

# Starkkopplungsentwicklungen in der Gittereichtheorie bei endlichen Temperaturen

Jens Langelage

23. Mai 2007

Die vorliegende Diplomarbeit unterscheidet sich von der am 15. Januar 2007 beim Prüfungsamt eingereichten Version durch die Korrektur von Druckfehlern und jeweils einem korrigierten Beitrag der Polymere 7.2 a und 7.2 b in Tabelle C.1. Durch diese Korrekturen mussten auch die Gleichungen 5.17 und 5.19 berichtigt werden.

Münster, den 23. Mai 2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Yang-Mills-Theorien</b>	<b>8</b>
2.1	Yang-Mills-Theorien bei verschwindenden Temperaturen . . . .	8
2.1.1	SU(N)-Eichtheorie in euklidischer Raumzeit . . . . .	8
2.1.2	Gittereichtheorie . . . . .	10
2.2	Yang-Mills-Theorien bei endlichen Temperaturen . . . . .	12
2.2.1	Thermodynamik im Kontinuum . . . . .	13
2.2.2	Thermodynamik auf dem Gitter . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Starkkopplungsentwicklungen bei <math>T = 0</math></b>	<b>16</b>
3.1	Clusterentwicklung der freien Energie . . . . .	16
3.1.1	Starkkopplungsentwicklung der Zustandssumme . . . . .	16
3.1.2	Clusterentwicklung der formalen freien Energie . . . . .	20
3.2	Formale freie Energie der SU(2) . . . . .	22
3.2.1	Berechnung der formalen freien Energiedichte . . . . .	22
3.2.2	Berechnung der formalen inneren Energie . . . . .	25
3.3	Glueball-Massen . . . . .	25
3.3.1	Allg. Berechnung der Glueball-Massen . . . . .	26
3.3.2	Glueball-Massen der SU(2) . . . . .	30
3.3.3	Screening-Massen . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Starkkopplungsentwicklungen bei <math>T \neq 0</math></b>	<b>32</b>
4.1	Clusterentwicklung bei $T \neq 0$ . . . . .	32
4.1.1	Gruppentheoretische Grundlagen . . . . .	33
4.1.2	Beiträge von Polymeren in der fundamentalen Darstellung . . . . .	34
4.1.3	Beiträge von Polymeren mit Plaketten in höherdimensionalen Darstellungen . . . . .	36
4.2	Screening-Massen bei $T \neq 0$ . . . . .	37

<b>5</b>	<b>Berechnungen bei endlichen Temperaturen</b>	<b>38</b>
5.1	Freie Energie der SU(3) . . . . .	38
5.1.1	Vorbemerkungen . . . . .	39
5.1.2	Aufsummation von Graphenklassen . . . . .	41
5.1.3	Weitere Korrekturen . . . . .	44
5.2	Freie Energie der SU(2) . . . . .	47
5.3	Screening-Massen . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>49</b>
6.1	Freie Energiedichte . . . . .	49
6.1.1	Auswertung . . . . .	49
6.1.2	Ausblick . . . . .	53
6.2	Screening-Massen . . . . .	54
<b>A</b>	<b>Entwicklungsparameter der irreduziblen Darstellungen</b>	<b>56</b>
A.1	SU(2) . . . . .	56
A.2	SU(3) . . . . .	57
<b>B</b>	<b>Berechnung spezieller Integrale</b>	<b>60</b>
<b>C</b>	<b>Auflistung verschiedener Klassen von Graphen</b>	<b>65</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Seitdem Maxwell die Elektrizität und den Magnetismus zu einer einheitlichen Theorie des Elektromagnetismus zusammengefasst hat, ist es das Bestreben vieler theoretischer Physiker, alle bekannten Kräfte auf einen gemeinsamen Ursprung zurückzuführen. Prominente Vertreter ähnlicher Strategien waren im vergangenen Jahrhundert Einstein mit seiner einheitlichen Feldtheorie der Gravitation und des Elektromagnetismus und Heisenberg mit der Nichtlinearen Spinor-Theorie. Obwohl beide ihre Zielsetzung nicht erreichten, wurden die Hoffnungen auf eine Vereinheitlichte Theorie durch die Vereinigung der Quantenelektrodynamik (QED), also der Quantentheorie des Elektromagnetismus, und der Schwachen Kernkraft zur Glashow-Salam-Weinberg-Theorie der Elektroschwachen Wechselwirkung weiter geschürt.

Zur Zeit sind die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) und das Standardmodell der Elementarteilchen die beiden nebeneinander bestehenden Theoriekomplexe zur Beschreibung der physikalischen Phänomene unserer Welt. Die ART trifft Aussagen über die Gravitation und das Standardmodell über die mikroskopischen Wechselwirkungen im Bereich der Elementarteilchen. Diese Theorien sind dabei äußerst erfolgreich, sowohl in der qualitativen als auch in der quantitativen Vorhersage. Während allerdings die ART als klassische Theorie in gekrümmter Raumzeit formuliert ist, ist das Standardmodell eine Quantentheorie in der flachen Minkowski-Raumzeit. Bisher ist es nicht gelungen die ART als Quantentheorie konsistent zu formulieren und es dürfte wohl noch einige Zeit vergehen, bis dieser Meilenstein bei der Vereinigung aller heutzutage bekannten Grundkräfte erreicht sind. Die supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells und als etwas spekulativerer Ansatz die Stringtheorien sind ein weiterer Schritt in diese Richtung.

In dieser Diplomarbeit soll auf dem bekannten und weithin akzeptierten Fundament des Standardmodells gearbeitet werden. Die eine Säule dieses Fundaments bilden die drei bereits erwähnten Kräfte Elektromagnetismus

und die starke und schwache Wechselwirkung. Diese sind als sogenannte Eichtheorien formuliert und werden im Standardmodell durch die Gruppe  $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$  beschrieben. Der Begriff Eichtheorie bedeutet, dass die Kräfte durch sogenannte Eichbosonen vermittelt werden. Die Einführung der Eichbosonen wird notwendig, wenn Invarianz unter lokalen Eichsymmetrien gefordert wird. Die Eichgruppe des Standardmodells ist ein direktes Produkt der Gruppen  $U(1) \otimes SU(2)$ , die die Elektroschwache Wechselwirkung beschreiben und der  $SU(3)$ , der Eichgruppe der Quantenchromodynamik (QCD). Die Eichtheorien müssen invariant unter lokalen Eichtransformationen mit Elementen aus diesen Gruppen sein. Der Eichanteil der QCD soll in dieser Arbeit mit geeigneten Methoden untersucht werden.

Die zweite Säule des Standardmodells bildet der Materiesektor. In dieses Gebiet gehören die fundamentalen Felder, die gemäß der oben beschriebenen Kräfte, durch den Austausch von Eichbosonen, wechselwirken. Die Materiefelder werden in zwei Klassen eingeteilt: Quark- und Leptonfelder. Quarks wechselwirken, obwohl sie auch an der elektroschwachen Wechselwirkung teilnehmen, hauptsächlich über die auch als Farbkraft bezeichnete Starke Wechselwirkung. Im Gegensatz dazu tragen die Leptonen keine Farbladung und nehmen dementsprechend auch nicht an der Starke Wechselwirkung teil. Die Existenz des zur Massenerzeugung der Felder benötigten Higgs-Bosons ist noch nicht experimentell verifiziert, allerdings wäre seine Nicht-Existenz eine größere Überraschung als seine experimentelle Bestätigung.

Wie erwähnt betrachte ich in dieser Arbeit den reinen Eichanteil der QCD, d.h. die Eichgruppe  $SU(3)$ . In der üblichen Form lautet die zugehörige Lagrange-Dichte der reinen  $SU(3)$ -Eichtheorie in Minkowski-Raumzeit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

mit dem aus den Gluonenfeldern  $A_\mu^a$  aufgebauten Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}^a$ . Die Gluonen sind die Eichbosonen der QCD, und damit die Vermittler der Farbkraft. Die Lagrange-Dichte wird nach Integration über die vierdimensionale Raumzeit zur sogenannten Yang-Mills-Wirkung

$$S_{YM} = \int d^4x \mathcal{L} \quad (1.2)$$

nach Yang und Mills, die analoge Wirkungen nichtabelscher Eichtheorien als Erste betrachteten.

Um aus dieser Wirkung physikalische Informationen zu gewinnen bedarf es geeigneter Näherungsmethoden. Da die Störungstheorie aufgrund der Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstanten  $g$  der QCD nur bei hohen Impulsüberträgen anwendbar ist, bedarf es zur quantitativen Berechnung von

Größen im Niederenergie-Sektor, also der gebundenen Zustände wie Hadronen, anderer Verfahren. In nichtabelschen Eichtheorien tragen die Eichbosonen selbst Ladungen und nehmen daher an der durch sie vermittelten Wechselwirkung teil. Dadurch können Hadronen auch ausschließlich aus Eichbosonen bestehen. Die innerhalb dieser Arbeit betrachteten Glueballs sind gebundene Systeme aus Gluonen, den Eichbosonen der  $SU(3)$ .

Als geeignetes Näherungsverfahren erweist es sich, die physikalischen Theorien auf einem Raumzeitgitter zu definieren. Dadurch lassen sich die für Quantenfeldtheorien üblichen Divergenzen regularisieren und es erschließen sich neue, auch qualitativ andere Näherungsverfahren, die in einer kontinuierlichen Raumzeit nicht direkt anwendbar sind. Dazu gehören die hier behandelten Entwicklungen in Potenzen der inversen quadrierten Kopplungskonstanten  $\beta = \frac{2N}{g^2}$ , die ich hier zumeist als SCE (engl. Strong Coupling Expansions) abkürze. Alle von mir in dieser Arbeit betrachteten physikalischen Größen werden als Potenzreihen in  $\beta$  dargestellt und untersucht. Aus der Analyse der Potenzreihen lassen sich Rückschlüsse auf das Auftreten und die Eigenschaften von Singularitäten in den physikalischen Größen ziehen. Diese Singularitäten können das Konvergenzverhalten der Potenzreihe beeinflussen und Phasenübergänge kennzeichnen.

Die wesentlichen physikalischen Größen, für die ich mich in dieser Arbeit interessiere, sind die freie Energie der  $SU(3)$ , die Screening-Massen der Glueballs und ihre jeweilige Temperaturabhängigkeit. Da hier die führenden Terme bei verschwindender Temperatur  $T$  bereits berechnet wurden, werde ich versuchen, Aussagen über das Verhalten dieser Größen bei endlichen Temperaturen zu erhalten. Vorher sollen allerdings die  $T = 0$ -Ergebnisse ausführlich dargestellt werden, da die Rechnungen im endlichen Temperaturfall auf ihnen aufbauen.

Die  $SU(3)$ -Eichtheorie zeigt bei endlichen Temperaturen einen Phasenübergang, d.h. einen Übergang von einer Confinement-Phase, also dem Einschluß sämtlicher Farbladung tragender Felder in Hadronen, in eine Phase mit Deconfinement. Im Falle der  $SU(3)$  wird im allgemeinen aufgrund von theoretischen und numerischen Untersuchungen angenommen, dass dieser Übergang ein Phasenübergang 1.Ordnung ist. Demnach sollten die Reihenentwicklungen der freien Energie und ihrer partiellen Ableitungen Informationen über eine Singularität auf der reellen  $\beta$ -Achse enthalten. Ein Ziel ist es also, die Lage dieser Singularität auf analytischem Wege näherungsweise zu bestimmen.

Die Arbeit beginnt nach dieser Einleitung mit einem einführenden Kapitel über Feldtheorien bei verschwindenden und bei endlichen Temperaturen. Ziele und Methoden von Starkkopplungsentwicklungen bei  $T = 0$  sind der Inhalt des dritten Kapitels. Dort werden einige bereits bekannte Ergebnisse

ausführlich diskutiert und hergeleitet, um den Rahmen für die Erweiterungen auf den  $T \neq 0$ -Fall zu schaffen. Diese Erweiterungen werden dann im vierten Kapitel beschrieben, wo auch die Unterschiede in den Rechenmethoden dargestellt werden. Im darauffolgenden fünften Kapitel werden diese Rechnungen dann durchgeführt und die SCE der verschiedenen physikalischen Größen bei endlichen Temperaturen angegeben. Die Auswertung und Diskussion dieser Resultate geschieht im sechsten Kapitel. Dabei soll auch auf eventuelle systematische Schwachpunkte und damit verbundene zukünftige Verbesserungen der Methodik eingegangen werden. In einem ausführlichen Anhang werden diejenigen Teile der Rechnungen aufgelistet, die den Hauptteil der Arbeit nur unnötig technisch und lang erscheinen ließen.



# Kapitel 2

## Yang-Mills-Theorien

In den in einer kontinuierlichen Raumzeit definierten Quantenfeldtheorien benutzt man üblicherweise störungstheoretische Hilfsmittel bei schwacher Kopplung um physikalische Größen zu berechnen. Im Gegensatz dazu ermöglichen die Gitterfeldtheorien zusätzlich Stark-Kopplungs-Entwicklungen (SCE), also Entwicklungen in Potenzen der inversen, quadrierten Kopplungskonstanten.

In diesem Kapitel möchte ich zunächst einige grundlegende Aspekte zu Feldtheorien bei verschwindenden und bei endlichen Temperaturen erläutern. Dabei können die Feldtheorien entweder im Kontinuum oder auf einem Raumzeit-Gitter definiert sein. Die SCE der Gittertheorie werden sich dabei als formal analog zu Hochtemperatur-Entwicklungen erweisen. Die Darstellung der Yang-Mills-Theorien bei verschwindenden Temperaturen orientiert sich an [1], während endliche Temperaturen nach [2] behandelt werden.

### 2.1 Yang-Mills-Theorien bei verschwindenden Temperaturen

#### 2.1.1 SU(N)-Eichtheorie in euklidischer Raumzeit

In der Kontinuumstheorie der reinen SU(N)-Eichtheorie sind die grundlegenden Felder die Gluonfelder  $A_\mu(x)$ . Diese Felder sind Elemente der Lie-Algebra der Eichgruppe und somit spurlose, antihermitische  $(N \times N)$ -Matrizen. Der zugehörige Feldstärketensor lautet

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.1)$$

Die Felder lassen sich auch in Komponentenschreibweise, unter Benutzung der Generatoren der Lie-Algebra, angeben. Die Generatoren  $T_a$  sind  $N^2 - 1$

hermitesche, spurlose ( $N \times N$ )-Matrizen und erfüllen die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad (2.2)$$

und werden für gewöhnlich wie folgt normiert:

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (2.3)$$

Als Linearkombinationen der Generatoren ausgedrückt lauten die Felder:

$$A_\mu(x) = -ig A_\mu^a(x) T_a \quad (2.4)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -ig F_{\mu\nu}^a(x) T_a \quad (2.5)$$

Bei der Definition der Komponentenfelder wurde die Kopplungskonstante  $g$  eingeführt. Die Komponentenfelder sind nach Gl. (2.1) ebenfalls miteinander verknüpft:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (2.6)$$

Die Dynamik der Eichfelder wird von der Yang-Mills-Wirkung beschrieben:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (2.7)$$

Die so definierte Wirkung enthält kubische und quartische Selbstwechselwirkungsterme. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik (QED) sind also nichtabelsche Eichtheorien nichttrivial in dem Sinne, dass sie Wechselwirkungen der Konstituentenfelder enthalten.

Erwartungswerte von Observablen  $O$  lassen sich mithilfe der Wirkung als Funktionalintegrale ausdrücken

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_x dA_\mu(x) O e^{-S_{YM}[A]} \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A O e^{-S_{YM}[A]}, \quad (2.8)$$

mit

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}[A]} \quad (2.9)$$

Zur Berechnung ist diese Form allerdings nicht geeignet, da das Maß  $\mathcal{D}A$  mathematisch nicht exakt definiert ist. Man kann den Ausdruck (2.8) allerdings als formal richtigen Startpunkt für die Entwicklung einer Störungsrechnung nehmen. In diesem Sinne lassen sich mit dem Funktionalintegral viele Methoden und Konzepte der Störungstheorie leichter als im Operatorformalismus verstehen, obwohl letztlich beide Varianten dieselben Ergebnisse liefern müssen.

## 2.1.2 Gittertheorie

In der Hochenergiephysik wurden Gittertheorien zunächst als nicht-perturbative Regularisierung eingeführt. Durch den Übergang von einer kontinuierlichen Raumzeit zu diskreten Gitterpunkten erhält man einen natürlichen Ultraviolett-Impuls-Cutoff. Ein weiterer Vorteil ist, dass es in einer Gittertheorie möglich ist, das Funktionalintegral mathematisch exakt zu definieren. Aus einer kontinuierlichen Raumzeit wird eine endliche Anzahl von Gitterpunkten. Entsprechend der Diskretisierung der Raumzeit müssen auch die Felder in den Gitterformalismus übersetzt werden. Der wesentliche physikalische Aspekt der Kontinuumstheorie, die lokale Eichinvarianz, soll innerhalb der Gittertheorie beibehalten werden.

Das Gitter wird zumeist als vierdimensionales hyperkubisches Gitter eingeführt. In diesem Fall ist es durch eine Gitterkonstante  $a$  und das Volumen  $\Omega = L^3 N_t a^4$  charakterisiert. Dabei bezeichnet  $V = L^3 a^3$  das räumliche Volumen und  $N_t a$  die zeitliche Ausdehnung des Gitters. Physikalische Größen können an Gitterpunkten  $x$  und entlang ihrer Verbindungslinien, den sogenannten Links  $b$ , definiert werden. Die Links werden durch einen Ort  $x$  und eine Richtung  $e_\mu$  gekennzeichnet

$$b \equiv (x, e_\mu). \quad (2.10)$$

Eine wichtige Rolle spielen geschlossene Wege auf dem Gitter, die als Schleifen bezeichnet werden. Die kleinstmöglichen Schleifen bestehen aus vier Links zwischen vier Gitterpunkten, die ein Quadrat bilden, und heißen Plaketten  $p$ . Eine Plakette ist eindeutig durch ihren Ort  $x$  und zwei Richtungen  $e_\mu$  und  $e_\nu$  charakterisiert

$$p = (x, e_\mu, e_\nu). \quad (2.11)$$

Hierbei ist aber der Umlaufsinn um die Plakette zu berücksichtigen. Es gibt also zwei Orientierungen einer Plakette.

Um die Yang-Mills-Wirkung zu diskretisieren, formuliert man die Theorie zweckmässigerweise nicht über die Gluonfelder  $A_\mu(x)$  direkt, sondern mithilfe der sogenannten Linkvariablen  $U(b)$

$$U(b) = U(x, e_\mu) = \exp(-iga A_\mu^b(x) T_b). \quad (2.12)$$

Die Linkvariablen erfüllen

$$U(b) = U(x, e_\mu) = U^\dagger(x + ae_\mu, -e_\mu) \equiv U^\dagger(-b). \quad (2.13)$$

Die vier Linkvariablen einer Plakette bilden analog die Plakettvariable  $U(p)$ . Diese lautet mit  $a = 1$  und in etwas kompakterer Notation

$$U(p) = U(x, \hat{\mu})U(x + \hat{\mu}, \hat{\nu})U(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}, -\hat{\mu})U(x + \hat{\nu}, -\hat{\nu}). \quad (2.14)$$

Die hermitisch konjugierte Größe  $U^\dagger(p)$  entspricht der Plakettvariablen bei umgekehrtem Umlaufsinn.

Da die Felder  $A_\mu$  Lie-Algebrawertig sind, können die Linkvariablen als  $SU(N)$ -Matrizen dargestellt werden. Sie transformieren unter lokalen Eichtransformationen gemäß

$$U'(x, y) = \Lambda(x)U(x, y)\Lambda^{-1}(y) \quad \Lambda \in SU(N) \quad (2.15)$$

Dieses Transformationsverhalten gilt allgemein für zwei Punkte  $x$  und  $y$ , die durch einen geschlossenen Zug von Linkvariablen miteinander verbunden sind.

