p^\nu \left[A''(p^2) \not{p} - B''(p^2) \mathbf{1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \\
 \tilde{V}_{BC}^{\mu\nu\sigma}(p) &= \frac{\partial^2 \tilde{V}_{BC}^\mu(p; k; \cdot)}{\partial k_\nu \partial k_\sigma} \Big|_{k=0} \\
 &= \left[\gamma^\mu g^{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \gamma^\nu g^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} \gamma^\sigma g^{\mu\nu} \right] A'(p^2) \\
 &\quad + \left[2\gamma^\mu p^\nu p^\sigma + \gamma^\sigma p^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu p^\sigma \right] A''(p^2) \\
 &\quad + \left[g^{\mu\nu} p^\sigma + g^{\mu\sigma} p^\nu + 2g^{\nu\sigma} p^\mu \right] \left[A''(p^2) \not{p} - B''(p^2) \mathbf{1} \right] \\
 &\quad + \frac{8}{3} p^\mu p^\nu p^\sigma \left[A'''(p^2) \not{p} - B'''(p^2) \mathbf{1} \right] \\
 &\neq \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu \partial p_\sigma}. \tag{B.49}
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der allg. Tensorzerlegung (B.44) für die symmetrischen Anteile der Taylorkoeffizientenmatrizen zeigt, daß \tilde{V}_{BC}^μ zwar die verallgemeinerten WI (B.39) löst, aber ab der $\mathcal{O}(k^2)$, mit zugehörigem Taylorkoeffizient $\tilde{V}_{BC}^{\mu\nu\sigma}(p)$, von der minimal regulären Vertexfunktion abweicht.

Wir betrachten nun die Aufsummation der Taylorreihe (B.47) für \tilde{V}_{MR}^μ

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left\{ \tilde{S}^{-1}(p) + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu} k_\nu + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\nu \partial p_\varrho} k_\nu k_\varrho + \dots \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k \cdot \partial_p)^n}{(n+1)!} \tilde{S}^{-1}(p) \\
 &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 d\lambda \frac{(\lambda k \cdot \partial_p)^n}{n!} \tilde{S}^{-1}(p) \\
 &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k). \tag{B.50}
 \end{aligned}$$

Die WTI (B.16) ergibt sich für diese Darstellung aus

$$k_\mu \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) = \int_0^1 d\lambda k_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 d\lambda \frac{d\tilde{S}^{-1}(p + \lambda k)}{d\lambda} \\
 &= \tilde{S}^{-1}(p + k) - \tilde{S}^{-1}(p) \quad , \tag{B.51}
 \end{aligned}$$

die WI (B.26) ist trivialerweise erfüllt

$$\tilde{V}_{MR}^\mu(p; 0; \cdot) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(p) = \frac{\partial \tilde{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} . \tag{B.52}$$

In einer raumzeitlichen Dimension $D = 1$ reduziert sich die Integraldarstellung (B.50) auf den gewöhnlichen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{MR}(p; k; \cdot) &= \frac{\partial}{\partial p} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k) \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k) \\
 &= \frac{\tilde{S}^{-1}(p + k) - \tilde{S}^{-1}(p)}{k} , \tag{B.53}
 \end{aligned}$$

d.h. die Lösung der WTI besteht im gewöhnlichen Durchdividieren des Bosonimpulses. Zu der Darstellung (B.50) für \tilde{V}_{MR}^μ geben wir die folgenden Erläuterungen:

1. In der Integraldarstellung (B.50) wird davon ausgegangen, daß der Fermionimpuls p nicht vom Bosonimpuls k abhängt. Um beispielsweise auch die in Loop-Integralen oft vorkommende Impulskombination $\tilde{V}^\mu(l; p-l; \cdot)$ mit dem Ansatz \tilde{V}_{MR}^μ erfassen zu können, muß dieser in der allgemeinen Form

$$\tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) = \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{S}^{-1}(x) \Big|_{x=p+\lambda k} \tag{B.54}$$

geschrieben werden.

2. Die Integraldarstellung (B.50) für $\tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot)$ nimmt als Funktional des inversen Fermionpropagators nicht Bezug auf dessen Tensorzerlegung (B.34), besitzt nach Anhang C das richtige Transformationsverhalten bzgl. der multiplikativen Renormierung und darüberhinaus den richtigen Limes für $g \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot; g=0) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \left\{ \not{p} + \lambda \not{k} - m \mathbf{1} \right\} \\
 &= \gamma^\mu . \tag{B.55}
 \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Eigenschaften eignet sich $\tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot)$ für eine Entkopplungsnäherung der SDE's, d.h. als Input für die volle Vertexfunktion in den SDE's (1.26) für den Fermion- bzw. Bosonpropagator.

3. Da die WTI (B.16) bzgl. der Transformation

$$\begin{aligned}
 p &\leftrightarrow q = p + k \\
 k &= q - p \leftrightarrow -k \tag{B.56}
 \end{aligned}$$

antisymmetrisch ist, ist $\tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot)$ unter dieser Transformation symmetrisch

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{MR}^\mu(q; -k; -p) &= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(q - \lambda k) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(p + \underbrace{(1 - \lambda)}_{=\lambda'} k) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda' \tilde{S}^{-1}(p + \lambda' k) \\ &= \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; -q).\end{aligned}\quad (\text{B.57})$$

Wir weisen noch auf ein Nichtvertauschbarkeitsproblem im Zusammenhang mit der minimal regulären Auswertung der WTI hin. Für die Betrachtung der Eichkovarianzeigenschaften der Vertexfunktion empfiehlt sich nach Anhang C die Einführung der nur bzgl. des Bosonbeins amputierten, zusammenhängenden Dreipunktfunktion

$$\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}(p)\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)\tilde{S}(p + k), \quad (\text{B.58})$$

die nach Gl.(B.16) die WTI

$$k_\mu \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}(p) - \tilde{S}(p + k) \quad (\text{B.59})$$

erfüllt. Die minimal reguläre Auswertung dieser WTI führt auf die Darstellung

$$\tilde{\Lambda}_{MR;2,1}^\mu(p; k; \cdot) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}(p + \lambda k). \quad (\text{B.60})$$

Hieraus ergibt sich für \tilde{V}^μ

$$\begin{aligned}\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot) &= -\tilde{S}^{-1}(p) \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}(p + \lambda k) \right\} \tilde{S}^{-1}(p + k) \\ &\neq \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k) .\end{aligned}\quad (\text{B.61})$$

Da die minimal reguläre Auswertung der WTI auf einer Taylorentwicklung beruht und $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot)$ ein Produkt von zwei k -abhängigen Funktionen enthält, stimmen die beiden regulären Darstellungen für \tilde{V}_R^μ in Gl.(B.61) nur für $k = 0$ überein. Die erste dieser Darstellungen führt für $g \rightarrow 0$ und $k \neq 0$ nicht zum richtigen Grenzwert γ^μ für \tilde{V}_R^μ und ergibt darüberhinaus in die SDE für $\tilde{D}^{\mu\nu}$ eingesetzt einen nach partieller Integration verschwindenden Vakuumpolarisationstensor, vgl. Gl.(C.39), wohingegen \tilde{V}_{MR}^μ wegen des richtigen Limes für $g \rightarrow 0$ auf einen nichttrivialen Vakuumpolarisationsstensor mit korrektem Ein-Loop-Beitrag führt. Wir kommen deshalb zu dem Schluß, daß die reguläre Auswertung \tilde{V}_{MR}^μ mehr von der vollen Vertexfunktion \tilde{V}_{MR}^μ erfaßt als diejenige für $\tilde{\Lambda}_{MR;2,1}^\mu(p; k; \cdot)$. Allgemein gesprochen sollte die minimal reguläre Auswertung einer WTI bei Vertauschbarkeitsproblemen für die ausgedünntere Greensche Funktion vorgenommen werden.

Der einzige uns bekannte Vorzug, den $\tilde{\Lambda}_{MR;2,1}^\mu$ gegenüber \tilde{V}_{MR}^μ besitzt, ist die Respektierung der Landau-Khalatnikov-Transformation (C.10) für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$. Wir werden diesen Umstand in Anhang C zur Etablierung einer longitudinal-regulären Eichnäherung für die SDE's heranziehen.

Aufgrund der bisherigen Untersuchungen ergibt sich für reguläre Vertexfunktionen \tilde{V}_R^μ die Darstellung

$$\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{V}_{MR}^\mu(p; k; \cdot) + \Delta\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot), \quad (\text{B.62})$$

mit der folgenden Charakterisierung für die Funktion $\Delta\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$:

- $\Delta\tilde{V}_R^\mu$ stellt einen (regulären) Beitrag zum Transversalanteil von \tilde{V}_R^μ dar.
- $\Delta\tilde{V}_R^\mu$ verschwindet für $k \rightarrow 0$ und enthält darüberhinaus in einer Taylorreihe bzgl. des Bosonimpulses k entwickelt nur bzgl. der Bosonindizes antisymmetrische Taylorkoeffizienten (in dem oben definierten Sinne).
- $\Delta\tilde{V}_R^\mu$ verschwindet im Limes $g \rightarrow 0$.
- $\Delta\tilde{V}_R^\mu$ enthält vollständig den bzgl. $q \leftrightarrow p$ antisymmetrischen Anteil von \tilde{V}_R^μ , insbesondere die für das anomale magnetische Moment des Elektrons entscheidende antisymmetrische Tensorstruktur

$$\frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu](q - p)^\nu f_{\text{sym}}(q, p) . \quad (\text{B.63})$$

- $\Delta\tilde{V}_R^\mu$ wird zur Wahrung der Eichkovarianzeigenschaften von $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ in Form der Landau-Khalatnikov-Transformationen (C.10) benötigt.

Aus der Sicht der WTI stellt der Anteil $\Delta\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$ den dynamischen Kern von $\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$ dar. Nur durch Einfordern der Wahrung weiterer Strukturmerkmale wie der störungstheoretischen multiplikativen Renormierbarkeit oder den Eichkovarianzeigenschaften lässt sich von $\tilde{V}_R^\mu(p; k; \cdot)$ vorab ein weiterer Anteil abspalten. Anhand der allgemeinen Tensorzerlegung der Vertexfunktion \tilde{V}^μ ergibt sich ein etwas quantitativerer Eindruck davon, welcher Anteil von \tilde{V}^μ durch \tilde{V}_{MR}^μ nicht erfasst wird. Wir teilen $\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)$ dazu in einen bzgl. der Transformation $q \leftrightarrow p$ symmetrischen- (S) bzw. antisymmetrischen (A) Anteil auf⁶

$$\tilde{V}^\mu(p; k; -q) = \tilde{V}_A^\mu(p; k; -q) + \tilde{V}_S^\mu(p; k; -q) . \quad (\text{B.64})$$

Die Tensorzerlegung für \tilde{V}_A^μ bzw. \tilde{V}_S^μ lautet

$$\begin{aligned} \tilde{V}_S^\mu(p; k; -q) &= f_1^S(p, q)\gamma^\mu \\ &+ \left\{ f_2^S(p, q) + f_3^S(p, q)[\not{p} + \not{q}] + f_4^A(p, q)(\not{q} - \not{p}) \right\}(q + p)^\mu \\ &+ \left\{ f_5^A(p, q) + f_6^A(p, q)[\not{p} + \not{q}] + f_7^S(p, q)(\not{q} - \not{p}) \right\}(q - p)^\mu \\ \tilde{V}_A^\mu(p; k; -q) &= f_8^S(p, q)[\not{p}, \not{q}](q + p)^\mu \\ &+ f_9^A(p, q)[\not{p}, \not{q}](q - p)^\mu + f_{10}^A(p, q)[\not{p} + \not{q}, \gamma^\mu] \\ &+ f_{11}^S(p, q)[(\not{q} - \not{p}), \gamma^\mu] + f_{12}^S(p, q)(\not{q}\gamma^\mu\not{p} - \not{p}\gamma^\mu\not{q}) . \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

⁶Uns scheint zumindest für reguläre Vertexfunktionen diese Aufteilung grundsätzlich geschickter zu sein, als nach transversalen und longitudinalen Anteilen zu klassifizieren.

