

## Diplomarbeit

---

# Der quantenchromodynamische Feldstärkekorrelator in Kontinuums- und Gitterstörungstheorie

---

vorgelegt von  
Janine Hüting

Münster, 7. Februar 2009

Betreuer: Prof. Dr. Owe Philipsen

Gegenüber der am 7. Februar 2009 im Prüfungsamt abgegebenen Diplomarbeit wurde in der hier vorliegenden Version neben Druckfehlern eine Formulierung in Abschnitt 2.2 geändert sowie der Beitrag von Gluonschleife (3.35), (4.3b) und Geistschleife (3.42), (4.3c) korrigiert.

Münster, 9. Juni 2009

*Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig:  
Unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft,  
etwas, in das man viel Zeit und Arbeit gesteckt  
hat, wieder wegzwerfen.*

Albert Einstein



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Quantenchromodynamik (QCD) im Kontinuum</b>	<b>3</b>
2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik . . . . .	3
2.2 Der Pfadintegralformalismus in Quantenfeldtheorien . . . . .	4
2.3 Die Lagrangedichte der QCD . . . . .	5
2.4 Störungstheorie im Kontinuum . . . . .	6
2.4.1 Störungsentwicklung in kovarianter Eichung . . . . .	6
2.4.2 Feynmanregeln . . . . .	7
2.5 Renormierung . . . . .	10
2.5.1 Regularisierungsschemata . . . . .	11
2.5.2 Minimale Subtraktion . . . . .	13
<b>3 Berechnung des QCD-Feldstärkekorrelators im Kontinuum</b>	<b>15</b>
3.1 Der QCD-Feldstärkekorrelator . . . . .	15
3.1.1 Die Schwinger-Linie . . . . .	15
3.1.2 Lorentz-Struktur . . . . .	16
3.2 Berechnung im Kontinuum . . . . .	16
3.2.1 Führende Ordnung . . . . .	17
3.2.2 Ein-Schleifen-Ordnung . . . . .	18
<b>4 Diskussion der Kontinuumsergebnisse</b>	<b>27</b>
4.1 Ergebnisse . . . . .	27
4.2 Motivation der Gitterrechnung . . . . .	28
<b>5 Quantenchromodynamik auf dem Gitter</b>	<b>29</b>
5.1 Gitterformulierung der QCD . . . . .	29
5.1.1 Gitterregularisierung . . . . .	29
5.1.2 Eichfelder auf dem Gitter . . . . .	30
5.2 Gitterstörungstheorie . . . . .	32
5.2.1 Funktionalintegral . . . . .	32
5.2.2 Feynmanregeln . . . . .	33
<b>6 Der QCD-Feldstärkekorrelator auf dem Gitter</b>	<b>37</b>
6.1 Definition des Korrelators im Gitterformalismus . . . . .	37
6.2 Analytischer Zugang . . . . .	37
6.2.1 Theorem von Reisz . . . . .	39
6.2.2 Divergente Integrale auf dem Gitter . . . . .	41

6.3	Numerischer Zugang . . . . .	44
6.3.1	Die CUBA-Bibliothek . . . . .	44
6.3.2	Ergebnisse der numerischen Integration . . . . .	45
6.4	Ortsraum-Methode nach Lüscher und Weisz . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>53</b>
A.1	Notation . . . . .	53
A.1.1	Einheiten . . . . .	53
A.1.2	Vierervektoren im Euklidischen . . . . .	53
A.2	Formelsammlung . . . . .	53
A.3	Generatoren der speziellen unitären Gruppe $SU(N)$ . . . . .	54
A.3.1	Adjungierte Darstellung . . . . .	54
A.3.2	Fundamentale Darstellung . . . . .	54
A.4	Integraltafel für Feynmandiagramme . . . . .	54
A.4.1	Gammafunktion . . . . .	54
A.4.2	Schwinger-Parametrisierung . . . . .	55
A.4.3	Feynman-Parametrisierung . . . . .	55
A.4.4	Integrale in $d$ Dimensionen . . . . .	56
A.5	Sammlung der divergenten Gitterintegrale . . . . .	57
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>59</b>

# 1 Einleitung

Dem heutigen Kenntnisstand zufolge bilden die *Quarks* einen der Grundbausteine der sichtbaren Materie. Sie wechselwirken mittels sogenannter *Gluonen*, den Eichbosonen der starken Wechselwirkung. Die zugehörige Theorie wird als *Quantenchromodynamik* (QCD) bezeichnet, da die ihr zugrunde liegenden Teilchen eine nicht beobachtbare Farbladung („χρώμα“, griech. Farbe) tragen. Sie dient als Grundlage für die vorliegende Arbeit.

Eine Eigenschaft dieser Theorie ist das Konzept des „confinement“ (engl. Einschluss) [1], welches die Beobachtung einzelner Quarks und Gluonen bei niedrigen Temperaturen verbietet. Dies erschwert natürlich den experimentellen Zugang beispielsweise zu den Quarkmassen, da im niedrigen Energiebereich nur gebundene Zustände, sogenannte Hadronen, vermessen werden können. Hierdurch können nur Rückschlüsse auf die Massen der Quarks gezogen werden, da die Anzahl der Quarks in einem Hadron stark variiert. Das Proton besteht beispielsweise nicht nur aus den drei Konstituentenquarks (auch Valenzquarks genannt) *uud* („up“, „down“), sondern ebenso aus Seequarks, welche kontinuierlich aus virtuellen Quark-Antiquark-Paaren und Gluonen entstehen. Diese Bindungsenergie liefert den größten Beitrag zur Hadronenmasse.

Anders sieht dies bei hohen Temperaturen um ca. 200 MeV aus: In der „deconfined“-Phase, also einer Phase, in der die Quarks und Gluonen nicht mehr durch das Einschluss-Prinzip gebunden sind, liegt ein Quark-Gluon-Plasma vor [2,3]. Dieses dominierte bereits das sehr frühe Universum und soll mitunter am LHC („Large Hadron Collider“) [4] am CERN untersucht werden. Allerdings kann auch so die genaue Masse eines Quarks nicht bestimmt werden: Messungen im Plasma selbst sind nicht möglich, außerdem unterliegen die Teilchen auch dort Wechselwirkungen, so dass einzelne Quarks nicht betrachtet werden können.

Die in der Literatur angegebenen Werte [5] stammen alle von theoretischen Berechnungen dieser Massen. Besonders erfolgreich sind hier die HQET („Heavy Quark Effective Theory“) [6] sowie die NRQCD und die pNRQCD („(potential) Non-Relativistic Quantum ChromoDynamics“) [7–9].

Die so berechneten schweren Quarkmassen des *c*- („charm“) und *b*-Quarks („bottom“) setzen sich aus mehreren Termen zusammen [10, 11]. Einen Korrekturterm hierzu liefert der quantenchromodynamische Feldstärkekorrelator, welcher im Fokus dieser Arbeit steht. Die Methoden zu seiner Berechnung reichen von rein analytischen Ansätzen im Kontinuum bis hin zu numerischen Verfahren auf dem Gitter. Die Ergebnisse beider Methoden sind allerdings nicht direkt miteinander vergleichbar, da sie von der Renormierungsskala *und* dem Renormierungsschema abhängen. Eine störungstheoretische Rechnung auf dem Gitter ist daher unumgänglich. Dies wird in Kapitel 6 genauer diskutiert.

Zunächst finden sich allerdings in Kapitel 2 die Grundlagen für perturbative Berechnungen der QCD im Kontinuum, sowie eine Einführung in die Theorie der Renormierung. Somit ist das Fundament für Kapitel 3 gegeben, in dem dann der Feldstärkekorre-

lator und seine Komponenten betrachtet werden. Außerdem werden weitere Anwendungen des Korrelators genannt, bevor sich im Anschluss daran eine ausführliche Rechnung findet. Kapitel 4 fasst diese Ergebnisse zusammen und motiviert die Betrachtungen zur QCD auf dem Gitter wie in Kapitel 5 diskutiert.

Nach einer Formulierung der QCD auf einem Raum-Zeit-Gitter, sowie der Vorstellung der Gitterstörungstheorie erfolgt in Kapitel 6 die Betrachtung des Feldstärkekorrelators und seiner verschiedenen Anwendungen auf dem Gitter. Hier findet sich einerseits ein Abschnitt zu perturbativen Ansätzen auf dem Gitter, andererseits werden numerische Zugänge diskutiert.

Abschließend werden in Kapitel 7 die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst. Im Anhang werden die verwendeten Abkürzungen und Konventionen angegeben. Zudem ist eine ausführliche Integralsammlung für Feynmandiagramme im Kontinuum enthalten, ferner werden die auf dem Gitter auftretenden divergenten Integrale gelistet.

## 2 Quantenchromodynamik (QCD) im Kontinuum

Im Folgenden werden die Grundlagen für die Berechnungen im Kontinuum (siehe Kapitel 3) bereitgestellt. Der erste Abschnitt beschreibt kurz die Entwicklung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik bis hin zur Theorie der Quantenchromodynamik. Im zweiten Abschnitt wird der Pfadintegralformalismus vorgestellt, mittels dessen im dritten Abschnitt die Störungstheorie im Kontinuum veranschaulicht wird. Außerdem werden die hier verwendeten Konventionen festgelegt. Im letzten Teil dieses Kapitels befinden sich eine Einführung in die Theorie der Renormierung sowie eine Vorstellung verschiedener Regularisierungsschemata.

### 2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

In der Physik möchte man gerne mit möglichst einfachen Modellen und Theorien die messbaren Ergebnisse reproduzieren und Vorhersagen treffen können. Dies war natürlich auch der Wunsch der Elementarteilchenphysiker, als es in den 1950er und 1960er zu einem explosionsartigen Anstieg der bis dahin entdeckten sogenannten „Elementarteilchen“ kam. Schließlich wurde 1964 von Gell-Mann und Zweig das Quarkmodell vorgeschlagen [12,13], welches endlich mit Hilfe von gruppentheoretischen Überlegungen Ordnung in das Spektrum der stark wechselwirkenden Teilchen bringen sollte. Dieses Modell, welchem der 1961 von Gell-Mann und Ne’eman vorgeschlagene „Eightfold Way“ [14,15], ein erster Ordnungsversuch für Hadronen, zugrunde liegt, besagt, dass Hadronen Produktdarstellungen aus zwei bzw. drei elementaren Konstituenten, den Quarks, seien. Die hier zugrunde liegende Symmetriegruppe ist die  $SU(3)$ -Flavour Symmetrie.

Als dann 1974 das  $J/\psi$  Teilchen gleichzeitig von den Gruppen um Richter [16] sowie um Ting [17] gefunden wurde, stieß das Quarkmodell an seine Grenzen: Die Symmetriegruppe hätte nun aufgrund einer weiteren Quantenzahl („charm“,  $c$ ) auf eine  $SU(4)$ -Flavour erweitert werden müssen. Außerdem ließ sich immer noch nicht klären, warum beispielsweise Vierquarkzustände nicht stabil sind oder warum das  $\Delta^{++}$ -Teilchen existiert, obwohl es allem Anschein nach das Pauli Prinzip verletzt.

Eine Lösung lieferten Han und Nambu sowie unabhängig davon Greenberg und Gell-Mann [18–20], indem sie eine nicht beobachtbare Quantenzahl „colour“ einführten. Erstere vermuteten bereits, dass Quarks mittels eines Eichbosonen-Oktetts wechselwirken, so dass der 1954 von Yang und Mills entwickelten gleichnamigen  $SU(N)$ -Eichtheorie [21] eine neue Bedeutung zukam. Somit war das Pauli Prinzip gerettet und die Quantenchromodynamik gefunden. Zusammen mit der schon in den 1960ern von Glashow, Weinberg und Salam [22–24] entwickelten und nach ihnen benannten GWS-Theorie bildet die QCD als Beschreibung der starken Wechselwirkung das Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Die GWS-Theorie ist eine  $SU(2) \times U(1)$  Eichtheorie, welche die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung mittels Austauschbosonen beschreibt. Sie

fand allerdings erst ab 1971 größere Beachtung, nachdem 't Hooft die Renormierbarkeit von Eichtheorien mit und ohne spontaner Symmetriebrechung [25, 26] bewies.

Das Standardmodell beschreibt drei der vier physikalischen Grundkräfte und hat bereits beeindruckende Übereinstimmungen mit den Experimenten hervorgebracht wie z. B. die Messung des magnetischen Moments des Elektrons im Rahmen der Quantenelektrodynamik [27, Kap. 6.3]. Jedoch besitzt auch dieses Modell seine Schwächen: So konnte bisher das Higgs-Boson, welches für die Generierung von Massen verantwortlich ist, noch nicht nachgewiesen werden, außerdem kann die Baryonenasymmetrie des Universums im Rahmen des klassischen Standardmodells nicht erklärt werden. Hierzu sind Erweiterungen notwendig, wie zum Beispiel die Supersymmetrie (eine Einführung findet sich in [28]). Ein weiteres Defizit ist das Fehlen einer Quantentheorie der Gravitation, so dass in diesem Rahmen noch keine Vereinheitlichung aller vier Grundkräfte existiert.

In dieser Arbeit wird die Quantenchromodynamik genauer betrachtet, dessen mathematisches Gerüst, wie auch das des gesamten Standardmodells, die Quantenfeldtheorie (QFT) ist. Diese lässt sich als Synthese von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie verstehen. Hierzu gibt es zwei äquivalente Darstellungen: die kanonische Quantisierung, bei der die Felder selbst quantisiert und somit zu Feldoperatoren werden, und den Pfadintegralformalismus [29], der im Folgenden genauer betrachtet wird.