Bei dem Vorhaben, die Gitterwirkung eichinvariant zu formulieren, hilft nun die Beobachtung, dass die Spuren von Linkvariablen über beliebige geschlossene Wege  $\mathcal{C}$  gemäß (2.15) unter Eichtransformationen invariante Größen sind. Aufgrund der zyklischen Invarianz der Spur ist

$$\text{Tr } U'(\mathcal{C}) = \text{Tr } U(\mathcal{C}). \quad (2.16)$$

Gehen ausschließlich entsprechende Größen in die Wirkung ein, so ist diese automatisch eichinvariant. Als weitere Einschränkung soll die gesuchte Wirkung im Limes  $a \rightarrow 0$  die Yang-Mills-Wirkung (2.7) reproduzieren.

Die von K.G. Wilson vorgeschlagene Wirkung für die Eichgruppe  $SU(N)$ , die all diese Anforderungen erfüllt, lautet

$$S[U] = -\beta \sum_p \left[ \frac{1}{2N} (\text{Tr } U(p) + \text{Tr } U^\dagger(p) - 1) \right]. \quad (2.17)$$

Die Summation erstreckt sich über alle Plaketten des Gittervolumens mit nur einer der beiden Orientierungen. Für den Beweis, dass diese Wirkung im Kontinuumsimes die Yang-Mills-Wirkung reproduziert, sei auf [1] verwiesen. Dort wird gezeigt, dass der führende Term der Entwicklung von (2.12) in Potenzen von  $a$  und die Yang-Mills-Wirkung einander gleich sind, falls

$$\beta = \frac{2N}{g^2} \quad (2.18)$$

gilt. Es lassen sich auch andere Wirkungen definieren, die diese Voraussetzungen erfüllen. Diese verbesserten Wirkungen dienen dazu, Gittereffekte zu verringern und dadurch schneller den Kontinuumsimes zu erreichen. Hier möchte ich mich aber mit der Wilson-Wirkung beschäftigen.

Analog zur Situation im Kontinuum werden mithilfe der Wirkung Erwartungswerte von Observablen als Funktionalintegrale geschrieben

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) O e^{-S[U]} \equiv \frac{1}{Z} \int DU O e^{-S[U]} \quad (2.19)$$

wobei sich das Produkt im Integrationsmaß über alle Links  $b$  erstreckt. Die Observablen  $O$  sind Funktionen der Konfiguration der Linkvariablen  $U(b)$ .

Da die Linkvariablen Gruppenelemente der  $SU(N)$  sind, ist es notwendig, das Integrationsmaß  $dU$  zu definieren. Das invariante Gruppenmaß oder Haar-Maß erfüllt Eichinvarianz

$$\int_G dU f(U) = \int_G dU f(VU) = \int_G dU f(UV) \quad \forall V \in G \quad (2.20)$$

und ist normiert

$$\int_G dU = 1. \quad (2.21)$$

Die Zustandssumme der  $SU(N)$ -Gittereichtheorie lautet schließlich

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int DU(b) \exp[-S(U)] \\ &= \int DU(b) \prod_p \exp\left[-\frac{\beta}{2N} (\text{Tr}U(p) + \text{Tr}U^\dagger(p) - 1)\right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.2 Yang-Mills-Theorien bei endlichen Temperaturen

In diesem Kapitel soll das Verhalten der Yang-Mills-Theorien bei endlichen Temperaturen untersucht werden. Die am Ende der Rechnungen interessierenden Größen sind die Zustandssumme  $Z$ , die freie Energie  $F$ , die innere Energie  $E$  und der Druck  $p$ , jeweils als Funktionen der Temperatur  $T$  und des Volumens  $V$ . Zwischen diesen Größen gelten die aus der Statistischen Physik bekannten Relationen

$$F(T, V) = -T \ln Z(T, V) = -\frac{1}{\beta_T} \ln Z(T, V) \quad (2.23)$$

$$E(T, V) = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z(T, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta_T} \ln Z(T, V) \quad (2.24)$$

$$p(T, V) = T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z(T, V) = \frac{1}{\beta_T} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z(T, V). \quad (2.25)$$

Der mit der Temperatur verknüpfte Parameter  $\beta_T = \frac{1}{kT}$  ist von der über die inverse Kopplung definierte Größe  $\beta = \frac{2N}{g^2}$  zu unterscheiden. In diesem Sinne gibt die Ableitung der freien Energie nach  $\beta$  nur eine formale innere Energie wieder. Im folgenden ist mit  $\beta$  der inverse Kopplungsparameter gemeint, der Temperaturparameter wird mit  $\beta_T$  gekennzeichnet.

Aus obigen Gleichungen wird ersichtlich, dass die Kenntnis der Zustandssumme  $Z$  für die Berechnung der thermodynamischen Größen essentiell ist. Allerdings kann  $Z$  zumeist nur näherungsweise angegeben werden. Während in der Kontinuumstheorie hauptsächlich störungstheoretische Methoden im Schwachkopplungsbereich verwendet werden, um die Zustandssumme zu bestimmen, gehören in der Gittertheorie SCE zu geeigneten Näherungsverfahren.

### 2.2.1 Thermodynamik im Kontinuum

Die grundlegende Größe in der Statistischen Physik ist die Zustandssumme  $Z(T, V)$ , die durch den Hamilton-Operator der zugrundeliegenden Theorie definiert ist:

$$Z = \text{Tr} (e^{-\beta\tau H}) \quad (2.26)$$

Die Spur erstreckt sich über alle Energieeigenzustände des Hamiltonians. Damit ist die Berechnung der Zustandssumme zwar prinzipiell möglich, als zweckmäßig hat es sich jedoch erwiesen, die Spur als Funktionalintegral in der Ortsdarstellung auszuwerten.

Für die Übergangsamplitude von einem Ausgangszustand  $|\phi_a\rangle$  nach einer Zeit  $t_f$  wieder in den Zustand  $|\phi_a\rangle$ , gilt nach [2] bei verschwindender Temperatur die Gleichung

$$\langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle = \int [d\phi] \exp \left[ i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t) \right]. \quad (2.27)$$

Das Symbol  $[d\phi]$  impliziert die Funktionalintegration, d.h. eine Integration über alle Feldkonfigurationen. Da Ausgangs- und Endzustand übereinstimmen, gilt  $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, t_f)$ , und die entsprechende Integration ist auf Konfigurationen beschränkt, die diese Einschränkung erfüllen.

Die Zustandssumme einer Theorie lässt sich nun ebenfalls als Funktionalintegral schreiben. Es ergibt sich mit

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta\tau H} = \sum_i \int d\phi_i \langle \phi_i | e^{-\beta\tau H} | \phi_i \rangle, \quad (2.28)$$

unter Benutzung von (2.27) in imaginäre Zeitrichtung  $\tau = it$  gedreht, die Formel

$$Z = \int_{per.} [d\phi] \exp \left[ \int_0^{\beta\tau} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, \tau) \right] \quad (2.29)$$

$$= \int_{per.} [d\phi] \exp [-S(\beta\tau)]. \quad (2.30)$$

Die periodischen Randbedingungen erfordern an dieser Stelle, dass  $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta_T)$ . Die Temperatur geht in dieser Formel über die  $\tau$ -Integration bis  $\beta_T$  ein. Bei hohen Temperaturen kann der Exponentialterm entwickelt werden und liefert auf diese Weise Hochtemperaturentwicklungen.

## 2.2.2 Thermodynamik auf dem Gitter

### Zustandssumme

Im wesentlichen analog zur Formulierung der Theorien bei endlichen Temperaturen im Kontinuum, werden auch die Gittertheorien bei endlichen Temperaturen definiert. Der Ausdruck für die Zustandssumme bei  $T \neq 0$  lautet

$$\begin{aligned} Z(\beta_T) &= \int DU(b) \exp[-S(U; \beta_T)] \\ &= \int DU(b) \prod_{p \in \Omega(T)} \exp\left[-\frac{\beta}{2N} (\text{Tr}U(p) + \text{Tr}U^\dagger(p) - 1)\right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Integration erstreckt sich dabei über alle Linkvariablen  $U(b)$  im Gittervolumen  $\Omega(T) = V \cdot N_t a$ . Temperatureffekte werden nun über die Beschränkung der Integration in zeitlicher Richtung auf einen Wert  $N_t < L$ , bei festgehaltener Gitterkonstante  $a$ , erzielt. In diesem Sinne ist das Volumen  $\Omega(T)$  temperaturabhängig.

In Gl. (2.30) ist die Temperatur als Kehrwert der Integrationsgrenze  $\beta_T$  gegeben, analog ergibt sich auf dem Gitter die Temperatur als Kehrwert der zeitlichen Gitterausdehnung

$$T = \frac{1}{N_t a}. \quad (2.32)$$

Auch auf dem Gitter müssen periodische Randbedingungen in euklidischer Zeitrichtung gefordert werden. Dies bedeutet, dass Linkvariablen, die um  $N_t a$  in zeitlicher Richtung verschoben sind, identifiziert werden

$$U(x, e_\mu) \equiv U(x + N_t a \cdot e_4, e_\mu). \quad (2.33)$$

Der Index 4 soll die zeitliche Richtung definieren.

Aus Gl. (2.32) wird ersichtlich, dass Temperatureffekte auch durch eine variable Gitterkonstante  $a$  in zeitlicher Richtung erzielt werden können. Hier und im folgenden möchte ich allerdings die Temperatur als Funktion von  $N_t$  betrachten.

## Phasenübergang

Aufgrund von numerischen Resultaten aus Monte-Carlo-Simulationen wird angenommen, dass  $SU(N)$ -Gittereichtheorien bei  $T = 0$  über den gesamten Parameterbereich  $0 \leq \beta < \infty$  keinen Phasenübergang zeigen. Dieses Verhalten ändert sich bei endlichen Temperaturen, und es gibt bei einem kritischen Parameter  $\beta_c$  einen Phasenübergang von einer Starkkopplungsphase mit Confinement in eine Phase mit Deconfinement. In dieser Deconfinement-Phase sind die fundamentalen Felder der  $SU(N)$ -Eichtheorie, also die Gluonen, nicht mehr in Glueballs eingeschlossen (engl. confined), sondern können als freie Teilchen, die aber natürlich trotzdem noch den Wechselwirkungen unterworfen sind, propagieren. Während der Phasenübergang in der  $SU(2)$  von zweiter Ordnung ist, ist er in der  $SU(N)$  mit  $N \geq 3$  von erster Ordnung.



# Kapitel 3

## Starkkopplungsentwicklungen bei $T = 0$

### 3.1 Clusterentwicklung der freien Energie

Die im vorangegangenen Kapitel definierte Zustandssumme (2.22) soll an dieser Stelle als Potenzreihe in der inversen Kopplung  $\beta$ , bzw. dem damit verbundenen Parameter  $u(\beta)$  entwickelt werden. Diese Entwicklung kann formal analog zu den Hochtemperaturentwicklungen für (2.30) durchgeführt werden. Dadurch erschließen sich bereits bekannte Methoden aus der Statistischen Physik, wie z.B. die Clusterentwicklung, für die Gittertheorie. Die formale freie Energie, als Logarithmus der Zustandssumme, kann in einer solchen Clusterentwicklung angegeben werden. Diese Prozedur wird ausführlich in [1] hergeleitet und soll hier kurz diskutiert werden. Die Notationen entsprechen denen in diesem Lehrbuch. Soweit nicht explizit aufgeführt, soll weiter  $a = 1$  gelten.

#### 3.1.1 Starkkopplungsentwicklung der Zustandssumme

Da die Plakettvariablen  $U(p)$  unabhängig von  $\beta$  sind, erscheint es sinnvoll den Boltzmann-Faktor  $e^{-S}$  in der Zustandssumme in Potenzen von  $\beta$  zu entwickeln. Es erweist sich aber als zweckmäßiger, für die einzelne exponentierte Plaquette-Wirkung  $e^{-S_p}$  eine Entwicklung nach Charakterfunktionen anzusetzen

$$\begin{aligned} e^{-S_p(U)} &= \sum_r d_r c_r(\beta) \chi_r(U) \\ &= c_0(\beta) \left[ 1 + \sum_{r \neq 0} d_r a_r(\beta) \chi_r(U) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Charakterfunktionen  $\chi_r$  einer irreduziblen Darstellung  $r$  sind als Spuren über die zugehörigen Darstellungsmatrizen definiert und bilden eine Basis im Raum der quadratintegriblen Klassenfunktionen über der Lie-Gruppe  $G$ . Klassenfunktionen  $f(U)$  erfüllen

$$f(U) = f(VUV^{-1}) \quad U, V \in G. \quad (3.2)$$

Also lassen sich alle Klassenfunktionen, wie der Term  $e^{-S_p}$ , nach Charakterfunktionen entwickeln. Konvention ist es, die Dimensionen  $d_r$  der Darstellungen  $r$  separat in der Summe in (3.1) aufzuführen. Dort wurden auch die Entwicklungsparameter  $a_r(\beta)$  der einzelnen irreduziblen Darstellungen eingeführt. Bei den später aufzustellenden Potenzreihen kann es sinnvoll sein, diese als Reihen in dem Entwicklungsparameter der fundamentalen Darstellung  $a_f \equiv u$  zu schreiben. Für die  $a_r(\beta)$  gilt allgemein

$$a_r = \frac{c_r(\beta)}{c_0(\beta)}. \quad (3.3)$$

Die Berechnungen der  $\beta$ - und  $u$ -Abhängigkeiten der Entwicklungsparameter  $a_r$  und  $c_r$  der niedrigsten Darstellungen der  $SU(2)$  und der  $SU(3)$  sind im Anhang angegeben. Aus der Gleichung

$$\exp[-S(U)] = \prod_p \exp[-S_p(U)] \quad (3.4)$$

folgt zusammen mit (3.1)

$$e^{-S} = c_0^{6\Omega} \prod_p \left[ 1 + \sum_{r \neq 0} d_r a_r(\beta) \chi_r(U) \right] \quad (3.5)$$

wobei wesentlich ist, dass sich das Produkt nur über jede Plakette einzeln erstreckt. Das heißt, dass jede Plakette nur mit höchstens einer Plakettvariablen besetzt ist. Aus diesem Grund definiert man nun einen Graphen  $G$  als eine Abbildung, die jeder Plakette  $p$  des Gittervolumens eine Variable in einer Darstellung  $r_p$  zuordnet. Der einfachste Graph ist derjenige, bei dem alle Plakettvariablen in der trivialen Darstellung sind. Weitere Graphen entstehen durch Anregungen einzelner Plaketten in Variablen höherdimensionaler Darstellungen. Somit lässt sich das Produkt umschreiben als eine Summe über alle möglichen Graphen

$$e^{-S} = c_0^{6\Omega} \sum_G \prod_{p \in G} [d_{r_p} a_{r_p}(\beta) \chi_{r_p}(U_p)]. \quad (3.6)$$

Mit der Definition des Beitrags eines Graphen

$$\Phi(G) = \int DU(b) \prod_{p \in G} d_{r_p} a_{r_p} \chi_{r_p}(U_p) \quad (3.7)$$

nimmt der Ausdruck für die Zustandssumme eine kompakte Form an

$$Z = c_0^{6\Omega} \sum_G \Phi(G), \quad (3.8)$$

wobei sich die Graphen in ihre zusammenhängenden Komponenten aufteilen lassen, so dass diese untereinander paarweise disjunkt sind, also keinerlei gemeinsame Links besetzen. Diese Komponenten werden Polymere  $X_i$  genannt und es ist

$$\Phi(G) = \prod_i \Phi(X_i). \quad (3.9)$$

Die Zustandssumme lässt sich also in Abhängigkeit einzelner Polymere schreiben

$$Z = c_0^{6\Omega} \left\{ 1 + \sum_G \prod_i \Phi(X_i) \right\}. \quad (3.10)$$

In dieser Formel wurde eine 1 aus der Summation herausgezogen, so dass diese sich nun über alle nicht-trivialen Graphen mit zumindest einer angeregten Plakettvariablen erstreckt. Der Vorteil der Form (3.10) liegt darin, dass die Summation über Graphen einer Cluster-Entwicklung zugänglich ist.

### Berechnung von Beiträgen bei $T = 0$

Zunächst möchte ich allerdings zeigen, wie man den Beitrag von einzelnen Graphen berechnen kann. Die Graphen bestehen wie erwähnt aus Produkten von Plakettvariablen, die wiederum Spuren über Darstellungsmatrizen irreduzibler Darstellungen der zugrundeliegenden Eichgruppe sind. Wie aus Gl. (3.7) ersichtlich, wird über alle Linkvariablen integriert. Um dieses mehrfache Integral auszuwerten ist die Integrationsregel

$$\int dU \chi_r(VU) \chi_s(U^{-1}W) = \frac{\delta_{rs}}{d_r} \chi_r(VW) \quad (3.11)$$

von Nutzen. Aus ihr geht hervor, dass zwei Plakettvariablen  $\chi_{r_i}(U(p_i))$ , die sich in einem Link berühren, je nach Orientierung in derselben oder in der komplex-konjugierten Darstellung sein müssen. Jede dieser Integrationen liefert einen Faktor  $\frac{1}{d_r}$  und verknüpft die nicht von der Integration betroffenen

$$\int dU \quad V \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline U & U^{-1} \\ \hline \end{array} \right] W = V \left[ \begin{array}{|c|} \hline \phantom{U} \\ \hline \end{array} \right] W$$

Abbildung 3.1: Integrationsregel

Linkvariablen der beiden Plaketten zu einer neuen Spur. Dies lässt sich auch graphisch interpretieren, siehe Abb. (3.1).

Eine weitere wichtige Integrationsregel ist

$$\int dU \chi_r(U) = \delta_{r,0} \quad (3.12)$$

die besagt, dass die Ausreduktion der an einem Link zusammentreffenden Darstellungsmatrizen die triviale Darstellung  $\mathbf{1}$  enthalten muss. Ist dies nicht der Fall, so verschwindet das Integral und somit der ganze Beitrag des entsprechenden Polymers. Es folgt also, dass die beitragenden Polymere geschlossene Oberflächen besitzen müssen. Ansonsten gäbe es einzelne Links, die nur mit einer Linkvariablen in einer nichttrivialen Darstellung besetzt sind. Dies würde gemäß Gl. (3.12) das Verschwinden des Integrals und somit des gesamten Beitrags bedeuten. Innerhalb der Oberfläche sind beliebige Kombinationen von Darstellungsmatrizen  $U_{r_i}$  an einem Link gestattet, solange

$$r_1 \otimes r_2 \otimes \dots \otimes r_n = \mathbf{1} \oplus \dots \quad (3.13)$$

gilt. Im folgenden betrachte ich nur Polymere mit geschlossener Oberfläche.

Wendet man Gl. (3.11) sukzessive auf Polymere ohne innere Struktur an, so gelangt man schließlich zu folgendem Integral

$$\int dU_p \chi_f(U_p) \chi_f(U_p^\dagger) = \int dU_p (1 + \chi_{ad}(U_p)) = 1 \quad (3.14)$$

welches gemäß (3.12) den Wert 1 liefert.