\tilde{V}_{MR}^μ legt von den sieben invarianten Funktionen des symmetrischen Anteils Teile ihrer Taylorkoeffizienten bzgl. einer Entwicklung nach dem Bosonimpuls k und von den fünf invarianten Funktionen des antisymmetrischen Anteils überhaupt nichts fest.⁷ Der antisymmetrische Anteil \tilde{V}_A^μ von \tilde{V}^μ enthält effektiv nur vier invarianten Funktionen, da er nach der \tilde{V}^μ -WTI (B.16) der Einschränkung

$$\begin{aligned} (q-p)_\mu \tilde{V}_A^\mu(p; k; \cdot) &= \left\{ f_8^S(p, q)(q^2 - p^2) + f_9^A(p, q)(q-p)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2f_{10}^A(p, q) \right\} [\not{p}, \not{q}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

genügen muß.

Minimal reguläre Auswertung der WTI für höhere Vertices

Die Technik der minimal regulären Auswertung der WTI lässt sich auf Vertices mit mehr als einem äußeren Bosonbein übertragen. Als Beispiel betrachten wir die boosesymmetrische eigentliche Vierpunktfunction $\tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}$, die nach Tabelle (B.1) den beiden WTI

$$\begin{aligned} k_\mu \tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= g \left[\tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p; q; \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\nu(p+k; q; \cdot) \right] \\ q_\nu \tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= g \left[\tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) - \tilde{\Gamma}_{2,1}^\mu(p+q; k; \cdot) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

genügt.⁸ Durch Ableiten nach den Bosonimpulsen erhalten wir für reguläre Vierpunktfunctionen $\tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}$ hieraus die WI

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}(p; k, 0; \cdot) &= -g \frac{\partial \tilde{\Gamma}^\mu(p; k; \cdot)}{\partial p_\nu} \\ \tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}(p; 0, q; \cdot) &= -g \frac{\partial \tilde{\Gamma}^\nu(p; q; \cdot)}{\partial p_\mu} \\ \tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}(p; 0, 0; \cdot) &= -g^2 \frac{\partial \tilde{\Gamma}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} , \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

die die verschiedenen IR-Limite von $\tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}$ eindeutig festlegen. Für die differentielle Charakterisierung von $\tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}$ könnten wir wiederum von der Taylorentwicklung um $k, q \approx 0$ ausgehen

$$\tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k_\varrho \frac{\partial}{\partial k'_\varrho} + q_\sigma \frac{\partial}{\partial q'_\sigma})^n \tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}(p; k', q'; \cdot) \Big|_{k'=q'=0} \quad (\text{B.69})$$

und durch Mehrfachableiten der WTI (B.67) Einschränkungen für die Taylorkoeffizienten von $\tilde{\Gamma}_R^{\mu\nu}$ herleiten. Dieses Vorgehen ist jedoch aufgrund der zwei Veränderlichen k, q und der damit verbundenen gemischten Ableitungsterme beschwerlich. Sind wir nur an einer minimal regulären Auswertung

⁷Es gilt die in einer Entwicklung nach k symmetrischen Anteile der Taylorkoeffizienten von \tilde{V}^μ nicht mit den unter $q \leftrightarrow p$ symmetrischen Anteilen von \tilde{V}^μ zu verwechseln.

⁸Wir unterdrücken im folgenden die Indizes zur Bezeichnung der äußeren Beine.

der $\tilde{\Gamma}^{\mu\nu}$ -WTI interessiert, dann ist es ausreichend, einen Ansatz zu formulieren. Wir bringen dazu die WTI (B.67) auf die Form

$$\begin{aligned} k_\mu \tilde{\Gamma}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g k_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{\Gamma}^\nu(p + \lambda k; q; \cdot) \\ q_\nu \tilde{\Gamma}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g q_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int_0^1 d\lambda \tilde{\Gamma}^\nu(p + \lambda q; k; \cdot), \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

die den folgenden Ansatz für die minimal reguläre Vierpunktfunction $\tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}$ nahelegt

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g \int_0^1 d\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{\Gamma}^\nu(p + \lambda k; q; \cdot) + \frac{\partial}{\partial p_\nu} \tilde{\Gamma}^\mu(p + \lambda q; k; \cdot) \right\} \\ &\quad + \Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot). \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Die Funktion $\Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}$ muß so bestimmt werden, daß die beiden WTI (B.67) (minimal regulär) erfüllt sind, d.h.

$$\begin{aligned} k_\mu \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g \left[\tilde{\Gamma}^\nu(p + k; q; \cdot) - \tilde{\Gamma}^\nu(p; q; \cdot) \right] \\ &\quad - g \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int_0^1 d\lambda \underbrace{k_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(p + \lambda q; k; \cdot)}_{= g [\tilde{\Gamma}(p + \lambda q) - \tilde{\Gamma}(p + \lambda q + k)]} + k_\mu \Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) \\ &= g^2 \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int_0^1 d\lambda \left\{ \tilde{\Gamma}(p + \lambda q + k) - \tilde{\Gamma}(p + \lambda q) \right\} + k_\mu \Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) \\ &\quad - g \left[\tilde{\Gamma}^\nu(p + k; q; \cdot) - \tilde{\Gamma}^\nu(p; q; \cdot) \right] \\ &\stackrel{!}{=} -g \left[\tilde{\Gamma}^\nu(p + k; q; \cdot) - \tilde{\Gamma}^\nu(p; q; \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Eine entsprechende Rechnung für die zweite WTI in Gl.(B.67) führt insgesamt auf die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} k_\mu \Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g^2 \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int_0^1 d\lambda \left\{ \tilde{\Gamma}(p + \lambda q + k) - \tilde{\Gamma}(p + \lambda q) \right\} \\ &= -g^2 k_\mu \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' \tilde{\Gamma}(p + \lambda k + \lambda' q) \\ q_\nu \Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g^2 \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \left\{ \tilde{\Gamma}(p + \lambda k + q) - \tilde{\Gamma}(p + \lambda q) \right\} \\ &= -g^2 q_\nu \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' \tilde{\Gamma}(p + \lambda k + \lambda' q) \\ , \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

die durch die Wahl

$$\Delta \tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) = -g^2 \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' \tilde{\Gamma}(p + \lambda k + \lambda' q) \quad (\text{B.74})$$

gelöst werden, so daß sich für $\tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}$ das folgende Endresultat ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{MR}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= -g \int_0^1 d\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{\Gamma}^\nu(p + \lambda k; q; \cdot) + \frac{\partial}{\partial p_\nu} \tilde{\Gamma}^\mu(p + \lambda q; k; \cdot) \right\} \\ &\quad - g^2 \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' \tilde{\Gamma}(p + \lambda k + \lambda' q). \end{aligned}\quad (\text{B.75})$$

Diese Darstellung respektiert die IR-Limes (B.68), weist darüberhinaus den richtigen Limes für $g \rightarrow 0$ auf und könnte sich deshalb auf die 1-s-PI T-Matrix ${}_s\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} {}_s\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) + \tilde{V}^\nu(p; q; \cdot) \tilde{S}(p + q) \tilde{V}^\mu(p + q; k; \cdot) \\ \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \frac{i}{g^2} \tilde{\Gamma}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) \\ {}_s\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \frac{i}{g^2} {}_s\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) \end{aligned}\quad (\text{B.76})$$

umgeschrieben als Grundlage für eine nichtperturbative Entkopplungsnahe-
rung der SDE (1.26) für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ eignen

$$\begin{aligned} {}_s\tilde{K}_{MR;2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{V}^\nu(p; q; \cdot) \tilde{S}(p + q) \tilde{V}^\mu(p + q; k; \cdot) \\ &\quad - \int_0^1 d\lambda \left\{ \frac{\partial \tilde{V}^\nu(p + \lambda k; q; \cdot)}{\partial p_\mu} + \frac{\partial \tilde{V}^\mu(p + \lambda q; k; \cdot)}{\partial p_\nu} \right\} \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' \tilde{S}^{-1}(p + \lambda k + \lambda' q). \end{aligned}\quad (\text{B.77})$$

Anhang C

SDE's und die Eichkovarianzeigenschaften der QED

Aus der Funktionalintegraldarstellung für das EZF Z leiten wir die Landau-Khalatnikov-Transformationen (LKT), die die Eichparameterabhängigkeit der Greenschen Funktionen beschreiben, her. Anhand ihres Transformationsverhaltens unter Variation des Eichfixierungsparameters ξ identifizieren wir in der Klasse der Greenschen Funktionen die kanonischen Eichkovarianten und zeigen für deren SDE's, daß sie mit den LKT konsistent sind. Aus diesem Konsistenzcheck ergibt sich in natürlicher Weise eine nichtperturbative, eichkovariante Entkopplungsnäherung für die SDE's, die sog. Eichnäherung (gauge-approximation), die in ihrer ursprünglichen Form auf [Ds 64] zurückgeht.

C.1 Herleitung der LKT aus dem Funktionalintegral

Für die Herleitung der Eichparameterabhängigkeit der Greenschen Funktionen der QED verwenden wir die folgende Beziehung für die Ableitung des Impulsraum EZF

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; g, m, \xi] &= \frac{\tilde{I}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; g, m, \xi]}{\tilde{I}[0, 0, 0; g, m, \xi]} \\ &= \int \mathcal{D}(\tilde{A}, \tilde{\Psi}, \tilde{\bar{\Psi}}) e^{i\{\tilde{S}[\tilde{A}, \tilde{\Psi}, \tilde{\bar{\Psi}}] + \int d^D q (\tilde{A}_\mu(q) \tilde{J}^\mu(q) + \tilde{\eta}(q) \tilde{\Psi}(q) + \tilde{\bar{\Psi}}(q) \tilde{\bar{\eta}}(q))\}} \quad (C.1) \end{aligned}$$

nach einem der Parameter $x \in \{g, m, \xi\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; x]}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial \tilde{I}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; x]}{\partial x}}{\tilde{I}[0; x]} - \frac{\tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; x]}{\tilde{I}[0; x]} \left\{ \frac{\partial \tilde{I}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; x]}{\partial x} \right\} \Big|_{\tilde{J}=\tilde{\eta}=\tilde{\bar{\eta}}=0} \\ &= \left\{ i \frac{\partial \tilde{S}_{QED_D}[\frac{-i\delta}{\delta \tilde{J}_\mu}, \frac{-i\delta}{\delta \tilde{\eta}}, \frac{-i\delta}{\delta(-\tilde{\bar{\eta}})}; x]}{\partial x} - i \left[\frac{\partial \tilde{S}_{QED_D}[\frac{-i\delta}{\delta \tilde{J}_\mu}, \frac{-i\delta}{\delta \tilde{\eta}}, \frac{-i\delta}{\delta(-\tilde{\bar{\eta}})}; x]}{\partial x} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left. \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; x] \right|_{\tilde{J}=\tilde{\eta}=\tilde{\bar{\eta}}=0} \} \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; x]. \quad (\text{C.2})$$