## 2.2 Der Pfadintegralformalismus in Quantenfeldtheorien

Der Pfadintegralformalismus wurde 1948 von Feynman entwickelt [30]. Leicht veranschaulichen lässt sich dieser Ansatz in der Quantentheorie für die Übergangsamplitude eines Teilchens vom Ort  $x$  nach  $y$ :<sup>1</sup>

$$\langle x | e^{-iHt} | y \rangle = \int \mathcal{D}x \, e^{iS}. \quad (2.1)$$

In Worten bedeutet dies, dass die Übergangsamplitude gleich dem Integral über alle möglichen Pfade gewichtet mit dem klassischen Wirkungsfunktional  $S$  ist. Diese Größe ist mathematisch allerdings nicht wohldefiniert, da der Exponent oszilliert und somit nicht konvergieren muss. Das Problem lässt sich jedoch durch eine Wickelrotation vermeiden, welche eine Transformation zu imaginären Zeiten  $\tau = it$  bedeutet. Die Wirkung geht dann über in  $S = iS_E$ , was zu einem exponentiell gedämpften Integranden führt. Diese Transformation stellt einen Übergang vom Minkowski-Raum in die euklidische Raum-Zeit dar; Vektoren werden definiert durch  $x_E = (\vec{x}, x_4)$ , die zugehörige Metrik ist  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ .<sup>2</sup> Im Folgenden werden alle Größen in der euklidischen Raum-Zeit angegeben, daher wird auf das Subskript verzichtet.

Das Prinzip des Pfadintegrals lässt sich nun auch auf Quantenfeldtheorien übertragen. Eine wichtige Größe ist hier das erzeugende Funktional  $Z[J]$ , aus dem sich die für die Störungstheorie benötigten Greensfunktionen berechnen lassen. Dieses ist gegeben als die Vakuum-Vakuum Übergangsamplitude in Gegenwart einer externen Quelle  $J(x)$ .

---

<sup>1</sup>In dieser Diplomarbeit werden alle Rechnungen in natürlichen Einheiten, also  $\hbar = c = 1$ , angegeben.

<sup>2</sup>Hierdurch sind im Euklidischen kontra- und kovariante Vektoren identisch, es gilt:

$x_E = x_\mu = x^\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

Für eine  $SU(N)$ -Eichtheorie ergibt sich<sup>3</sup>

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[A_\mu] \exp \left\{ - \int d^4x [\mathcal{L}(x) - J_\mu(x)A_\mu(x)] \right\}. \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{L}$  die Lagrangedichte, die durch  $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  definiert ist, die  $A_\mu(x)$  sind die Eichfelder mit den zugehörigen externen Quellen  $J_\mu(x)$ . Zusammenhängende Greensfunktionen (auch  $n$ -Punkt-Funktionen genannt) erhält man dann mittels Funktionalableitung durch

$$G_n^{(c)}(x_1, \dots, x_n) = \left[ \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right] \Big|_{J=0}. \quad (2.3)$$

Das Wegfallen aller nicht zusammenhängenden Greensfunktionen bewirkt der Normierungsfaktor  $Z[J]^{-1}$ . Die Funktionalableitung ist definiert als:

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4x J(x) \delta^{(4)}(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (2.4)$$

Das Konzept der Störungstheorie beruht nun auf der Entwicklung der Exponentialfunktion im erzeugenden Funktional, so dass für die weiteren Berechnungen lediglich noch die Lagrangedichte diskutiert werden muss.

## 2.3 Die Lagrangedichte der QCD

Neben dem reinen Eichterm der  $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie, der die Gluonen beschreibt, besteht die Lagrangedichte der Quantenchromodynamik aus einem fermionischen Anteil zur Beschreibung der Quarks, so dass sich insgesamt ergibt:

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, A_\mu) = \sum_{f,c} \bar{\psi}_{f,c} (\gamma_\mu D_\mu + m_f) \psi_{f,c} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A. \quad (2.5)$$

Hierbei läuft die Summe über alle verschiedenen Quarksorten („flavours“)  $f = 1, \dots, N_f$  und alle Farbindizes  $c = 1, 2, 3$ . Die Fermionfelder  $\psi_{f,c}$  tragen weiterhin einen Dirac-Spinorindex  $\alpha$  und die  $\gamma_\mu$  sind die Dirac'schen Gammamatrizen mit  $\mu$  als Lorentzindex. Dieser Ausdruck ist für die Lagrangedichte der einzige mögliche, der die Bedingungen Lorentzinviananz und Renormierbarkeit für Spin-1/2-Teilchen erfüllt. Daher taucht hier die kovariante Ableitung  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$  auf, durch die der Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  definiert ist mittels

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}^A T^A. \quad (2.6)$$

Die Matrizen  $T^A$  sind die Generatoren der  $SU(3)$ , sie genügen der Kommutatorrelation

$$[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C, \quad A, B, C = 1, \dots, 8. \quad (2.7)$$

Da die Rechnungen in Kapitel 3 in der adjungierten Darstellung der QCD durchgeführt werden (eine detailliertere Einsicht in Darstellungstheorien liefert [31, Anhang A]),

---

<sup>3</sup>Es wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, was eine Summation über gleiche Indizes bedeutet:  $C_\mu C_\mu \equiv \sum_\mu C_\mu C_\mu$ .

wird diese schon jetzt verwendet. Hierbei wird statt eines Triplets von Quarks wie in der Fundamentaldarstellung ein nichtphysikalisches Oktett in der adjungierten Darstellung<sup>4</sup> betrachtet. Dazu werden die Gell-Mann-Matrizen durch die Strukturkonstanten ersetzt:

$$T_{\text{adj}}^a = (T^a)_{bc} = -i f^{abc}. \quad (2.8)$$

Für eine  $SU(N)$ -Eichtheorie in adjungierter Darstellung gilt

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab}, \quad \text{sowie} \quad \delta^{aa} = N^2 - 1, \quad a, b, c, d = 1, \dots, N^2 - 1. \quad (2.9)$$

## 2.4 Störungstheorie im Kontinuum

Im Folgenden wird die kovariante Eichung  $\partial_\mu A_\mu^a = 0$  verwendet, um die Lorentzinvarianz zu erhalten, was allerdings einen Hilbertraum mit indefiniter Metrik zur Folge hat (*Gupta-Bleuler-Formalismus*, siehe [32, Kap. 5.5.3]). Dieses Problem lässt sich jedoch im Rahmen des *Faddeev-Popov-Ansatzes* [33] lösen. Hierbei wird das Integrationsmaß aus Gleichung (2.2) verändert gemäß

$$\mathcal{D}[A_\mu] \longrightarrow \mathcal{D}[A_\mu] (\det M_{\text{FP}}) \delta[f(A_\mu)]. \quad (2.10)$$

Die Determinante führt nach Exponentierung auf die sogenannten Geistfelder  $c$  bzw.  $\bar{c}$ , welche das Integrationsmaß in beliebigen Eichungen konstant halten. Die Deltafunktion entspricht einer Eichbedingung, die eine eindeutige Repräsentantenmannigfaltigkeit aus dem Phasenraum auswählt und somit das Auftreten von nichtphysikalischen Freiheitsgraden verhindert.

### 2.4.1 Störungsentwicklung in kovarianter Eichung

Der Vakuumerwartungswert einer Observable  $\mathcal{O}$  im Pfadintegralformalismus ist gegeben als

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{L}} \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, A_\mu) e^{-\int d^4x \mathcal{L}(x)}, \quad (2.11)$$

mit der Normierung  $Z = Z[J = 0]$ . Nach Aufspalten der Lagrangedichte in einen freien und einen wechselwirkenden Anteil gemäß  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ , lässt sich der Erwartungswert schreiben als

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{int}} \equiv \langle \mathcal{O} e^{-\int d^4x \mathcal{L}_1(x)} \rangle, \quad (2.12)$$

wobei hier und im Folgenden für den freien Erwartungswert  $\langle \dots \rangle \equiv \langle \dots \rangle_0$  verwendet wird.

---

<sup>4</sup>Kleine lateinische Buchstaben laufen im Folgenden für die  $SU(3)$  in adjungierter Darstellung immer von eins bis acht.

Mit Gleichung (2.5) gilt

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 - \bar{c}^a \partial^2 c^a \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -\frac{g}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c \\ & + \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^d A_\nu^e \\ & - g f^{abc} \bar{c}^a (\partial_\mu A_\mu^c) c^b \\ & + i g \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu^a T^a \psi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Geistfelder  $c$  und  $\bar{c}$  sind skalare Grassmannfelder (vgl. [34, Kap. 1.3]), welche der Fermi-Statistik genügen. Die für die Funktionalableitung benötigten zugehörigen Quellen werden in Kapitel 2.4.2 mit  $\eta$  bzw.  $\bar{\eta}$  bezeichnet, die der Fermionfelder mit  $\chi$  und  $\bar{\chi}$ . Der Term proportional zum Eichparameter  $\xi$  dient der Eichfixierung.

Da der Ausdruck (2.12) geschlossen nicht mehr ausgewertet werden kann, entwickelt man nun die Exponentialfunktion um kleine Kopplungskonstanten. Diese Näherung ist in der Quantenelektrodynamik (QED) gut erfüllt, da dort die Kopplung im störungstheoretisch relevanten Bereich mit  $\alpha_{\text{em}} \approx 1/137$  klein gegen 1 ist. In der QCD ist dies jedoch nicht der Fall. Hier ist die effektive Kopplungskonstante  $\alpha_s(Q)$  nur für sehr große Impulsüberträge  $Q$  und somit sehr große Energien klein. Die Ursache hierfür liegt in der asymptotischen Freiheit. Diese verursacht einen „Anti-Screening-Effekt“, der ein paramagnetisches Verhalten des physikalischen Vakuums bewirkt, so dass (farb-)ladungstragende Eichfelder eine effektive Ladung nicht mehr abschirmen, sondern verstärken. Für kleine Energien ist die Schwachkopplungsentwicklung somit nicht sinnvoll, es werden also alternative nichtperturbative Methoden benötigt. Sehr erfolgreich ist hier die Gitter-QCD, die in Kapitel 5 genauer vorgestellt wird.

## 2.4.2 Feynmanregeln

Die Feynmanregeln bilden das Grundgerüst der Störungstheorie. Sie korrespondieren zu einer graphischen Darstellung, so dass jeder Streuprozess als Summe sogenannter Feynman-Diagramme dargestellt werden kann. Als Grundlage für diese Regeln dienen die vollen  $n$ -Punkt-Funktionen aus Gleichung (2.3). Für den einfachsten Fall skalarer Felder  $\phi$  lassen sie sich schreiben als zeitgeordneter Vakuumerwartungswert

$$G_n^{(c)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle_c. \quad (2.15)$$

Nach dem Wick'schen Theorem (vgl. [35, Kap. 4.2]) kann man diese kontrahieren zu einer Summe über alle Permutationen aus freien Propagatoren  $\Delta(x_{p_i} - x_{p_j})$  gemäß

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \begin{cases} \sum_P \Delta(x_{p_1} - x_{p_2}) \dots \Delta(x_{p_{n-1}} - x_{p_n}) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.16)$$

### Propagatoren

Mit der Aufteilung der Lagrangedichte in Gleichung (2.13) und (2.14) zerfällt nun auch das Funktionalintegral in einen wechselwirkenden, sowie drei freie Teile, so dass es sich schreiben lässt als

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}, \chi, \bar{\chi}] = \exp \left\{ - \int d^4x \mathcal{L}_1 \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta \chi}, \frac{\delta}{\delta \bar{\chi}} \right] \right\} Z_A^0[J] Z_c^0[\eta, \bar{\eta}] Z_\psi^0[\chi, \bar{\chi}]. \quad (2.17)$$

Somit wird ersichtlich, dass es in der QCD drei Propagatoren gibt: einen Gluonpropagator für die Eichfelder  $A_\mu$ , einen Geistpropagator für die Geistfelder  $c$  bzw.  $\bar{c}$ , sowie einen Fermionpropagator für die Quarkfelder  $\psi$  und  $\bar{\psi}$ . Da die Berechnung in allen drei Fällen äquivalent verläuft, genügt es, sie anhand des Gluonpropagators genauer zu beschreiben.

Hierzu wird  $Z_A^0$  geschrieben als

$$Z_A^0[J] = \int \mathcal{D}[A_\mu] \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A_\mu^a K_{\mu\nu}^{ab} A_\nu^b + J_\mu^a A_\mu^a \right] \right\} \quad (2.18)$$

mit

$$K_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \left\{ \delta_{\mu\nu} \partial^2 - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right\}. \quad (2.19)$$

Mittels Gauß'scher Integration (vgl. [36, Kap. 6.2]) folgt hierfür

$$Z_A^0[J] = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) J_\nu^b(y) \right\}, \quad (2.20)$$

wobei mit

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \delta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2} \quad (2.21)$$

$$\stackrel{\xi=1}{=} \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2} \quad (2.22)$$

der Gluonpropagator im Ortsraum gefunden ist. In der zweiten Zeile haben wir die Feynman-'t Hooft Eichung mit  $\xi = 1$  eingesetzt, die im weiteren Verlauf verwendet wird.

Da die folgenden Rechnungen im Ortsraum durchgeführt werden, soll an dieser Stelle auch das in den Propagatoren auftretende Integral ausgewertet werden. Auch dies verläuft für alle benötigten Propagatoren äquivalent, so dass wieder stellvertretend der Gluonpropagator betrachtet wird.

Mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung

$$\frac{1}{(m^2 - k^2)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty d\beta \beta^{\alpha-1} e^{-\beta(m^2 - k^2)} \quad (2.23)$$

erhält man für den Gluonpropagator in  $n$  Dimensionen

$$\begin{aligned}
 D(z) &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{k^2} \\
 &= \int_0^\infty d\beta \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-\beta k^2 + ikz} \\
 &= \int_0^\infty d\beta \beta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4\beta}} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} e^{-q^2} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty d\beta \beta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4\beta}} \\
 &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{4\pi^{\frac{n}{2}} z^{n-2}}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hier wurde bei  $(*)$  die Relation

$$\int d^n q e^{-q^2} = \pi^{\frac{n}{2}} \tag{2.25}$$

verwendet. Analog erhält man für den Geistpropagator

$$\begin{aligned}
 D_{\text{FP}}^{ab}(z) &= \delta^{ab} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{k^2} \\
 &= \delta^{ab} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{4\pi^{\frac{n}{2}} z^{n-2}}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Der Quarkpropagator

$$\begin{aligned}
 \Delta^{ij}(z) &= \delta^{ij} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{\not{k} + m} \\
 &= \delta^{ij} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (\not{k} - m) \frac{e^{ikz}}{k^2 - m^2}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

mit  $\not{k} = \gamma_\mu k^\mu$  wird an dieser Stelle nicht explizit im Ortsraum berechnet, da er für den weiteren Verlauf nicht benötigt wird.

## Vertizes

Im Gegensatz zur abelschen Quantenelektrodynamik treten in der Lagrangedichte der nicht-abelschen QCD für die Eichfelder Selbstkopplungsterme auf. Weiterhin wechselwirken die Eichfelder mit den Geistfeldern, sowie den Quarks. Die Feynmanregeln für die resultierenden Vertizes können hergeleitet werden, indem man die zugehörigen  $n$ -Punkt-Funktionen der Felder nach Gleichung (2.3) bestimmt. Einfacher ist es, sie direkt aus der Lagrangedichte zu entnehmen, hierbei müssen lediglich die Symmetriefaktoren und Ableitungen in Gleichung (2.14) berücksichtigt werden. Erstere erhält man durch Zählen möglicher Invarianzen unter Vertauschung der Eichfelder. Aufgrund der Lorentzstruktur und der Forderung nach Antisymmetrie unter Vertauschung der Indizes ( $\mu \leftrightarrow \nu, 1 \leftrightarrow 2$ , usw.) können die Vertizes dann mit Hilfe der total antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f^{abc}$  abgeleitet werden. Man findet dann:

i) 3-Gluon-Vertex:

$$gf^{abc} [\delta_{\mu\nu}(k_2 - k_1)_\lambda + \delta_{\nu\lambda}(k_3 - k_2)_\mu + \delta_{\mu\lambda}(k_1 - k_3)_\nu]$$

ii) 4-Gluon-Vertex:

$$-g^2 [f^{abe}f^{cde}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\lambda}) + f^{ace}f^{bde}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\omega} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\lambda}) + f^{ade}f^{cbe}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\omega})]$$

iii) Geist-Gluon-Vertex:

$$igf^{abc}q_\mu$$

iv) Fermion-Gluon-Vertex:

$$-ig\gamma_\mu(T^a)_{bc}$$

## 2.5 Renormierung

Berechnet man konkret Feynmandiagramme in Ein-Schleifen-Ordnung, so stellt man fest, dass diese ultraviolett divergieren. Dirac behauptete 1981 bei einer Konferenz in Florida, dass dies auf eine physikalisch nicht sinnvolle Theorie hinweise. Jedoch lässt sich dieses Problem elegant mittels der sogenannten Renormierung beheben (eine Übersicht findet sich in [37]). Dies geschieht in zwei Schritten: Zunächst wird das divergente Integral *regularisiert*, so dass es für einen festen Regulator einen endlichen Wert besitzt. Dann werden die auftretenden Felder, Massen und Kopplungskonstanten derart neu definiert (*renormiert*), dass die Divergenzen verschwinden und der Regulator wieder entfernt werden kann. Dieses Umdefinieren ist erlaubt, da zuvor nichts über die in der Lagrangedichte auftretenden Felder, Massen und Kopplungskonstanten bekannt ist, insbesondere müssen sie nicht mit den experimentell gefundenen Werten übereinstimmen. Die Größen in der ursprünglichen Lagrangedichte werden als *nackte* Größen bezeichnet, welche von Beginn an divergieren. Mit den renormierten Größen lassen sich dann physikalisch messbare Observable berechnen.

### 2.5.1 Regularisierungsschemata

#### Pauli-Villars-Regularisierung

Die 1949 von Pauli und Villars eingeführte Methode besteht darin, den Propagator umzuschreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + m^2} &\longrightarrow \frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{1}{k^2 + \Lambda^2} \\ &= \frac{\Lambda^2 - m^2}{(k^2 + m^2)(k^2 + \Lambda^2)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei  $\Lambda^2 \gg m^2$ . Der so gewählte Propagator fällt nun für große  $k$  mit  $1/k^4$  ab und hat dementsprechend einen kleineren Divergenzgrad (vgl. [34, Kap. 2.2]). Den ursprünglichen Propagator erhält man im Limes  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Falls die auftretenden Integrale nach dieser Regularisierung noch immer divergieren, kann die Prozedur wiederholt werden. Um die Eichinvarianz in abelschen Theorien zu erhalten, kann der Regulator  $\Lambda$  auch direkt in der Masse abgezogen werden. Im nicht-abelschen Fall bricht diese Methode allerdings die Eichinvarianz.

#### Gitterregularisierung

Die Gitterregularisierung ist eine sogenannte „Cut-off“-Regularisierung. In diesem Fall wird die Raumzeit durch ein Gitter mit Gitterabstand  $a$  diskretisiert. Für die Integrale gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (2.29)$$

Die Impulsintegration wird also auf die erste Brillouin-Zone beschränkt. Dies verkleinert allerdings die Translations- und Rotationsinvarianz, die Eichinvarianz bleibt hier aber erhalten. Durch Limesbildung  $a \rightarrow 0$  erhält man schließlich wieder das Kontinuumsergebnis. Dieses Verfahren eignet sich sehr gut für eine nichtperturbative Behandlung, in Kapitel 6 wird diese Regularisierung jedoch auch störungstheoretisch verwendet.

#### Dimensionale Regularisierung

Für praktische Zwecke eignet sich im Kontinuum am besten die dimensionale Regularisierung nach 't Hooft und Veltman [38]. Bei dieser Methode wird die Dimension  $n$  der Raumzeit wie eine kontinuierliche Variable behandelt. Da die Eichinvarianz nicht von der Dimension abhängt, bleibt diese, wie auch alle anderen Symmetrien, erhalten. Ein Problem der dimensionalen Regularisierung ist allerdings die Wohldefiniertheit von Tensoren in nichtganzzahligen Dimensionen (vgl. [32, Anhang B]). Dieses Problem taucht beispielsweise bei chiralen Theorien auf, für die es demnach kein eichinvariantes Regularisierungsverfahren gibt.

Anhand eines Beispiels soll die Vorgehensweise hier für den späteren Gebrauch ver-

deutlicht werden. In Kapitel 3 wird das folgende Standardintegral benötigt:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + m^2 + 2kp)^A} \\
 &\stackrel{(2.23)}{=} \frac{1}{\Gamma(A)} \int_0^\infty d\beta \beta^{A-1} e^{-\beta m^2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-\beta(k^2 + 2kp)} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(A)} \int_0^\infty d\beta \beta^{A-\frac{n}{2}-1} e^{-\beta(m^2 - p^2)} \\
 &\stackrel{(\dagger)}{=} \frac{\Gamma(A - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(A)} \frac{1}{(m^2 - p^2)^{A-\frac{n}{2}}}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Bei  $(\dagger)$  wurde die Definition der Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t} \tag{2.31}$$

$$s^{-x} \Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-st} \tag{2.32}$$

verwendet. Das Ergebnis (2.30) soll für beliebige  $n \in \mathbb{R}$  definiert sein. Dies bedeutet, dass die Divergenzen des ursprünglichen Integrals nun als Polstellen der Gammafunktion auftreten. Diese liegen bei Null sowie den negativen ganzen Zahlen. Nimmt man an, dass die Dimension nah bei vier ist, kann man

$$n = 4 - 2\varepsilon \tag{2.33}$$

ansetzen. Dies wird im gesamten ersten Teil der Diplomarbeit verwendet. Dann kann um die Polstellen der Gammafunktion entwickelt werden mit

$$\Gamma(-m + \epsilon) = \frac{(-1)^m}{m!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \psi(m+1) + \frac{1}{2}\epsilon \left[ \frac{\pi^2}{3} + \psi^2(m+1) - \psi'(m+1) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}, \tag{2.34}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \psi(m+1) &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \gamma_E, & \left( \psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} \right) \\
 \psi'(m+1) &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{l^2}, & \psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Es bezeichnet  $\gamma_E$  die Euler-Mascheroni Konstante mit

$$\psi(1) = -\gamma_E = -0,5772\dots.$$

Setzt man nun in (2.30)  $A = 2$  und  $p = 0$ , so erhält man ein logarithmisch divergentes Integral. Mit den Eigenschaften der Gammafunktion

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{2.36}$$

und der Entwicklung

$$x^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln x} = 1 + \varepsilon \ln x + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.37}$$

zeigt sich diese Divergenz nach der dimensionalen Regularisierung wie folgt:

$$I = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln m^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (2.38)$$

Das Integral besitzt nun einen endlichen Wert für ein festes  $\varepsilon$ . Betrachtet man den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so tritt die logarithmische Divergenz als Polstelle in  $\varepsilon$  auf. Diese kann allerdings durch die Renormierung für ein festes  $\varepsilon$  subtrahiert werden, so dass nach Redefinition der ursprünglichen Parameter ein endlicher Wert für das Integral verbleibt.

## 2.5.2 Minimale Subtraktion

### Definition

Wird dimensionale Regularisierung verwendet wie in Gleichung (2.38), so manifestieren sich die ultravioletten Divergenzen als Polstellen in Abhängigkeit von der Dimension  $n$ . Das 1973 von 't Hooft entwickelte Minimale Subtraktionsschema (MS-Schema) besteht nun darin, diese Pole abzuziehen. Dazu subtrahiert man von der ursprünglichen Lagragedichte  $\mathcal{L}_0$ , welche von den nackten Größen abhängt, einen sogenannten *Gegenterm*  $\Delta\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}. \quad (2.39)$$

Hierbei besitzt  $\mathcal{L}$  die gleiche Struktur wie die ursprüngliche Lagragedichte, jedoch wurden alle nackten Größen durch renormierte ersetzt. Dies hat zur Folge, dass die Divergenzen in den Gegenterm absorbiert werden und die resultierende Lagragedichte endliche Resultate liefert. Diese Vorgehensweise gilt für beliebige Renormierungsschemata; das MS-Schema zeichnet sich nun dadurch aus, dass nur die Pole abgezogen werden. Dies bedeutet, dass die Gegenterme keine endlichen Teile enthalten und somit durch die Pole eindeutig definiert sind.

Bei der Renormierung der Kopplungskonstanten ist zu beachten, dass die nackte Kopplung  $g_0$  eine Massendimension in Abhängigkeit der Dimension  $n$  trägt. Daher muss eine Massenskala  $\nu$  eingeführt werden, für die in einer SU(3)-Yang-Mills-Theorie mit  $n = 4$  Dimensionen gilt

$$g_0 \rightarrow \nu^{2-\frac{n}{2}} g. \quad (2.40)$$

Die Vorteile dieses Schemas liegen in der automatischen Erhaltung der Symmetrien<sup>5</sup>, sowie der problemlosen Behandlung masseloser Theorien. Außerdem sind die Berechnungen der divergenten Teile der Feynmandiagramme in Ein-Schleifen-Ordnung sehr einfach. Der Nachteil liegt lediglich in der physikalischen Kontraintuitivität des Schemas.

Allgemein wird eine Theorie als renormierbar bezeichnet, wenn der Gegenterm  $\Delta\mathcal{L}$  von der gleichen Struktur ist wie die ursprüngliche Lagragedichte, also falls der Gegenterm durch eine Redefinition der ursprünglichen Parameter der Lagragedichte absorbiert werden kann. Müssen hingegen in jeder Ordnung Störungstheorie weitere Gegenterme hinzugefügt werden, so dass eine unendliche Anzahl neuer Parameter benötigt wird, spricht man von einer nicht-renormierbaren Theorie.

<sup>5</sup>Die Ausnahme bilden chirale Symmetrien, wie im Abschnitt über dimensionale Regularisierung beschrieben.

### **$\overline{\text{MS}}$ -Schema**

Verwendet man das MS-Schema, so stellt sich heraus, dass hier immer wieder der gleiche Vorfaktor proportional zu  $\ln 4\pi - \gamma_E$  auftritt. Daher ist es sinnvoll, diesen Faktor ebenfalls zu subtrahieren, was im modifizierten MS-Schema, dem  $\overline{\text{MS}}$ -Schema, geschieht. Dazu wird der Massenparameter  $\nu$  des MS-Schemas gemäß

$$\nu^2 = \mu^2 \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi} \quad (2.41)$$

umdefiniert.

# 3 Berechnung des QCD-Feldstärkekorrelators im Kontinuum

Im Folgenden wird die Berechnung des quantenchromodynamischen Feldstärkekorrelators in nächster zur führenden Ordnung im Kontinuum vorgestellt. Diese wurde bereits im Minkowski-Raum von Jamin [39] auf direktem Wege und von Eidemüller [40] im Rahmen der „Heavy Quark Effective Theory“ (HQET) durchgeführt. Im ersten Abschnitt werden der Feldstärkekorrelator so wie seine Komponenten genauer definiert, anschließend folgt die ausführliche Berechnung des Korrelators in Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten  $\mathcal{O}(g^2)$ .