Diese Ausintegration möchte ich am einfachen Beispiel des Kubus einmal explizit vorstellen. Alle Plakettvariablen sind in der fundamentalen Darstellung. Die einzelnen Integrationsschritte sind in Abb. (3.2) graphisch dargestellt. Für den Kubus ergibt sich nach (3.7) folgendes Integral zu lösen

$$\Phi = \int DU(b) \prod_{i=1}^6 a_f d_f \chi_f(U_{p_i}) = a_f^6 d_f^6 \int DU(b) \prod_{i=1}^6 \chi_f(U_{p_i}). \quad (3.15)$$

Nach den vier in Abb. (3.2) graphisch dargestellten Integrationsschritten,

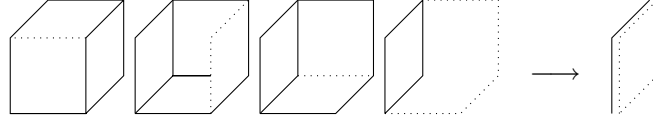


Abbildung 3.2: Zur Integration des Kubus. Die Seiten, über die integriert wird, sind punktiert.

und einem resultierenden Faktor  $\frac{1}{d_f^4}$ , erhält man

$$\Phi = a_f^6 d_f^2 \int dU_p \chi_f(U_p) \chi_f(U_p^\dagger) = a_f^6 d_f^2 \quad (3.16)$$

wobei (3.14) benutzt wurde. Für alle in diesem Kapitel betrachteten Polymere gilt analog

$$\Phi = d_f^2 \prod_{Plaq} a_f = d_f^2 u^{N_p} \quad (3.17)$$

was bedeutet, dass jedes Polymer, das topologisch äquivalent zu einer Sphäre ist, einen Faktor  $d_f^2$  aus der Integration erhält. Die Anzahl der Plaketten des Polymers sei dabei  $N_p$ . Ohne an dieser Stelle zu sehr in die topologischen Eigenschaften der SCE einzudringen, sei gesagt, dass bei Polymeren mit einer toroidalen Struktur dieser Faktor  $d_f^2$  fehlt. Dies lässt sich durch explizite Ausintegration zeigen. Die toroidalen Polymere werden in der  $T \neq 0$ -Theorie von besonderer Bedeutung sein, da die "temperaturabhängigen" Polymere in den führenden Ordnungen gerade eine solche topologische Struktur aufweisen.

### 3.1.2 Clusterentwicklung der formalen freien Energie

Um zur Clusterentwicklung der formalen freien Energie zu gelangen, schreibt man die Darstellung (3.10) noch etwas um

$$Z = c_0^{6\Omega} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum'_{X_1, \dots, X_n} \frac{1}{n!} \Phi(X_1) \cdots \Phi(X_n) \right\}. \quad (3.18)$$

Der Faktor  $1/n!$  kompensiert Mehrfachzählungen, und die gestrichelte Summe soll andeuten, dass sich die Summation über paarweise disjunkte Polymere erstreckt.

Mithilfe des Momenten-Kumulanten-Formalismus [1] ergibt sich der folgende Ausdruck für die formale freie Energie  $F(u)$  und die formale freie

Energiedichte  $f(u)$

$$F(u) = -\frac{1}{N_t} \ln Z \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} f(u) &= -\frac{F(u)}{V} \\ &= -6 \ln c_0 - \frac{1}{\Omega} \sum_C a(C) \Phi(X_i)^{n_i} \dots \Phi(X_k)^{n_k} \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei sich die Summe über alle sogenannten Cluster  $C$  erstreckt, die als zusammenhängende Gebilde von Polymeren definiert sind. Der Momenten-Kumulanten-Formalismus zeigt, dass nun statt über die unzusammenhängenden Polymere, bei der freien Energiedichte als Logarithmus der Zustandssumme über die zusammenhängenden Polymere zu summieren ist. Die Exponenten  $n_i$  geben mögliche Vielfachheiten einzelner Polymere in einem Cluster an. Es ist demnach

$$C = (X_1^{n_1}, X_2^{n_2}, \dots). \quad (3.21)$$

Der kombinatorische Faktor ist gegeben durch

$$a(C) = \frac{[X_1, \dots, X_1, X_2, \dots, X_2, \dots, X_k]}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (3.22)$$

Die in diesem Ausdruck erscheinenden Kumulanten [...] sind über

$$[X_1, \dots, X_n] \equiv \sum_P (-1)^{(n-1)!} \langle X_1 \dots X_j \rangle \dots \langle X_k \dots X_n \rangle \quad (3.23)$$

durch die Momente  $\langle \dots \rangle$  der einzelnen Polymere  $X_i$  definiert, für die

$$\langle X_k, \dots, X_l \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls jedes Paar } (X_m, X_n) \text{ unverbunden ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.24)$$

gilt. Die Summation in (3.23) erstreckt sich dabei über alle Partitionen der Elemente  $X_1$  bis  $X_n$ .

Anhand von Gl. (3.20) ist ersichtlich, dass die formale freie Energie  $F(u)$  im thermodynamischen Limes existiert. Da Cluster zusammenhängende Objekte sind, ist die Anzahl wie oft einzelne Cluster durch Verschieben auseinander hervorgehen können, proportional zum Volumen des Gitters. Da durch dieses Volumen  $\Omega$  in der Gleichung geteilt wird, bleibt die formale freie Energiedichte  $f(u)$  auch im thermodynamischen Limes, der im Grenzwert unendlichen Volumens definiert ist, endlich. Damit ist auch die Existenz der formalen freien Energie gezeigt.

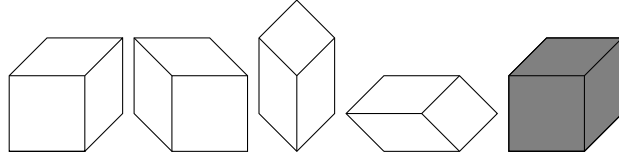


Abbildung 3.3: Kuben in 4 Dimensionen, mit Plaketten in der ( $j = \frac{1}{2}$ )- und in der ( $j = 1$ )-Darstellung (grau)

Bei einem Gitter mit periodischen Randbedingungen, also Translationsinvarianz, lässt sich demnach die Summation über alle Cluster in (3.20) auf die Summation über alle Cluster, die nicht durch Verschiebungen auseinander hervorgehen, einschränken

$$f(u) = -6 \ln c_0 - \sum_C a(C) \prod_i \Phi(X_i)^{n_i} \quad (3.25)$$

wobei die gestrichene Summe dies andeuten soll. Die Volumenabhängigkeit kürzt sich also in der Gleichung heraus, wie es für eine intensive Größe sein sollte. Die Formel (3.25) ist die Cluster-Entwicklung der formalen freien Energiedichte der SU(N)-Gittereichtheorie mit Wilson-Wirkung.

## 3.2 Formale freie Energie der SU(2)

### 3.2.1 Berechnung der formalen freien Energiedichte

Aus der für alle SU(N) hergeleiteten Cluster-Entwicklung der formalen freien Energiedichte möchte ich nun diese am Beispiel der SU(2) auch explizit berechnen. In den Abbildungen 3.3 bis 3.6 sind Beispiele der Cluster oder Polymere aus bis zu 12 Plaquetten angegeben. Dies sind alle Arten von Polymeren, die bei der Berechnung der freien Energiedichte bis einschließlich der  $\mathcal{O}(u^{12})$  auftreten. Sind die entsprechenden Integrale, d.h. die Beiträge der Graphen gemäß (3.7) berechnet, so ist noch mit ihrer Anzahl zu multiplizieren, um den gesamten Beitrag dieser Polymerklassen zur freien Energiedichte zu erhalten.

Diese Anzahl ergibt sich zumeist aus einigen grundlegenden geometrischen Überlegungen. Im hier betrachteten vierdimensionalen Raum gibt es vier verschiedene Richtungen. Da ein Kubus, als kleinstes geschlossenes Polymer mit nichtverschwindendem Volumen, in drei Richtungen ausgedehnt ist, gibt es genau  $\binom{4}{3} = 4$  verschiedene Kuben in vier Dimensionen. Damit lassen

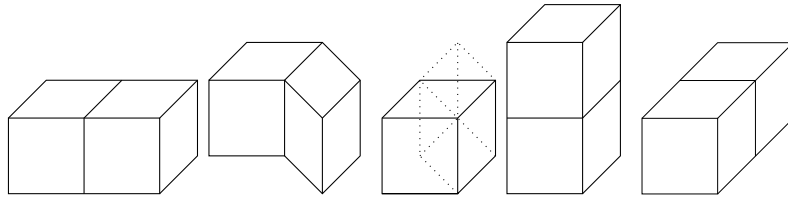


Abbildung 3.4: Doppelkuben: Polymere, die aus 10 Plaketten aufgebaut sind. Die Doppelkuben können verwinkelt oder gestreckt sein. Die gestreckten zeichnen eine der drei Richtungen, in der sie ausgedehnt sind, aus.

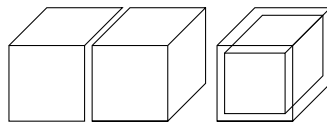


Abbildung 3.5: Cluster aus zwei Kuben

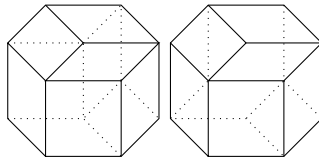


Abbildung 3.6: Polymere mit 12 Plaquettes



sich bereits unter Berücksichtigung der Gl. (3.16) die niedrigsten Ordnungen der freien Energiedichte angeben

$$f(u) = -6 \ln c_0 - 16u^6, \quad (3.26)$$

mit der üblichen Abkürzung  $a_f = u$ . Da es keine geschlossenen Polymere mit acht Plaketten gibt, gehören zur nächsthöheren nichtverschwindenden Ordnung die Polymere aus Abb. (3.4). Um die Anzahl dieser Doppelkuben zu erhalten, teilt man sie zweckmäßigerweise in zwei Klassen ein: Doppelkuben als Verbund zweier Einzelkuben, die unter einem rechten Winkel verbunden sind und solche, die gestreckt sind. Es gibt vier Doppelkuben ohne rechten Winkel, da diese Polymere in drei von vier Richtungen ausgedehnt sind. Da jeder derartige Doppelkubus drei Richtungen auszeichnen kann, ergibt sich ihre Anzahl zu  $N = 3 \cdot 4 = 12$ . Die Anzahl der verwinkelten Doppelkuben ist von der Anzahl der verschiedenen Plaketten in vier Dimensionen abhängig. Jede Plakette ist in zwei Richtungen ausgedehnt, daher gibt es  $\binom{4}{2} = 6$  Plaketten in vier Dimensionen. Diese Plaketten sollen - ohne mit einer Plakettvariablen besetzt zu sein - die beiden Einzelkuben des verwinkelten Doppelkubus verbinden. Die Anzahl, verschiedene Doppelkuben mit rechtem Winkel bei festgelegter innerer Plakette aus Einzelkuben aufzubauen, beträgt 4. Insgesamt erhält man also  $12 + 6 \cdot 4 = 36$  Doppelkuben. Da dies die einzigen geschlossenen Polymere aus zehn Plaketten sind, ergibt sich für die freie Energie bis einschließlich der Ordnung  $\mathcal{O}(u^{10})$

$$f(u) = -6 \ln c_0 - 16u^6 - 144u^{10}, \quad (3.27)$$

wobei auch die Doppelkuben, als topologisch einer Sphäre äquivalent, einen Integrationsfaktor  $d_{1/2}^2 = 4$  enthalten.

In den höheren Ordnungen sind Polymere mit Plaketten in höherdimensionalen Darstellungen und Cluster aus mehreren Polymeren zu berücksichtigen. Dies bedeutet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die Herausforderung bei der Berechnung höherer Ordnungen der formalen freien Energiedichte besteht in der enorm wachsenden Anzahl von Graphen mit jeder Ordnung. Das von Wilson bis einschließlich der Ordnung  $\mathcal{O}(u^{22})$  berechnete Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} f(u) = & -6 \ln c_0 - 16 u^6 - 144 u^{10} + 156,8 u^{12} - 1974 u^{14} + 5407 u^{16} \\ & - 3,509 \cdot 10^4 u^{18} + 1,452 \cdot 10^5 u^{20} - 7,846 \cdot 10^5 u^{22}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich der Erwartungswert der formalen inneren Energiedichte  $e(u)$  einer einzelnen Plakettvariable berechnen.

### 3.2.2 Berechnung der formalen inneren Energie

Die formale innere Energiedichte  $e(u) \equiv E(u)/V$  ist definiert über ihren Funktionalintegralausdruck

$$\begin{aligned}
 e(u) &\equiv \left\langle 1 - \frac{1}{N} \text{Tr}(U_p) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{Z} \int DU(b) \left( 1 - \frac{1}{N} \text{Tr}(U_p) \right) e^{-S(U)} \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

und lässt sich aus der formalen freien Energiedichte durch Ableiten nach dem Parameter  $\beta = \frac{4}{g^2}$  berechnen. Dies erklärt auch die Bezeichnung **formale** innere Energiedichte, da die **physikalische** innere Energiedichte aus der freien Energiedichte durch Ableiten nach der inversen Temperatur  $\beta_T = \frac{1}{T}$  hervorgeht. Diese Ableitungen sind einander natürlich nicht gleich. Zudem wird die physikalische freie Energiedichte bei endlichen Temperaturen berechnet, während die formale freie Energie bei  $T = 0$  berechnet wird. Näheres dazu wird in Kapitel 4 erläutert.

Wertet man die Ableitung nach dem inversen Kopplungsparameter  $\beta$  aus, so lautet die innere Energiedichte in Abhängigkeit von  $u$

$$\begin{aligned}
 e(u) &= \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \beta} f(u(\beta)) = \frac{1}{6} \left( \frac{du}{d\beta} \right) \left( \frac{d}{du} f(u) \right) \\
 &= 1 - u - 4u^5 + 8u^7 - 62,67 u^9 + 197,0u^{11} \\
 &\quad - 1349 u^{13} + 5939 u^{15} - 3,428 \cdot 10^4 u^{17} \\
 &\quad + 1,755 \cdot 10^5 u^{19} - 9,775 \cdot 10^5 u^{21}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dabei wurde benutzt, dass gilt:

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln c_0(\beta) = 1 - u. \tag{3.31}$$

Das Ergebnis (3.30) wurde von Wilson berechnet, aber nicht von ihm veröffentlicht. Für diese Arbeit ist es aus [1] entnommen. Es wird ebenfalls in [9] zitiert.

## 3.3 Glueball-Massen

Die Existenz gebundener Zustände aus den Eichbosonen nichtabelscher Eichtheorien wurde zuerst von Fritzsche und Gell-Mann im Jahre 1972 vorhergesagt [4]. Die leichtesten dieser Glueballs genannten Hadronen sind in reiner

SU(3)-Eichtheorie stabile Teilchen und damit kann die Temperaturabhängigkeit ihrer Massen Informationen über den Confinement/Deconfinement-Übergang liefern. Dieser Übergang wird bei einer kritischen Temperatur von  $T_c \approx 250$  MeV erwartet.

### 3.3.1 Allg. Berechnung der Glueball-Massen

Aus der Clusterentwicklung der SU(N)-Zustandsumme kann man Informationen über die Massen der niedrigsten, nichtangeregten Glueballs gewinnen. Diese Massen ergeben sich als die niedrigsten Eigenwerte des Hamiltonians über dem Vakuum bei verschwindendem Impuls. Betrachtet man die zeitabhängige Korrelationsfunktion eines Operators  $\Psi$  mit sich selbst

$$C(t) \equiv \langle \Psi(t) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | e^{-Ht} | \Psi(0) \rangle, \quad (3.32)$$

so dominiert für große Zeiten  $t$  der niedrigste Eigenwert  $m_i$  der Eigenzustände, deren Projektion auf den Operator  $\Psi$  nicht verschwindet

$$\langle \Psi(t \rightarrow \infty) | \Psi(0) \rangle \longrightarrow K e^{-m_i t}. \quad (3.33)$$

Im folgenden sollen jeweils die zusammenhängenden Korrelationsfunktionen betrachtet werden.

Das Verfahren, die Glueball-Masse zu bestimmen, beläuft sich also darauf, Operatoren mit geeigneten Quantenzahlen zu finden und die zeitliche Korrelation dieser Operatoren zu berechnen. Aus dem Ergebnis lässt sich dann die niedrigste Glueball-Masse mit den entsprechenden Quantenzahlen über

$$\begin{aligned} m &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \langle \Psi | e^{-Ht} | \Psi \rangle \\ &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln C(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

extrahieren.

Als einfachste Operatoren in der Gittertheorie erweisen sich die Plakettvariablen  $\text{Tr}(U_p)$ . Wie bei der Berechnung der formalen inneren Energiedichte gesehen, lassen sich Korrelationsfunktionen von  $\text{Tr}(U_p)$  durch Ableitungen der Zustandsumme berechnen

$$\begin{aligned} C(t) &= \langle \text{Tr} U(p_1) \text{Tr} U(p_2) \rangle \\ &= N^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \ln Z(\beta, \beta_1, \beta_2) |_{\beta_{1,2}=\beta}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

wobei die beiden Korrelationsplaketten aus rechentechnischen Gründen mit unterschiedlichen Kopplungen  $\beta_i$  versehen wurden, und diese am Ende der Rechnung wieder zu  $\beta_i = \beta$  gesetzt werden. Der Logarithmus der Zustandssumme, der proportional der formalen freien Energie ist, lässt sich mit der Clusterentwicklung berechnen.

Da Cluster zusammenhängende Objekte sind, muss jeder beitragende Cluster beide Plaketten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  besetzen. Sind beide Plaketten nun parallel, so ist das kleinste beitragende Polymer  $X_0$  eine "Plakettröhre" aus  $4t$  Plaketten, mit den beiden festgesetzten Plaketten an den Rändern. Eine solche Plakettröhre ist in Abbildung (3.7) gezeigt. In führender Ordnung ergibt sich demnach allgemein für die zugrundeliegende Gruppe  $SU(N)$

$$\Phi(X_0) = d_f^2 u(\beta_1) u(\beta_2) u^{4t} (2 - \delta_{N,2}) \quad (3.36)$$

wobei der letzte Faktor aus der Tatsache resultiert, dass die  $SU(2)$  keine komplex-konjugierten Darstellungen besitzt.

Da die Ableitungen aufgrund der Einführung unterschiedlicher Kopplungen nur die Korrelationsplaketten betreffen, lässt sich nun die Korrelation angeben zu

$$C(t) = \left( d_f^2 \frac{du}{d\beta} \right)^2 (2 - \delta_{N,2}) u^{4t} = A e^{-m_0 t} \quad (3.37)$$

wobei eine irrelevante Konstante  $A$  definiert wurde und für die Masse  $m_0$  gilt nach (3.34)

$$m_0 = -4 \ln u(\beta). \quad (3.38)$$

Zusätzlich lassen sich die Beiträge der Cluster, die aus der Plakettröhre und zusätzlichen inneren Plaketten bestehen sowie der Komposition der Röhre aus mehreren Clustern geschlossen aufsummieren, siehe Abb. (3.7). Die Möglichkeiten innere Plaketten hinzuzufügen sind von der jeweiligen Eichgruppe abhängig. Für die  $SU(2)$  gilt

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(X_0) \sum_{n=0}^{t-1} \binom{t-1}{n} (d_1 v)^n \sum_{m=0}^{t-1-n} \binom{t-1-n}{m} (-d_{1/2} u)^m \\ &= \Phi(X_0) \sum_{n=0}^{t-1} \binom{t-1}{n} (3v)^n (1 - 4u^2)^{t-1-n} \\ &= \Phi(X_0) (1 + 3v - 4u^2)^{t-1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

An jedem inneren Gitterplatz lässt sich eine Plakette in der  $j = 1$ -Darstellung einfügen, was einen Faktor  $3v$  im Beitrag zur Folge hat. Zusätzlich dazu kann man den ursprünglichen Cluster in mehrere zusammenhängende Polymere

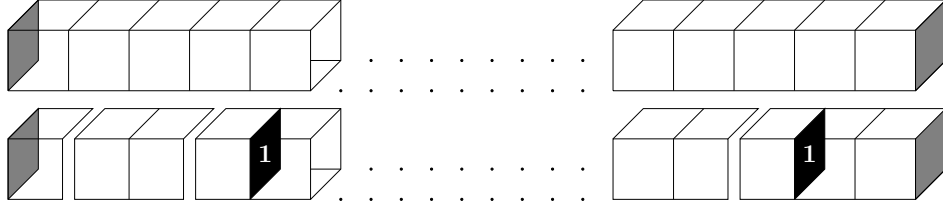


Abbildung 3.7: Polymere ohne und mit inneren Plaketten in der  $SU(2)$ . Diese Plaketten in der  $j = 1$ -Darstellung sind schwarz eingezeichnet.

aufteilen. Jedes Polymer erhält einen eigenen Faktor  $d_{1/2}^2 = 4$ . Der Term  $(-1)^t$  folgt aus dem kombinatorischen Faktor (3.22), der für eine Kette von  $N$  Polymeren, bei denen ein gegebenes Polymer nur seinen vorderen und hinteren Nachbarn berührt, gleich  $(-1)^N$  ist.