Für $x = \xi$ folgt mit

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{S}_{QED_D} \left[\frac{-i\delta}{\delta \tilde{J}_\mu}, \frac{-i\delta}{\delta \tilde{\eta}}, \frac{-i\delta}{\delta(-\tilde{\bar{\eta}})}; x \right] = \frac{1}{2\xi^2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} l_\mu l_\nu \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta \tilde{J}_\mu(l) \delta \tilde{J}_\nu(-l)} \quad (\text{C.3})$$

die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; g, m, \xi]}{\partial \xi} &= \frac{-i}{2\xi^2} \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(l_1 + l_2) l_{1,\mu} l_{2,\nu} \\ &\times \left\{ \frac{(-i)^2 \delta^2}{\delta \tilde{J}_\mu(l_1) \delta \tilde{J}_\nu(l_2)} - \tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(l_1, l_2) \right\} \tilde{Z}[\tilde{J}, \tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}}; g, m, \xi], \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

die die ξ -Abhängigkeit des EZF beschreibt. Durch funktionale Differentiation nach den Quellen ergibt sich hieraus die folgende Differentialgleichung für die ξ -Abhängigkeit der gewöhnlichen Impulsraum-Greensfunktionen, vgl. [LA 76]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{G}_{2k,l}^{\mu_1 \dots \mu_l} \left(\underbrace{p_1, \dots, p_k}_{=p}; \underbrace{k_1, \dots, k_l}_{=k}; \underbrace{q_1, \dots, q_k}_{=q} \right) \\ &= \frac{-i}{2\xi^2} \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(l_1 + l_2) l_{1,\mu} l_{2,\nu} \left\{ \right. \\ &\quad \left. \tilde{G}_{2k,l+2}^{\mu\nu\mu_1 \dots \mu_l}(p; l_1, l_2, k; q) - \tilde{G}_{0,2}^{\mu\nu}(l_1, l_2) \tilde{G}_{2k,l}^{\mu_1 \dots \mu_l}(p; k; q) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

die entgegen dem ersten Anschein keine hierarchische Struktur besitzt, sondern nach Anwendung der WTI (B.9) für die zweifach longitudinal projizierte Greensche Funktion $\tilde{G}_{2k,l+2}$ eine geschlossene, lineare Differentialgleichung für jede einzelne Greensche Funktion darstellt.¹ Die Differentialgleichungen für die niedrigsten Greenschen Funktionen lauten explizit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{D}^{\mu\nu}(k; \xi) &= -\frac{1}{k^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{S}(p; \xi) &= g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\tilde{S}(p-l; \xi) - \tilde{S}(p; \xi)}{l^4} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} {}^c \tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi) &= -g \frac{k^\mu}{k^4} \left[\tilde{S}(p+k; \xi) - \tilde{S}(p; \xi) \right] \\ &+ g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{{}^c \tilde{G}_{2,1}^\mu(p-l; k; \cdot; \xi) - {}^c \tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi)}{l^4} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} {}^c \tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi) &= ig \left\{ \frac{k^\mu}{k^4} \left[{}^c \tilde{G}_{2,1}^\nu(p+k; q; \cdot; \xi) - {}^c \tilde{G}_{2,1}^\nu(p; q; \cdot; \xi) \right] \right. \\ &+ \left. \frac{q^\nu}{q^4} \left[{}^c \tilde{G}_{2,1}^\mu(p+q; k; \cdot; \xi) - {}^c \tilde{G}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi) \right] \right\} \\ &+ g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{{}^c \tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p-l; k, q; \cdot; \xi) - {}^c \tilde{G}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi)}{l^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

¹Die Ableitung der Greenschen Funktionen nach der Eichkopplung bzw. der Fermionmasse führt bei Anwendung dieses Formalismus auf keine geschlossenen Differentialgleichungen.

Die vom Integrationsimpuls l unabhängigen Subtraktionsterme in den Loop-Integralen können in dimensioneller Regularisierung weggelassen werden, sind jedoch für andere Regularisierungsverfahren zur Vermeidung von IR-Divergenzen wesentlich. Der Aufbau der Differentialgleichungen (C.6) zeigt, daß die (elementarsten) kanonischen Eichkovarianten der QED durch die entweder bzgl. aller äußeren Bosonbeine transversal projizierten

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot) &= t^\mu{}_\sigma(k) {}^c\tilde{G}_{2,1}^\sigma(p; k; \cdot) \\ {}^c\tilde{G}_{2,2}^{T,\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= t^\mu{}_\sigma(k) t^\nu{}_\varrho(q) {}^c\tilde{G}_{2,2}^{\sigma\varrho}(p; k, q; \cdot) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

oder durch die nur bzgl. der äußeren Bosonbeine amputierten

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= \tilde{S}(p)\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot)\tilde{S}(p+k) \\ \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{S}(p)\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot)\tilde{S}(p+k+q) \\ \tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu} &= -ig^2\tilde{T}_{2,2}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

zusammenhängenden Greenschen Funktionen gegeben sind. Denn auf diese Größen umgeschrieben nehmen die Differentialgleichungen (C.6), ausgenommen derjenigen für den Bosonpropagator

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{D}_T^{\mu\nu}(k; \xi) = 0, \quad (\text{C.9})$$

alle dieselbe Form an

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi) &= g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l^4} \left\{ {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l; k; \cdot; \xi) \right. \\ &\quad \left. - {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial\xi} \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi) &= g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l^4} \left\{ \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p-l; k; \cdot; \xi) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot; \xi) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial\xi} {}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi) &= g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l^4} \left\{ {}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\mu\nu}(p-l; k, q; \cdot; \xi) \right. \\ &\quad \left. - {}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial\xi} \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi) &= g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l^4} \left\{ \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}(p-l; k, q; \cdot; \xi) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Wir führen nachfolgend die Diskussion für die Wahl der transversal projizierten zusammenhängenden Greenschen Funktionen als die kanonischen Eichkovarianten.

Durch Fouriertransformation der Differentialgleichungen (C.10) gehen die Faltungsintegrale in Produkte über, und bei Vorgabe der Greenschen Funktionen in Landau-Eichung $\xi = 0$ ergeben sich die zuerst von [LK 56]

hergeleiteten, multiplikativen Transformationsgesetze

$$\begin{aligned}
 S(x; \xi) &= \Delta(x; \xi)S(x; \xi = 0) \\
 {}^cG_{2,1}^{T,\mu}(x; z; y; \xi) &= \Delta(x - y; \xi) {}^cG_{2,1}^{T,\mu}(x; z; y; \xi = 0) \\
 {}^cG_{2,2}^{TT,\mu\nu}(x; z_1, z_2; y; \xi) &= \Delta(x - y; \xi) {}^cG_{2,2}^{TT,\mu\nu}(x; z_1, z_2; y; \xi = 0) \\
 \Delta_\varepsilon(x; \xi) &= e^{g^2\xi[\chi_\varepsilon(x) - \chi_\varepsilon(0)]} \\
 \chi_\varepsilon(x; \xi) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D i} \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^4} = \frac{\Gamma(-\varepsilon)}{16\pi^{2-\varepsilon}} (-x^2)^\varepsilon, \quad (\text{C.11})
 \end{aligned}$$

die sog. Landau-Khalatnikov-Transformationen. In den Impulsraum zurücktransformiert gehen diese in die folgenden Faltungsvorschriften über

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{\mu\nu}(k; \xi) &= \tilde{D}^{T,\mu\nu}(k; \xi = 0) - \frac{\xi}{k^2} l^{\mu\nu}(k) \\
 \tilde{S}(p; \xi) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{S}(p - l; \xi = 0) \tilde{\Delta}_\varepsilon(l; \xi) \\
 {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p - l; k; \cdot; \xi = 0) \tilde{\Delta}_\varepsilon(l; \xi) \\
 {}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\mu\nu}(p; k, q; \cdot; \xi) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} {}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\mu\nu}(p - l; k, q; \cdot; \xi = 0) \tilde{\Delta}_\varepsilon(l; \xi). \quad (\text{C.12})
 \end{aligned}$$

Den Integralkern $\tilde{\Delta}_\varepsilon(p; \xi)$ können wir für beliebige raumzeitliche Dimensionen D nur in Form einer unendlichen Reihe angeben

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Delta}_\varepsilon(p; \xi) &= \int d^D x e^{ip\cdot x} \Delta_\varepsilon(x; \xi) \\
 &= (2\pi)^D \delta^D(p) + \int d^D x e^{ip\cdot x} \left\{ \Delta_\varepsilon(x; \xi) - \underbrace{\Delta_\varepsilon(x; \xi = 0)}_{=1} \right\} \\
 &= (2\pi)^D \delta^D(p) \\
 &+ \frac{\Gamma(-\varepsilon) g^2 \xi}{i(-p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma[2 + (n-1)\varepsilon]}{\Gamma(-n\varepsilon) n!} \left\{ \frac{\Gamma(-\varepsilon) g^2 \xi (-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right\}^{n-1}. \quad (\text{C.13})
 \end{aligned}$$

Zu den LKT geben wir die folgenden Erläuterungen:

1. Aus der LKT (C.12) für den Bosonpropagator folgt das wohlbekannte Resultat, daß der Transversalanteil von $\tilde{D}^{\mu\nu}$ eichunabhängig ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{T,\mu\nu}(k; \xi) &= \tilde{D}^{T,\mu\nu}(k; \xi = 0) \\
 &= -\frac{1}{k^2 [1 + g^2 \tilde{\Pi}(k^2)]} t^{\mu\nu}(k). \quad (\text{C.14})
 \end{aligned}$$

Dies hat zur Folge, daß

- (a) die durch den Transversalanteil des Bosonpropagators definierte Renormierungskonstante $Z_g = Z_3^{-\frac{1}{2}}$ und die zugehörige β -Funktion der QED eichunabhängig sind.

- (b) das Residuum eines möglichen Pols in der Polarisationsfunktion $\tilde{\Pi}(p^2)$ (vgl. QED₂) und die zugehörige Photonmasse eichunabhängig sind.
2. Im Gegensatz zum Bosonpropagator besitzt der Fermionpropagator eine nichttriviale ξ -Abhängigkeit. Allerdings ergibt sich aus den LKT (C.11/C.12), daß

- (a) das nackte chirale Fermionkondensat

$$\langle \psi \bar{\psi} \rangle := \langle 0 | \psi_\alpha(0) \bar{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle_c = i S(0; \xi) \quad (\text{C.15})$$

für $D < 4$ eichunabhängig ist²

$$\begin{aligned} S(x = 0; \xi) &= \underbrace{\Delta_\epsilon(x = 0; \xi)}_{=1} S(x = 0; \xi = 0) \\ &= S(x = 0; \xi = 0) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

- (b) die physikalische Fermionmasse, implizit definiert im On-Shell-Schema durch

$$0 = \tilde{S}_r^{-1}(p) \Big|_{p=m_r}, \quad (\text{C.17})$$

eichunabhängig ist³, vgl. z.B. [AF 79].

3. Die LKT sind aufgrund ihrer gleichen Form für die Vertexfunktion

$$\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = \tilde{S}(p) \tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) \tilde{S}(p + k) \quad (\text{C.18})$$

und den Fermionpropagator $\tilde{S}(p)$ mit der WI

$$\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; 0; \cdot) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{S}(p) \quad (\text{C.19})$$

für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ und damit auch mit der WI (B.26) für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ verträglich. Sie erlauben jedoch keine Aussage darüber zu treffen, ob die Vertexfunktion für $k \rightarrow 0$ regulär ist oder nicht.

4. Aufgrund der Kopplungsabhängigkeit des Integralkerns $\tilde{\Delta}_\epsilon(p; \xi)$ sind die LKT nicht ordnungserhaltend. Dieser Umstand kann dazu benutzt werden, mit ihnen nichtperturbative Teilsummationen störungstheoretischer Terme durchzuführen. Die Kombination $g^2 \xi$ in der Reihendarstellung (C.13) des Integralkerns zeigt, daß der Eichfixierungsparameter ξ in der Störungsrechnung nie in einer höheren Potenz als der Loop-Ordnung vorkommt, ein Umstand, der durch die perturbative Iteration der SDE's sofort verständlich wird. Zu einer nichtperturbativen Aufsummation der führenden ξ -Potenzen pro Kopplungsordnung kommen wir bereits durch Vorgabe der Greenschen Funktionen nullter Ordnung als Startwert ($\xi = 0$) in den LKT. Dieses Vorgehen führt für

²Dieselbe Aussage gilt für analog definierte Kondensate der Vertexfunktion.

³Der Integralkern $\Delta_\epsilon(x = 0; \xi)$ enthält die bei Wahrung der WTI renormierungsinvariante Kombination $g^2 \xi$.

den Fermionpropagator im Fall verschwindender Fermionmasse $m = 0$ auf das Resultat

$$\begin{aligned}\tilde{S}(p; \xi) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{\not{p} - \not{l}} \tilde{\Delta}_\varepsilon(l; \xi) \\ &= \frac{(-\not{p})}{(-p^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1+n\varepsilon)}{\Gamma(2-(n+1)\varepsilon)n!} \left\{ \frac{\Gamma(-\varepsilon)g^2\xi(-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \right\}^n \\ &= \frac{(-\not{p})}{(-p^2)} \left\{ 1 + \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)} \frac{\Gamma(-\varepsilon)g^2\xi(-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} + \mathcal{O}(g^2\xi)^2 \right\}. \quad (\text{C.20})\end{aligned}$$

Nach der obigen Beobachtung enthält es den exakten ξ -abhängigen Anteil von \tilde{S} auf Ein-Loop-Niveau. Da sich der masselose Fermionpropagator für $\xi = 0$ auf Ein-Loop-Niveau nicht anzieht, handelt es sich sogar um das exakte Ein-Loop-Resultat.