## 3.1 Der QCD-Feldstärkekorrelator

Der eichinvariante<sup>1</sup> QCD-Feldstärkekorrelator in der adjungierten Darstellung ist definiert als

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}(z) = \langle 0 | T\{F_{\mu\nu}^a(y)P e^{-gf^{abc}z^\tau \int_0^1 d\sigma A_\tau^c(x+\sigma z)} F_{\lambda\omega}^b(x)\} | 0 \rangle. \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$  den Feldstärketensor im Euklidischen und es ist  $z = y - x$ . Die Zeitordnung  $T$  ist definiert als

$$T \exp \left\{ \int_0^t dt' \mathcal{O}(t') \right\} = 1 + \int_0^t dt' \mathcal{O}(t') + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathcal{O}(t') \mathcal{O}(t'') + \dots, \quad (3.2)$$

die Pfadordnung  $P$  wird analog dazu gebildet.

Der Feldstärkekorrelator ist von besonderer Bedeutung für nicht-perturbative Näherungen der QCD, wie z. B. die SVZ Summationsregeln [41, 42]. Hierdurch ist der Korrelator auch eng mit der Gluon-Kondensation verknüpft [43]. Ebenso spielt er eine bedeutende Rolle für das stochastische Vakuummodell [44–46] sowie für die Beschreibung der Hochenergie Hadron-Hadron-Streuung [47–50]. Die Anwendungen des Korrelators auf dem Gitter werden in Kapitel 6 genauer besprochen.

### 3.1.1 Die Schwinger-Linie

Im Allgemeinen lässt sich der Feldstärkekorrelator mit einer beliebigen Schwinger-Linie (oder auch Schwinger-String) darstellen:

$$S_C^{ab}(y, x) = P \exp \left\{ -g f^{abc} z^\tau \int_{0,C}^1 d\sigma A_\tau^c(x + \sigma z) \right\}. \quad (3.3)$$

Im Folgenden soll allerdings die Gerade als einfachste Form des Weges  $C$  verwendet werden, weshalb die explizite Abhängigkeit von  $C$  unterdrückt wird.

---

<sup>1</sup>Die Eichinvarianz wird durch die Schwinger-Linie (siehe Kap. 3.1.1) sichergestellt.

### 3.1.2 Lorentz-Struktur

Der Feldstärkekorrelator lässt sich aufgrund seiner Lorentz-Struktur<sup>2</sup> durch zwei skalare Funktionen  $\mathcal{D}(z^2)$  und  $\mathcal{D}_1(z^2)$  parametrisieren [45]:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}(z) &= (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\lambda}) (\mathcal{D}(z^2) + \mathcal{D}_1(z^2)) \\ &+ (\delta_{\mu\lambda}z_\nu z_\omega - \delta_{\mu\omega}z_\nu z_\lambda - \delta_{\nu\lambda}z_\mu z_\omega + \delta_{\nu\omega}z_\mu z_\lambda) \frac{\partial\mathcal{D}_1(z^2)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Der Korrelator ist total antisymmetrisch unter Vertauschung von  $\mu \leftrightarrow \nu$  und  $\lambda \leftrightarrow \omega$ . Für spätere Zwecke ist es daher sinnvoll, die Notation

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}(z) \equiv \mathcal{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}(z) = \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}(z) - \mathcal{D}_{\mu\nu\omega\lambda}(z) - \mathcal{D}_{\nu\mu\lambda\omega}(z) + \mathcal{D}_{\nu\mu\omega\lambda}(z) \quad (3.5)$$

einzuführen. Somit gilt

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}(z) = \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} \mathcal{A}(z^2) + \delta_{\mu\lambda} \frac{z_\nu z_\omega}{z^2} \mathcal{B}(z^2), \quad (3.6)$$

und man kann identifizieren

$$2\mathcal{A}(z^2) = \mathcal{D}(z^2) + \mathcal{D}_1(z^2) \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{z^2}\mathcal{B}(z^2) = \frac{\partial\mathcal{D}_1(z^2)}{\partial z^2}. \quad (3.8)$$

## 3.2 Berechnung im Kontinuum

Um den vollen Feldstärkekorrelator berechnen zu können, muss er gemäß Gleichung (2.12) entwickelt werden:

$$\mathcal{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}(z) = \left\langle 0 \left| T \left\{ F_{\mu\nu}^a(y) P S^{ab}(y, x) F_{\lambda\omega}^b e^{-\int d^4 y' \mathcal{L}_1(y')} \right\} \right| 0 \right\rangle. \quad (3.9)$$

Setzt man die Definition für  $F_{\mu\nu}^a(x)$ , sowie (2.14) für den Wechselwirkungsterm der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_1$  und (3.3) für die Schwingerlinie ein, so lässt sich der Korrelator in der Kopplungskonstanten  $g$  entwickeln. Bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(g^2)$  erhält man für die Exponentialfunktion der Schwingerlinie

$$\begin{aligned} S^{ab}(y, x) &= \delta^{ab} - g f^{abc} z^\tau \int_0^1 d\sigma A_\tau^c(x + \sigma z) \\ &+ \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{cbe} z^\tau z^\kappa \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma d\rho A_\tau^d(x + \sigma z) A_\kappa^e(x + \rho z) \\ &+ \mathcal{O}(g^3), \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei für die Strukturkonstanten die Relation (vgl. 2.7)

$$(T^d T^e)^{ab} = -f^{adc} f^{ceb} \quad (3.11)$$

---

<sup>2</sup>Für beliebige Raum-Zeiten tritt an die Stelle der  $\delta_{\mu\nu}$  der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$ .

verwendet wurde. Für den 3-Gluon-Vertex des wechselwirkenden Teils der Lagragedichte  $\mathcal{L}_1^{3g}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{-\int d^4y' \mathcal{L}_1^{3g}(y')} &= 1 + i \frac{g}{2} f^{hij} \int d^4y' (\partial_\alpha A_\beta^h(y') - \partial_\beta A_\alpha^h(y')) A_\alpha^i(y') A_\beta^j(y') \\ &\quad - \frac{g^2}{4} f^{hij} f^{klm} \int d^4y' (\partial_\alpha A_\beta^h(y') - \partial_\beta A_\alpha^h(y')) A_\alpha^i(y') A_\beta^j(y') \\ &\quad \times \int d^4y'' (\partial_\gamma A_\delta^k(y'') - \partial_\delta A_\gamma^k(y'')) A_\gamma^l(y'') A_\delta^m(y'') \\ &\quad + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Entwicklungen der anderen Wechselwirkungsterme verläuft völlig analog. Für die folgende Rechnung wird außerdem für den Vakuumerwartungswert die Schreibweise

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle \equiv \langle 0 | T\{\phi(x) \phi(y)\} | 0 \rangle \quad (3.13)$$

eingeführt.<sup>3</sup> Des Weiteren bezeichnet  $\partial_\mu^x$  die Ableitung nach der Koordinate  $x_\mu$ . Verwendet man  $z = y - x$ , so folgt  $\partial_\mu^y = \partial_\mu^z \equiv \partial_\mu = -\partial_\mu^x$  und es gilt

$$\partial_\mu z^{-n} = \partial_\mu (z_\nu z^\nu)^{-\frac{n}{2}} = -n \frac{z_\mu}{z^{n+2}}. \quad (3.14)$$

Im Folgenden findet sich eine detaillierte Berechnung der einzelnen Beiträge; zusammengefasst werden die Ergebnisse in Kapitel 4.

### 3.2.1 Führende Ordnung

Multipliziert man nun in Gleichung (3.9) alle Terme miteinander aus und sortiert nach Potenzen in  $g$ , so erhält man in führender Ordnung  $\mathcal{O}(g^0)$  (siehe Abbildung 3.1)

$$\mathcal{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(0)}(z) = \langle (\partial_\mu A_\nu^a(y) - \partial_\nu A_\mu^a(y)) \delta^{ab} (\partial_\lambda A_\omega^b(x) - \partial_\omega A_\lambda^b(x)) \rangle. \quad (3.15)$$

$\otimes \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \otimes$

**Abbildung 3.1:** Feldstärkekorrelator in führender Ordnung.

Dann folgt mit den Gleichungen (2.9), (2.24) und (2.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(0)}(z) &= \langle \partial_\mu^y A_\nu^a(y) \delta^{ab} \partial_\lambda^x A_\omega^b(x) \rangle \\ &= -\partial_\mu \partial_\lambda D_{\nu\omega}^{aa}(z) \\ &= (N^2 - 1) \Gamma(1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon) \frac{\delta_{\nu\omega}}{2\pi^{2-\varepsilon}} \left( \frac{\delta_{\mu\lambda}}{z^{4-2\varepsilon}} - 2(2 - \varepsilon) \frac{z_\mu z_\lambda}{z^{6-2\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(0)}(z^2) + \mathcal{D}_1^{(0)}(z^2) &= 2\mathcal{A}^{(0)}(z^2) = (N^2 - 1)(1 - \varepsilon) \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\pi^{2-\varepsilon} z^{4-2\varepsilon}} \\ z^2 \frac{\partial \mathcal{D}_1^{(0)}(z^2)}{\partial z^2} &= \mathcal{B}^{(0)}(z^2) = -(N^2 - 1)(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon) \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\pi^{2-\varepsilon} z^{4-2\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

<sup>3</sup>Im Euklidischen spielt die Zeitkomponente keine bevorzugte Rolle, somit gibt es dort keine Zeitordnung. Sie wird hier mitgeführt, um die Gültigkeit der Rechnung im Minkowski-Raum zu erhalten.

Somit erhält man für die führende Ordnung im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(0)}(z^2) &= 0 \\ \mathcal{D}_1^{(0)}(z^2) &= \frac{N^2 - 1}{\pi^2 z^4}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Ein-Schleifen-Ordnung

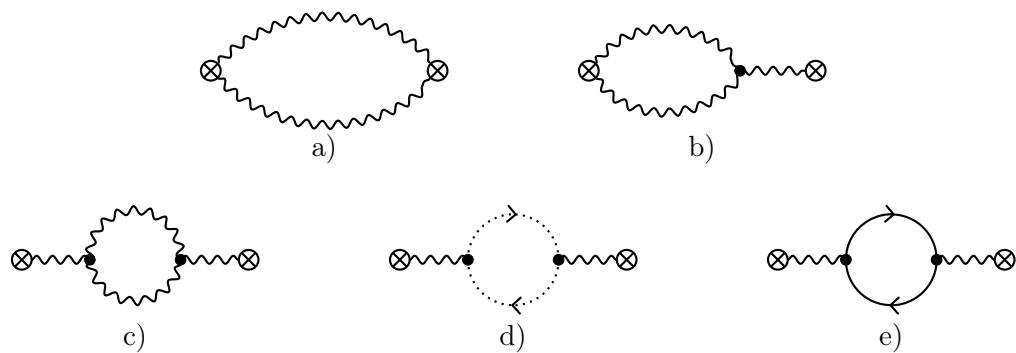
Kein Term der Entwicklung linear in  $g$  liefert einen Beitrag zum Feldstärkekorrelator, da diese Terme eine ungerade Anzahl an Eichfeldern enthalten und somit nach dem Wick'schen Theorem (2.16) verschwinden. Außerdem tragen Terme proportional zum Propagator<sup>4</sup>  $D(0)$  nicht bei, da gilt (vgl. [51, Kap. 4.3]):

$$\begin{aligned} D(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + \epsilon} \\ &= \lim_{n \rightarrow 4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + \epsilon} \\ &= \lim_{n \rightarrow 4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\epsilon \pi^2}{(2\pi)^n} \left[ \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} + \psi(2) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei  $\psi(2) = 1 - \gamma_E$  die in Gleichung (2.35) definierte Digamma-Funktion ist.

#### Diagramme ohne Schwinger-Linien Anteil

In der Ein-Schleifen-Ordnung, also in der Ordnung  $\mathcal{O}(g^2)$ , tragen Diagramme mit und ohne Schwinger-Linien Anteil bei. Es bleiben die folgenden Diagramme ohne Schwinger-Linien Anteil auszuwerten:



**Abbildung 3.2:** Ein-Schleifen Diagramme ohne Schwinger-Linien Anteil: a), b) Gluonenbeiträge, c) Gluonen-, d) Geistteilchen- und e) Fermionenschleife.

---

<sup>4</sup>Mit  $D(0)$  wird hier sowohl der Gluon- als auch der Geistpropagator bezeichnet.