In der  $SU(3)$  läuft diese Aufsummation völlig analog, mit dem Unterschied in der veränderten Struktur der irreduziblen Darstellungen. Die einzigen Darstellungen, die gemäß der Regel (3.13) als innere Plakettvariablen zugelassen sind, sind die Darstellungen **3**, **6** und **8**. Bezeichnet man ihre Entwicklungsparameter als  $a_3 \equiv u$ ,  $d_6 a_6 \equiv v$  und  $d_8 a_8 \equiv w$ , so erhält man mit einer zu (3.39) analogen Rechnung

$$\Phi = \Phi(X_0) (1 + 3u + v + w - 18u^2)^{t-1} \quad (3.40)$$

wobei zu beachten ist, dass der Anteil aus der Aufsummation der Polymerketten einen zusätzlichen Faktor 2 enthält, da die  $SU(3)$  komplex-konjugierte Darstellungen enthält, und die einzelnen Polymere demnach jeweils in zwei verschiedenen Darstellungen eingefügt werden können. In Abb. (3.8) sind einige Graphen dazu präsentiert. Da jeder Cluster in den niedrigen Ordnungen aus einer längeren Plakettröhre und zusätzlichen Dekorationen besteht, ergeben sich diese Beiträge zusätzlicher innerer Plaketten als gemeinsame Faktoren dieser Graphen.

Um nun die weiteren Korrekturen zur Glueball-Masse auszurechnen, reicht es nicht aus, die Beiträge der Cluster höherer Ordnung hinzuzuaddieren. Da die reinen Plakettoperatoren nicht auf einzelne Masseneigenzustände des Hamiltonians projizieren, müssen zunächst aus den Operatoren Eigenzustände gebildet werden. Diese Prozedur ist in [1] und [5] näher beschrieben. An dieser Stelle reicht das Ergebnis, das für den  $0^{++}$  Glueball die folgende Kombination liefert

$$\Psi_{0^{++}} = \frac{1}{3} \sum_{\vec{x}} \text{Re} [\text{Tr} U_{12}(\vec{x}) + \text{Tr} U_{23}(\vec{x}) + \text{Tr} U_{31}(\vec{x})], \quad (3.41)$$

wobei die Zahlen 1, 2 und 3 die räumlichen Richtungen bezeichnen und die

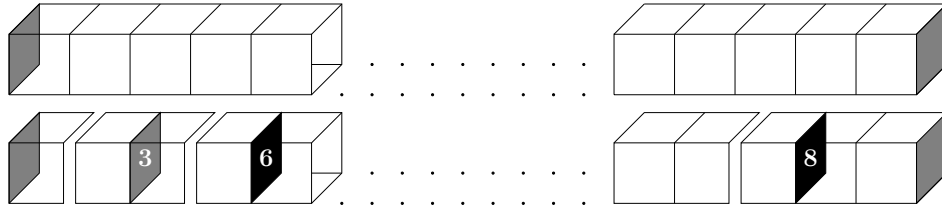


Abbildung 3.8: Polymere ohne und mit inneren Plaketten in der  $SU(3)$ . Graue Plaketten entsprechen der  $\mathbf{3}$ -, schwarze Plaketten der  $\mathbf{6}$ - oder der  $\mathbf{8}$ -Darstellung, bzw. ihren jeweils komplex-konjugierten Darstellungen.

Summation über  $\vec{x}$  Eigenzustände mit Impuls  $\vec{k} = 0$ , also wirkliche Masseneigenzustände liefert.

Da der auf diese Weise konstruierte Operator Eigenzustand des Hamiltonians ist, muss auch die Korrektur zur niedrigsten Ordnung der Entwicklung gemäß

$$\exp(-mt) = \exp(-m_0t)\exp(-\Delta mt) \quad (3.42)$$

exponenzieren. Dieses Verfahren soll im nächsten Unterkapitel am Beispiel der  $SU(2)$  demonstriert werden.

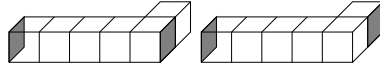


Abbildung 3.9: Faktor  $N = 8$ : Dekoration kann an vier Seiten angebracht werden und für zwei verschiedene Korrelationsplaketten beitragen.

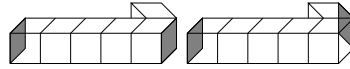


Abbildung 3.10: Faktor  $N = 16$ : Dekoration an vier Seiten, in zwei Richtungen und für zwei Korrelationsplaketten.

### 3.3.2 Glueball-Massen der $SU(2)$

Die Graphen der nächsthöheren Ordnung  $\mathcal{O}(u^4)$  in der Korrektur sind in den Abbildungen (3.9) - (3.11) dargestellt. Von den Graphen jeder Abbildung gibt es insgesamt  $N \cdot t$ , wobei  $N$  der den einzelnen Graphen zugeordnete Faktor ist. Dieser Faktor gibt an, wie oft der jeweilige Graph beiträgt, wenn statt der Korrelation zweier paralleler Plaketten die Korrelationen von (3.41) berechnet werden. Addiert man diese Faktoren zusammen, so ergibt sich für den Vorfaktor der Ordnung  $\mathcal{O}(u^4)$  die Zahl  $34t$ . Höhere Ordnungen lassen sich dann entsprechend berechnen. Die ersten Terme der Reihe bis einschließlich der Ordnung  $\mathcal{O}(u^4)$  lauten somit

$$\begin{aligned} m(0^{++}) &= -4 \ln u - \ln(1 + 3v^2 - 4u^2) - 34u^4 \\ &= -4 \ln u + 2u^2 - \frac{98}{3}u^4. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Da ich nur die Abhängigkeit der  $0^{++}$ -Glueball-Masse von der Temperatur in den führenden Ordnungen in  $u$  betrachte, soll dieses Ergebnis an dieser Stelle ausreichen. Für weitere Informationen zu diesem Thema sei erneut auf [1] und [5] verwiesen.

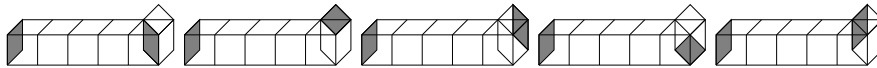


Abbildung 3.11: Faktor  $N = 10$ : Dekoration in zwei Richtungen und für fünf Korrelationsplaketten.

### 3.3.3 Screening-Massen

Bei verschwindenden Temperaturen unterscheiden sich die als Korrelationen in zeitlicher Richtung berechneten Glueball-Massen nicht von den Korrelationen in räumlicher Richtung

$$C(x) = \langle A(x)A(0) \rangle \rightarrow e^{-Mx} \quad (3.44)$$

wobei  $A$  ein lokaler, eichinvarianter Operator mit den gewünschten Quantenzahlen ist. In der Gittertheorie sind dies Linearkombinationen der Plakettoperatoren.

Die Korrelationen liefern im Limes  $x \rightarrow \infty$  über ihren exponentiellen Abfall die sogenannten Screening-Massen  $M$ . Die Screening-Massen sind Eigenwerte der räumlichen Transfer-Matrix bei verschwindendem Impuls und liefern bei endlichen Temperaturen Informationen über die relevanten dynamischen Längenskalen im Plasma. Sie entsprechen der inversen Länge über der ein Medium im thermischen Gleichgewicht empfindlich gegenüber dem Hinzufügen einer statischen Quelle mit den Quantenzahlen des Operators ist. Jenseits von  $1/M$  ist die Quelle abgeschirmt (engl. screened) und das Medium bleibt dort ungestört, vgl [3]. Zur Berechnung der Screening-Masse des  $0^{++}$ -Glueballs verwendet man in völliger Analogie zu Gl. (3.34)

$$\begin{aligned} M &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \langle \Psi(x) | \Psi(0) \rangle \\ &\equiv - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln C(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

mit  $x$  als einer der drei vom Gitter ausgezeichneten Raumrichtungen. Im Gegensatz zu den Glueball-Massen, die über ihre zeitliche Korrelation definiert sind und damit auch festgelegt sind, ist es bei den Screening-Massen möglich, auch Korrelationen in Richtungen zu untersuchen, die nicht entlang einer Gitterachse zeigen. Auf diese Weise ist es möglich die Wiederherstellung der Rotationsinvarianz im Kontinuumsimes zu untersuchen.



# Kapitel 4

## Starkkopplungsentwicklungen bei $T \neq 0$

### 4.1 Clusterentwicklung bei $T \neq 0$

Da gemäß (2.24) und (2.25) die innere Energie und der Druck durch Kenntnis der freien Energie berechnet werden können

$$E(T, V) = \frac{\partial}{\partial \beta_T} \left( \frac{1}{\beta_T} F(T, V) \right) \quad (4.1)$$

$$p(T, V) = -\frac{1}{\beta_T} \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{\beta_T} F(T, V) \right) \quad (4.2)$$

und die Clusterentwicklung für die formale freie Energie gilt, möchte ich im folgenden diese, bzw. genauer gesagt die freie Energiedichte, als Ausgangspunkt der weiteren Rechnungen betrachten.

Die physikalische freie Energiedichte ergibt sich aus der Differenz der formalen freien Energiedichte bei endlichen Temperaturen und bei verschwindenden Temperaturen:

$$\Delta f(N_t; u) = f(N_t; u) - f(\infty; u) \quad (4.3)$$

$$f(u) = \frac{F(u)}{V}. \quad (4.4)$$

Um es noch einmal deutlich zu sagen: Die Größe  $\Delta f(N_t; u)$  bezeichnet die **physikalische** freie Energiedichte, während  $f(N_t; u)$  und  $f(\infty; u)$  **formale** freie Energiedichten sind. Die Differenzbildung entspricht einer Renormierung, wobei  $f(N_t; u)$  die unrenormierte Größe darstellt und  $f(\infty; u)$  ein Vakuumsbeitrag ist. Für gewöhnlich bezeichnet  $f$  die physikalische freie Energiedichte, aber um die Notation innerhalb dieser Arbeit konsistent zu halten,

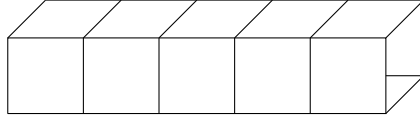


Abbildung 4.1: Ein Beispiel neu beitragender Polymere

werde ich weiterhin obige Schreibweise benutzen und die physikalische freie Energiedichte durch  $\Delta f$  angeben.

Gemäß (4.4) muss ich in der Clusterentwicklung nur diejenigen Terme berücksichtigen, die die veränderten Randbedingungen spüren. Diese Cluster bestehen aus mindestens einer Polymerkette mit einer Ausdehnung in zeitlicher Richtung größer oder gleich  $N_t$ , wie z.B. in Abb. (4.1).

### 4.1.1 Gruppentheoretische Grundlagen

In den zu berechnenden Beiträgen gewisser Graphen treten in den hier betrachteten Ordnungen Integrale über Charakterfunktionen verschiedener irreduzibler Darstellungen der Eichgruppen auf. Da hier nur mit den niedrigsten irreduziblen Darstellungen gerechnet wird, ist es unnötig eine komplette gruppentheoretische Behandlung an dieser Stelle durchzuführen. Trotzdem ist es notwendig, einige grundlegende Aspekte der irreduziblen Darstellungen der  $SU(2)$  und  $SU(3)$  zu behandeln. Die hier gewählte Notation orientiert sich an [6].

#### Darstellungen der $SU(2)$

Die Lie-Algebra für die Generatoren  $J_i$  der  $SU(2)$  lautet

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon^{abc} J_c, \quad (4.5)$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon^{abc}$  und  $\varepsilon^{123} = 1$ . Die Generatoren lassen sich in Matrixschreibweise als Pauli-Matrizen  $\frac{\sigma_i}{2}$  schreiben. Mithilfe der Lie-Algebra können alle irreduziblen Darstellungen klassifiziert werden. Im Fall der  $SU(2)$  werden sie durch eine halb- oder ganzzahlige Zahl  $j$  charakterisiert. Die Dimension der Darstellung ergibt sich dann zu  $d_j = 2j + 1$ . Für die im nächsten Kapitel folgenden Rechnungen sind nur die Darstellungen  $j = 0, \frac{1}{2}$  und  $1$  von Belang. Wichtig ist an dieser Stelle nun die Feststellung, dass das direkte Produkt der irreduziblen Darstellungen

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \quad (4.6)$$

die triviale Darstellung enthält, gemäß der Integrationsregel (3.12) also eine erlaubte Kombination von Plakettvariablen an einem Link darstellt.

### Darstellungen der SU(3)

Die SU(3) hat eine im Gegensatz zur SU(2) kompliziertere Struktur. Die Lie-Algebra lautet

$$[F_a, F_b] = if^{abc}F_c, \quad (4.7)$$

mit den Generatoren  $F_i$ , die als Matrizen die Form von Gell-Mann-Matrizen annehmen. Die irreduziblen Darstellungen der SU(3) sind durch ein Paar zweier ganzer Zahlen  $(p, q)$  charakterisiert und werden üblicherweise nach ihrer Dimension benannt. Der Zusammenhang zwischen  $p$  und  $q$  und der Dimension der Darstellung  $r$  lautet

$$d_r = (1+p)(1+q) \left(1 + \frac{p+q}{2}\right). \quad (4.8)$$

In dieser Arbeit sind die Darstellungen

<b>1</b>	$\longleftrightarrow$	(0, 0)
<b>3</b>	$\longleftrightarrow$	(1, 0)
<b>3*</b>	$\longleftrightarrow$	(0, 1)
<b>6</b>	$\longleftrightarrow$	(2, 0)
<b>6*</b>	$\longleftrightarrow$	(0, 2)
<b>8</b>	$\longleftrightarrow$	(1, 1)

von Interesse.

#### 4.1.2 Beiträge von Polymeren in der fundamentalen Darstellung

Das einfachste Polymer, das aufgrund der veränderten Randbedingungen  $N_t < L$  neu beiträgt, ist ein Kubus, bei dem zwei Seitenflächen fehlen (siehe Abb. 4.2).

Dieses Polymer hat nur dann einen von Null verschiedenen Beitrag, falls die beiden Zeitscheiben, in denen die zwei fehlenden Plaketten liegen, identifiziert werden. Das Gitter hat in diesem Fall also eine effektive Ausdehnung von  $N_t = 1$  in Zeitrichtung. Der Beitrag dieses Polymers ist allgemein nach (3.7)

$$\Phi = \int DU(b) \prod_{i=1}^4 d_f a_f(\beta) \chi_f(U(p_i)). \quad (4.9)$$

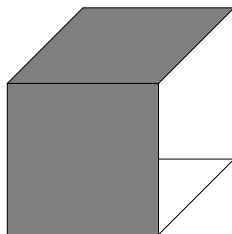


Abbildung 4.2: Kubus mit zwei unbesetzten Seiten bei  $N_t = 1$

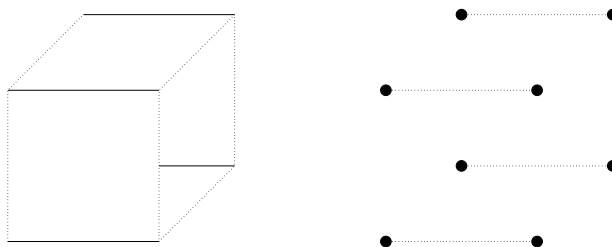


Abbildung 4.3: Die Integrationen beim Kubus sind punktiert gezeichnet.

Das Integrationsmaß  $DU(b)$  soll in diesem und folgenden Fällen immer ein Produkt über alle Linkvariablen der beteiligten Links beinhalten.

Nun werden aufgrund der periodischen Randbedingungen die Linkvariablen an der linken und der rechten Seite identifiziert, siehe Abb. (4.3). Die viermalige Anwendung - je einmal für jeden Link - der Integrationsregel (3.11) sorgt für einen Faktor  $1/d_f^4$ . Damit lautet das Zwischenergebnis für den Beitrag

$$\Phi = \int DU(b) a_f^4(\beta) \prod_{i=1}^4 \chi_f(U(b)) \chi_f(U^\dagger(b)). \quad (4.10)$$

Diese vier Integrationen sind unabhängig voneinander und können sofort ausgeführt werden. Das Ergebnis ist gemäß der Integrationsregel (3.12) jeweils ein Faktor Eins. Die Kreise in Abbildung (4.3) sollen andeuten, dass die entsprechenden Punkte identifiziert worden sind.

Alles zusammengenommen ergibt sich für den Beitrag dieses Polymers das Ergebnis

$$\Phi = a_f^4(\beta). \quad (4.11)$$

Im Gegensatz zum Ergebnis für ein einzelnes Polymer bei  $T = 0$  fehlt ein Faktor  $d_f^2$ . Dies gilt allgemein für analoge Polymere, bei denen **ein zusammenhängendes** Gebiet aufgrund der period. Randbedingungen in sich geschlossen ist, die also die erwähnte toroidale Topologie aufweisen. An der

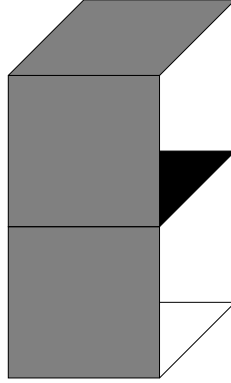


Abbildung 4.4: Doppelkubus mit vier unbesetzten Seiten und einer Plakette in höherdimensionaler Darstellung  $j = 1$  (schwarz)

Berechnung von geschlossenen Polymeren mit zeitlicher Ausdehnung kleiner als  $N_t$  gemäß Kapitel 2 ändert sich nichts.

### 4.1.3 Beiträge von Polymeren mit Plaketten in höherdimensionalen Darstellungen

Sind Plaketten in höherdimensionalen Darstellungen vorhanden, so ändert sich nichts Prinzipielles an der Berechnung des Beitrages.

Der Beitrag des Polymers in Abb. (4.4) lautet

$$\Phi = \int DU(b) d_1 a_1 \chi_1(U(p_7))(\beta) \prod_{i=1}^6 d_{1/2} a_{1/2}(\beta) \chi_{1/2}(U(p_i)). \quad (4.12)$$

Auch hier lässt sich die Integrationsregel (3.11) anwenden. Aufgrund der period. Randbedingungen werden die sechs Linkvariablen in der 1/2-Darstellung und die Linkvariable in der 1-Darstellung an den Rändern identifiziert. Anwendung von (3.11) liefert einen Faktor  $d_{\frac{1}{2}}^{-6} d_1^{-1}$  und es verbleibt eine Integration über sechs Links, die jeweils einen Faktor Eins liefern.

Der Beitrag dieses Polymers lautet also

$$\Phi = a_{\frac{1}{2}}^6(\beta) a_1(\beta). \quad (4.13)$$

Auch hier gibt es also keinen der Dimension der Darstellungen entsprechenden Faktor.

Mit diesen Vorbemerkungen lassen sich die Berechnung der freien Energie und der von ihr abgeleiteten Größen bei endlichen Temperaturen durchführen. Weitere Integralsberechnungen finden sich im Anhang.

## 4.2 Screening-Massen bei $T \neq 0$

Um die Veränderung der Screening-Massen bei endlichen Temperaturen zu berechnen, reicht es wie bei der freien Energie aus, sich nur mit den temperaturabhängigen Graphen zu beschäftigen. Denn für die Differenz der Masse  $M$  bei endlichen Temperaturen gilt

$$\begin{aligned}\Delta M(T) &\equiv M(T) - M(0) \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [\ln C(T; x) - \ln C(0; x)] \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\Delta C(T; x)}{C(0; x)} \right) \right],\end{aligned}\tag{4.14}$$

die durch Kenntnis der Differenz der Korrelationen

$$\Delta C(T; x) \equiv C(T; x) - C(0; x)\tag{4.15}$$

bei verschwindenden und bei endlichen Temperaturen berechnet werden kann.