C.2 Konsistenz der SDE's mit den LKT

Für den Konsistenzcheck der SDE's mit den LKT empfiehlt sich nach dem vorausgegangenen Abschnitt ihre Umschreibung auf die kanonischen Eichkovarianten, für die wir zunächst die transversalen, zusammenhängenden Greenschen Funktionen wählen. Bei der Untersuchung der WTI haben wir durch die Elimination der longitudinalen Anteile bereits die dazu nötigen Vorbereitungen getroffen. Es muß lediglich noch die Umschreibung der SDE's (B.17/B.21/B.22) von den transversalen eigentlichen Vertices auf die transversalen zusammenhängenden Greenschen Funktionen vorgenommen werden, womit im Bezug auf die Reduzibilitätsanalyse der Greenschen Funktionen ein für die Untersuchung der Eichkovarianz typischer Rückschritt einhergeht. Die entsprechenden SDE's für die Propagatoren und die zusammenhängende Dreipunktfunktion lauten

$$\begin{aligned}-p^2 \tilde{D}^{T,\mu\nu}(k) &= t^{\mu\nu}(k) \\ &+ g^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\mu \underbrace{\tilde{S}(l) \tilde{D}^{T,\nu\sigma}(k) \tilde{V}_\sigma^T(l; k; \cdot) \tilde{S}(l+k)}_{=\frac{-1}{g} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\nu}(l; k; \cdot)} \\ (\not{p} - m\mathbf{1}) \tilde{S}(p) &= \mathbf{1} \\ &- g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \underbrace{\tilde{S}(l) \tilde{D}_{\mu\nu}^T(p-l) \tilde{V}^{T,\nu}(l; p-l; \cdot) \tilde{S}(p)}_{=\frac{-1}{g} {}^c\tilde{G}_{2,1;\mu}^T(p-l; l; \cdot)} \\ &+ \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l^4} \tilde{S}(p-l) \\ (\not{p} - m\mathbf{1}) \underbrace{\tilde{S}(p) \tilde{D}^{T,\mu\nu}(k) \tilde{V}_\nu^T(p; k; \cdot) \tilde{S}(p+k)}_{=\frac{-1}{g} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot)} &= \gamma_\varrho \tilde{D}^{T,\varrho\mu}(k) \tilde{S}(p+k) \\ &- g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu \underbrace{\tilde{S}(p-l) \tilde{D}^{T,\nu\sigma}(l) \tilde{K}_{2,2}^{TT,\sigma\varrho}(p-l; l; k; \cdot) \tilde{S}(p+k) \tilde{D}_\varrho^{T\mu}(k)}_{=\frac{i}{g^2} {}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\nu\mu}(p-l; l; k; \cdot)}\end{aligned}$$

$$+ \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\not{l}}{l^4} \underbrace{\tilde{S}(p-l) \tilde{D}^{T,\mu\nu}(p-l) \tilde{V}_\nu^T(p-l; k; \cdot) \tilde{S}(p+k-l)}_{= \frac{-1}{g} {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l; k; \cdot)} . \quad (\text{C.21})$$

Auffällig ist der mit Ausnahme der SDE für den Bosonpropagator strukturell gleiche Aufbau dieser Gleichungen, der es erlaubt, den Nachweis der Konsistenz der SDE's mit den LKT lediglich für die niedrigsten Greenschen Funktionen zu zeigen und dann auf Analogieschlüsse zu verweisen. Die LKT für den Bosonpropagator lässt sich durch Ableitung der $\tilde{D}^{T,\mu}$ -SDE (C.21) nach ξ unter Benutzung der LKT für ${}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$ nachweisen

$$\begin{aligned} -p^2 \frac{\partial \tilde{D}^{T,\mu\nu}(k; \xi)}{\partial \xi} &= -g \operatorname{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \frac{\partial {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\nu}(l; k; \cdot; \xi)}{\partial \xi} \\ &\stackrel{LKT}{=} -g^3 \operatorname{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \frac{{}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\nu}(l-l'; k; \cdot; \xi)}{l'^4} \\ &= -g^3 \operatorname{tr} \int \frac{d^D l''}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\nu}(l''; k; \cdot; \xi) \underbrace{\int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l'^4}}_{=0} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

In der vorletzten Gleichung haben wir ausgenutzt, daß skalenfreie Integrale in dimensioneller Regularisierung verschwinden. Der Nachweis der LKT für den Fermionpropagator ist wegen der expliziten ξ -Abhängigkeit in der SDE (C.21) für \tilde{S} etwas komplizierter

$$\begin{aligned} (\not{p} - m\mathbf{1}) \frac{\partial \tilde{S}(p; \xi)}{\partial \xi} &= g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \frac{\partial {}^c \tilde{G}_{2,1;\mu}^T(p-l; l; \cdot; \xi)}{\partial \xi} \\ &+ g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\not{l}}{l^4} \tilde{S}(p-l) + \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\not{l}}{l^4} \frac{\partial \tilde{S}(p-l; \xi)}{\partial \xi} \\ &\stackrel{LKT}{=} g^2 \int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l'^4} \\ &\times \underbrace{\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \left\{ g \gamma^\mu {}^c \tilde{G}_{2,1;\mu}^T(p-l-l'; l; \cdot; \xi) + \xi g^2 \frac{\not{l}}{l^4} \tilde{S}(p-l-l'; \xi) \right\}}_{\stackrel{SDE}{=} (\not{p}-\not{l}'-m\mathbf{1}) \tilde{S}(p-l'; \xi)-\mathbf{1}} \\ &+ g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\not{l}}{l^4} \tilde{S}(p-l) \\ &= (\not{p} - m\mathbf{1}) g^2 \int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \frac{\tilde{S}(p-l'; \xi)}{l'^4} . \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Ganz analog vollzieht sich der Nachweis der LKT für die zusammenhängende Dreipunktfunktion ${}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$. Die Ableitung der entsprechenden SDE (C.21) nach ξ führt auf

$$(\not{p} - m\mathbf{1}) \frac{\partial {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi)}{\partial \xi} = -g \gamma_\varrho \tilde{D}^{T,\varrho\mu}(k) \frac{\partial \tilde{S}(p+k; \xi)}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned}
& + g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \gamma_\nu \frac{\partial {}^c \tilde{G}_{2,2}^{TT,\nu\mu}(p-l;l,k;\cdot;\xi)}{\partial \xi} \\
& + \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l;k;\cdot;\xi) \\
& + \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \frac{\partial {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l;k;\cdot;\xi)}{\partial \xi} \\
& \stackrel{LKT}{=} g^2 \int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l'^4} \left\{ -g \gamma_\varrho \tilde{D}^{T,\varrho\mu}(k) \tilde{S}(p-l'+k;\xi) \right. \\
& + g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \gamma_\nu {}^c \tilde{G}_{2,2}^{TT,\nu\mu}(p-l-l'l;l,k;\cdot;\xi) \\
& + \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l'-l;k;\cdot;\xi) \Big\} \\
& + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} {}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l;k;\cdot;\xi) \\
& \stackrel{SDE}{=} (\not p - m \mathbf{1}) g^2 \int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \frac{{}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p-l';k;\cdot;\xi)}{l'^4}. \tag{C.24}
\end{aligned}$$

Die Konsistenzchecks zeigen, daß die SDE's entsprechend ihrer hierarchischen Struktur die Bedingung für die Gültigkeit der LKT einer bestimmten Greenschen Funktion an die nächst höhere weitergeben, so daß jenseits der Störungsrechnung eine Herleitung der LKT mittels der SDE's nicht möglich ist. Im folgenden Abschnitt verwenden wir die Konsistenzchecks zur Begründung einer eichkovarianten Entkopplungsnäherung der SDE's.

C.3 Eichkovariante Entkopplungsnäherungen der SDE's

Wir stellen nachfolgend zwei verschiedene nichtperturbative Näherungsverfahren für die SDE's vor, die die Eichkovarianzeigenschaften der QED respektieren. Beide Näherungsverfahren sind für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen formuliert. Das erste Verfahren beruht auf der Näherung der zusammenhängenden Greenschen Funktionen durch ihre Longitudinalanteile gemäß der kanonischen, auf kinematische Singularitäten führenden Auswertung der WTI (longitudinal-singuläre Eichnäherung). Das zweite Verfahren berücksichtigt zusätzlich Transversalanteile der zusammenhängenden Greenschen Funktionen in eichkovarianter Weise, die so gewählt sind, daß die kinematischen Singularitäten der kanonischen Longitudinalanteile (in minimaler Weise) beseitigt werden, d.h. auch die WI gelten (longitudinal-reguläre Eichnäherung).

Die longitudinal-singuläre Eichnäherung

Die nichttrivialen Differentialgleichungen (C.10) für die Transversalanteile der zusammenhängenden Greenschen Funktionen zeigen, daß die Eichkova-

rianzeigenschaften der vollen Greenschen Funktionen nicht vollständig durch ihre entsprechend den WTI festgelegten Longitudinalanteile erfaßt werden, es sei denn, sie werden vollständig durch ihre Longitudinalanteile ersetzt, was der Wahl der trivialen Lösung für die Differentialgleichungen (C.10) entspricht. Diese Beobachtung ist die Grundlage für die in ihrer ursprünglichen Form auf [Ds 64] zurückgehende Eichnäherung.⁴ Die Verträglichkeit der Eichkovarianz mit der Vernachlässigung der Transversalanteile der zusammenhängenden Greenschen Funktionen wird auf dem Niveau der SDE's durch den Konsistenzcheck aus dem vorausgegangenen Abschnitt ersichtlich. Bei genauer Betrachtung fällt auf, daß die von den Transversalanteilen stammenden Anteile

$$g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu {}^c \tilde{G}_{2,1;\mu}^T(p - l; l; \cdot; \xi) \quad (\text{C.25})$$

in der SDE (C.21) für $\tilde{S}(p; \xi)$ bzw.

$$g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu {}^c \tilde{G}_{2,2}^{TT,\nu\mu}(p - l; l, k; \cdot; \xi) \quad (\text{C.26})$$

in der SDE (C.21) für ${}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$ innerhalb des Konsistenzchecks eine vollkommen passive Rolle spielen, d.h. es geht nur deren eichkovariantes Transformationsverhalten ein, aber es kommt zu keinen Wechselwirkungen mit den explizit ξ -abhängigen Termen in den beiden zugehörigen SDE's. Ohne die Eichkovarianz zu zerstören, können diese sogar vollständig vernachlässigt werden, d.h. es kann die eichkovariante Näherung

$$g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu {}^c \tilde{G}_{2,1;\mu}^T(p - l; l; \cdot; \xi) = 0 \quad (\text{C.27})$$

in der SDE für \tilde{S} bzw.

$$g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu {}^c \tilde{G}_{2,2}^{TT,\nu\mu}(p - l; l, k; \cdot; \xi) = 0 \quad (\text{C.28})$$

in der SDE (C.21) für ${}^c \tilde{G}_{2,1;\mu}^T$, die die beiden niedrigsten Näherungsstufen der Eichnäherung definieren, vorgenommen werden. In der ersten Stufe wird in den SDE's (C.21) für die beiden Propagatoren nur der Longitudinalanteil von ${}^c \tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$ eichkovariant berücksichtigt, was auf die beiden linearen, entkoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{\mu\nu}(k; \xi) &= -\frac{1}{k^2} [t^{\mu\nu}(k) + \xi l^{\mu\nu}(k)] \\ &= \tilde{D}^{(0),\mu\nu}(k) \\ (\not{p} - m\mathbf{1})\tilde{S}(p; \xi) &= 1 + \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p - l; \xi) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

⁴Die in [Ds 64] spezifizierten Näherungen für die SDE's werden mit Spektralansätzen für die Greenschen Funktionen gelöst. Nach heutiger Kenntnis über die Singularitätsstruktur der Greenschen Funktionen kann die Existenz einer Spektraldarstellung jedoch nicht vorausgesetzt werden.

führt. Die LKT für den Bosonpropagator ist trivialerweise erfüllt, es handelt sich um eine Quenched-Approximation. Die SDE für den Fermionpropagator wird für $\xi = 0$ durch seine nullte Ordnung gelöst. Aufgrund der Eichkovarianz des Näherungsverfahrens ergibt sich für $\xi \neq 0$

$$\tilde{S}(p; \xi) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{\not{p} - \not{l} - m\mathbf{1}} \tilde{\Delta}_\varepsilon(l; \xi), \quad (\text{C.30})$$

d.h. die LKT für den Fermionpropagator mit seiner nullten Ordnung als Startwert, die wir für den Fall $m = 0$ bereits in Form einer Reihendarstellung (C.20) angegeben haben.