**Diagramm 3.2 a).** Für dieses Diagramm lässt sich direkt der antisymmetrisierte Beitrag berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)a}(z) &= g^2 f^{bcd} f^{bef} \langle A_\mu^c(y) A_\nu^d(y) A_\lambda^e(x) A_\omega^f(x) \rangle \\
 &= g^2 f^{bcd} f^{bef} \left[ 0 + D_{\mu\lambda}^{ce}(z) D_{\nu\omega}^{df}(z) + D_{\mu\omega}^{cf}(z) D_{\nu\lambda}^{de}(z) \right] \\
 &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon)}{16\pi^{4-2\varepsilon} z^{4-4\varepsilon}} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\omega} \delta_{\nu\lambda}). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  kann man ablesen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^{(2)a}(z^2) &= \frac{g^2 N(N^2 - 1)}{16\pi^4 z^4} \\
 \mathcal{D}_1^{(2)a}(z^2) &= 0. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

**Diagramm 3.2 b).** In der Entwicklung erhält man zwei Beiträge für dieses Diagramm. Fasst man diese zusammen, so findet man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b}(z) &= -\frac{g^2}{2} f^{afg} f^{hij} \int d^4 y' \partial_\mu^y \langle A_\nu^a(y) \partial_{[\alpha}^y A_{\beta]}^h(y') A_\alpha^i(y') A_\beta^j(y') A_\lambda^f(x) A_\omega^g(x) \rangle \\
 &= -\frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) \int dy' \partial_\mu^y \left\{ \left( \delta_{\nu[\beta} \partial_{\alpha]}^y D(y - y') \right) D^2(x - y') \delta_{\lambda[\alpha} \delta_{\beta]\omega} \right. \\
 &\quad + \left( \delta_{\lambda[\beta} \partial_{\alpha]}^y D(x - y') \right) D(x - y') D(y - y') \delta_{\nu[\beta} \delta_{\alpha]\omega} \\
 &\quad \left. + \left( \delta_{\omega[\beta} \partial_{\alpha]}^y D(x - y') \right) D(x - y') D(y - y') \delta_{\nu[\alpha} \delta_{\beta]\lambda} \right\}, \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

wobei für die Notation mit (3.5) gilt:

$$\partial_{[\alpha} A_{\beta]} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Nach Substitution  $y' - y = z'$   $\Rightarrow$   $y' - x = z' + z$  und Bildung der Ableitungen  $\partial^{y'} = -\partial^{z'}$  sowie  $\partial^y = -\partial^{z'}$  erhält man dann

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b}(z) &= \frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) \frac{\Gamma^3(\frac{n}{2} - 1)}{4^3 \pi^{\frac{3n}{2}}} (2 - n) \int d^4 z' \\
 &\times \left\{ \left( \frac{\delta_{\nu[\beta} \delta_{\alpha]\mu}}{z'^n (z + z')^{2n-4}} - n \frac{\delta_{\nu[\beta} z'_{\alpha]} z'_\mu}{z'^{n+2} (z' + z)^{2n-4}} \right) \delta_{\lambda[\alpha} \delta_{\beta]\omega} \right. \\
 &\quad + (2 - n) \left( \frac{\delta_{\lambda[\beta} (z' + z)_{\alpha]} z'_\mu}{z'^{n-2} (z' + z)^{2n-2}} \delta_{\nu[\beta} \delta_{\alpha]\omega} + \frac{\delta_{\omega[\beta} (z' + z)_{\alpha]} z'_\mu}{z'^{n-2} (z' + z)^{2n-2}} \delta_{\nu[\alpha} \delta_{\beta]\lambda} \right) \left. \right\}. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Zur Lösung der Integrale lässt sich folgendes allgemeines Integral verwenden, dessen Herleitung sich in Anhang A.4.4 findet:

$$\int d^d z' \frac{1}{(z' - z_1)^n (z' - z_2)^m} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m-d}{2}) \Gamma(\frac{d-n}{2}) \Gamma(\frac{d-m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(d - \frac{m+n}{2})} \frac{1}{(z_1 - z_2)^{n+m-d}}. \tag{3.24}$$

Durch Ableiten liefert dieses Integral ebenfalls eine Lösung für die weiteren Integrale in Gleichung (3.23); diese finden sich im Anhang in den Gleichungen (A.27) und (A.28). Durch Einsetzen gelangt man dann für Diagramm b) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b}(z) &= -3g^2N(N^2-1)\frac{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{3n}{2}-4)\Gamma(4-n)\Gamma(3-\frac{n}{2})}{4^3\pi^{\frac{3n}{2}-2}\Gamma(n-2)\Gamma(7-\frac{3n}{2})} \\ &\quad \times \left\{ (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\lambda})\frac{2}{z^{3n-8}} - (\delta_{\nu\omega}z_\mu z_\lambda - \delta_{\nu\lambda}z_\mu z_\omega)\frac{\frac{3n}{2}-4}{z^{3n-6}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Auch hier findet man wieder ein divergentes Ergebnis für  $n = 4$ . Nach Antisymmetrisierung erhält man für  $n = 4 - 2\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(2)b}(z^2) &= -3g^2N(N^2-1)\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(2-3\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{32\pi^{4-3\varepsilon}\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(1+3\varepsilon)z^{4-6\varepsilon}} \\ \mathcal{B}^{(2)b}(z^2) &= 3(2-3\varepsilon)g^2N(N^2-1)\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(2-3\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{16\pi^{4-3\varepsilon}\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma(1+3\varepsilon)z^{4-6\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

und so ergibt sich nach Renormierung (vgl. Abschnitt 2.5.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)b}(z^2) &= 0 \\ \mathcal{D}_1^{(2)b}(z^2) &= -g^2\frac{N(N^2-1)}{16\pi^4z^4}3(L+1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hierbei wurde die Abkürzung

$$L \equiv \ln(\pi e^{\gamma_E} \nu^2 z^2) \quad (3.28)$$

eingeführt mit der Massenskala  $\nu$  des MS-Schemas (vgl. Gleichung (2.40)).

**Diagramm 3.2 c).** Für die Gluonschleife ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)c}(z) &= -\frac{g^2}{4}f^{cde}f^{hij}\int d^4y_1 d^4y_2 \left\langle \partial_\mu^y A_\nu^a(y)\partial_\lambda^x A_\omega^a(x)\partial_{[\alpha}^{y_1} A_{\beta]}^h(y_1) \right. \\ &\quad \left. \times A_\alpha^i(y_1)A_\beta^j(y_1)\partial_{[\gamma}^{y_2} A_{\delta]}^c(y_2)A_\gamma^d(y_2)A_\delta^e(y_2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Aufgrund des Produktes von jeweils acht Eichfeldern, kommt es hier zu einer großen Anzahl von Möglichkeiten bei der Wick-Kontraktion. Diese werden hier nicht explizit aufgelistet. Folgt man allerdings den bereits vorgestellten Rechnungen, so stößt man nach Einsetzen der Gluonpropagatoren und Zusammenfassen der Terme auf das folgende Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)c}(z) &= 2(n-2)^2g^2N(N^2-1)\frac{\Gamma^4(\frac{n}{2}-1)}{4^4\pi^{2n}}\partial_\mu\partial_\nu\int d^n y_1 d^n y_2 \\ &\quad \times \left\{ \delta_{\nu\omega} \left[ \frac{(y_1-y)_\alpha(y_2-x)_\alpha}{(y-y_1)^n(x-y_2)^n(y_1-y_2)^{2n-4}} - \frac{(y_1-y)_\alpha(y_2-y_1)_\alpha}{(y-y_1)^n(x-y_2)^{n-2}(y_1-y_2)^{2n-2}} \right. \right. \\ &\quad + \frac{(y_2-x)_\alpha(y_2-y_1)_\alpha}{(y-y_1)^{n-2}(x-y_2)^n(y_1-y_2)^{2n-2}} - \frac{1}{(y-y_1)^{n-2}(x-y_2)^{n-2}(y_1-y_2)^{2n-2}} \left. \right] \\ &\quad + \left[ -\frac{(y_1-y)_\omega(y_2-x)_\nu}{(y-y_1)^n(x-y_2)^n(y_1-y_2)^{2n-4}} + \frac{(y_1-y)_\omega(y_2-y_1)_\nu}{(y-y_1)^n(x-y_2)^{n-2}(y_1-y_2)^{2n-2}} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(y_2-x)_\nu(y_2-y_1)_\omega}{(y-y_1)^{n-2}(x-y_2)^n(y_1-y_2)^{2n-2}} + \frac{(2n-1)(y_2-y_1)_\omega(y_2-y_1)_\nu}{(y-y_1)^{n-2}(x-y_2)^{n-2}(y_1-y_2)^{2n}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituiert man nun  $y - y_1 = z_1$  und  $y - y_2 = z_2$ , so erhält man Integrale vom Typ

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}(z) &= \int d^n z_1 \int d^n z_2 \frac{z_{1\alpha}(z_2 - z)_\beta}{z_1^n (z_2 - z)^n (z_2 - z_1)^{2n-4}} \\ &= \pi^4 \frac{\Gamma^2(3 - \frac{n}{2}) \Gamma(4 - n) \Gamma(2n - 6)}{\Gamma^2(\frac{n}{2}) \Gamma(n - 2) \Gamma(10 - 2n)} \left( \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} \frac{z^2}{2n - 7} - z_\alpha z_\beta \right) z^{12-4n}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

welche sich mit den Formeln aus Anhang A.4.4 bestimmen lassen. Insgesamt gibt es fünf verschiedene Integrale, die sich alle auf die gleiche Form wie (3.31) bringen lassen. Nach einer weiteren länglichen Rechnung gelangt man dann zu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)c}(z) &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{(6n - 5) \Gamma^2(\frac{n}{2} - 1) \Gamma(4 - n) \Gamma^2(3 - \frac{n}{2}) \Gamma(2n - 6)}{4^3 \pi^{2n-4} \Gamma(n - 2) \Gamma(10 - 2n)} \\ &\quad \times \partial_\mu \partial_\lambda \left( \frac{\delta_{\nu\omega}}{4n - 14} z^{14-4n} - z_\nu z_\omega z^{12-4n} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dies führt nach Ableiten und Antisymmetrisieren auf

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)c}(z) &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{(6n - 5) \Gamma^2(\frac{n}{2} - 1) \Gamma(4 - n) \Gamma^2(3 - \frac{n}{2}) \Gamma(2n - 6)}{32 \pi^{2n-4} \Gamma(n - 2) \Gamma(10 - 2n)} \\ &\quad \times (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\omega} z^{12-4n} - 2(12 - 4n) \delta_{\nu\omega} z_\mu z_\lambda z^{10-4n}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Folglich findet man schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(2)c}(z^2) &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{(19 - 12\varepsilon) \Gamma^2(1 - \varepsilon) \Gamma(2\varepsilon) \Gamma^2(1 + \varepsilon) \Gamma(2 - 4\varepsilon)}{32 \pi^{4-4\varepsilon} \Gamma(2 - 2\varepsilon) \Gamma(2 + 4\varepsilon) z^{4-8\varepsilon}} \\ \mathcal{B}^{(2)c}(z^2) &= -g^2 N(N^2 - 1) \frac{(1 - 2\varepsilon)(19 - 12\varepsilon) \Gamma^2(1 - \varepsilon) \Gamma(2\varepsilon) \Gamma^2(1 + \varepsilon) \Gamma(2 - 4\varepsilon)}{16 \pi^{4-4\varepsilon} \Gamma(2 - 2\varepsilon) \Gamma(2 + 4\varepsilon) z^{4-8\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)c}(z^2) &= 0 \\ \mathcal{D}_1^{(2)c}(z^2) &= g^2 \frac{N(N^2 - 1)}{48 \pi^4 z^4} \frac{19}{4} \left( L + \frac{59}{57} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Diagramm 3.2 d).** Die Geistschleife liefert den folgenden Beitrag, wobei für den Geist-propagator (vgl. Gleichung (2.26))  $D_{\text{FP}}(y - x) = \langle c(y) \bar{c}(x) \rangle$  verwendet wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)d}(z) &= \frac{g^2}{2} f^{hij} f^{klm} \int d^4 y_1 d^4 y_2 \left\langle \partial_\mu^y A_\nu^a(y) \partial_\lambda^x A_\omega^a(x) \bar{c}^h(y_1) \left( \partial_\alpha^{y_1} A_\alpha^j(y_1) \right) \right. \\ &\quad \times c^i(y_1) \bar{c}^k(y_2) \left( \partial_\beta^{y_2} A_\beta^m(y_2) \right) c^l(y_2) \left. \right\rangle \\ &= \frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) \partial_\mu \partial_\nu \int d^4 y_1 d^4 y_2 D_{\text{FP}}(y_2 - y_1) D_{\text{FP}}(y_1 - y_2) \\ &\quad \times \left\{ \delta_{\nu\alpha} \delta_{\omega\beta} \left( \partial_\alpha^{y_1} D(y - y_1) \right) \left( \partial_\beta^{y_2} D(x - y_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\nu\beta} \delta_{\omega\alpha} \left( \partial_\beta^{y_2} D(y - y_2) \right) \left( \partial_\alpha^{y_1} D(x - y_1) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nach Bildung der Ableitungen nach  $y_1$  und  $y_2$ , sowie der Substitution  $y - y_1 = z_1$ ,  $y - y_2 = z_2$  findet man

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)d}(z) &= \frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) \frac{\Gamma^4(\frac{n}{2} - 1)}{4^4 \pi^{2n}} \partial_\mu \partial_\lambda (2 - n)^2 \int d^4 z_1 d^4 z_2 \\ &\quad \left( \frac{z_{1\nu}(z_2 - z)_\omega}{z_1^n (z_2 - z)^n (z_1 - z_2)^{2n-4}} + \frac{(z_1 - z)_\nu z_{2\omega}}{z_2^n (z_1 - z)^n (z_1 - z_2)^{2n-4}} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die beiden auftretenden Integrale liefern den gleichen Wert, da sie symmetrisch unter Vertauschung von  $z_1$  und  $z_2$  sind. Mit den Formeln aus Anhang A.4.4 findet man für das Integral

$$\int d^4 z_1 d^4 z_2 \frac{z_{1\nu}(z_2 - z)_\omega}{z_1^n (z_2 - z)^n (z_1 - z_2)^{2n-4}} = \pi^2 \frac{\Gamma(4 - n) \Gamma^2(3 - \frac{n}{2}) \Gamma(2n - 6)}{\Gamma^2(\frac{n}{2}) \Gamma(n - 2) \Gamma(10 - 2n)}. \quad (3.38)$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)d}(z) &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2} - 1) \Gamma(4 - n) \Gamma^2(3 - \frac{n}{2}) \Gamma(2n - 6)}{4^3 \pi^{2n-4} \Gamma(n - 2) \Gamma(10 - 2n)} \\ &\quad \times \partial_\mu \partial_\lambda \left( \frac{\delta_{\nu\omega}}{4n - 14} z^{14 - 4n} - z_\nu z_\omega z^{12 - 4n} \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Auswerten der Ableitung und Antisymmetrisierung liefert dann