Wie in [7] gezeigt wird, werden die den Quantenzahlen des  $0^{++}$ -Glueballs entsprechenden Operatoren durch dieselbe Kombination (3.41) von einzelnen Plaketten wie bei  $T = 0$  konstruiert. Allerdings sind im endlichen Temperaturfall die Korrelationen von Plaketten mit zeitlicher Ausdehnung von denen ohne zu unterscheiden. Da in dieser Arbeit aber nur die führende Ordnung in der Differenz der Screening-Massen berechnet werden soll, wird diese Unterscheidung keine größeren Probleme bereiten. Die Berechnung der räumlichen Korrelationen läuft genauso wie im  $T = 0$ -Fall ab.

# Kapitel 5

## Berechnungen bei endlichen Temperaturen

### 5.1 Freie Energie der SU(3)

Nachdem im vorherigen Kapitel die grundlegenden Rechenmethoden der Theorie erläutert wurden, werde ich diese nun benutzen, um die gesuchten Größen zu bestimmen. Wie im letzten Kapitel erläutert, ergibt sich die freie Energiedichte bei endlichen Temperaturen aus der Abweichung der formalen freien Energiedichte bei endlichen Temperaturen von der formalen freien Energiedichte bei  $T = 0$

$$\Delta f(N_t; u) \equiv f(N_t; u) - f(\infty; u). \quad (5.1)$$

Das Ergebnis ist dann in einer Potenzreihe in  $u$  angegeben.

Bei der Berechnung der SCE der freien Energiedichte der SU(3)-Yang-Mills-Theorie ist es möglich, bestimmte Klassen von Graphen geschlossen aufzusummieren. Die Graphen bestehen aus einem sogenannten Grundpolymer, siehe Abb. (5.1), sowie geometrischen und gruppentheoretischen Dekorationen. Das Grundpolymer besteht aus einer Röhre von Plaketten, die als Querschnittsfläche eine Plakette einschließen und ist das kleinste Polymer, dessen Beitrag zur freien Energiedichte sich durch die veränderten Randbedingungen verändert. Geometrische Dekorationen bestehen aus zusätzlichen Plaketten außerhalb des Grundpolymers, gruppentheoretische Dekorationen zeichnen sich durch zusätzliche Plaketten in höherdimensionalen Darstellungen innerhalb oder durch die Ersetzung von Plaketten am Grundpolymer durch solche höherdimensionalen Plaketten aus. Es können natürlich auch beide Dekorationstypen gemeinsam vorhanden sein. Zusätzlich ist es möglich, dass durch zwei zusätzliche Plaketten in der fundamentalen Darstellung an

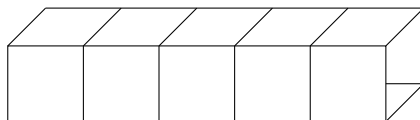


Abbildung 5.1: Das Grundpolymer der temperaturabhängigen Graphen, hier bei einer zeitlichen Ausdehnung von  $N_t = 5$ .

einem Punkt innerhalb des Grundpolymers dieses in zwei oder mehrere einzelne Polymere geteilt wird. Auch diese Graphen sind zu berücksichtigen.

Zusätzlich zu der Art der Dekorationen lassen sich die verschiedenen Graphen auch noch in drei andere Gruppen einteilen. Da ich die Differenz der freien Energie zwischen endlichen und verschwindenden Temperaturen berechne, muss ich zwischen solchen Graphen unterscheiden, die bei endlichen Temperaturen nicht mehr beitragen, und solchen die aufgrund der veränderten Randbedingungen neu beitragen. Zusätzlich dazu kann es sein, dass Graphen sowohl bei  $T = 0$ , als auch bei  $T \neq 0$  beitragen, allerdings mit verändertem Wert. Die Typen nenne ich im folgenden neue und verbotene Graphen, sowie Graphen mit verändertem Beitrag. Die Beiträge der dritten Gruppe werden dann, je nach Vorzeichen der Veränderung, zu einer der beiden anderen Gruppen hinzugezählt.

Nachdem ich im ersten Unterkapitel einige Vorbemerkungen zur Berechnung mache, werde ich im zweiten Unterkapitel diejenigen Graphenklassen in den niedrigsten Ordnungen geschlossen aufsummieren, bei denen dieses möglich ist. Im letzten Unterkapitel werde ich dann Korrekturen mit einbeziehen, die vor allem bei kleineren  $N_t$  wichtig werden und sich als geometrische Dekorationen äußern. Weitere Details zu den Berechnungen spezieller Integrale und zur Abzählung der Anzahl von Polymeren in einer Graphenklasse sind im Anhang aufgeführt.

### 5.1.1 Vorbemerkungen

Zunächst ist es notwendig einige Anmerkungen zu den Möglichkeiten des Hinzufügens von Plaketten zu machen. Zum Grundpolymer der Ausdehnung  $N_t$  können ebensoviele zusätzliche Plaketten innerhalb seiner geschlossenen Oberfläche zugefügt werden. Das heißt aber, dass maximal drei Plaketten an einem Link zusammentreffen können. Da die Ausreduktion der Darstellungsmatrizen der Linkvariablen die triviale Darstellung enthalten muss, ergibt sich dadurch eine Beschränkung der möglichen Darstellungen der zusätzlichen Plaketten. Das Grundpolymer besteht aus Plaketten je einer der beiden fundamentalen Darstellungen  $\mathbf{3}$  oder  $\mathbf{3}^*$ . Sind alle Plakettvariablen in der-



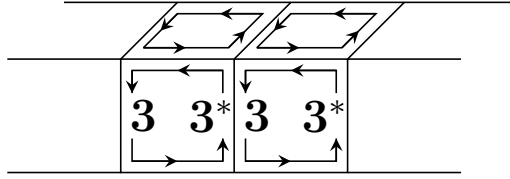


Abbildung 5.2: Sind alle Plaketten eines Polymers mit denselben Darstellungen besetzt, so unterscheiden sich die beiden an einem Link aufeinandertreffenden Linkvariablen in ihrer Orientierung.

selben Darstellung, wie es im Grundpolymer der Fall ist, so erhält man an jedem Link das Produkt  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ , siehe Abb. (5.2)

Daher lautet die Frage, welche irreduziblen Darstellungen der  $SU(3)$  die triviale Darstellung enthalten, wenn man sie mit zwei fundamentalen Darstellungen direkt multipliziert. Zur Beantwortung dieser Fragen sind sogenannte Young-Tableaux geeignet, deren Formalismus in [6] beschrieben wird. Wendet man dieses Verfahren zur Ausreduktion von Produktdarstellungen an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} &= \mathbf{1} \oplus \dots \\
 \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* &= \mathbf{1} \oplus \dots \\
 \mathbf{3} \otimes \mathbf{6}^* \otimes \mathbf{3} &= \mathbf{1} \oplus \dots \\
 \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{3}^* &= \mathbf{1} \oplus \dots \\
 \mathbf{3} \otimes \mathbf{8} \otimes \mathbf{3}^* &= \mathbf{1} \oplus \dots
 \end{aligned}$$

wobei die Punkte für höherdimensionale Darstellungen stehen. Da entsprechend Abb. 5.2 ein Link im Grundpolymer mit zwei Linkvariablen in der fundamentalen und ihrer komplex-konjugierten Darstellung besetzt ist, kann nur die adjungierte Darstellung  $\mathbf{8}$  als zusätzliche Plakette eingesetzt werden, ohne dass sich die Orientierungen der beteiligten Plakettvariablen unterscheiden müssen. Dies führt dazu, dass das Grundpolymer, das aufgrund der periodischen Randbedingungen in sich selbst, also toroidal, geschlossen ist, nur mit einer geraden Anzahl von zusätzlichen  $\mathbf{3}$ - oder  $\mathbf{6}^*$ -Plaketten versehen werden kann. Andernfalls würden an einem Link Integrale über entweder  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  oder  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*$  vorliegen, welche gemäß (3.12) verschwinden und somit den gesamten Beitrag eines Graphen zu Null setzen. Eine vollkommen analoge Überlegung gilt dann auch für das Grundpolymer in der komplex-konjugierten Fundamentaldarstellung.

In der Klasse der verbotenen Graphen ist das nicht der Fall, da diese nicht durch die veränderten Randbedingungen in sich selbst geschlossen werden.

Hier ist es also unerheblich wie oft zusätzliche **3**- oder **6**-Plaketten hinzugefügt werden.

## 5.1.2 Aufsummation von Graphenklassen

### Neue Graphen

Unter Berücksichtigung der Vorbemerkungen gelingt also die geschlossene Aufsummation der Beiträge des Grundpolymers und seiner gruppentheoretischen Dekorationen

$$\begin{aligned}\phi_1^+ &= \sum_{n=0}^{N_t} \binom{N_t}{n} w^n \sum_{m=0}^{N_t-n} \binom{N_t-n}{m} v^m \sum_{l=0}^{N_t-m-n} \binom{N_t-m-n}{l} (3u)^l * \\ &* \left( \frac{1}{2} (1 + (-1)^{m+l}) \right) \\ &= \frac{1}{2} [(1 + 3u + v + w)^{N_t} + (1 - 3u - v + w)^{N_t}] \quad (5.2)\end{aligned}$$

$$\equiv \frac{1}{2} [a^{N_t} + b^{N_t}], \quad (5.3)$$

mit zwei zur Abkürzung definierten Termen  $a$  und  $b$ . Der Index 1 soll dabei andeuten, dass es sich um die führenden Terme der freien Energie handelt. Der Faktor  $1/2[1 + (-1)^{m+l}]$  sorgt dafür, dass nur Polymere mit einer geraden Anzahl von **3**- und **6**-Plaketten beitragen. Der Beitrag  $\phi_1^+$  gilt nur für ein einzelnes Polymer mit inneren Plaketten und muss noch mit  $6/N_t$  multipliziert werden, um den gesamten Beitrag  $\Phi_1^+$  zur freien Energie zu erhalten. Der Faktor  $6 = 2 \cdot 3$  ergibt sich aus zwei Fundamentaldarstellungen und drei verschiedenen Möglichkeiten für die Querschnittsplakette des Grundpolymers. Die Division durch  $N_t$  sorgt für eine korrekte Zählung der Anzahl der Graphen, die gemäß Gl. (5.3) beitragen, da das Grundpolymer durch Translationen in zeitlicher Richtung wieder in sich selbst übergeht. Insgesamt ergibt sich demnach

$$\Phi_1^+ = \frac{3}{N_t} [(1 + 3u + v + w)^{N_t} + (1 - 3u - v + w)^{N_t}] \quad (5.4)$$

### Verbotene Graphen

Rechnerisch analog geschieht die Aufsummation des Grundpolymers mit Seitenplaketten und inneren gruppentheoretischen Dekorationen, als Prototyp der verbotenen Graphen, siehe Abb. 5.3. Da diese Polymerklasse keine Randbedingungen bzgl. der endlichen  $N_t$ -Ausdehnung erfüllen muss, können wie

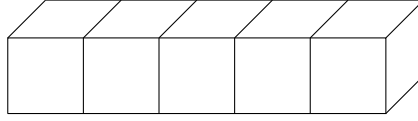


Abbildung 5.3: Der erste verbotene Graph.

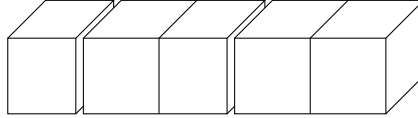


Abbildung 5.4: Beispiel für einen Cluster aus mehreren Polymeren bei  $N_t = 5$

bereits erwähnt auch ungerade Anzahlen von inneren **3**- und **6\***-Plaketten auftreten. Innerhalb dieses Polymers ist Platz für maximal  $N_t - 1$  Plaketten, und ein Faktor  $d_3^2$  muss hinzugenommen werden, der in der Berechnung der entsprechenden Integrale gemäß Gl. (3.17) erscheint:

$$\phi_1^- = 9(1 + 3u + v + w)^{N_t - 1} = 9a^{N_t - 1}. \quad (5.5)$$

Auch dies ist der Beitrag eines einzelnen Polymers mit Dekorationen und muss noch mit der Anzahl der entsprechenden Polymere - hier:  $N = 6$  - multipliziert werden, um das Endergebnis zu erhalten. Erneut ergibt sich der Faktor aus den beiden fundamentalen Darstellungen und den drei möglichen Querschnittsplaketten. Allerdings muss in diesem Fall nicht durch  $N_t$  geteilt werden, da die Anzahl dieser Graphen in der  $T = 0$ -Theorie gezählt werden muss. Der gesamte Beitrag lautet damit

$$\Phi_1^- = 54(1 + 3u + v + w)^{N_t - 1}. \quad (5.6)$$

### Graphen mit verändertem Beitrag

Als dritte Gruppe sind die Graphen mit verändertem Beitrag zu berücksichtigen. Hierzu zählen diejenigen Graphen, die aus mehreren aufeinanderfolgenden Polymeren bestehen, siehe Abb. (5.4). Auch diese können innere Dekorationen aufweisen. Allerdings ist die Summation in diesem Fall nicht ganz so einfach wie zuvor. Da diese Cluster aus mehreren Polymeren bestehen, ist ihr kombinatorischer Faktor  $a(C)$  in den Rechnungen zu berücksichtigen.

In der  $T = 0$ -Theorie ergibt sich der Faktor bei  $i$  Polymeren, die wie eine aufgeschnittene Kette aneinandergereiht sind, zu  $a(C) = (-1)^i$ . Zusätzlich erhält man aus der Ausintegration einen Faktor  $(9u^2)^i$  und aus der Anzahl der

verschiedenen Darstellungen der Polymere einen Faktor  $2^i$ . Da die Polymere mit dem Faktor  $a(C)$  so nicht mehr beitragen, wird ihr Beitrag zur Gruppe mit den verbotenen Beiträge gezählt. Es ergibt sich analog zu Gl. (5.5) für ein einzelnes Polymer mit inneren Zusätzen

$$\begin{aligned}\phi_1^- &= 9(1 + 3u + v + w - 18u^2)^{N_t-1} \\ &= 9(a - 18u^2)^{N_t-1} \\ &\equiv 9c^{N_t-1}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Damit lautet der gesamte Beitrag der verbotenen Graphen dieser Klasse von Polymeren und Clustern, also inklusive derjenigen, die in (5.6) aufsummiert wurden

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(u) &= 54 u^{N_t} c^{N_t-1} \\ &= 54(1 + 3u + v + w - 18u^2)^{N_t-1}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Wie bereits erwähnt, verändert sich durch die Randbedingungen der kombinatorische Faktor, da bei Clustern der Länge  $N_t$  das Anfangs- und das Endpolymer nun miteinander verbunden sind, die Kette also aufgrund der veränderten Struktur des Gitters geschlossen ist. Es ist dann

$$a(C) = i(-1)^i\tag{5.9}$$

wobei  $i$  wieder die Anzahl der Berührungsstellen zwischen den einzelnen Polymeren angibt, bzw die Anzahl der Polymere selbst.

Der auf diese Weise veränderte Beitrag wird zu den neuen Graphen hinzugerechnet. Insgesamt ergibt sich dann bis auf den Faktor  $\frac{6}{N_t}$

$$\begin{aligned}\phi_1^+ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N_t} \binom{N_t}{i} (i-1)(-18u^2)^i a^{N_t-i} = \\ &= \frac{1}{2} [a^{N_t} - (a+y)^{N_t} + yN_t(a+y)^{N_t-1}] = \\ &= \frac{1}{2} [a^{N_t} - c^{N_t} + yN_t c^{N_t-1}]\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$y \equiv -18u^2.\tag{5.10}$$

Die Division durch 2 berücksichtigt, dass im Term  $\frac{6}{N_t}$  bereits ein Faktor 2 aufgrund der beiden Orientierungsmöglichkeiten des Grundpolymers hinzumultipliziert wurde.

Der Beitrag dieser Klasse von Graphen lautet somit, inklusive derjenigen aus (5.4)

$$\Phi_1^+(u) = \frac{6}{N_t} u^{N_t} \left[ \frac{1}{2} (a^{N_t} + b^{N_t}) + \frac{1}{2} y N_t c^{N_t-1} + a^{N_t} - c^{N_t} \right] \quad (5.11)$$

Die Differenz der Beiträge und damit die gesuchte freie Energiedichte in den niedrigsten Ordnungen ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1(N_t; u) &= \Phi_1^+(u) - \Phi_1^-(u) \\ &= \frac{3}{N_t} u^{4N_t} [(1 + 3u + v + w - 18u^2)^{N_t} + (1 - 3u - v + w)^{N_t}] \\ &= \frac{3}{N_t} u^{4N_t} (c^{N_t} + b^{N_t}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$(5.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta f(N_t; u) &= -\Delta\Phi_1(N_t; u) (1 + \mathcal{O}(u^4)) \\ &= -\frac{3}{N_t} u^{4N_t} (c^{N_t} + b^{N_t}) (1 + \mathcal{O}(u^4)) \end{aligned} \quad (5.14)$$

und ist ein erstes Zwischenergebnis meiner Arbeit.

### 5.1.3 Weitere Korrekturen

Aufbauend auf dem letzten Kapitel müssen nun die Graphen mit geometrischen Dekorationen untersucht werden. Bei der Berechnung der entsprechenden Integrale und der Anzahl der auftretenden Polymere und Cluster gibt es einige Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten treten auf, wenn mehr als zwei Plaketten an einem Link zusammentreffen, ohne dass zwei dieser Plaketten mit Variablen in der fundamentalen Darstellung besetzt sind. An dieser Stelle möchte ich nur die Ergebnisse angeben, deren Erläuterung, auch im Hinblick der genauen Abzählung der einzelnen Cluster- und Polymertypen, in den Anhang verschoben wird.

#### Erste Korrektur

Die erste Korrektur zu den aufsummierten Graphen des Grundpolymers stammt von Clustern mit einer geometrischen Form wie in Abb. (5.5) dargestellt. Die Anzahl dieser Art von Polymeren ist

$$N = 2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4 = 72 \quad (5.15)$$

und somit  $12N_t$ -mal höher als die des einfachen Grundpolymers. Dieser Faktor kommt dadurch zustande, dass die Dekoration an den vier Seiten des Kubus angebracht sein und in insgesamt drei Richtungen zeigen kann. Zusätzlich

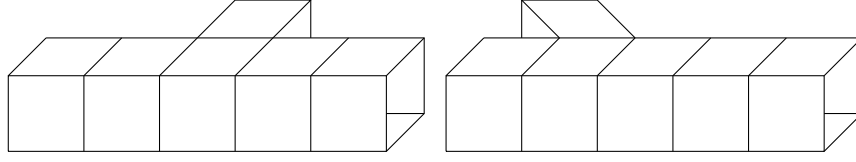


Abbildung 5.5: Grundpolymere mit Kuben als Dekorationen.

dazu kann der Kubus innerhalb einer Seite an insgesamt  $N_t$  Plaketten angebracht werden. Da diese geometrische Dekoration für alle Graphentypen, also die neuen und verbotenen Graphen und die Graphen mit verändertem Beitrag, hinzugefügt werden kann, ergibt sich hieraus die Korrektur des Zwischenergebnisses (5.14) zu

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_2(u) &= \Delta\Phi_1(u) \cdot (1 + 12 N_t u^4) \\ &= \frac{3}{N_t} u^{4N_t} (c^{N_t} + b^{N_t}) (1 + 12 N_t u^4)\end{aligned}\quad (5.16)$$

mit dem gemeinsamen Korrekturfaktor  $(1 + 12 N_t u^4)$ .

### Höhere Korrekturen

Im Anhang sind Graphen und Beiträge von Korrekturen der Ordnungen ( $\mathcal{O}(u^5)$ - $\mathcal{O}(u^7)$ ) zusammengestellt, die nicht durch die Aufsummationen des vorigen Abschnitts erfasst sind. Während (5.16) für alle  $N_t \geq 2$  gilt, muss man bei den höheren Korrekturen zwischen  $N_t = 2$  und  $N_t \geq 3$ , in den hier betrachteten Ordnungen, unterscheiden.