Die zweite Stufe der Eichnäherung ergibt sich durch die Wahl der trivialen Lösung der Differentialgleichung (C.10) für den Transversalanteil der nächst höheren Greenschen Funktion, ${}^c\tilde{G}_{2,2}^{TT,\mu\nu}$. Dies führt für die Dreipunktfunktion ${}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$ auf die SDE

$$\begin{aligned} (\not{p} - m\mathbf{1}) {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi) &= -g\gamma_\varrho \tilde{D}^{T,\varrho\mu}(k) \tilde{S}(p + k; \xi) \\ &+ \xi g \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\not{l}}{l^4} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p - l; k; \cdot; \xi), \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

die die eichkovariante Lösung

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p - l; k; \cdot; \xi = 0) \tilde{\Delta}_\varepsilon(l; \xi) \\ {}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}(p; k; \cdot; \xi = 0) &= -g\gamma_\varrho \tilde{D}^{T,\varrho\mu}(k) \tilde{S}(p + k; \xi = 0) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

besitzt. Anders als in der ersten Näherungsstufe für \tilde{S} reduziert sie sich in Landau-Eichung $\xi = 0$ nicht auf die nullte Ordnung von ${}^c\tilde{G}_{2,1}^{T,\mu}$, sondern stellt die eichkovariante Fassung einer der beiden Entkopplungsnäherungen nullter Ordnung für die transversalen zusammenhängenden Greenschen Funktionen dar, auf die wir im Zusammenhang mit der Untersuchung der W -Hierarchie in Anhang A aufmerksam gemacht haben. Auf die eigentliche Vertexfunktion umgeschrieben lautet die SDE (C.31)

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \xi) &= \tilde{S}^{-1}(p) \frac{1}{\not{p} - m\mathbf{1}} \gamma_\varrho t^{\varrho\mu}(k) \\ &+ \tilde{S}^{-1}(p) \frac{\xi g^2}{\not{p} - m\mathbf{1}} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{\not{l}}{l^4} \tilde{S}(p - l) \tilde{V}^{T,\mu}(p - l; k; \cdot) \tilde{S}(p - l + k) \\ &\times \tilde{S}^{-1}(p + k). \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Diese Näherung für die Vertexfunktion \tilde{V}^μ respektiert zwar nach Konstruktion ihre WTI (B.16), nicht aber ihre WI (B.26), denn für $\xi = 0$ folgt im Limes $k \rightarrow 0$

$$\tilde{V}^{T,\mu}(p; k \rightarrow 0; \xi = 0) \rightarrow \underbrace{\left\{ \tilde{S}^{-1}(p; \xi = 0) \frac{1}{\not{p} - m\mathbf{1}} \gamma_\varrho + \mathcal{O}(k) \right\}}_{\neq \frac{\partial}{\partial p^\varrho} \tilde{S}^{-1}(p; \xi = 0)} t^{\varrho\mu}(k). \quad (\text{C.34})$$

Darüberhinaus erkennen wir, daß die niedrigste Entkopplungsnäherung für die (transversale) Vertexfunktion, die Setzung

$$\tilde{V}^{T,\mu}(p; k; \xi) = \gamma_\varrho t^{\varrho\mu}(k), \quad (\text{C.35})$$

offensichtlich keine eichkovariante Näherung darstellt. In Landau-Eichung $\xi = 0$ führt die Vertexnäherung (C.33) auf das folgende geschlossene, nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Propagatoren $\tilde{S}(p)$ und $\tilde{D}^{\mu\nu}(k)$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1,T}(k) &= -k^2 t_{\mu\nu}(k) - g^2 \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\mu \frac{1}{l - m\mathbf{1}} \gamma^\varrho t_{\varrho\nu}(k) \tilde{S}(k + l) \\ \tilde{S}^{-1}(p) &= \not{p} - m\mathbf{1} + g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \frac{1}{l - m\mathbf{1}} \gamma^\varrho \tilde{D}_{\varrho\mu}^T(p - l), \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

für das uns keine analytische Lösung bekannt ist. Falls die Propagatoren für $\xi \neq 0$ benötigt werden, können diese aufgrund der Respektierung der Eichkovarianz durch das Näherungsverfahren durch Anwendung der LKT auf die Lösungen für $\xi = 0$ ermittelt werden. Die Vertexfunktion $\tilde{V}^{T,\mu}$ ergibt sich gemäß Gl.(C.33) aus den Lösungen für die beiden Propagatoren.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens auf höhere Greensche Funktionen führt auf eichkovariante Versionen der nichtlinearen Entkopplungsnäherungen der SD-W-Hierarchie.

Eine longitudinal-reguläre Eichnäherung

In der longitudinal-singulären Eichnäherung führt die vollständige Approximation der höchsten Greenschen Funktion durch ihren singulären kanonischen Longitudinalanteil zur Brechung ihrer WI. Als Folge davon sind auch die WI niedrigerer Greenscher Funktionen gebrochen, als Beispiel vgl. Gl.(C.34). Dies kann umgangen werden, indem für die in der betrachteten Näherungsstufe der Eichnäherung höchste Greensche Funktion eine reguläre und zusätzlich ihre LKT respektierende Auswertung ihrer WTI vorgegeben wird. Nach Anhang B erfordert die reguläre Auswertung der WTI einer Greenschen Funktion die Bildung einer aus ihrem singulären kanonischen Longitudinalanteil und einen ebenfalls singulären Transversalanteil bestehenden Kombination. Zur Etablierung einer regulären Eichnäherung der SDE's ist deshalb ihre Formulierung in dem zweiten Typ der kanonischen Eichkovarianten, den nur bzgl. der Bosonbeine amputierten zusammenhängenden Greenschen Funktionen, geeigneter. Für die beiden Propagatoren und die zusammenhängende Dreipunktfunktion ergibt sich mit den Bezeichnungen aus Gl.(C.8)

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{-1,\mu\nu}(k) &= -k^2 \left[t^{\mu\nu}(k) + \frac{1}{\xi} l^{\mu\nu}(k) \right] \\ &\quad - g^2 \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \underbrace{\tilde{S}(l) \tilde{V}^\nu(l; k; \cdot) \tilde{S}(l+k)}_{\tilde{\Lambda}_{2,1}^\nu(l; k; \cdot)} \\ (\not{p} - m\mathbf{1}) \tilde{S}(p) &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{D}_{\mu\nu}(p-l) \underbrace{\tilde{S}(l) \tilde{V}^\nu(l; p-l; \cdot) \tilde{S}(p)}_{\tilde{\Lambda}_{2,1}^\nu(l; p-l; \cdot)} \\
& (\not{p} - m\mathbf{1}) \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu \tilde{S}(p+k) \\
& - g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu \tilde{D}^\nu{}_\sigma(p-l) \underbrace{\tilde{S}(l) \tilde{K}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p-l, k; \cdot) \tilde{S}(p+k)}_{\tilde{\Lambda}_{2,2}^{\sigma\mu}(l; p-l, k; \cdot)} . \quad (\text{C.37})
\end{aligned}$$

Die niedrigste Stufe der longitudinal-regulären Eichnäherung erhalten wir durch die Vorgabe einer regulären und eichkovarianten Lösung der WTI für die Vertexfunktion $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$. Wir wählen dazu die minimal reguläre Darstellung (B.60) für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$,

$$\tilde{\Lambda}_{MR;2,1}^\mu(p; k; \cdot) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}(p + \lambda k), \quad (\text{C.38})$$

die, aufgebaut aus der Eichkovarianten \tilde{S} , mit der LKT (C.10) für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ verträglich ist, aber wie bereits betont nicht auf den richtigen Limes $g \rightarrow 0$ für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ führt. In die SDE (C.37) für den Bosonpropagator eingesetzt erhalten wir nach partieller Integration einen verschwindenden Vakuumpolarisationstensor

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) &= \text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{\Lambda}_{2,1;\nu}(l; k; \cdot) \\
&= -\text{tr} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial l_\nu} \int_0^1 d\lambda \tilde{S}(l + \lambda k) \\
&= 0,
\end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

so daß die niedrigste Stufe der longitudinal-regulären Eichnäherung ebenfalls eine (eichkovariante) Quenched-Approximation

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(k; \xi) = \tilde{D}^{(0),\mu\nu}(k; \xi) \quad (\text{C.40})$$

darstellt. Der Ansatz (C.38) erlaubt die folgende Umschreibung der SDE (C.37)

$$\begin{aligned}
(\not{p} - m\mathbf{1}) \tilde{S}(p; \xi) &= \mathbf{1} - g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(l; \xi) \tilde{\Lambda}_{2,1}^\nu(p-l; l; \cdot; \xi) \\
&= \mathbf{1} + g^2 \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int_0^1 d\lambda \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(l; \xi) \tilde{S}(p - \underbrace{(1-\lambda)l}_{=\lambda' l'}; \xi) \\
&= \mathbf{1} + g^2 \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int_0^1 d\lambda' \lambda'^{-D} \int \frac{d^D l'}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \underbrace{\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}\left(\frac{p-l'}{\lambda'}; \xi\right)}_{=\lambda'^2 \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(p-l'; \xi)} \tilde{S}(l'; \xi) \\
&= \mathbf{1} + \frac{g^2}{3-D} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma^\mu \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(p-l; \xi) \tilde{S}(l; \xi). \quad (\text{C.41})
\end{aligned}$$

Benutzen wir noch die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial p_\nu} \tilde{D}^{(0),\mu\nu}(p) = \frac{(3-D)\xi + (D-1)}{p^4} p^\mu , \quad (\text{C.42})$$

dann erhalten wir schließlich die folgende lineare Faltungsgleichung für \tilde{S}

$$\begin{aligned} (\not{p} - m\mathbf{1})\tilde{S}(p; \xi) &= 1 + \frac{D-1}{3-D} g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p-l; \xi) \\ &\quad + \xi g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p-l; \xi) . \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Ein Vergleich mit der SDE (C.29) für \tilde{S} in der niedrigsten Stufe der longitudinal-singulären Eichnäherung zeigt, daß die beiden aus den loopinternen Longitudinalanteilen stammenden, explizit ξ -abhängigen Anteile übereinstimmen, darüberhinaus jedoch in Gl.(C.43) in eichkovarianter Weise Transversalanteile der Vertexfunktion $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ berücksichtigt sind, die eine für $\xi = 0$ nichttriviale SDE zur Folge haben. Die Zusammenfassung der beiden aus dem Longitudinal- und Transversalanteil von $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ stammenden Anteile

$$(\not{p} - m\mathbf{1})\tilde{S}(p; \xi) = 1 + \left(\frac{D-1}{3-D} + \xi \right) g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{l}{l^4} \tilde{S}(p-l; \xi) \quad (\text{C.44})$$

ermöglicht es, die Lösung dieser SDE aus der Lösung (C.30) der SDE (C.29) der longitudinal-singulären Eichnäherung durch die Ersetzung