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)d}(z) &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2} - 1) \Gamma(4 - n) \Gamma^2(3 - \frac{n}{2}) \Gamma(2n - 6)}{32 \pi^{2n-4} \Gamma(n - 2) \Gamma(10 - 2n)} \\ &\quad \times (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\omega} z^{12 - 4n} - 2(12 - 4n) \delta_{\nu\omega} z_\mu z_\lambda z^{10 - 4n}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

was zu den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(2)d}(z^2) &= g^2 N(N^2 - 1) \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon) \Gamma(2\varepsilon) \Gamma^2(1 + \varepsilon) \Gamma(2 - 4\varepsilon)}{32 \pi^{4-4\varepsilon} \Gamma(2 - 2\varepsilon) \Gamma(2 + 4\varepsilon) z^{4-8\varepsilon}} \\ \mathcal{B}^{(2)d}(z^2) &= -g^2 N(N^2 - 1) (1 - 2\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon) \Gamma(2\varepsilon) \Gamma^2(1 + \varepsilon) \Gamma(2 - 4\varepsilon)}{16 \pi^{4-4\varepsilon} \Gamma(2 - 2\varepsilon) \Gamma(2 + 4\varepsilon) z^{4-8\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

führt. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)d}(z^2) &= 0 \\ \mathcal{D}_1^{(2)d}(z^2) &= g^2 \frac{N(N^2 - 1)}{48 \pi^4 z^4} \frac{1}{4} \left( L + \frac{5}{3} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

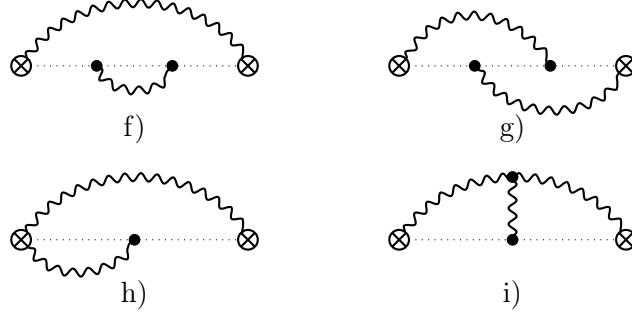
**Diagramm 3.2 e).** Für die Fermionenschleife erhält man den Beitrag

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)e}(z) &= g^2 f^{hij} f^{klm} \int d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta^{jl}(y_1 - y_2) \Delta^{mi}(y_2 - y_1) \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &\quad \times \left\langle \partial_\mu^y A_\nu^a(y) \partial_\lambda^x A_\omega^a(x) A_\rho^h(y_1) A_\sigma^k(y_2) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit den Gammamatrizen  $\gamma_\mu$  und dem Quarkpropagator aus Gleichung (2.27). Die Rechnung wird an dieser Stelle nicht explizit ausgeführt, da hier nur die reine Eichtheorie betrachtet wird. Das Ergebnis kann allerdings Kapitel 4 entnommen werden.

### Diagramme mit Schwinger-Linien Anteil

Nun bleiben noch die folgenden Diagramme mit Schwinger-Linien Anteil zu berechnen:



**Abbildung 3.3:** Diagramme mit Schwinger-Linien Anteil.

Um diese Diagramme auswerten zu können, benötigt man modifizierte Propagator-Integrale, um die Ergebnisse in dimensionaler Regularisierung angeben zu können. Betrachten wir zunächst den Propagator mit einfachem Schwinger-Linien Integral:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\sigma z) &\equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\sigma \frac{e^{ik\sigma z}}{k^2} \\ &= \frac{1}{3-n} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}} z^{n-2}}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Hierbei wurde analog zu (2.24) verfahren; weiterhin verschwinden Integrale mit ungeradem Integranden über ein symmetrisches Intervall. Analog lässt sich das pfadgeordnete Produkt zweier Propagatoren mit einfachem Schwinger-Linien Integral bestimmen zu

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\sigma z) \tilde{D}^{(\sigma)}((1-\rho)z) &\equiv \int_0^1 d\sigma D(\sigma z) \int_0^\sigma d\rho D((1-\rho)z) \\ &\stackrel{1-\rho=\sigma}{=} \int_0^1 d\sigma D(\sigma z) \int_{\frac{1}{2}}^1 d\sigma D(\sigma z) \\ &= \tilde{D}(\sigma z) \left( \tilde{D}(\sigma z) - \int_0^{\frac{1}{2}} D(\sigma z) \right) \\ &= \frac{(1-2^{n-3})}{(n-3)^2} \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)}{16\pi^n z^{2n-4}}.\end{aligned}\quad (3.45)$$

Darüberhinaus wird der Propagator mit zweifachem Schwinger-Linien Integral benötigt. Für diesen ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{D}}((\sigma-\rho)z) &\equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma d\rho \frac{e^{ik(\sigma-\rho)z}}{k^2} \\ &= - \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{(kz)^2 k^2} \\ &= \frac{1}{n-3} \frac{1}{n-4} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}} z^{n-2}}.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Mit diesen Integralen lassen sich nun die Diagramme aus Abbildung 3.3 auswerten.

**Diagramm 3.3 f) und g).** Für diese beiden Diagramme erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)f+g}(z) &= \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{cbe} z^\tau z^\kappa \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma d\rho \left\langle \left( \partial_\mu^y A_\nu^a(y) \right) A_\tau^d(x + \sigma z) A_\kappa^e(x + \rho z) \left( \partial_\lambda^x A_\omega^b(x) \right) \right\rangle \\ &= -\frac{g^2}{2} f^{acd} f^{cbe} z^\tau z^\kappa \left[ \left( \partial_\mu \tilde{D}_{\nu\tau}^{ad}((1-\sigma)z) \right) \left( \partial_\lambda \tilde{D}_{\kappa\omega}^{(\sigma)eb}(\rho z) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \partial_\lambda \tilde{D}_{\tau\omega}^{db}(\sigma z) \right) \left( \partial_\mu \tilde{D}_{\nu\kappa}^{(\sigma)ae}((1-\rho)z) \right) + \left( \partial_\mu \partial_\lambda D_{\nu\omega}^{ab}(z) \right) \tilde{D}_{\tau\kappa}^{de}((\sigma-\rho)z) \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Aufgrund der total antisymmetrischen Strukturkonstanten fällt hier der erste Term proportional zu  $\tilde{D}^{ad}((1-\sigma)z) \tilde{D}^{(\sigma)eb}(\rho z)$  sofort weg, da  $f^{aca} f^{cbb} = 0$  gilt. Im zweiten Term findet man den Beitrag zu Diagramm 3.3 g), im dritten denjenigen zu Diagramm 3.3 f). Der Beitrag zu Diagramm 3.3 g) verschwindet ebenfalls, da sich hierfür ergibt:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)g}(z) = -\frac{g^2}{2} N(N^2-1) \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)}{16\pi^n} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma d\rho z_\nu z_\omega (\partial_\mu(\sigma z)^{2-n}) (\partial_\lambda((1-\rho)z)^{2-n}), \quad (3.48)$$

so dass sich die Terme nach Antisymmetrisierung gegenseitig wegheben.

Für Diagramm 3.3 f) ergibt sich nach Bildung der Ableitung

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)f}(z) = \frac{g^2}{2} \frac{N(N^2-1)(2-n)}{(n-3)(n-4)} \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)}{16\pi^n} \delta_{\nu\omega} (\delta_{\mu\lambda} z^{4-2n} - n z_\mu z_\lambda z^{2-2n}) \quad (3.49)$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(2)f}(z^2) &= \frac{g^2}{2} N(N^2-1) \frac{1-\varepsilon}{(1-2\varepsilon)\varepsilon} \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{16\pi^{4-2\varepsilon} z^{4-4\varepsilon}} \\ \mathcal{B}^{(2)f}(z^2) &= -\frac{g^2}{2} N(N^2-1) \frac{1-\varepsilon}{(1-2\varepsilon)\varepsilon} \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)(4-2\varepsilon)}{16\pi^{4-2\varepsilon} z^{4-4\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dieses Diagramm divergiert also für  $n=4$ . Daher folgt nach Renormierung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)f}(z^2) &= -g^2 \frac{N(N^2-1)}{16\pi^4 z^4} \\ \mathcal{D}_1^{(2)f}(z^2) &= g^2 \frac{N(N^2-1)}{16\pi^4 z^4} (2L+5). \end{aligned} \quad (3.51)$$

**Diagramm 3.3 h).** Hierfür findet man in der Entwicklung zwei gleichwertige Beiträge, es genügt also, einen der beiden zu berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)h/2}(z) &= g^2 f^{abc} f^{bde} z^\tau \int_0^1 d\sigma \left\langle (\partial_\mu A_\nu^a(y) - \partial_\nu A_\mu^a(y)) A_\tau^c(x + \sigma z) A_\lambda^d(x) A_\omega^e(x) \right\rangle \\ &= g^2 f^{abc} f^{bde} z^\tau \left\{ \left( \partial_\mu D_{\nu\lambda}^{ad}(z) \right) \tilde{D}_{\tau\omega}^{ce}(\sigma z) + \left( \partial_\mu D_{\nu\omega}^{ae}(z) \right) \tilde{D}_{\tau\lambda}^{cd}(\sigma z) \right. \\ &\quad \left. - \left( \partial_\nu D_{\mu\lambda}^{ad}(z) \right) \tilde{D}_{\tau\omega}^{ce}(\sigma z) - \left( \partial_\nu D_{\mu\omega}^{ae}(z) \right) \tilde{D}_{\tau\lambda}^{cd}(\sigma z) \right\} \\ &= g^2 \frac{4-2n}{3-n} \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)}{16\pi^n z^{2n-2}} (\delta_{\mu\lambda} z_\nu z_\omega - \delta_{\mu\omega} z_\nu z_\lambda - \delta_{\nu\lambda} z_\mu z_\omega + \delta_{\nu\omega} z_\mu z_\lambda). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Für die beiden Terme ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(2)h}(z^2) &= g^2 \frac{N(N^2 - 1)}{8\pi^4 z^4} \\ \mathcal{D}_1^{(2)h}(z^2) &= -g^2 \frac{N(N^2 - 1)}{8\pi^4 z^4}.\end{aligned}\quad (3.53)$$

**Diagramm 3.3 i).** Dieses Diagramm liefert den Beitrag

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)i}(z) &= -\frac{g^2}{2} f^{abc} f^{hij} z^\tau \int_0^1 d\sigma \int d^4 y' \left\langle (\partial_\mu^y A_\nu^a(y)) A_\tau^c(x + \sigma z) \partial_{[\alpha}^{y'} A_{\beta]}^h \right. \\ &\quad \times (y') A_\alpha^i(y') A_\beta^j(y') \left. \left( \partial_\lambda^x A_\omega^b(x) \right) \right\rangle \\ &= -\frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) z^\tau \int d^4 y' \times \\ &\quad \left\{ \left( \partial_\mu^y \partial_{[\alpha}^{y'} \delta_{\beta]\nu} D(y - y') \right) \left[ (\delta_{\tau\beta} \delta_{\alpha\omega} - \delta_{\tau\alpha} \delta_{\beta\omega}) \tilde{D}(x + \sigma z - y') (\partial_\lambda^x D(y' - x)) \right] \right. \\ &\quad + \left( \partial_{[\alpha}^{y'} \delta_{\beta]\tau} \tilde{D}(x + \sigma z - y') \right) \left[ (\delta_{\nu\alpha} \delta_{\omega\beta} - \delta_{\nu\beta} \delta_{\alpha\omega}) (\partial_\mu^y D(y - y')) (\partial_\lambda^x D(y' - x)) \right] \\ &\quad \left. + \left( \partial_\lambda^x \partial_{[\alpha}^{y'} \delta_{\beta]\omega} D(y' - x) \right) \left[ (\delta_{\tau\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\nu\alpha} \delta_{\tau\beta}) (\partial_\mu^y D(y - y')) \tilde{D}(x + \sigma z - y') \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Die hier auftretenden Integrale lassen sich nur sehr schwer im Ortsraum lösen, so dass es einfacher ist, dieses Diagramm mittels Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(q) &= \int d^n z e^{iqz} \mathcal{D}(z) \\ \mathcal{D}(z) &= \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} e^{iqz} \mathcal{D}(q)\end{aligned}\quad (3.55)$$

in den Impulsraum zu überführen. Das Ergebnis lässt sich dann durch Rücktransformation wieder im Ortsraum angeben. Zur Übersichtlichkeit wird im Folgenden nur die zweite Zeile aus (3.54) betrachtet, die anderen beiden berechnen sich analog. Für den Vorfaktor gilt die Abkürzung

$$C \equiv -\frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) (\delta_{\tau\beta} \delta_{\alpha\omega} - \delta_{\tau\alpha} \delta_{\beta\omega}). \quad (3.56)$$