Für  $N_t \geq 3$  gilt für die korrigierten Beiträge der neuen Graphen  $\Phi_3^+$  und der verbotenen Graphen  $\Phi_3^-$

$$\begin{aligned}\Phi_3^+ &= \left( 216 u + 72 (v + w) - 1068 u^2 + \frac{27}{2048} w^4 u^{-2} + \frac{1}{24} v^4 u^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 216 N_t w u + \frac{81}{2048} w^4 u^{-1} + \frac{1}{8} v^4 u^{-1} + 216 (N_t - 1) u^3 \right) u^{4N_t+4}\end{aligned}\quad (5.17)$$

$$\Phi_3^- = (270 + 2754 N_t u) u^{4N_t+6}.\quad (5.18)$$

Insgesamt ergibt sich demnach für die Differenz der freien Energiedichte bei endlichen Temperaturen für  $N_t \geq 3$  bis einschließlich der Ordnung  $\mathcal{O}(u^7)$

$N_t$	$b_0$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$
2	-3	-27	135	-298,3	87,75	-1540	7938
3	-2	-54	216	-315	634,5	-6159	$2,226 \cdot 10^4$
4	-1,5	-81	297	-497,3	2396	$-1,558 \cdot 10^4$	$4,727 \cdot 10^4$
5	-1,2	-108	378	-922,5	6102	$-3,148 \cdot 10^4$	$8,954 \cdot 10^4$
6	-1	-135	459	-1712	$1,248 \cdot 10^4$	$-5,623 \cdot 10^4$	$1,666 \cdot 10^5$
8	-0,75	-189	621	-4871	$3,617 \cdot 10^4$	$-1,498 \cdot 10^5$	$5,889 \cdot 10^5$
10	-0,6	-243	783	$-1,095 \cdot 10^4$	$7,931 \cdot 10^4$	$-3,575 \cdot 10^5$	$1,922 \cdot 10^6$
12	-0,5	-297	945	$-2,091 \cdot 10^4$	$1,477 \cdot 10^5$	$-7,988 \cdot 10^5$	$5,369 \cdot 10^6$
16	-0,375	-405	1269	$-5,639 \cdot 10^4$	$3,837 \cdot 10^5$	$-3,292 \cdot 10^6$	$2,765 \cdot 10^7$

Tabelle 5.1: Koeffizienten der Starkkopplungsentwicklung der freien Energiedichte im Parameter  $u$  bei verschiedenen  $N_t$

das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\Delta f(u) &= -\Delta\Phi(u) = -\Delta\Phi_2(u) - \Phi_3^+ + \Phi_3^- \\
&= -\frac{3}{N_t} (c^{N_t} + b^{N_t}) (1 + 12 N_t u^4) u^{4N_t} \\
&\quad - (216u - 366u^2 + (3888 - 2106N_t)u^3) u^{4N_t+4} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Für  $N_t = 2$  muss dieser Ausdruck mit

$$-\Phi_4^+ = -44 u^{4N_t+4} + 36 u^{4N_t+6} \quad (5.20)$$

für die bei dieser zeitlichen Ausdehnung zusätzlichen Polymere addiert werden. Der Beitrag des gemäß des Anhangs bei  $N_t = 2$  nicht mehr beitragenden Graphen 6.2 wurde hier berücksichtigt.

Insgesamt erhält man also für einige ausgewählte, niedrige  $N_t$  die folgende Tabelle mit den Koeffizienten der freien Energiedichte in einer Entwicklung nach  $u$

$$\Delta f(u) = \sum_{n=0}^7 b_n u^n, \quad (5.21)$$

wobei der Koeffizient  $b_1$  für alle  $N_t$  gleich Null ist.

## 5.2 Freie Energie der SU(2)

Die entsprechenden Überlegungen zur geschlossenen Aufsummation können für die SU(2) benutzt werden. Hier ist die Situation für die führenden Terme, also dem Grundpolymer mit gruppentheoretischen Dekorationen, einfacher als im Falle der SU(3). Dies liegt an der einfacheren Struktur der irreduziblen Darstellungen der SU(2). Als zusätzliche Plakettdarstellung kommt nur die  $j = 1$ -Darstellung in Frage. Da die Berechnung, auch für die Graphen mit verändertem Beitrag, ansonsten völlig analog ist, kann ich das Ergebnis nach kurzer Rechnung angeben zu

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= -\frac{3}{N_t} \sum_{i=0}^{N_t} \binom{N_t}{i} (i-1) (-4u^2)^i \sum_{j=0}^{N_t-i} \binom{N_t-i}{j} (3v)^j \\ &= 12u^2 (1+3v-4u^2)^{N_t-1} + \frac{3}{N_t} (1+3v-4u^2)^{N_t}\end{aligned}\quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}\Phi^- &= 12u^2 \sum_{i=0}^{N_t-1} \binom{N_t-1}{i} (-4u^2)^i \sum_{j=0}^{N_t-1-i} \binom{N_t-1-i}{j} (3v)^j \\ &= 12u^2 (1+3v-4u^2)^{N_t-1}\end{aligned}\quad (5.23)$$

$$\Delta\Phi = \frac{3}{N_t} (1+3v-4u^2)^{N_t}.\quad (5.24)$$

Die führenden Terme der freien Energiedichte der SU(2) Gittereichtheorie ergeben sich damit zu

$$\Delta f(u) = -\frac{3}{N_t} (1+3v-4u^2)^{N_t}.\quad (5.25)$$

## 5.3 Screening-Massen

Betrachtet man die Korrelation in  $z$ -Richtung bei endlichen Temperaturen, so sind, bei gegebenen  $z$  und  $N_t$ , die kleinsten zur Differenz der Masse beitragenden Graphen Kreuze aus Plakettröhren mit Ausdehnungen  $z$  und  $N_t$ . Entsprechende Graphen sind in Abb. (5.6) dargestellt.

Gemäß den Gln. (3.43) und (3.45) ergibt sich ihr Beitrag unter Berücksichtigung der Summation über alle  $\vec{x}$  zu

$$\Delta\Phi = zN_t d_f^2 u(\beta_1)u(\beta_2)u^{4z+4N_t-6}(2 - \delta_{N,2})\quad (5.26)$$



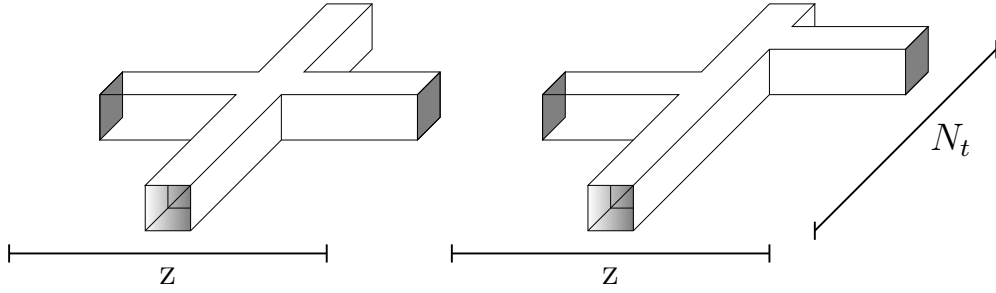


Abbildung 5.6: Zur führenden Ordnung der Differenz der Screening-Massen beitragende Polymere bei parallelen Korrelationsplaketten.

und die Differenz der Korrelationen lautet damit

$$\Delta C(T; z) = N^2 \left( \frac{du}{d\beta} \right)^2 z N_t d_f^2 u^{4z+4N_t-6} (2 - \delta_{N,2}). \quad (5.27)$$

Damit gilt für die Massenänderung bei endlichen Temperaturen in der niedrigsten Ordnung

$$\Delta M(T) = -\frac{2}{3} N_t u^{4N_t-6}. \quad (5.28)$$

Der Faktor  $2/3$  ergibt sich aus der Division durch 3 in Gl. (3.41) und der Tatsache, dass nur die Korrelationen zwischen parallelen Plaketten mit zeitlicher Ausdehnung in dieser Ordnung beitragen. Das sind in diesem Fall - bei Korrelation in  $z$ -Richtung - die  $(x, t)$  und die  $(y, t)$ -Plaketten. Die  $(x, y)$ -Plaketten bilden zur  $N_t$ -Plakettröhre einen rechten Winkel, so dass zusätzliche Plaketten erforderlich sind, um das Polymer zu schließen. Die führende Ordnung der Differenz der Screening-Massen ist also unabhängig von der zugrundeliegenden Eichgruppe.

# Kapitel 6

## Diskussion

### 6.1 Freie Energiedichte

#### 6.1.1 Auswertung

##### Summierte Beiträge

Das Ergebnis Gl. (5.14) ist auch ohne die weiteren Korrekturen beachtenswert. Für ein freies Bosonengas gilt [2] im Kontinuum die Gleichung

$$\ln Z = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta_T \omega}). \quad (6.1)$$

Mit der Dispersionsrelation

$$\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (6.2)$$

gilt für die freie Energiedichte im klassischen, nichtrelativistischen Limes, der durch  $T \ll \omega$  und

$$\omega(p) \simeq m + \frac{p^2}{2m} \quad (6.3)$$

definiert ist

$$\Delta f_{kont}(T) = -\frac{1}{\beta_T} \left( \frac{m}{\pi \beta_T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m\beta_T}, \quad (6.4)$$

wobei die übliche Schreibweise der freien Energiedichte der Notation in dieser Arbeit angepasst wurde.

Für die auf dem Gitter in einer SCE berechnete freie Energiedichte gilt nach (5.14)

$$\Delta f_{lat}(N_t; u) = -\frac{3}{N_t} u^{4N_t} [(1 + 3u + v + w - 18u^2)^{N_t} + (1 - 3u - v + w)^{N_t}] \quad (6.5)$$

Beachtet man nun noch die Äquivalenz

$$N_t a = \frac{1}{T} = \beta_T, \quad (6.6)$$

so erkennt man, dass Gl. (6.5) bis auf einen Vorfaktor Gl. (6.4) mit den niedrigsten Glueball-Massen reproduziert. Diese sind in den führenden Ordnungen gegeben durch

$$m(A_1) = -4 \ln u - \ln(1 + 3u + v + w - 18u^2) \quad (6.7)$$

$$m(E) = -4 \ln u - \ln(1 + 3u + v + w - 18u^2) \quad (6.8)$$

$$m(T_1) = -4 \ln u - \ln(1 - 3u - v + w), \quad (6.9)$$

wobei  $A_1$ ,  $E$  und  $T_1$  irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe  $\mathbf{O}$  sind. Wie in [1] beschrieben wird, handelt es sich bei diesen Darstellungen um die Gitteranaloge zu Spin- $J$ -Teilchen im Kontinuum. Die Darstellung  $A_1$  ist eindimensional und entspricht einem  $J = 0$ -Glueball,  $E$  ist eine zweidimensionale Darstellung und hängt mit  $J = 2$  zusammen und  $T_1$  ist dreidimensional und korrespondiert mit einem  $J = 1$ -Glueball. Die entsprechenden Linearkombinationen der Plakettoperatoren sind bis auf Normierung

$$A_1^{++} : \quad \text{Re}(\text{Tr } U_{12} + \text{Tr } U_{23} + \text{Tr } U_{31}) \quad (6.10)$$

$$E^{++} : \quad \text{Re}(\text{Tr } U_{13} - \text{Tr } U_{23}), \text{Re}(\text{Tr } U_{13} + \text{Tr } U_{23} - 2\text{Tr } U_{12}) \quad (6.11)$$

$$T_1^{+-} : \quad \text{Im}(\text{Tr } U_{12}), \text{Im}(\text{Tr } U_{23}), \text{Im}(\text{Tr } U_{31}). \quad (6.12)$$

Die oberen Indizes der Darstellungen stehen für die Parität und die Ladungsparität. Letztere ist äquivalent zur Komplexkonjugation von Wilson-Loops, also von rechteckigen Schleifen aus Links. Da die  $SU(2)$  keine komplexkonjugierten Darstellungen besitzt, tritt der letztgenannte Glueball in dieser Eichgruppe nicht auf, da er negative Ladungsparität besitzt.

Weitere Darstellungen können aus den einfachen Plakettoperatoren nicht erstellt werden. Wie in [1] weiterhin erläutert wird, entsprechen die Darstellungen zusätzlich auch Kontinuumsdarstellungen mit höheren Spins. Da allerdings angenommen wird, dass die niedrigsten Massen zu den niedrigsten Spins gehören, sollten die genannten Darstellungen die führenden Terme der freien Energiedichte dominieren.

Gewichtet man die Massen der einzelnen Glueballs nun mit ihrer Dimensionalität, so ergibt sich aus (6.5)

$$\Delta f_{lat}(N_t; u) = -\frac{1}{N_t} [e^{-m(A_1)N_t} + 2e^{-m(E)N_t} + 3e^{-m(T_1)N_t}], \quad (6.13)$$

womit die obige Behauptung gezeigt ist.

Zu dieser Interpretation passt auch das entsprechende SU(2)-Ergebnis

$$\Delta f(N_t; u) = -\frac{3}{N_t} (1 + 3v - 4u^2)^{N_t} \cdot u^{4N_t}. \quad (6.14)$$

Da es wie erwähnt in der SU(2) keine komplex-konjugierten Darstellungen gibt, tragen nur die  $A_1$ - und  $E$ -Glueballs bei. Für diese gilt

$$m(A_1) = -4 \ln u - \ln(1 + 3v - 4u^2) \quad (6.15)$$

$$m(E) = -4 \ln u - \ln(1 + 3v - 4u^2) \quad (6.16)$$

und man erhält

$$\Delta f_{lat}^{SU(2)}(N_t; u) = -\frac{1}{N_t} (e^{-m(A_1)N_t} + 2e^{-m(E)N_t}). \quad (6.17)$$

Der fehlende Vorfaktor in (6.4) kann vermutlich durch eine im Starkkoppelungsbereich modifizierte Dispersionsrelation erklärt werden. Trotzdem ist es beachtlich, dass die SCE der freien Energiedichte das  $T \rightarrow 0$ -Ergebnis der entsprechenden Kontinuums-Rechnung wiedergibt. Dadurch erscheint es also plausibel, dass die angewandte Methode, analytische Resultate bei endlichen Temperaturen durch Starkkopplungsentwicklungen zu erhalten, durchaus gerechtfertigt ist.

## Potenzreihen

Eines der ursprünglichen Ziele dieser Arbeit war es, mithilfe einer Reihenentwicklung der freien Energie bei endlichen Temperaturen, Informationen über den Deconfinement-Phasenübergang der reinen Eichtheorie zu erhalten. Dieses Ziel kann man als noch nicht erreicht ansehen, wie eine Analyse der Tabelle (5.1) zeigt, in der die Koeffizienten der niedrigsten Ordnungen der freien Energiedichte der SU(3) für verschiedene  $N_t$  angegeben sind. Allgemein entspricht ein Phasenübergang zweiter Ordnung einer Singularität auf der reellen Parameterachse, hier der  $\beta$ - oder  $u$ -Achse. Das asymptotische Verhältnis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \beta_c \quad (6.18)$$

der Koeffizienten  $b_n$  der Reihe sollte unter gewissen Voraussetzungen einen Wert für den kritischen Parameter  $\beta_c$  liefern. Eine Voraussetzung wäre dabei, dass die gesuchte reelle Singularität auch wirklich die am Entwicklungspunkt  $\beta = 0$  nächstgelegene Singularität ist. Nimmt man diese Voraussetzung nun als gegeben an, dann sollten die Verhältnisse der berechneten Koeffizienten einen Schätzwert für die Lage des Phasenübergangs liefern.

Abbildung 6.1: Ergebnisse von Monte-Carlo-Simulationen des Drucks in der reinen SU(3)-Eichtheorie. Drei verschiedene zeitliche Gitterausdehnungen  $N_t = 4, 6$  und  $8$  sind betrachtet worden. Unterhalb der kritischen Temperatur ist der Druck, der der negativen freien Energiedichte entspricht praktisch verschwindend. Die Abbildung ist der Referenz [8] entnommen.

Wie in der Tabelle erkennbar, sind aber die Verhältnisse der Koeffizienten nicht von einheitlichem Vorzeichen. Dies ist aber notwendig, um aus dem Verhältnistest (6.18) eine reelle Singularität zu bestimmen. Es ist demnach wahrscheinlich, dass die berechneten Reihen noch viel zu kurz sind, als dass man aus den Koeffizienten die Lage der Singularität ablesen könnte.

Wie man aus der Abbildung 6.1 entnehmen kann, ist der Druck, der der negativen Energiedichte entspricht, unterhalb der kritischen Temperatur praktisch nicht vorhanden. Dieses Verhalten lässt sich allerdings mit den hier erzielten Ergebnissen verstehen. Die führende Ordnung in der freien Energiedichte ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(u^{4N_t})$ , und da  $u$  typischerweise kleiner als 1 ist, ist der gesamte Ausdruck fast Null.

### 6.1.2 Ausblick

Um die Lage des Phasenübergangs zu bestimmen gibt es noch mehrere Möglichkeiten der Verbesserung, die im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht oder nur teilweise berücksichtigt werden konnten. Die einfachste Methode wäre es sicherlich, weitere Koeffizienten der Reihenentwicklung zu bestimmen. Der Rechenaufwand steigt allerdings mit jeder weiteren Ordnung sehr stark an, einerseits durch immer vielfältigere geometrische Formen der Polymere und andererseits durch die Einbeziehung höherdimensionaler Darstellungen der Eichgruppen. Dadurch wird diese Möglichkeit in hohem Maße begrenzt. Die Nutzung von rechnergestützten Methoden könnte hier zu einem gewissen Grade helfen.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verbesserung der Analysemethoden. Der oben angeführte Verhältnistest ist zwar recht einfach, allerdings auch ebenso abhängig von langen Reihen oder schneller Konvergenz der Verhältnisse. Da die Koeffizienten der Entwicklung unabhängig von der Rechenmethode sind, kann man versuchen aus ihnen weitere Informationen über die gesuchte Funktion selbst herauszuholen. Sei diese Funktion nun allgemein mit  $f(x)$  bezeichnet. Ein geeignetes Mittel können Padé-Approximanten sein. Diese kurz Padés genannten rationalen Funktionen sind als Verhältnisse zweier Polynome  $P_L(x)$  und  $Q_M(x)$  definiert. Die Grade  $L$  und  $M$  der Polynome werden so gewählt, dass  $L+M = n$  gilt, wobei  $x^n$  eine bekannte Ordnung der Taylorentwicklung der gesuchten Funktion ist. Die Polynome können dann durch die Forderung, dass die Padé-Approximante  $[L, M]$

$$[L, M](x) \equiv \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \sum_{i=1}^n a_n x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad (6.19)$$

mit der Taylorentwicklung in den bekannten niedrigsten Ordnungen übereinstimmen soll, eindeutig bestimmt werden. Diese Verfahren werden in [12]

näher erläutert.

Die Padés haben zwei offensichtliche Vorteile gegenüber den Taylorentwicklungen. Zunächst können sie als rationale Funktionen im Limes  $x \rightarrow \infty$  endliche Werte annehmen, während das Verhalten der trunkierten Taylorentwicklungen in diesem Limes durch das Vorzeichen der höchsten berechneten Ordnung bestimmt wird, und entweder gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$  geht. Dies ist natürlich im Allgemeinen eher unphysikalisch. Auch der zweite Vorteil liegt an ihrer Natur als rationale Funktion, denn sie können durch Nullstellen des Nenners auf natürliche Weise Singularitäten besitzen. Trunkierte Taylorentwicklungen können dagegen, da sie als Polynome analytische Funktionen sind, keine Singularitäten aufweisen. Als Nachteil kann es sich allerdings zeigen, dass die Padés durchaus zusätzliche Singularitäten aufweisen. Betrachtet man nur eine einzelne Padé-Approximante, so lässt sich nicht entscheiden, welches die gesuchte und welches eine eventuelle überflüssige Singularität ist. Bei diesem Problem hilft die Freiheit, den Grad  $n$  der Taylorentwicklung und das Paar  $(L, M)$  mit  $L + M = n$  zu variieren. Dadurch ist es möglich eine ganze sogenannte Padé-Tafel zu erstellen, angefangen mit der trivialen Padé-Approximante  $[0, 0]$  über  $[1, 0]$  und  $[0, 1]$  bis zu den höchsten mit der berechneten Taylorentwicklung möglichen Approximante. Durch Analyse der Singularitäten aller Padés in der Tafel sollten sich die überflüssigen von den gesuchten Singularitäten trennen lassen. Die gesuchten Singularitäten werden idealerweise für die meisten Padés in einem bestimmten engen Parameterbereich liegen, während die überflüssigen zufällig verteilt sind. Zusammen mit höheren Ordnungen der Taylorentwicklung sollte dieses Verfahren bessere Resultate zum Auffinden des Phasenübergangs liefern.