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi + \frac{D-1}{3-D} \quad (\text{C.45})$$

zu gewinnen. Im Ortsraum geschrieben ergibt sich mit der LKT (C.11) für den Fermionpropagator

$$\begin{aligned} S(x; \xi) &= \Delta(x; \xi) S(x; \xi = 0) \\ &= e^{g^2 \xi' \chi_\varepsilon(x)} S^{(0)}(x) \\ &= \underbrace{\left\{ e^{g^2 \frac{D-1}{3-D} \chi_\varepsilon(x)} S^{(0)}(x) \right\}}_{=S(x; \xi=0)} e^{g^2 \xi \chi_\varepsilon(x)} \\ S^{(0)}(x) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \frac{1}{l - m\mathbf{1}} e^{-il \cdot x} . \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Für die zweite Stufe der longitudinal-regulären Eichnäherung benötigen wir in der $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ -SDE (C.37) einen Ansatz für $\tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}$, der die beiden WTI

$$\begin{aligned} k_\mu \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{\Lambda}_{2,1}^\nu(p; q; \cdot) - \tilde{\Lambda}_{2,1}^\nu(p+k; q; \cdot) \\ q_\nu \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) - \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p+q; k; \cdot) \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

regulär und eichkovariant auswertet. Eine mögliche Wahl stellt die minimal reguläre Lösung der WTI aus Anhang A dar

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{MR;2,2}^{\mu\nu}(p; k, q; \cdot) &= - \int_0^1 d\lambda \left\{ \frac{\partial \tilde{\Lambda}_{2,1}^\nu(p+\lambda k; q; \cdot)}{\partial p_\mu} + \frac{\partial \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p+\lambda q; k; \cdot)}{\partial p_\nu} \right\} \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 d\lambda' \tilde{S}(p+\lambda k + \lambda' q) , \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

die, formuliert in den Eichkovarianten $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ und \tilde{S} , mit der LKT (C.10) für $\tilde{\Lambda}_{2,2}^{\mu\nu}$ verträglich ist. In die SDE (C.37) für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$ eingesetzt erhalten wir unter Benutzung der SDE (C.37) für den Fermionpropagator

$$\begin{aligned}
(\not{p} - m\mathbf{1})\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(p; k; \cdot) &= \gamma^\mu \tilde{S}(p + k) \\
&- g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu \tilde{D}^\nu{}_\sigma(l) \tilde{\Lambda}_{2,2}^{\sigma\mu}(p - l; l; k; \cdot) \\
&= \gamma^\mu \tilde{S}(p + k) \\
&+ g^2 \frac{\partial}{\partial p_\sigma} \int_0^1 d\lambda \lambda^{-D} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu \tilde{D}^\nu{}_\sigma\left(\frac{p - l}{\lambda}\right) \tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu(l; k; \cdot) \\
&- \frac{\partial}{\partial p_\mu} \int_0^1 d\lambda [\not{p} + \lambda \not{k} - m\mathbf{1}] \tilde{S}(p + \lambda k) \\
&+ g^2 \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\sigma} \int_0^1 d\lambda \lambda^{-D} \int_0^1 d\lambda' \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D i} \gamma_\nu \tilde{D}^\nu{}_\sigma\left(\frac{p - l + \lambda' k}{\lambda}\right) \tilde{S}(l).
\end{aligned} \tag{C.49}$$

Diese SDE, für uns keine analytische Lösung bekannt ist, beinhaltet im Gegensatz zur zweiten Stufe der longitudinal-singulären Eichnäherung selbst in Landau-Eichung $\xi = 0$ eine über die Inhomogenität $\gamma^\mu \tilde{S}(p + k)$ hinausgehende Charakterisierung von $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$.

Die longitudinal-reguläre Eichnäherung kann prinzipiell für eine beliebige Näherungsstufe formuliert werden, indem die reguläre und eichkovariante Auswertung der WTI für eine beliebig hohe, teilamputierte zusammenhängende Greensche Funktion vorgenommen wird.

Wir betonen, daß wir zur Zeit keine einfache Möglichkeit sehen, die longitudinal-singuläre bzw. longitudinal-reguläre Eichnäherung auf die SDE's (1.26) für die drei Basisvertices zu übertragen. Die für die longitudinal-singuläre Eichnäherung wesentliche Elimination der Longitudinalanteile aus den SDE's (1.26) kann zumindest nicht vollständig vollzogen werden, da aufgrund der integralen Form der WTI für den 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kerns $_{ss}\tilde{K}_{2,2}^{\mu\nu}$ in Tabelle (B.2) nicht alle in seiner unendlichen Skelettentwicklung auftretenden Longitudinalanteile auf einen Schlag erfaßt werden können. Die als Input für die longitudinal-reguläre Eichnäherung benötigte minimal reguläre Auswertung der WTI läßt sich zwar nach Anhang B auch für die eigentlichen Vertices durchführen, führt jedoch auf die teilamputierten zusammenhängenden Greenschen Funktionen umgeschrieben zu keinen eichkovarianten Ausdrücken, vgl. dazu die auf diese Weise gewonnene Darstellung (B.61) für $\tilde{\Lambda}_{2,1}^\mu$.

Anhang D

Die multiplikative Renormierung der SDE's

Der Nachweis der störungstheoretischen multiplikativen Renormierbarkeit (STMR) ist für die QED zuerst von [DY 49] und [SA 51] auf der Grundlage der SDE's (1.26) für die drei Basisvertices \tilde{S} , $\tilde{D}^{\mu\nu}$ und \tilde{V}^μ geführt worden. Für eine ausführliche Darstellung des im Detail sehr aufwendigen Beweises vgl. [BD 65]. Wir referieren nachfolgend die als Grundlage für diesen Beweis dienenden, multiplikativ renormierten SDE's für die drei Basisvertices, um direkt aus den SDE's nichtperturbative Näherungen ableiten zu können, die mit der STMR verträglich sind.

Die multiplikativen Renormierungsvorschriften der QED

Die Annahme, daß alle zur Beseitigung der Divergenzen der QED notwendigen Gegenterme ihrer Struktur nach bereits in der Lagragedichte der reinen QED enthalten sind, führt auf das Konzept der multiplikativen Renormierung, d.h. für jeden Parameter und jedes Feld wird zunächst eine eigene Renormierungskonstante eingeführt

$$\begin{aligned}
 \Psi &= Z_2^{\frac{1}{2}} \Psi_r \\
 A^\mu &= Z_3^{\frac{1}{2}} A_r^\mu \\
 g &= Z_g (g_r \mu^\varepsilon) \\
 m &= Z_m m_r \\
 \xi &= Z_\xi \xi_r \\
 g \bar{\Psi} A^\mu \Psi &= Z_1 (g_r \mu^\varepsilon) \bar{\Psi}_r A_r^\mu \Psi_r \\
 Z_1 &= Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} Z_g . \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

Von der nackten Kopplung haben wir ihre Massendimension mittels einer beliebigen Renormierungsmassenskala μ abgespalten, so daß die renormierte Kopplung für alle raumzeitlichen Dimensionen D als dimensionslose Größe definiert werden kann. Aus den WTI (B.14/B.16) für den Bosonpropagator $\tilde{D}^{\mu\nu}$ und die Vertexfunktion \tilde{V}^μ folgen für die Renormierungskonstanten die

Einschränkungen

$$\begin{aligned} Z_\xi &= Z_3 \\ Z_1 &= Z_2 \Rightarrow Z_g = Z_3^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad . \quad (\text{D.2})$$

Um auch Näherungen der SDE's noch multiplikativ renormieren zu können, die die WTI brechen, werden wir von diesen Relationen nicht von Anfang an Gebrauch machen. Mit den multiplikativen Renormierungsvorschriften für die drei Basisvertices

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= Z_2 \tilde{S}_r \\ \tilde{D}^{\mu\nu} &= Z_3 \tilde{D}_r^{\mu\nu} \\ \tilde{V}^\mu &= Z_1^{-1} \tilde{V}_r^\mu \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

und den sich zusammen mit den niedrigsten Beiträgen ihrer Skelettentwicklung (1.32) daraus ergebenden multiplikativen Renormierungsvorschriften für die beiden 2-s-PI Bethe-Salpeter-Kerne

$${}_{ss}\tilde{K}_{2,2} = Z_1^{-2} Z_2 {}_{ss}\tilde{K}_{2,2}^r \quad (\text{D.4})$$

$${}_{ss}\tilde{K}_{4,0} = Z_1^{-2} Z_3 {}_{ss}\tilde{K}_{4,0}^r \quad (\text{D.5})$$

können die SDE's (1.26) von den nackten auf renommierte Basisvertices und Kopplungsparameter umgeschrieben werden. Die renommierten SDE's besitzen selbst als Funktionale der drei renommierten Basisvertices Divergenzen, die durch geeignete Definition der in ihnen auftretenden Renormierungskonstanten beseitigt werden müssen.

STMR der Vertexfunktion \tilde{V}^μ

Die Vertexkorrekturen $\tilde{\Lambda}_{(1/2)}^\mu$ in Gl.(1.26) renomieren sich als Funktionale der vollen drei Basisvertices wie \tilde{V}^μ selbst

$$g^2 \tilde{\Lambda}_{(1/2)}^\mu [\tilde{S}, \tilde{D}, \tilde{V}] = Z_1^{-1} (g_r \mu^\varepsilon)^2 \tilde{\Lambda}_{(1/2)}^\mu [\tilde{S}_r, \tilde{D}_r, \tilde{V}_r], \quad (\text{D.6})$$

so daß in den auf renommierte Vertices und Kopplungen umgeschriebenen SDE für \tilde{V}_r^μ nur eine im Bezug auf die divergenten Loop-Integrale additive Renormierungskonstante Z_1 erscheint ¹

$$\begin{aligned} \text{Diagram 1: } &= Z_1 \gamma^\mu - (g_r \mu^\varepsilon)^2 \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 2: } &= Z_1 \gamma^\mu - (g_r \mu^\varepsilon)^2 \text{Diagram 3} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

¹Wir führen keine neuen Graphenelemente für die renommierten Basisvertices ein.

Die Vertexkorrekturen in der nichtresummierten Form der SDE's (A.44) enthalten die Vertexfunktion nullter Ordnung, so daß ihnen die für den Nachweis der STMR der QED entscheidende Renormierungseigenschaft (D.6) nicht zukommt. Die Loop-Integrale in Gl.(D.7) sind gemäß der Massendimension von \tilde{V}^μ in $D = 4$ oberflächlich logarithmisch divergent. Divergente Subintegrationen enthalten sie aufgrund der oberflächlich konvergenten Loop-Integrale in der Skelettentwicklung (1.32) der beiden Bethe-Salpeter-Kerne $_{ss}\tilde{K}_{2,2}$, $_{ss}\tilde{K}_{4,0}$ nur in Form von bereits zu vollen Basisvertices zusammengefaßten Selbstenergie- oder Vertexeinschüben, so daß die Funktionale $\tilde{\Lambda}_{(1/2)}^\mu$ frei von Überlappdivergenzen sind. Wegen dieser einfachen Divergenzstruktur kann $\tilde{\Lambda}_{(1/2)}^\mu$ durch eine overall-Subtraktion oder eine Ableitung nach einem der äußeren Impulse vollständig renormiert und die additive Renormierungskonstante Z_1 aus den renormierten SDE's (D.7) beseitigt werden. Hieraus folgt insbesondere, daß die Beseitigung der Divergenzen von \tilde{V}^μ allein durch Subtraktionsterme mit γ^μ -Tensorstruktur erreicht werden kann, d.h. diese ist die ausgezeichnete divergenzerzeugende Tensorstruktur von \tilde{V}^μ . Ab der Zwei-Loop-Ordnung treten zwar auch in anderen Tensorstrukturen von \tilde{V}^μ Divergenzen auf, diese sind jedoch nicht als eigenständig, sondern als durch die γ^μ -Tensorstruktur oder die beiden Propagatoren induziert anzusehen. Umgekehrt betrachtet entkoppelt die γ^μ -Tensorstruktur von \tilde{V}^μ nur für die Bestimmung der pro Kopplungsordnung führenden Divergenzen (Leading-Log's) von den übrigen Tensorstrukturen,² da ab der Zwei-Loop-Ordnung die pro Kopplungsordnung nichtführenden Divergenzen der γ^μ -Tensorstruktur von den restlichen Tensorstrukturen mitbestimmt werden.