Ferner wird  $z^\tau \equiv (i\partial_\tau^q) e^{-iqz}|_{q=0}$  verwendet. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)i}(z) &= iC \partial_\tau^q \int d^n z \int d^n y' \left( \partial_\mu^y \partial_{[\alpha}^{y'} \delta_{\beta]\nu} \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{e^{i(y-y')k_1}}{k_1^2} \right) \\ &\quad \times \int \frac{d^n k_2}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\sigma \frac{e^{i(x+\sigma z-y')k_2}}{k_2^2} \left( \partial_\lambda^x \int \frac{d^n k_3}{(2\pi)^n} \frac{e^{i(y'-x)k_3}}{k_3^2} \right) \\ &= iC \partial_\tau^q \int d^n z \int d^n y' \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \int \frac{d^n k_2}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\sigma \int \frac{d^n k_3}{(2\pi)^n} \\ &\quad \times \frac{k_{1[\alpha} \delta_{\beta]\nu} k_{1\mu} k_{3\lambda}}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} e^{i(\sigma k_2 - q)z} e^{i(y k_1 + x(k_2 - k_3))} e^{-i(k_1 + k_2 - k_3)y'}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Unter Verwendung der Darstellung der Dirac'schen Deltafunktion

$$\int d^n y' e^{i(k_1+k_2-k_3)y'} = \delta(k_1 + k_2 - k_3) \quad (3.58)$$

und anschließender Auswertung des Integrals über  $k_3 = k_1 + k_2$  gelangt man zu

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)i}(z) &= i \frac{C}{(2\pi)^n} \partial_\tau^q \int d^n z \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \int \frac{d^n k_2}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\sigma \frac{k_1{}_{[\alpha} \delta_{\beta]\nu} k_1{}_\mu (k_1 + k_2)_\lambda}{k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^2} e^{i(k_1 + \sigma k_2 - q)z} \\ &= i \frac{C}{(2\pi)^{2n}} \partial_\tau^q \int \frac{d^n k_2}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\sigma \frac{(q - \sigma k_2)_\mu (q - \sigma k_2)_{[\alpha} \delta_{\beta]\nu} (q + (1 - \sigma)k_2)_\lambda}{(q - \sigma k_2)^2 k_2^2 (q + (1 - \sigma)k_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Im letzten Schritt wurde mit  $\int d^n z e^{i(k_1 + \sigma k_2 - q)z} = \delta(k_1 + \sigma k_2 - q)$  das Integral über  $k_1 = q - \sigma k_2$  berechnet. Substituiert man nun  $k = \sigma k_2$ , so erhält man schließlich

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)i}(z) = i \frac{C}{(2\pi)^{2n}} \partial_\tau^q \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(q - k)_\mu (q - k)_{[\alpha} \delta_{\beta]\nu}}{(q - k)^2 k_2^2} \int_0^1 d\sigma \sigma^{3-n} \frac{(\sigma q + (1 - \sigma)k)_\lambda}{(\sigma q + (1 - \sigma)k)^2}. \quad (3.60)$$

Die Integration über  $\sigma$  lässt sich nun mittels Feynmanparametrisierung

$$\int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(xa + (1-x)b)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{a^\alpha b^\beta} \quad (3.61)$$

auswerten und liefert für  $n = 4 - 2\epsilon$

$$\int_0^1 d\sigma \sigma^{3-n} \frac{(\sigma q + (1 - \sigma)k)_\lambda}{(\sigma q + (1 - \sigma)k)^2} = \frac{g_\lambda}{qk} + \Gamma(\epsilon) \frac{k_\lambda}{k^2}. \quad (3.62)$$

Für die dritte und vierte Zeile in Gleichung (3.54) erhält man an dieser Stelle entsprechende Variationen des Integrals, welche dann auf hypergeometrische Funktionen<sup>5</sup> führen. Weiterhin ist bei der Berechnung dieses Beitrags darauf zu achten, dass es hier zu einer Mischung von Operatoren  $A, B$  kommt. Die Gegenterme haben daher die Form  $\alpha A + \beta B$  mit  $\alpha \neq \beta$  [34, S. 62ff]. Da der Fokus dieser Arbeit allerdings auf der in Kapitel 6 folgenden Rechnung in Gitterstörungstheorie liegt, soll an dieser Stelle nur das Endergebnis für Diagramm 3.3 i), entnommen aus [39], angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)i}(z^2) &= -g^2 \frac{N(N^2 - 1)}{32\pi^4 z^4} (2L + 1) \\ \mathcal{D}_1^{(2)i}(z^2) &= g^2 \frac{N(N^2 - 1)}{8\pi^4 z^4} \left( L + \frac{11}{4} + \frac{2\pi^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

---

<sup>5</sup>Die hypergeometrische Funktion ist definiert als

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ihre Eigenschaften werden in [52, Kap. 15] detailliert beschrieben.

# 4 Diskussion der Kontinuumsergebnisse

In diesem Kapitel werden kurz die Ergebnisse der Kontinuumssrechnung diskutiert und mit denen des Artikels von Eidemüller und Jamin [39] verglichen. Außerdem soll die in Kapitel 6 folgende Rechnung motiviert werden.

## 4.1 Ergebnisse

Zum einfacheren Vergleich wird zunächst nachstehende Notation für die beiden skalaren Funktionen  $\mathcal{D}^{(2)}(z^2)$  und  $\mathcal{D}_1^{(2)}(z^2)$  eingeführt:

$$\mathcal{D}^{(2)}(z^2) = \mathcal{D}_1^{(0)}(z^2)G^{(2)}(z^2), \quad \mathcal{D}_1^{(2)}(z^2) = \mathcal{D}_1^{(0)}(z^2)G_1^{(2)}(z^2), \quad (4.1)$$

mit  $\mathcal{D}_1^{(0)}(z^2) = \frac{N^2-1}{\pi^2 z^4}$ . Für die einzelnen Diagramme ergibt sich hiermit

$$G^{(2)a}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \frac{1}{4} \right] \quad (4.2a)$$

$$G^{(2)f}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ -\frac{1}{4} \right] \quad (4.2b)$$

$$G^{(2)h}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \right] \quad (4.2c)$$

$$G^{(2)i}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ -\frac{1}{8}(2L+1) \right], \quad (4.2d)$$

und

$$G_1^{(2)b}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ -\frac{3}{4}(L+1) \right] \quad (4.3a)$$

$$G_1^{(2)c}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \frac{19}{48} \left( L + \frac{59}{57} \right) \right] \quad (4.3b)$$

$$G_1^{(2)d}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \frac{1}{48} \left( L + \frac{5}{3} \right) \right] \quad (4.3c)$$

$$G_1^{(2)f}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \frac{1}{4}(2L+5) \right] \quad (4.3d)$$

$$G_1^{(2)h}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} \right] \quad (4.3e)$$

$$G_1^{(2)i}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( L + \frac{11}{4} \right) + \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (4.3f)$$

Es bezeichnet  $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$  und  $L = \ln(\pi e^{\gamma_E} \nu^2 z^2)$ , außerdem wurde die Rechnung in kovarianter Feynman-’t Hooft Eichung mit Eichparameter  $\xi = 1$  durchgeführt. Nicht aufgeführte Diagramme liefern keinen Beitrag.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Die Beiträge (4.2d) und (4.3f) wurden [39] entnommen.

Möchte man diese Rechnung im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ausdrücken, so muss  $\nu^2 = \mu^2 \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi}$  gesetzt werden, wobei mit  $\mu^2$  dann die Massenskala im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema bezeichnet wird.

Die Ergebnisse stimmen mit denen des Artikels von Eidemüller und Jamin überein. Diese haben allerdings die Beiträge für die Gluon-, Geist- und Fermionschleife in allgemeiner Eichung zusammengefasst zu

$$G_1^{(2)e}(z^2) = N \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \left( \frac{\beta_1}{2N} - \frac{3}{8} - \frac{\xi}{8} \right) L + \frac{\beta_1}{3N} - \frac{23}{48} + \frac{\xi}{4} + \frac{\xi^2}{16} \right], \quad (4.4)$$

wobei  $\beta_1 = (11N - 2f) / 6$  der erste Koeffizient der Betafunktion der QCD für  $f$  Flavours ist.

Insgesamt hat man also für den Feldstärkekorrelator in Störungstheorie bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(g^2)$

$$\mathcal{D}^{(2)}(z^2) = N(N^2 - 1) \frac{1}{\pi^2 z^4} \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ -\frac{1}{4} L + \frac{3}{8} \right] \quad (4.5)$$

$$\mathcal{D}_1^{(2)}(z^2) = N(N^2 - 1) \frac{1}{\pi^2 z^4} \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ \left( \frac{\beta_1}{2N} - \frac{1}{4} \right) L + \frac{\beta_1}{3N} + \frac{29}{24} + \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (4.6)$$

## 4.2 Motivation der Gitterrechnung

Der quantenchromodynamische Feldstärkekorrelator wurde bereits mehrfach auf dem Gitter vermessen (siehe z. B. [53–55]). Daher ist es wünschenswert, die Ergebnisse der Gitterrechnungen mit denen des Kontinuums zu vergleichen. Hierbei treten allerdings einige Schwierigkeiten auf: Die Ergebnisse aus Kapitel 4.1 hängen sowohl von der Renormierungsskala, als auch vom Renormierungsschema ab. Es kann also nicht einfach die Entwicklungsgröße im Kontinuum  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}$  durch die entsprechende auf dem Gitter ersetzt werden. Ein quantitativer Vergleich der Rechnungen ist somit nicht möglich, eine qualitative Auswertung findet sich in [39]. Die Übereinstimmungen beschränken sich dort in der führenden Ordnung auf 20%, die höheren Korrekturen unterscheiden sich allerdings im Vorzeichen.

Um nun einen quantitativen Vergleich der Ergebnisse zu erhalten, ist eine Berechnung des Feldstärkekorrelators in Gitterstörungstheorie unumgänglich. Dies soll im Folgenden genauer diskutiert werden.

# 5 Quantenchromodynamik auf dem Gitter

Im Folgenden wird die QCD in der Gitterformulierung vorgestellt. Zunächst wird der Regularisierungsformalismus genauer erläutert, anschließend werden Eichfelder auf dem Gitter diskutiert.<sup>1</sup> Im zweiten Abschnitt wird dann die Gitterstörungstheorie für Kapitel 6 bereitgestellt.

## 5.1 Gitterformulierung der QCD

Die Formulierung der QCD auf einem Raum-Zeit-Gitter entstand fast zur gleichen Zeit wie die Theorie im Kontinuum in den frühen 1970ern (siehe z. B. [1]), allerdings beschränkte sich die Forschung in den Anfängen auf einen analytischen Zugang. Für den numerischen Ansatz waren Monte Carlo Methoden zwar schon im Rahmen der statistischen Physik seit den frühen 1950ern vorhanden [59], es mangelte jedoch noch an Rechenleistung. Schließlich simulierten 1979 Creutz, Jacobs und Rebbi [60] zum ersten Mal Eichtheorien auf dem Gitter, 1981 kamen dann auch Fermionen hinzu (z. B. [61]).

Wie in Kapitel 2 gesehen, ist die Kontinuums-QCD nur für große Impulsüberträge oder für kleine Abstände störungstheoretisch zugänglich, weshalb die Gitter-QCD als nichtperturbativer Ansatz im Bereich großer Abstände benötigt wird. Das Prinzip ist hier die Einführung eines Raum-Zeit-Gitters als Regulator, welcher einem Impuls-„Cut-off“ entspricht (vgl. auch Kap. 2.5.1). Basierend auf [56–58] wird dieses Verfahren im Folgenden genauer beschrieben.

### 5.1.1 Gitterregularisierung

In Kapitel 2 wurde die Kontinuums-QCD im Rahmen des Pfadintegral-Formalismus vorgestellt. Will man nun diese Theorie auf einem hyperkubischen Raum-Zeit-Gitter

$$\Gamma = a \mathbb{Z}^4 = \{a(n_\mu) \mid n_\mu \in \mathbb{Z}, \mu = 1, 2, 3, 4\} \quad (5.1)$$

mit Gitterabstand  $a$  definieren, so müssen folgende Ersetzungen durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} x_\mu &\longrightarrow n_\mu a \\ \int d^4x &\longrightarrow a^4 \sum_n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Jeder Gitterpunkt<sup>2</sup>  $an$  besitzt vier nächste Nachbarpunkte entlang der positiven Koordinatenachsen, deren Einheitsvektoren mit  $\hat{\mu} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$  bezeichnet werden. Die Verknüpfung zwischen zwei benachbarten Punkten wird *Link* genannt (siehe Abbildung 5.1).

<sup>1</sup>Fermionen auf dem Gitter werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Eine ausführliche Übersicht dazu findet sich in der Literatur [56–58].

<sup>2</sup>Es gilt im Folgenden  $n \equiv (n_\mu)$ .