## 6.2 Screening-Massen

Wie aus dem Ergebnis

$$\Delta M(T) = -\frac{2}{3} N_t u^{4N_t-6}. \quad (6.20)$$

ersichtlich, ist die Änderung der Screening-Masse unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  sehr klein. Im Falle der  $SU(3)$  liegt der kritische Wert des Parameters  $\beta$  für  $N_t \leq 20$  typischerweise im Bereich  $\beta_c \simeq 6$ . Gemäß der Gl. (A.20) aus dem Anhang entspricht dies einem Wert für  $u$  von

$$u(\beta \simeq 6) \simeq \frac{1}{3}. \quad (6.21)$$

Mit demselben Argument, dass die freie Energiedichte unterhalb der kritischen Temperatur praktisch verschwindet, lässt sich demnach die geringe

Differenz der Screening-Massen unterhalb von  $T_c$  vom  $T = 0$ -Fall verstehen. Dieses Ergebnis wird auch durch numerische Resultate gestützt, siehe [3] und Referenzen in dem Artikel. Da die Starkkopplungsentwicklungen durch den Phasenübergang in ihrer Konvergenz beschränkt sind, ist es nicht möglich die durch numerische Resultate bei  $T > T_c$  gefundene Temperaturabhängigkeit der Screening-Massen mit den hier vorgestellten Methoden zu bestätigen.



# Anhang A

## Entwicklungsparameter der irreduziblen Darstellungen

Die Darstellung der Entwicklungsparameter folgt im wesentlichen der Notation aus [1]. Im Falle der  $SU(3)$  sind die Formeln für die Entwicklungsparameter [9] entnommen. Entsprechend der Gl. (3.1) sind die Entwicklungsparameter  $c_r$  der irreduziblen Darstellungen der  $SU(N)$  definiert durch die Charakterentwicklung des Plakett-Boltzmannfaktors mit Wilson-Wirkung

$$\begin{aligned}\exp[-S_p(U)] &= \exp\left[\frac{\beta}{2N}(\mathrm{Tr} U + \mathrm{Tr} U^\dagger - 2N)\right] \\ &= \sum_r d_r c_r(\beta) \chi_r(U)\end{aligned}\tag{A.1}$$

wobei  $r$  die irreduziblen Darstellungen nummeriert. Gemäß den allgemeinen Formeln für die Charakterentwicklung einer Klassenfunktion  $f(U)$

$$f(U) = \sum_r f_r \chi_r(U)\tag{A.2}$$

$$f_r = \int dU \chi_{\bar{r}} f(U)\tag{A.3}$$

gilt somit für die Entwicklungsparameter

$$c_r(\beta) = -\frac{1}{d_r} \int dU \chi_{\bar{r}} \exp\left[\frac{\beta}{2N}(\chi_f(U) + \chi_f(U^\dagger) - 2N)\right].\tag{A.4}$$

### A.1 $SU(2)$

Im Fall der  $SU(2)$  lässt sich das Integral in (A.4) berechnen und auf die modifizierten Besselfunktionen zurückführen. Mit den speziell für die  $SU(2)$

geltenden Gleichungen

$$dU = \frac{1}{4\pi^2} d\varphi d\Omega(\vec{n}) \left( \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\chi_j(U) = \frac{\sin(j + \frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}, \quad (\text{A.6})$$

wobei der Winkel  $\varphi$  und der Einheitsvektor  $\vec{n}$  die Elemente der Gruppe gemäß

$$U = \left( \cos \frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{1} + i \left( \sin \frac{\varphi}{2} \right) \vec{n} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{A.7})$$

parametrisieren, erhält man für die Entwicklungsparameter der SU(2):

$$c_j = \frac{2}{\beta} I_{2j+1}(\beta) e^{-\beta}. \quad (\text{A.8})$$

Der Faktor  $d\Omega(\vec{n})$  ist das Einheitsmaß auf der  $S^2$ -Sphäre und  $\vec{\tau}$  ist der Vektor aus den drei Pauli-Matrizen. Aus den  $c_j$  folgt mit

$$a_r(\beta) = \frac{c_r(\beta)}{c_0(\beta)} \quad (\text{A.9})$$

für die Parameter  $a_j$

$$a_j(\beta) = \frac{I_{2j+1}(\beta)}{I_1(\beta)}. \quad (\text{A.10})$$

## A.2 SU(3)

Im Gegensatz zu den Entwicklungsparametern in der SU(2), die als Verhältnisse von modifizierten Besselfunktionen  $I_k$ , mit der inversen Kopplung  $\beta$  als Argument, berechnet werden, lassen sich in der SU(3) diese Parameter  $a_r(\beta)$  nicht in so einfacher Form angeben. Die Berechnung der in dieser Arbeit benutzten Parameter der Darstellungen **1**, **3**, **6** und **8** möchte ich an dieser Stelle vorstellen. Dabei werden die Irreduziblen Darstellung statt durch ihre Dimensionen durch zwei ganze Zahlen  $(p, q)$  definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= (0, 0) \\ \mathbf{3} &= (1, 0) \\ \mathbf{6} &= (2, 0) \\ \mathbf{8} &= (1, 1). \end{aligned}$$

Die Zahlen  $p$  und  $q$  durchlaufen alle natürlichen Zahlen und charakterisieren die Irreduziblen Darstellungen der  $SU(3)$  und ihre Dimensionen gemäß

$$d_{(p,q)} = (1+p)(1+q) \left(1 + \frac{p+q}{2}\right). \quad (\text{A.11})$$

Die Parameter der komplex-konjugierten Darstellungen stimmen mit denen der nicht-konjugierten überein und brauchen nicht gesondert betrachtet zu werden. Wird aus diesen beiden Zahlen  $p$  und  $q$  ein Tripel

$$\{\lambda_i\} = \{p+q, q, 0\}$$

gebildet, so lässt sich der Ausdruck, mit dem die Entwicklungsparameter berechnet werden, angeben als

$$c_{(p,q)}(\beta) = \frac{1}{d_{(p,q)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \det I_{\lambda_{i-i+j+n}} \left(\frac{\beta}{3}\right) \quad (\text{A.12})$$

wobei  $i$  die Zeile und  $j$  die Spalte der Matrix aus modifizierten Besselfunktionen  $I_k(x)$  angeben [9]. Aus  $c_{(p,q)}$  kann  $a_{(p,q)}$  mithilfe der folgenden Relation berechnet werden

$$a_{(p,q)}(\beta) = \frac{c_{(p,q)}(\beta)}{c_{(0,0)}(\beta)} \quad (\text{A.13})$$

Da der führende Term der modifizierten Besselfunktion  $I_k(x)$  von der Ordnung  $x^k$  ist, ist es mit (A.12) möglich  $c_{(p,q)}$  und damit  $a_{(p,q)}$  zu berechnen. Denn bei gegebener Ordnung reicht es aus, in der Summation nur die niedrigsten Summanden mitzunehmen. Man erhält bis einschließlich der Ordnung  $O(\beta^7)$  für den Parameter der trivialen Darstellung

$$\begin{aligned} c_1(\beta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \det \begin{pmatrix} I_n & I_{n+1} & I_{n+2} \\ I_{n-1} & I_n & I_{n+1} \\ I_{n-2} & I_{n-1} & I_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_n^3 + I_{n-2}I_{n+1}^2 + I_{n-1}^2I_{n+2} - 2I_{n-1}I_nI_{n+1} - I_{n-2}I_nI_{n+2}) \\ &= 1 + t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^5 + \frac{13}{72}t^6 + \frac{11}{120}t^7 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

mit der zur Abkürzung des Ausdrucks definierten Größe  $t = \frac{\beta}{6}$ . Vollkommen

analog berechnen sich die Parameter der höherdimensionalen Darstellungen

$$\begin{aligned}
c_3(\beta) &= \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \det \begin{pmatrix} I_{n+1} & I_{n+2} & I_{n+3} \\ I_{n-1} & I_n & I_{n+1} \\ I_{n-2} & I_{n-1} & I_n \end{pmatrix} \\
&= t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{24}t^4 + \frac{13}{72}t^5 + \frac{77}{720}t^6 + \frac{139}{2160}t^7 + \dots \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6(\beta) &= \frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \det \begin{pmatrix} I_{n+2} & I_{n+3} & I_{n+4} \\ I_{n-1} & I_n & I_{n+1} \\ I_{n-2} & I_{n-1} & I_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{7}{72}t^4 + \frac{7}{90}t^5 + \frac{1}{18}t^6 + \frac{149}{4320}t^7 + \dots \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_8(\beta) &= \frac{1}{8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \det \begin{pmatrix} I_{n+2} & I_{n+3} & I_{n+4} \\ I_n & I_{n+1} & I_{n+2} \\ I_{n-2} & I_{n-1} & I_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{12}t^5 + \frac{31}{480}t^6 + \frac{3}{80}t^7 + \dots \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

und aus diesen, zusammen mit Gl. (A.13) die Abhängigkeit der Entwicklungsparameter  $v \equiv d_6 a_6$  der **6**- und  $w \equiv d_8 a_8$  der **8**-Darstellung vom Entwicklungsparameter  $u \equiv a_3(\beta)$  der fundamentalen Darstellung

$$v = \frac{9}{2}u^2 - \frac{27}{8}u^4 + \frac{891}{40}u^5 - \frac{1215}{16}u^6 + \frac{18711}{80}u^7 + \dots \quad (\text{A.18})$$

$$w = 9u^2 - 9u^3 + \frac{81}{4}u^4 - \frac{81}{2}u^5 + \frac{1862}{20}u^6 - \frac{2187}{10}u^7 + \dots \quad (\text{A.19})$$

Die  $\beta$ -Abhängigkeit von  $u(\beta)$  lautet

$$u = \frac{1}{3}t + \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{72}t^4 + \frac{1}{24}t^5 + \frac{7}{720}t^6 + \frac{159}{2160}t^7 + \dots \quad (\text{A.20})$$

wobei wiederum statt  $\beta$  der Parameter  $t$  benutzt wurde.

Höhere Ordnungen in den Entwicklungsparametern lassen sich mithilfe von Rekursionsrelationen berechnen, vgl. [10]. Damit können die Parameter im Prinzip in beliebig hohen Ordnungen angegeben werden.

# Anhang B

## Berechnung spezieller Integrale

Bei der Berechnung des Beitrags gewisser Graphen treten Integrale auf, die nicht so einfach wie die im Haupttext beschriebenen zu lösen sind. Die explizite Berechnung soll an dieser Stelle geschehen.

Im folgenden benutzte Gleichungen sind die Integrationsregeln (3.11) und (3.12) und die für alle  $SU(N)$  gültigen Relationen [11]

$$\begin{aligned} \int dU U_{ij} U_{kl}^\dagger U_{mn} U_{op}^\dagger &= \frac{1}{N^2 - 1} (\delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mp} \delta_{no} + \delta_{ip} \delta_{ml} \delta_{jo} \delta_{nk}) - \\ &- \frac{1}{N(N^2 - 1)} (\delta_{il} \delta_{jo} \delta_{mp} \delta_{nk} + \delta_{ip} \delta_{jk} \delta_{ml} \delta_{no}). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

und

$$\int dU U_{i_1 j_1} \dots U_{i_n j_n} = \frac{1}{N!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \quad (\text{B.2})$$

Die Integrale sollen für einen Beispielgraphen mit wenigen Plaketten berechnet werden, da die Verallgemeinerung auf Graphen mit einer größeren Anzahl von Plaketten keinerlei Schwierigkeiten bereitet.

### Drei Plakettvariablen an einem Link

Die erste Integration entspricht dem Zusammentreffen von drei Plaketten in der fundamentalen Darstellung an einem Link. Ein entsprechender Graph ist

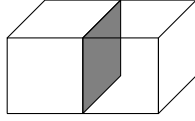


Abbildung B.1: Drei Plakettvariablen an einem Link.

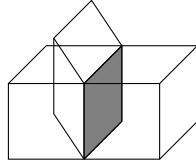


Abbildung B.2: Drei Kuben mit einer gemeinsamen Plakette.

in Abb. (B.1) dargestellt und die Berechnung lautet

$$\begin{aligned}
 I &= \int DU u^{11} d_f^{11} \prod_{i=1}^{11} \text{Tr}U(p_i) \\
 &= u^{11} d_f^3 \int dU \text{Tr}U \text{Tr}U \text{Tr}U \\
 &= u^{11} d_f^3 \frac{1}{N!} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \\
 &= u^{11} d_f^3
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

wobei im vorletzten Schritt die Integrationsregel (B.2) ausgenutzt wurde.

Die Beiträge der beiden an der mittleren Plakette anschließenden Kuben werden durch insgesamt 8 Integrationen gemäß (3.11) ausintegriert, bis schließlich nur noch ein Integral über die vier Links der mittleren Plakette übrigbleibt. Der Integrand besteht dann aus drei Plaketten, wobei alle Plaketten dieselbe Orientierung annehmen. Dieses Integral wird dann als Spezialfall der Regel (B.2) berechnet.

Das Integral zum Graphen aus Abb. (B.2), bei dem drei Kuben an einer

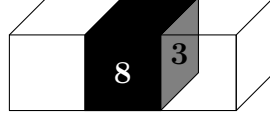


Abbildung B.3: Vier Plaketten in der Fundamentaldarstellung wurden gegen Plaketten in der **8**-Darstellung getauscht. Zusätzlich wurden zwei weitere Fundamentalplaketten eingefügt.

gemeinsamen Plakette anschließen, lautet

$$\begin{aligned}
I &= \int DU d_f^{16} u^{16} \prod_{i=1}^{16} \text{Tr} U(p_i) \\
&= d_f^4 u^{16} \int dU [\text{Tr} U]^2 [\text{Tr} U^\dagger]^2 \\
&= d_f^4 u^{16} \left[ \frac{2N^2}{N^2 - 1} - \frac{2N}{N(N^2 - 1)} \right] \\
&= 2 d_f^4 u^{16}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Hier wurde die Integrationsregel (B.1) benutzt.

### Graphen mit höherdimensionalen Plakettvariablen

Ein weiteres nichttriviales Integral ist bei der Ausintegration des Beitrags des in Abb. (B.3) gezeigten Graphen zu berechnen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
I &= \int DU u^{12} d_3^{12} a_8^4 d_8^4 \prod_{i=1}^{16} \chi_{r_i}(U_{p_i}) \\
&= d_3^4 u^{12} a_8^4 \int dU_1 dU_2 \chi_3(U_1) \chi_{\bar{3}}(U_1) \chi_8(U_1) \chi_3(U_2) \chi_{\bar{3}}(U_2) \chi_8(U_2) \\
&= d_3^4 u^{12} a_8^4
\end{aligned} \tag{B.5}$$

wobei die äußeren Plaketten in der **3**- und die inneren Plaketten in der **8**-Darstellung ausintegriert wurden und ein Integral über zwei Plaketten mit je drei Plakettvariablen in der **3**-,  $\bar{\mathbf{3}}$ - und der **8**-Darstellung übrigblieben. Diese beiden letzten Integrale ergeben jeweils eine Eins in Übereinstimmung mit der Integrationsregel (3.12). Die Rechnung für ein ähnliches Polymer mit Plaketten in der **6**-Darstellung läuft völlig analog ab.

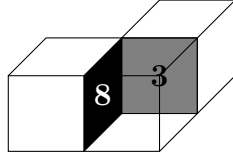


Abbildung B.4: Vier Plakettvariablen an einem Link, davon drei in der fundamentalen Darstellung mit derselben Orientierung und eine in der **8**-Darstellung.

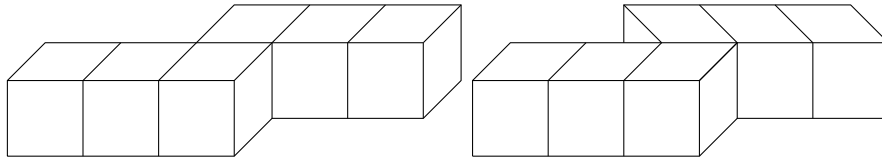


Abbildung B.5: Zwei Polymere deren Beitrag sich unter den neuen Randbedingungen nicht ändert.

Ein weiterer Graph mit Plaketten in höherdimensionalen Darstellungen ist in (B.4) abgebildet, und das dazugehörige Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
I &= \int DU d_3^{15} u^{15} w \prod_{i=1}^{16} \chi_{r_i}(U(p_i)) \\
&= d_f^4 u^{15} w \int dU_1 dU_2 dU_3 \chi_3(U_1 U_2) \chi_{\bar{3}}(U_1 U_3) \chi_8(U_1 U_3) \chi_3(U_2 U_3^\dagger) \chi_3(U_2 U_3^\dagger) \\
&= d_f^3 u^{15} w \int dU_1 dU_3 \chi_3(U_1 U_3) \chi_{\bar{3}}(U_1 U_3) \chi_8(U_1 U_3) \\
&= d_f^3 u^{15} w
\end{aligned} \tag{B.6}$$

### Weitere Graphen

Zusätzlich dazu gibt es auch einige Graphen bei denen sich der Beitrag nicht ändert, diese also nicht zur freien Energiedichte beitragen, bei denen sich die Berechnung des Beitrages aber vom  $T = 0$ -Fall unterscheidet. Diese Graphen sind in Abb. (B.5) gezeigt. Im  $T = 0$ -Fall ergeben beide Polymere einen Beitrag

$$\Phi = d_f^2 u^{4N_t+6} = 9u^{4N_t+6} \tag{B.7}$$

Dass der Beitrag auch im  $T \neq 0$ -Fall, wenn sich zwei Links an der linken und rechten Seite der Polymere berühren, ebenfalls diesen Wert liefert, ist



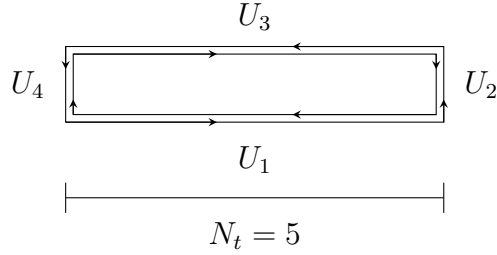


Abbildung B.6:

nicht offensichtlich. Eine kurze Rechnung soll dies bestätigen. Nimmt man das linke Polymer als Beispiel, so ergibt sich zunächst für den expliziten Fall  $N_t = 5$

$$\begin{aligned}
 I &= \int DU u^{26} d_f^{26} \prod_{i=1}^{26} \text{Tr} U(p_i) = \\
 &= u^{26} d_f^2 \int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 \text{Tr} (U_1 U_2 U_3 U_4) \text{Tr} (U_4^\dagger U_3^\dagger U_2^\dagger U_1^\dagger) \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

wobei die Integration bis auf die beiden in Abb. (B.6) dargestellten Integrationswege durchgeführt wurde. Bei  $T \neq 0$  werden die Linkvariablen bei  $U_2$  und  $U_4$  im Gegensatz zum Fall verschwindender Temperaturen identifiziert. Aus diesem Grund ist es nicht offensichtlich, dass der Beitrag derselbe bleibt. Rechnet man allerdings weiter, so erhält man mit der angesprochenen Identifizierung unter Berücksichtigung der Orientierungen der Linkvariablen

$$\begin{aligned}
 I &= u^{26} d_f^2 \int dU_1 dU_2 dU_3 \text{Tr} (U_1 U_2 U_3 U_2^\dagger) \text{Tr} (U_2 U_3^\dagger U_2^\dagger U_1^\dagger) = \\
 &= u^{26} d_f \int dU_2 dU_3 \text{Tr} (U_2 U_3 U_2^\dagger U_2 U_3^\dagger U_2^\dagger) = \\
 &= u^{26} d_f \text{Tr} (\mathbf{1}) = \\
 &= u^{26} d_f^2 \quad (\text{B.9})
 \end{aligned}$$

Es ist demnach zulässig, diese und ähnliche Graphenklassen bei der Berechnung der freien Energiedichte nicht zu berücksichtigen.