STMR des Fermionpropagators \tilde{S}

Die multiplikative Renormierung des Fermionpropagators läßt sich am einfachsten auf der Basis der renormierten WI

$$k_\mu \tilde{V}_r^\mu = \tilde{S}_r^{-1}(p+k) - \tilde{S}_r^{-1}(p) \quad (\text{D.8})$$

bzw. für reguläre Vertexfunktionen der renormierten WI

$$\tilde{V}_r^\mu(p; 0; \cdot) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{S}_r^{-1}(p) \quad (\text{D.9})$$

durchführen. Danach ist $\tilde{S}_r(p)$ eine redundante Größe, d.h. $\tilde{S}_r^{-1}(p)$ kann bis auf eine additive Konstante, die der Festlegung eines Renormierungsschemas entspricht, aus der renormierten Vertexfunktion \tilde{V}_r^μ gewonnen werden. Hieraus folgt insbesondere die effektiv logarithmische Divergenz der oberflächlich linear divergenten Fermionselbstenergie $\tilde{\Sigma}$. Betrachten wir trotzdem die SDE für den renormierten Fermionpropagator

$$(\overrightarrow{\cancel{p}})^{-1} = Z_2(\not{p} - Z_m m_r \mathbf{1})$$

²Aufgrund der quadratischen Divergenz der Vakuumpolarisierung ist dieser Sachverhalt keineswegs selbstverständlich, sondern verlangt eine genaue Analyse der SDE's, in die zunächst auch andere Tensorstrukturen von \tilde{V}^μ miteinbezogen werden müssen, vgl. [LA 65].

$$+ Z_1(g_r \mu^\varepsilon)^2 \rightarrow \text{loop diagram} \quad . \quad (\text{D.10})$$

Sie enthält ein oberflächlich linear divergentes Loop-Integral und in Bezug auf dessen Divergenzen sowohl additive, als auch die multiplikativ auftretende Renormierungskonstante Z_1 . Letztere deutet auf logarithmisch divergente Subintegrationen in $\tilde{\Sigma}$, die mit Vertexeinschüben identifiziert werden können und ab der Zwei-Loop-Ordnung in $\tilde{\Sigma}$ zu Überlappdivergenzen führen, hin. Infolgedessen können die Divergenzen der Fermionselbstenergie (D.10) nicht durch overall-Subtraktionen beseitigt werden. Vielmehr muß als Voraussetzung für die erfolgreiche Durchführung eines Subtraktionsverfahrens die Kombination $Z_1 \gamma^\mu$ mit Hilfe einer der renormierten \tilde{V}^μ -SDE's (D.7) aus der Fermionselbstenergie eliminiert werden. Dies führt auf die SDE

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{p})^{-1} &= Z_2(\not{p} - Z_m m_r \mathbf{1}) \\ + (g_r \mu^\varepsilon)^2 &\rightarrow \text{loop diagram} \\ + (g_r \mu^\varepsilon)^4 &\rightarrow \text{loop diagram} \quad , \quad (\text{D.11}) \end{aligned}$$

die neben einem overall linear divergenten Ein-Loop-Integral ein weiteres, overall linear divergentes Zwei-Loop-Integral, dafür aber nur noch bzgl. deren Divergenzen additiv auftretende Renormierungskonstanten enthält. Das Zwei-Loop-Integral enthält zwar logarithmisch divergente Subintegrationen, diese werden jedoch durch entgegengesetzte Beiträge von dem um zwei Kopplungsordnungen niedrigeren Ein-Loop-Integral beseitigt, so daß $\tilde{\Sigma}$ aus Gl.(D.11) entgegen dem ersten Anschein insgesamt frei von Überlappdivergenzen ist. Durch die Anwendung von Subtraktionen oder Ableitungen nach dem äußeren Impuls kann dieser Umstand manifest gemacht werden. Beispielsweise eliminiert die erste Ableitung der Fermionselbstenergie (D.11) nach dem äußeren Impuls die Renormierungskonstante Z_m und führt auf overall logarithmisch divergente Loop-Integrale mit konvergenten Subintegrationen. Durch eine weitere Ableitung oder eine Subtraktion können die restlichen overall-Divergenzen zusammen mit der Renormierungskonstante Z_2 beseitigt werden.

STMR des Bosonpropagators $\tilde{D}^{\mu\nu}$

Die multiplikativ renormierte SDE für den Bosonpropagator lautet

$$(\text{wavy line } k)^{-1} = -k^2 t^{\mu\nu}(k) Z_3 - \frac{1}{\xi_r} k^2 l^{\mu\nu}(k)$$

$$- Z_1(g_r \mu^\varepsilon)^2 \text{ (loop diagram)} , \quad (\text{D.12})$$

sie enthält ein overall-quadratisch divergentes Loop-Integral und analog zur SDE (D.10) des Fermionpropagators die multiplikative RK Z_1 , d.h. mit Vertexeinschüben identifizierbare Überlappdivergenzen. Die Elimination der Kombination $Z_1 \gamma^\mu$ mittels einer der renormierten \tilde{V}^μ -SDE (D.7) führt auf die SDE

$$\begin{aligned} (\text{ (loop diagram)})^{-1} &= -k^2 t^{\mu\nu}(p) Z_3 - \frac{1}{\xi_r} k^2 l^{\mu\nu}(k) \\ &- (g_r \mu^\varepsilon)^2 \text{ (loop diagram)} \\ &- (g_r \mu^\varepsilon)^4 \text{ (loop diagram)} . \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

Diese Form der SDE, die die Bose-Symmetrie der Vakuumpolarisation $\tilde{\Pi}^{\mu\nu}$ manifest macht, enthält neben einem in $D = 4$ overall quadratisch divergenten Ein-Loop-Integral ein ebenfalls overall quadratisch divergentes Zwei-Loop-Integral mit Überlappdivergenzen, die aus dessen logarithmisch divergenten Subintegrationen resultieren. Die Überlappdivergenzfreiheit der gesamten, nach der WTI (B.14) transversalen, Vakuumpolarisation $\tilde{\Pi}^{\mu\nu}$

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = k^2 t^{\mu\nu}(k) \tilde{\Pi}(k^2) \quad (\text{D.14})$$

wird durch die folgende Identität für die Polarisationsfunktion $\tilde{\Pi}(k^2)$ verständlich

$$\tilde{\Pi}(k^2) = \frac{k^\mu k^\nu}{2(D-1)k^2} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k) . \quad (\text{D.15})$$

Nach Anwendung der zweifachen Ableitung auf $\tilde{\Pi}^{\mu\nu}$ aus Gl.(D.13) ergeben sich overall-logarithmisch divergente Loop-Integrale mit konvergenten Subintegrationen und eine in Bezug auf Divergenzen nur additiv auftretende Renormierungskonstante Z_3 . Diese kann zusammen mit den Divergenzen durch eine Subtraktion oder eine weitere Ableitung nach dem äußeren Impuls beseitigt werden.

Damit die vorausgegangenen Überlegungen zur STMR der drei Basisvertices zu einem echten Beweis der STMR der QED werden, müssen die drei renormierten SDE's (D.7/D.11/D.13) zusammen und im Rahmen einer vollständigen Induktion nach der Eichkopplung betrachtet werden, vgl. [BD 65]. Die Renormierbarkeit höherer Vertices ergibt sich aus der oberflächlichen Konvergenz ihrer Skelettentwicklungen nach den drei Basisvertices. Der Nachweis der STMR der QED unter Bezugnahme auf die renormierten SDE's (D.7/D.11/D.13) erscheint nach dem heutigen Wissen über

die störungstheoretische multiplikative Renormierung einer QFT als unnötig kompliziert. Dieses Vorgehen geht jedoch insofern über einen reinen Nachweis hinaus, als es zeigt, daß es prinzipiell möglich ist, durch Anwendung geeigneter Subtraktionen oder Ableitungen nach den äußeren Impulsen die renormierten SDE's in der Form Gl.(D.7/D.11/D.13) auf einen Schlag in vollständig endliche dynamische Grundgleichungen für die drei multiplikativ renormierten Basisvertices \tilde{V}_r^μ , \tilde{S}_r und $\tilde{D}_r^{\mu\nu}$ zu überführen, aus denen sich durch Iteration nach der Eichkopplung ohne Verwendung eines Regularisierungsverfahrens zumindest der endliche Gehalt der Störungsrechnung gewinnen läßt.³ Ob dieser Sachverhalt sogar dazu benutzt werden kann, die nichtperturbative Kontinuums-QED₄ auf der Basis der renormierten SDE's (D.7/D.11/D.13) zu definieren, hängt freilich davon ab, ob das ihnen zugrundeliegende Konzept der multiplikativen Renormierung auch für nicht-perturbative Definitionsversuche tragfähig ist. Da die Antwort auf diese Frage von der Lösung der regularisierten Theorie selbst abhängt, ist es besser, ohne Vorurteile hinsichtlich der Renormierung zu starten, d.h. von den zwar regularisierten aber nackten SDE's auszugehen. Trotzdem macht es zur Bewertung von nichtperturbativen Näherungsverfahren für die SDE's Sinn zu fordern, daß ihr perturbativer Gehalt multiplikativ renormierbar sein soll. Nach der vorausgegangenen Untersuchung ist dies garantiert, wenn sich die auf renormierte Größen umgeschriebenen SDE's ohne das Auftreten von Divergenzen (perturbativ) iterieren lassen.

Zur Etablierung von nichtperturbativen Näherungen der SDE's, die mit der STMR der QED verträglich sind, ist entweder die Formulierung von Ansätzen für die Vertexfunktion, beispielsweise durch Auswertung ihrer WTI (B.16), oder die Formulierung einer Vertexgleichung durch Abbrechen der Skelettentwicklung (1.32) für die beiden Bethe-Salpeter-Kerne denkbar. Zur Wahrung der multiplikativen Renormierungsvorschriften (D.3) muß die Vertexfunktion für beide Näherungsverfahren in Form eines Funktionals der drei *vollen* Basisvertices konstruiert werden.

Für die Formulierung von Vertexansätzen kann die STMR als Konstruktionsprinzip verwendet werden. Beispielsweise erfüllen die beiden Vertexansätze

$$\begin{aligned} V^\mu(p; k; \cdot) &= t^{\mu\nu}(k)\gamma_\nu + \frac{k^\mu}{k^2} \left\{ \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) \right\} \\ V^\mu(p; k; \cdot) &= \frac{k^\mu}{k^2} \left\{ \tilde{S}^{-1}(p+k) - \tilde{S}^{-1}(p) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

beide die WTI für \tilde{V}^μ (keiner die WI (B.26)), jedoch respektiert nur der zweite Ansatz die multiplikative Renormierungsvorschrift (D.3) der Vertexfunktion. Da die multiplikative Renormierung von \tilde{V}^μ im Abspalten eines globalen Faktors besteht, nimmt sie bei Vorgabe des durch die WTI (B.16) bestimmten Longitudinalanteils sofort Einfluß auf den Transversalanteil von \tilde{V}^μ . Für Vertexansätze ist die Wahrung der multiplikativen Renormierungsvorschrift der Vertexfunktion sowie ihrer WTI (B.16) nur ein notwendiges Kriterium dafür, daß die STMR der SDE's gewahrt bleibt. D.h. im Rahmen

³Dieser Sachverhalt ist für jede multiplikativ renormierbare QFT erfüllt. Für eine Darstellung der renormierten SDE's in der QCD vgl. [BL 77].

von Vertexansätzen muß diese i.allg. explizit nachgeprüft bzw. sichergestellt werden. Diesbezüglich ist die Rainbow-Approximation

$$\tilde{V}^\mu(p; k; \cdot) = \gamma^\mu \quad (\text{D.17})$$

besonders interessant, da innerhalb dieser Näherung die für die Überlappdivergenzen in den SDE's (1.26) der beiden Propagatoren \tilde{S} und $\tilde{D}^{\mu\nu}$ verantwortlichen Vertexeinschübe vollständig unterdrückt werden. Durch die folgenden Vorschriften kann für die Rainbow-Approximation eine konsistente multiplikative Renormierung vorgenommen werden:

1. Entsprechend der Näherung der Vertexfunktion ist es sinnvoll, $Z_1 = 1$ zu setzen und Z_2 unabhängig davon aus der Singularitätsstruktur des Fermionpropagators zu bestimmen, d.h. die Relation $Z_1 = Z_2$ muß aufgegeben werden. Infolgedessen ist die Kopplungsrenormierung der vollen Theorie

$$Z_g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} \stackrel{WTI}{=} Z_3^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.18})$$

für die Rainbow-Approximation gemäß der Vorschrift

$$Z_g = Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.19})$$

abzuändern.

2. Nach Gl.(B.15) führt die gebrochene WTI der Vertexfunktion auch zur Brechung der WTI (B.14) des Bosonpropagators, so daß die Relation $Z_\xi = Z_3$ aus sich heraus nicht erfüllt ist. Um einen nichttrivialen Longitudinalanteil von $\tilde{D}^{\mu\nu}$ zu umgehen, der eine vom Transversalanteil unabhängige multiplikative Renormierung mit Z_ξ erfordern würde, projizieren wir aus der Vakuumpolarisation einen "Transversalanteil" mit zugehöriger Polarisationsfunktion $\tilde{\Pi}(p^2)$ heraus und setzen den Longitudinalanteil von \tilde{D}^μ gemäß der WTI (B.14) auf seine nullte Ordnung fest. Zur Bestimmung von $\tilde{\Pi}(p^2)$ können wir nicht den Transversalprojektor $t^{\mu\nu}(k)$ verwenden, da dieser wegen der gebrochenen WTI (B.14) des Bosonpropagators auf eine echt quadratisch divergente Polarisationsfunktion, die mit Z_3 allein nicht renormiert werden könnte, führen würde. Wir verwenden dazu den Projektor [BR 89]

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{(D-1)p^2} \left\{ g^{\mu\nu} - D \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right\} \\ P_{\mu\nu}(p)g^{\mu\nu} &= 0 \\ P_{\mu\nu}(p)(-p^\mu p^\nu) &= 1, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

und definieren gemäß

$$\tilde{\Pi}(p^2) = P_{\mu\nu}(p)\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(p) \quad (\text{D.21})$$

eine logarithmisch divergente Polarisationsfunktion.⁴

⁴Die quadratische Divergenz in $\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(0)$ muß proportional zum invarianten Tensor $g^{\mu\nu}$ sein und wird folglich durch Anwendung des Projektors $P_{\mu\nu}(p)$ eliminiert.

Nach den Untersuchungen zur STMR der SDE's ist dagegen von Näherungen für die Vertexfunktion, die durch das Abbrechen der Skelettentwicklung (1.32) der beiden Bethe-Salpeter-Kerne erzeugt werden, zu vermuten, daß sie die STMR automatisch respektieren, sofern die WTI (B.14/B.16) für $\bar{D}^{\mu\nu}$ und \bar{V}^μ , die die effektiv logarithmische Divergenz der Selbstenergien sicherstellen, gewahrt bleiben.

Literaturverzeichnis

- [AB 79] D. Atkinson, D.W.E. Blatt, *Determination of the Singularities of the Electron Propagator*, *Nucl. Phys.* **B151**, 342(1979).
- [AF 79] D. Atkinson and M.P. Frey, *Should one truncate the electron self-energy?*, *Nucl. Phys.* **B156**, 301(1979).
- [As 84] M. Abramowitz and I.A. Stegun (Eds.), *Pocketbook of Mathematical Functions*, Verlag Harri Deutsch, 1984.
- [BC 80] J.S. Ball and T.W. Chiu, *Analytic properties of the vertex function in gauge theories*, *Phys. Rev.* **D22**, 2542(1980).
- [BD 65] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, 1965.
- [BE 76] C.M. Bender, G. S. Guralnik, *Numerical study of truncated Greens's function equations*, *Phys. Rev.* **D14**, 2590(1976).
- [BE 89] C.M. Bender et al., *Nonunique solution to the Schwinger-Dyson equations*, *Phys. Rev.* **D39**, 2343(1989).
- [BJW 67] M. Baker, K. Johnson, R. Willey, *Phys. Rev.* **163**, 1699(1967).
- [BK 84] J. Bartholomew and J. Kogut, *Nucl. Phys.* **B230**, 222(1984).
- [BL 77] M. Baker and C. Lee, *Overlapping-divergence-free skeleton expansion in non-Abelian gauge theories*, *Phys. Rev.* **D15**, 2201(1977).
- [Bo 78] C.M. Bender, S.A. Orzag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, 1978.
- [BR 89] N. Brown and M.R. Pennington, *Studies of confinement: How the gluon propagates*, *Phys. Rev.* **D39**, 2723(1989).
- [BR 93] D.J. Burden and C.D. Roberts, *Gauge covariance and the fermion-photon vertex in three- and four-dimensional, massless quantum electrodynamics*, *Phys. Rev.* **D47**, 5581(1993).
- [Co 85] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1985.
- [CM 73] J.C. Collins and A.J. Mcfarlane, *New methods for the renormalization group*, *Phys. Rev.* **D10**, 1201(1973).

- [CK 81] F. Cooper and R. Kenway, *Continuum strong-coupling expansion for quantum electrodynamics*, *Phys. Rev.* **D24**, 2706(1981).
- [CP 90] D.C. Curtis and M.R. Pennington, *Truncating the Schwinger-Dyson equations: How multiplicative renormalizability and the Ward identity restrict the Three-Point vertex in QED*, *Phys. Rev.* **D42**, 4165(1990).
- [CP 93] D.C. Curtis and M.R. Pennington, *Nonperturbative study of the Fermion propagator in quenched QED*, *Phys. Rev.* **D28**, 4933(1993).
- [DMR 94] Z. Dong, H.J. Munczek and C.D. Roberts, *Gauge covariant fermion propagator in quenched, chirally symmetric quantum electrodynamics*, *Phys. Lett.* **B333**, 536(1994).
- [Ds 64] R. Delbourgo and A. Salam, *Renormalizable Electrodynamics of scalar and Vector Mesons*, *Phys. Rev.* **135**, 1398(1964).
- [DY 49] F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 1736(1949).
- [FK 76] R. Fukuda and T. Kugo, *Schwinger-Dyson Equations for massless Vector Theory and the Absence of a Fermion Pole*, *Nucl. Phys.* **B117**, 250(1976).
- [GJ 87] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum physics: A Functional Integral Point of View*, Second Edition; Springer, New York, 1987.
- [GML 54] M. Gell-Mann and F. Low, *Phys. Rev.* **95**, 1300(1954).
- [Gö 91] M. Göckeler, R. Horsley, P. Rakow, G. Schierholz, R. Sommer, *Scaling Laws, Renormalization Group Flow and the Continuum Limit in Non-Compact Lattice QED*, DESY-Preprint # 91-098, 1991.
- [Hw 91] F.T. Hawes and A.G. Williams, *Proper vertex in studies of dynamical chiral symmetry breaking*, *Phys. Lett.* **B268**, 271(1991).
- [Hi 91] K. Higashijima, *Theory of Dynamical Symmetry Breaking*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **104**, 1(1991).
- [IM 91] ISML, *Math Library Manual – Version 2.0*, IMSL, Inc., Houston, Texas, 1991.
- [JR 76] J.M. Jauch, F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag, 1976.
- [KA 81] F. Kaempffer, *Toward an exact quantum electrodynamics*, *Phys. Rev.* **D25**, 439(1981).
- [Kö 90] R.W. Könning, *Eine nichtstörungstheoretische Näherungslösung der Schwinger-Dyson-Gleichung für den Quark-Gluon-Vertex der QCD*, Dissertation an der WWU Münster, 1990.

- [Ko 91] K. Kondo, *Strong coupling unquenched QED (I). Analytical Study, Nuclear Physics* **B351**, 236(1991).
- [LA 65] D.Ter Haar, *Collected Papers of L.D. Landau*, Pergamon Press, 1965.
- [LA 76] B. Lautrup, *Renormalization constants and asymptotic behaviour in QED, Nucl. Phys.* **B105**, 23(1976).
- [LA 92] M.J. Lavelle, M. Oleszczuk, *Gauge-Dependent Condensates and the Quark Propagator, Phys. Lett.* **B275**, 133(1992).
- [LÖ 92] G. Löffler, *Die Vier-Gluon-Amplitude im Rahmen eines nichtstörungstheoretischen Lösungsansatzes der Dyson-Schwinger-Gleichungen der QCD*, Dissertation an der WWU Münster, 1992.
- [LK 56] L.D. Landau and I.M. Khalatnikov, *JETP* **2**, 69(1956).
- [LP 55] L.D. Landau and I.P. Pomeranchuk, *JETP* **29**, 89(1955).
- [Mi 85] V.A. Miransky, *Dynamics of Spontaneous Chiral Symmetry Breaking and the Continuum Limit in Quantum Electrodynamics, Prog. Theor. Phys.* **52**, 1326(1985).
- [MN 74] T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **52**, 1326(1974).
- [MM 94] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994.
- [NA 78] C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press, 1978.
- [NA 91] NAG, *Fortran Library Manual – Mark 15*, Numerical Group Ltd, Oxford, 1991.
- [QR 79] C. Quigg and J.L. Rosner, *Quantum Mechanics with Applications to Quarkonium, Physics Reports* **56**, 167(1979).
- [RA 91] P.E.L. Rakow, *Renormalization group flow in QED - An investigation of the Schwinger-Dyson equations, Nuclear Physics* **B356**, 27(1991).
- [RI 88] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1988.
- [RWK 92] C.D. Roberts, A.G. Williams and G. Krein, *Int. J. Mod. Phys.* **A7**, 5607(1992).
- [SC 95] M. Scholze, *Nichtperturbative dimensionelle Regularisierung der Schwinger-Dyson-Gleichungen in der Quantenelektrodynamik*, Dissertation an der WWU Münster, 1995.
- [Sc 91] M. Scholze, *Dynamische Massenbildung im Glashow-Salam-Weinberg-Modell ohne Higgs-Feld*, Diplomarbeit an der WWU Münster, 1991.

- [SA 51] A. Salam, *Phys. Rev.* **82**, 217(1951).
- [ST 92] M. Stingl, private Mitteilungen.
- [SY 70] K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18**, 227(1970).
- [To 71] I.T. Todorov, *Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory*, Pergamon Press, 1971.
- [WA 50] J.C. Ward, *Phys. Rev.* **78**, 1824(1950).
- [Wi 73] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D7**, 2911(1973).

Schlußwort

Zum Schluß möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit begleitet und ermutigt haben.

Namentlich möchte ich zuallererst Herrn Prof. Dr. M. Stingl nennen, dem ich für die Anregung zu diesem interessanten Thema und für die vielen Hinweise und Diskussionen, durch die ich nicht nur vieles über QFT gelernt habe, danke.

Herrn Dr. M. Scholze danke ich für den regen Gedankenaustausch und für die gute Arbeitsatmosphäre, die wesentlich dazu beigetragen haben, einen Orientierungsversuch im “holperigen Gelände der nichtperturbativen QFT” vorzunehmen.

Herrn Dr. G. Löffler gilt mein besonderer Dank für seine Ausdauer beim Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ganz besonders jedoch bedanke ich mich bei meiner Familie, deren Geduld und Verständnis besonders gegen Ende der Anfertigung dieser Arbeit auf eine harte Probe gestellt wurde.

Lebenslauf

Name	Markus Becker
geboren	am 10. 12. 1965 in Oelde
Eltern	Ferdinand Becker Margareta Becker, geb. Höveler
Familienstand	verheiratet
1972-1976	Besuch der Karl-Weierstraß-Grundschule in Ostenfelde
1976-1978	Besuch der Hauptschule in Ennigerloh
1978-1985	Besuch des Augustin-Wibbelt-Gymnasiums in Warendorf
6. 5. 1985	Zeugnis der allgemeinen Hochschulreife
WS 1985/86	Aufnahme des Studiums der Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster
12. 10. 1987	Vordiplom in Physik an der WWU in Münster
Oktober 1989	Beginn der Diplomarbeit
2. 1. 1990 - 30. 9. 1991	Studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
13. 9. 1991	Diplom in Physik Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl über das Thema: Studium einer unkonventionellen Bindungsgleichung für schwere Quarkonia

1. 10. 1991 - 31. 5. 1993 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für
Theoretische Physik I der WWU Münster

Januar 1992 Beginn der Dissertation
bei Herrn Prof. Dr. M. Stingl am Institut für
Theoretische Physik I der WWU Münster

seit 1. 6. 1993 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Theoretische Physik I der WWU Münster