# Anhang C

## Auflistung verschiedener Klassen von Graphen

Alle temperaturabhängigen Graphen haben gemeinsam, dass sie eine Ausdehnung in Zeitrichtung größer oder gleich  $N_t$  besitzen. Zwei Beispiele sind in Abb. (C.1) für  $N_t = 5$  aufgeführt. Das linke Diagramm dieser Abbildung zeigt das Polymer mit der geringsten Anzahl an Plaketten, dass durch das veränderte Gitter einen neuen Beitrag zur Freien Energie liefert. In einer Entwicklung nach Potenzen des Parameters  $u \equiv a_f(\beta)$ , liefert dieser Graph einen Beitrag zur Ordnung  $u^{4N_t}$ . Da es möglich ist, gewisse Klassen von Graphen geschlossen aufzusummieren, möchte ich an dieser Stelle diese Klassen durch einige Beispiele skizzieren und ihren Beitrag zur Cluster-Entwicklung der Freien Energie angeben.

Wie bereits erwähnt kann man die temperaturabhängigen Graphen in drei Typen aufteilen: Neue Cluster, verbotene Cluster und Cluster mit verändertem Beitrag. Im Allgemeinen zeichnen sich die neuen Cluster durch eine toroidale Struktur aus, d.h. sie sind durch die Randbedingungen in sich selbst geschlossen. Die Cluster mit verbotenem Beitrag sind im Prinzip von derselben Form wie diejenigen in der  $T = 0$ -Theorie, jedoch ist es bei einigen Graphen möglich, dass sich ihr Beitrag aufgrund der verkleinerten  $N_t$ -Ausdehnung des Gitters verändert und sie in diesem Fall die Gruppe der Cluster mit verändertem Beitrag definieren.

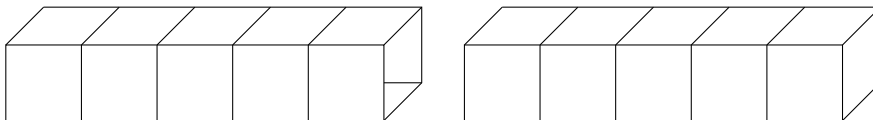


Abbildung C.1: Graphen mit Temperaturabhängigkeit bei  $N_t = 5$

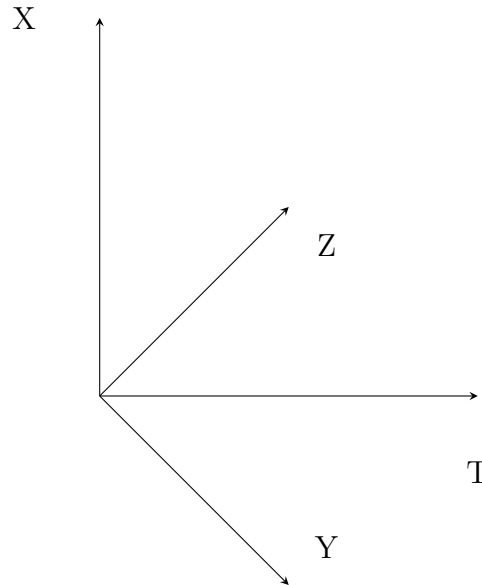


Abbildung C.2: Koordinatensystem: Die räumlichen Achsen sind beliebig, die Zeit- bzw. Temperatur-Achse ist die horizontale Achse.

Das Koordinatensystem ist bei allen folgenden Abbildungen so gewählt (siehe Abb. C.2), dass die Horizontale die Zeit- bzw. Temperatur-Achse darstellt, und die drei übrigen Richtungen beliebige der drei Raumrichtungen sind. Die jeweiligen Graphen der niedrigsten Ordnungen für die zwei Fälle  $N_t = 2$  und  $N_t \geq 3$  werden in diesem Kapitel dargestellt. Letztere dabei jeweils am Beispiel  $N_t = 5$ . Die auftretenden Formen gelten dann aber entsprechend für alle  $N_t \geq 3$ . Für  $N_t = 2$  gibt es einige besondere geometrische Formen, die bei  $N_t \geq 3$  in den betrachteten Ordnungen nicht auftreten.

### Graphen für $N_t \geq 3$

In diesem Kapitel werde ich die einzelnen Graphen auflisten. Alle hier gezeichneten Graphen können mit inneren Plaketten versehen werden, also geschlossen aufsummiert werden. Daher werde ich nur die niedrigsten Polymere einer Klasse angeben. Mit der Auflistung der Graphen ist die Arbeit noch nicht getan, es müssen noch ihre Integrale und ihre Anzahl angegeben werden. Dies wird in Tabelle (C.1) präsentiert. Die Berechnung der Integrale kann mit den im Haupttext oder im vorherigen Kapitel des Anhangs angegebenen Methoden geschehen.

Polymer	Integral	a(C)	Anzahl	Beitrag
5.1	$d_3 u^{4N_t+5}$	1	$2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4$	$\Phi^+ = 216 u^{4N_t+5}$
6.1 a	$d_8 a_8 u^{4N_t+4}$	1	$2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4$	$\Phi^+ = 72 w u^{4N_t+4}$
6.1 b	$d_6 a_6 u^{4N_t+4}$	1	$2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4$	$\Phi^+ = 72 v u^{4N_t+4}$
6.2	$u^{4N_t+6}$	1	$2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4$	$\Phi^+ = 72 u^{4N_t+6}$
6.3 a	$d_3^2 u^{4N_t+6}$	-1	$2^2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4$	$\Phi^+ = -1296 u^{4N_t+6}$
6.3 b	$d_3^2 u^{4N_t+6}$	-1	$2^2 \cdot 3 \cdot (2 + 1)$	$\Phi^+ = -324 u^{4N_t+6}$
6.4 a	$d_3^2 a_8^4 u^{4N_t-2}$	1	$2 \cdot 3$	$\Phi^+ = \frac{27}{2048} w^4 u^{4N_t-2}$
6.4 b	$d_3^2 a_6^4 u^{4N_t-2}$	1	$2 \cdot 3$	$\Phi^+ = \frac{1}{24} v^4 u^{4N_t-2}$
6.5 a	$d_3^2 u^{4N_t+6}$	1	$2 \cdot 3$	$\Phi^- = 54 u^{4N_t+6}$
6.5 b	$d_3^2 u^{4N_t+6}$	1	$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$	$\Phi^- = 216 u^{4N_t+6}$
6.6	$u^{4N_t+6}$	1	$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$	$\Phi^+ = 48 u^{4N_t+6}$
6.7	$2d_3^2 u^{4N_t+6}$	1	$2^2 \cdot 3 \cdot 2$	$\Phi^+ = 432 u^{4N_t+6}$
7.1	$d_3 d_8 a_8 u^{4N_t+5}$	1	$2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4 \cdot N_t$	$\Phi^+ = 216 N_t w u^{4N_t+5}$
7.2 a	$d_3^3 a_8^4 u^{4N_t-1}$	1	$2 \cdot 3$	$\Phi^+ = \frac{81}{2048} w^4 u^{4N_t-1}$
7.2 b	$d_3^3 a_6^4 u^{4N_t-1}$	1	$2 \cdot 3$	$\Phi^+ = \frac{1}{8} v^4 u^{4N_t-1}$
7.3 a	$d_3^3 u^{4N_t+7}$	1	$2 \cdot 3 \cdot N_t$	$\Phi^- = 162 N_t u^{4N_t+7}$
7.3 b	$d_3^3 u^{4N_t+7}$	1	$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot N_t$	$\Phi^- = 648 N_t u^{4N_t+7}$
7.4	$2d_3^2 u^{4N_t+7}$	1	$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (N_t - 1)$	$\Phi^+ = 648 (N_t - 1) u^{4N_t+7}$
7.5	$d_3^3 u^{4N_t+7}$	1	$2 \cdot 3 \cdot (2 + 1) \cdot 4 \cdot N_t$	$\Phi^- = 944 N_t u^{4N_t+7}$

Tabelle C.1: Graphen und ihre Beiträge für  $N_t \geq 3$

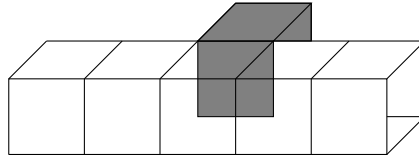


Abbildung C.3: Graph 5.1: Einziges Polymer der Ordnung  $\mathcal{O}(u^5)$  in der Korrektur: Die grau eingefärbten Plaketten sind dem restlichen Polymer entgegengesetzt orientiert.

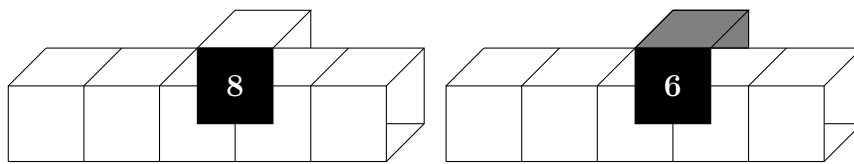


Abbildung C.4: Graph 6.1: Polymere der Ordnung  $\mathcal{O}(u^6)$  in der Korrektur, hier mit jeweils einer zusätzlichen Plakette in der **8**- bzw. **6**-Darstellung.

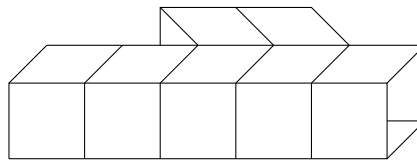


Abbildung C.5: Graph 6.2: Polymer mit Doppelkubus als Dekoration.

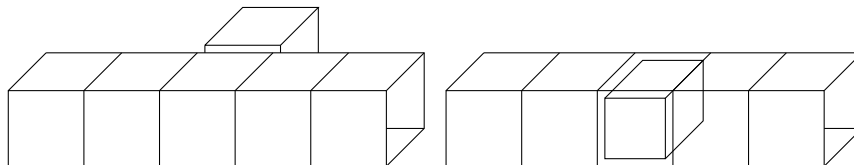


Abbildung C.6: Graph 6.3: Jeweils ein Cluster aus zwei Polymeren.

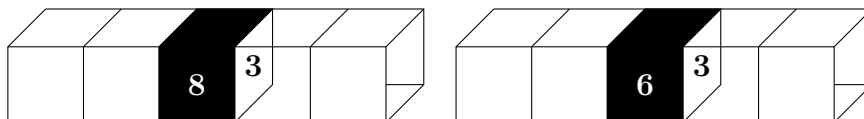


Abbildung C.7: Graph 6.4: Vier Plakettvariablen in der Fundamentaldarstellung am Grundpolymer wurden durch höherdimensionale Plaketten ersetzt. Zusätzlich wurden an den Übergangstellen **3**-Plaketten eingefügt.

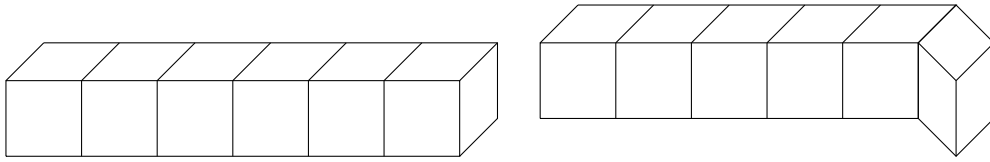


Abbildung C.8: Graph 6.5: Polymere dieser Form mit einer zeitlichen Ausdehnung größer oder gleich  $N_t$  gehören zu den verbotenen Clustern.

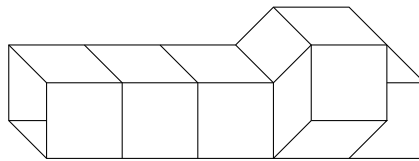


Abbildung C.9: Graph 6.6: Polymer, dessen Dekoration sich in vier Dimensionen ausdehnt.

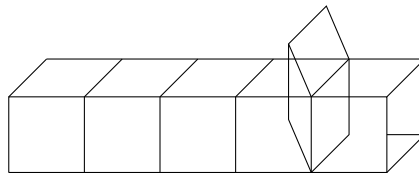


Abbildung C.10: Graph 6.7: Grundpolymer mit zusätzlichem Kubus.

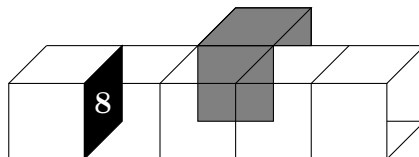


Abbildung C.11: Graph 7.1: Polymer aus Graph 5.1, mit zusätzlicher **8**-Plakette. Siehe dazu die Integration in Gl. (B.6).

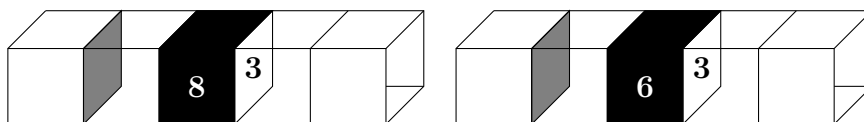


Abbildung C.12: Graph 7.2: Polymere aus Graph 6.4 mit zusätzlicher Plakette in fundamentaler Darstellung.

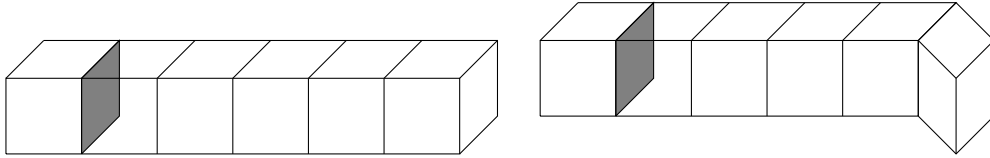


Abbildung C.13: Graph 7.3: Polymere aus Graph 6.5 mit zusätzlicher innerer Plakette.

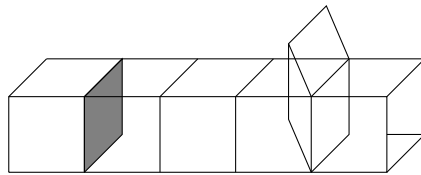


Abbildung C.14: Graph 7.4: Graph 6.7 mit zusätzlicher Plakette in **3**-Darstellung.

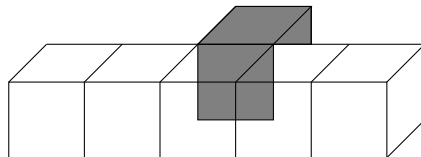


Abbildung C.15: Graph 7.5: Verbotener Graph mit Dekoration und zusätzlicher Plakette.

### Zusätzliche Graphen und Beiträge für $N_t = 2$

Polymer	Integral	Anzahl	Beitrag
<b>4.1</b>	$u^{4N_t+4}$	$2 \cdot 3 \cdot 2$	$\Phi^+ = 12 u^{4N_t+4}$
<b>4.2</b>	$u^{4N_t+4}$	$2 \cdot 3 \cdot 4$	$\Phi^+ = 24 u^{4N_t+4}$
<b>4.3</b>	$u^{4N_t+4}$	$2 \cdot 4$	$\Phi^+ = 8 u^{4N_t+4}$
<b>6.8</b>	$u^{4N_t+6}$	$2 \cdot 3 \cdot 2$	$\Phi^+ = 12 u^{4N_t+6}$
<b>6.9</b>	$u^{4N_t+6}$	$2 \cdot 3 \cdot 4$	$\Phi^+ = 24 u^{4N_t+6}$

Tabelle C.2: Graphen und ihre Beiträge für  $N_t = 2$

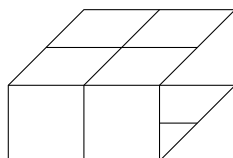


Abbildung C.16: Graph 4.1: Zwei Doppelkuben mit gemeinsamer Seite, nicht verwinkelt.

### Zusätzliche Graphen für $N_t = 2$

Bei  $N_t = 2$  gibt es aufgrund der geringen zeitlichen Gitterausdehnung bereits in niedrigen Ordnungen in  $u$  Polymere, die nicht nur aus Dekorationen am Grundpolymer bestehen, sondern ganz eigene geometrische Formen annehmen. Diese Polymere, die in den betrachteten Ordnungen nur bei  $N_t = 2$  auftreten möchte ich in diesem Unterkapitel angeben. Bis auf den Graphen 6.2 aus Abb. (C.5) tragen alle Polymere aus Tabelle (C.1) auch für  $N_t = 2$  bei. Die zusätzlichen Graphen sind in Tabelle (C.2) dargestellt.

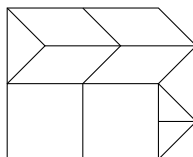


Abbildung C.17: Graph 4.2: Zwei Doppelkuben mit gemeinsamer Seite, verwinkelt.



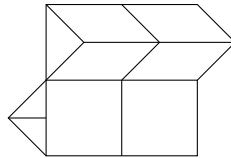


Abbildung C.18: Graph 4.3

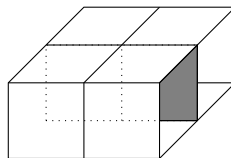


Abbildung C.19: Graph 6.8: Polymer aus Graph 4.1 mit zwei zusätzlichen Plaketten in fundamentaler Darstellung.

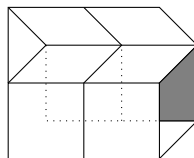


Abbildung C.20: Graph 6.9: Polymer aus Graph 4.2 mit zwei zusätzlichen Plaketten in fundamentaler Darstellung.

# Literaturverzeichnis

- [1] I. Montvay and G. Münster, “Quantum fields on a lattice”, Cambridge University Press (1994)
- [2] J. I. Kapusta and C. Gale, “Finite-Temperature Field Theory, Principles and Applications”, Cambridge University Press (2006)
- [3] E. Laermann and O. Philipsen, “Status of lattice QCD at finite temperature”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53** (2003) 163
- [4] H. Fritzsche and M. Gell-Mann, “Current algebra: Quarks and what else?”, *Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics, Chicago* (1972) 135
- [5] G. Münster, “Strong Coupling Expansions For The Mass Gap In Lattice Gauge Theories”, *Nucl. Phys. B* **190** (1981) 439
- [6] T. P. Cheng and L. F. Li, “Gauge Theory Of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press (1984)
- [7] B. Grossman, S. Gupta, U. M. Heller and F. Karsch, “Glueball - like screening masses in pure SU(3) at finite temperatures”, *Nucl. Phys. B* **417** (1994) 289
- [8] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Petersson, “Thermodynamics of SU(3) Lattice Gauge Theory”, *Nucl. Phys. B* **469** (1996) 419
- [9] J. M. Drouffe and J. B. Zuber, “Strong Coupling And Mean Field Methods In Lattice Gauge Theories”, *Phys. Rept.* **102**, (1983) 1
- [10] N. Tanimura and O. Tanimura, “Recursion relation of character expansion coefficient in SU(3) lattice gauge theory”, *J. Math. Phys.* **31**, (1990) 721

- [11] M. Creutz, "On Invariant Integration Over  $SU(N)$ ", J. Math. Phys. **19** (1978) 2043
- [12] G. A. Baker and P. Graves-Morris, "Pade Approximants. II. Extensions and Applications", Addison-Wesley (1981)

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich im Laufe des Studiums und vor allem bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben:

- Herrn Prof. Dr. Owe Philipsen danke ich für eine interessante Aufgabenstellung und die sehr umfangreiche Betreuung während der Bearbeitung.
- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster danke ich für zahlreiche klärende Gespräche im Zusammenhang mit dieser Arbeit.
- Marcus Tassler danke ich für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Arbeit.
- Babak Alikhani und Marcus Tassler danke ich für die angenehme Atmosphäre in unserem gemeinsamen Arbeitszimmer.
- Ganz besonders möchte ich mich schließlich bei meinen Eltern Herbert und Walburga Langelage, sowie bei meinem Bruder Michael Langelage für die Unterstützung während des gesamten Studiums bedanken.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, 15. Januar 2007