Der Abstand  $a$  zwischen diesen Punkten bewirkt nun ein Abschneiden der Impulse im ultravioletten Regime. Dadurch wird der Wertebereich auf die sogenannte erste Brillouin-Zone

$$\text{BZ} = \left\{ k \left| -\frac{\pi}{a} < k_\mu \leq \frac{\pi}{a} \right. \right\} \quad (5.3)$$

beschränkt. Betrachtet man außerdem ein Gitter im endlichen Volumen  $V = L_1 L_2 L_3 L_4$ , so lässt sich die diskrete Summe über die Moden der ersten Brillouin-Zone durch Integrale ausdrücken

$$\frac{1}{V} \sum_k \longrightarrow \int_{\text{BZ}} \prod_{i=1}^4 \frac{dk_i}{2\pi}. \quad (5.4)$$

Weiterhin muss beachtet werden, dass die Ableitungen zu endlichen Differenzen übergehen. Daher benötigt man eine sinnvolle Definition für die kovariante Ableitung  $D_\mu$  auf dem Gitter. Diese lässt sich mit Hilfe des *Paralleltransporters* finden, welcher z. B. in der Allgemeinen Relativitätstheorie den Vergleich zweier Vektoren (oder Tensoren) an zwei verschiedenen Raumzeitpunkten ermöglicht. Im Kontinuum lässt sich zeigen, dass die Eichfelder  $A_\mu(x)$  gerade den infinitesimalen Paralleltransport im Farbraum beschreiben, so dass dieses Konzept auf das Gitter erweitert werden kann. Hier definiert man den Paralleltransporter  $U_\mu(n)$  auf dem Mittelpunkt des Links zwischen zwei benachbarten Punkten  $n$  und  $n + \hat{\mu}$  mit den Eigenschaften

$$U_\mu^{-1}(n) = U_\mu^\dagger(n) = U_{-\mu}(n + \hat{\mu}), \quad (5.5)$$

er wird im Folgenden als Linkvariable bezeichnet. Die kovariante Ableitung eines skalaren Feldes  $\phi(x)$  lässt sich dann definieren als

$$D_\mu \phi(x) = \frac{1}{a} (U_\mu^{-1}(n) \phi(n + \hat{\mu}) - \phi(n)). \quad (5.6)$$

Möchte man physikalische Vorhersagen erhalten, so ist der *Kontinuumslimes*  $a \rightarrow 0$  zu bilden, da der Gitterabstand  $a$  selbst hier eine unphysikalische Größe ist. Demnach ist eine fundamentale Bedingung an die Konstruktion einer Gitterreichtheorie, dass in diesem Limes auch tatsächlich das korrekte Kontinuumsergebnis reproduziert wird, was somit z. B. bei der Konstruktion der Gitterwirkung zu beachten ist.

### 5.1.2 Eichfelder auf dem Gitter

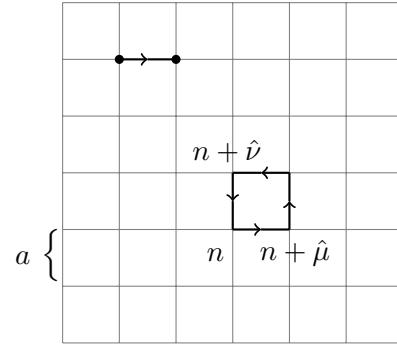
Für die QCD betrachten wir nun die Linkvariable  $U_\mu(n) \in \text{SU}(3)_C$  (vgl. Gleichung (5.5)), welche sich unter einer  $\text{SU}(N_C)$ -Gitterreichtransformation  $\Omega$  verhält wie

$$U_\mu(n) \longrightarrow \Omega(n) U_\mu(n) \Omega^{-1}(n + \hat{\mu}). \quad (5.7)$$

Aufgrund der Eigenschaften der Linkvariablen als Paralleltransporter sowie der Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen, erhält man eine eichinvariante Größe, wenn man die Spur über ein Produkt aus Linkvariablen bildet, welches einem geschlossenen Weg entspricht. Die einfachste Form hierfür ist die *Plakette*

$$P_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n), \quad (5.8)$$

welche in Abbildung 5.1 gezeigt ist.



**Abbildung 5.1:** Zweidimensionale Darstellung eines Raum-Zeit-Gitters mit Gitterabstand  $a$ , einer Linkvariablen zwischen zwei Gitterpunkten sowie einer elementaren Plakette.

Als Verbindung zwischen Gitter und Kontinuum dienen nun die Eichfelder  $A_\mu(n)$ , welche Elemente der Lie Algebra  $\text{su}(N_c)$  sind. Die Verknüpfung zeigt sich dann durch die Definition

$$U_\mu(n) \equiv e^{iagT^B A_\mu^B(n)} \equiv e^{iaA_\mu(n)}, \quad (5.9)$$

mit den Generatoren  $T^A$  in der fundamentalen Darstellung<sup>3</sup>. Unter Verwendung der Entwicklung

$$A_\mu(n + \hat{\nu}) = A_\mu(n) + a\partial_\nu A_\mu(n) + \dots, \quad (5.10)$$

sowie der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (BCH-Formel)

$$e^A e^B = \exp \left\{ A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12} \left( [A, [A, B]] + [B, [B, A]] \right) + \dots \right\}, \quad (5.11)$$

erhält man die folgende Beziehung zwischen der auf dem Gitter definierten Plakette  $P_{\mu\nu}$  und dem Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$

$$P_{\mu\nu}(n) = e^{iga^2 G_{\mu\nu}(n)}, \quad G_{\mu\nu}(n) = F_{\mu\nu}(n) + \mathcal{O}(a). \quad (5.12)$$

Somit ist die Verbindung zwischen Kontinuums- und Gittergrößen gefunden. Nutzt man weiterhin, dass der Feldstärketensor spurfrei ist, so findet man

$$\text{Re Sp } P_{\mu\nu}(n) = N_c - \frac{g^2}{2} a^4 \text{Sp } F_{\mu\nu}^2(n) + \mathcal{O}(a^6). \quad (5.13)$$

Hiermit lässt sich nun die *Wilson'sche Wirkung* für eine reine  $\text{SU}(N_c)$ -Eichtheorie definieren:

$$S_G = \beta \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} (N_c - \text{Re Sp } P_{\mu\nu}). \quad (5.14)$$

Es bezeichnet  $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ ; ferner wurde die Notation  $\sum_x \equiv a^4 \sum_n$  eingeführt. Entwickelt man diesen Ausdruck für kleine  $a$ , so geht er im Limes verschwindender Gitterabstände in die klassische Yang-Mills Wirkung über. Natürlich sind für die Wirkung beliebige andere eichinvariante Wahlen möglich, solange diese die korrekten Symmetrien erhalten und den richtigen Kontinuumslimits liefern.

<sup>3</sup>Die Generatoren in der Fundamentaldarstellung sind spurfrei und es gilt die Normierung:  
 $\text{Sp}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}$ .

## 5.2 Gitterstörungstheorie

In Kapitel 2.5 wurde das Gitter als Regulator eingeführt, um einen numerischen Zugang zur QCD zu erhalten. Daher könnte die Überschrift dieses Kapitels die Frage aufkommen lassen, warum man nun auf diesem Gitter Störungstheorie betreiben möchte, da der eigentliche Nutzen des Gitterformalismus in den numerischen Berechnungen liegen sollte. Allerdings gibt es viele Anwendungen, in denen Störungsrechnungen auf dem Gitter sinnvoll und sogar notwendig sind. Als Beispiel seien die Berechnungen der Renormierungsfaktoren von Matrixelementen, sowie der nackten Parameter der Lagrangiedichte genannt. Des Weiteren dienen perturbative Gitterrechnungen als Verknüpfung zwischen Gittersimulationen und Kontinuum: Mit jeder Gitterwirkung wird ein eigenes Regularisierungsschema ungleich dem im Kontinuum eingeführt. Somit können die Ergebnisse der Monte Carlo Simulationen erst interpretiert und mit denen des Kontinuums verglichen werden, wenn die Renormierungsgrößen durch eine störungstheoretische Rechnung auf dem Gitter vollständig bekannt sind. Weitere Anwendungen und eine ausführliche Übersicht zur Gitterstörungstheorie liefert der Beitrag von Capitani [62].

### 5.2.1 Funktionalintegral

Im Schwachkopplungsbereich lässt sich die Störungstheorie analog zum Kontinuum einführen. Für kleine Kopplungskonstanten  $g$  wird das Funktionalintegral

$$Z = \int \prod_{n,\mu} \mathcal{D}U_\mu(n) e^{-S_{\text{total}}(n)} \quad (5.15)$$

von Werten um  $U_\mu(n) = 1$  dominiert, so dass eine Sattelpunktsentwicklung (vgl. [51, Kap. 3.4]) um die klassischen Vakuumskonfigurationen sinnvoll ist. Entwickelt wird wieder in den Eichfeldern  $A_\mu(n)$ , weshalb die Wilson'sche Wirkung unter Verwendung von Gleichung (5.9) umgeschrieben werden muss. Ein Problem hierbei ist, dass sie dann aus einer unendlichen Anzahl von Termen besteht, die in jeder Ordnung in  $g$  eine stark wachsende Anzahl von Vertizes verursachen. Die meisten dieser neuen Vertizes verhalten sich allerdings proportional zu Potenzen des Gitterabstands  $a$ , so dass sie im naiven Kontinuumsliches verschwinden. Sie müssen jedoch für die Gitterrechnungen stets mitgeführt werden, da andernfalls die Eichinvarianz nicht mehr gegeben ist.

Für eine Entwicklung in den Eichfeldern lässt sich für die Rechnung in Kapitel 6 das *Haar-Maß*  $\mathcal{D}U_\mu$  mit Hilfe der Funktionaldeterminanten auf eine Ableitung in den Eichfeldern umschreiben. Dadurch tritt in der effektiven Wirkung ein zusätzlicher Maß-Term auf

$$\prod_{n,\mu} \mathcal{D}U_\mu(n) = e^{-S_M} \prod_{n,\mu,a} dA_\mu^a(n), \quad (5.16)$$

$$\text{mit } S_M = \frac{g^2}{8a^2} \sum_x (A_\mu^a(x))^2. \quad (5.17)$$

Obwohl dieser Term quadratisch in den Eichfeldern ist, ist dies also kein kinetischer Term und muss bei der Berechnung der Feynmanregeln als Wechselwirkung miteinbezogen werden. Er entspricht einem Massen-Gegenterm; das Gitter liefert somit automatisch Gegenterme, die die Renormierbarkeit der Theorie sichern.

### 5.2.2 Feynmanregeln

Zur Entwicklung der Feynmanregeln wird der wechselwirkende Anteil der vollständigen Gitterwirkung  $S_{\text{total}}$  benötigt. Letztere setzt sich zusammen aus der reinen Eichwirkung aus Gleichung (5.14), dem Anteil des Maßes aus Gleichung (5.17), sowie dem Faddeev-Popov- und dem Eichfixierungsterm („gauge fixing“, GF):

$$S_{\text{total}} = S_G + S_M + S_{\text{FP}} + S_{\text{GF}}. \quad (5.18)$$

Der Eichfixierungsanteil mit Eichparameter  $\xi$

$$S_{\text{GF}} = \frac{a^2}{2\xi} \sum_n (A_\mu(n) - A_\mu(n - \hat{\mu}))^2 \quad (5.19)$$

beinhaltet keinerlei Wechselwirkung und ist daher für die Berechnung der Vertizes nicht relevant. Die verbleibenden Summanden der Wirkung werden im Folgenden kurz genauer betrachtet.

#### Vertizes

Die Vertizes erhält man nun ähnlich wie im Kontinuum (vgl. Kapitel 2.4.2). Auf dem Gitter ist es allerdings sinnvoll, sie mittels Fouriertransformation im Impulsraum zu bestimmen. Weiterhin ist darauf zu achten, dass die Ableitungen auf dem Gitter in Rechts- und Linksableitungen umgeschrieben werden müssen. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} \partial_\mu^R f(x) &= \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)), & \square = \partial_\mu^R \partial_\mu^L. \\ \partial_\mu^L f(x) &= \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})), \end{aligned} \quad (5.20)$$

Außerdem müssen die Impulse umgeschrieben werden gemäß

$$k_\mu \longrightarrow \tilde{k}_\mu = \frac{2}{a} \sin \left( \frac{a k_\mu}{2} \right). \quad (5.21)$$

Eine detaillierte Herleitung der Vertizes und deren explizite Angabe findet sich in [57, Kap. 14.4]. In dieser Arbeit wird daher nur eine grobe Übersicht über die auftretenden Wechselwirkungen im Grenzwert sehr kleiner Gitterabstände  $a$  gegeben. Die reinen Gittervertizes, also diejenigen ohne Kontinuumsanalogon, werden kurz angegeben und genauer vorgestellt.

**3-/4-Gluon-Vertex.** Diese Vertizes entstammen der reinen Eichwirkung  $S_G$ . Um diese zu extrahieren, muss die Definition der Plakette aus Gleichung (5.8) eingesetzt, sowie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel aus Gleichung (5.11) verwendet werden. Nutzt man weiterhin, dass  $\text{Sp}[A_\mu, A_\nu]$  aufgrund der Spurfreiheit der Generatoren  $T^a$  verschwindet,

so findet man für kleine Gitterabstände  $a$

$$\begin{aligned} S_G &= \beta \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} (N_C - \operatorname{Re} \operatorname{Sp} P_{\mu\nu}(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x))^2 \right. \end{aligned} \quad (5.22a)$$

$$+ g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (5.22b)$$

$$+ \frac{g^2}{2} f^{abc} f^{cde} A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) A_\mu^d(x) A_\nu^e(x) \quad (5.22c)$$

$$+ \mathcal{O}(a^2) \Big). \quad (5.22c)$$

Hierbei entspricht der erste Term (5.22a) dem kinetischen Eichterm, er trägt somit nicht zur Wechselwirkung bei. Die 3-Gluon-Wechselwirkungen werden durch (5.22b) beschrieben, die 4-Gluon-Wechselwirkungen durch (5.22c); sie entsprechen den Kontinuumsvertizes und liefern daher bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(a^2)$  keine neuen Beiträge.

**2-Gluon-Vertex.** Dieser neue Vertex ist ein reines Gitterartefakt und stammt aus dem Maßterm

$$S_M = \frac{g^2}{8a^2} \sum_x (A_\mu^a(x))^2,$$

er verschwindet im naiven Kontinuumslims  $a \rightarrow 0$ .<sup>4</sup> Es ergibt sich:

$$-\frac{g^2}{4a^2} \delta_{\mu\nu} \delta_{ab} \quad \text{with} \quad k, \mu, a \text{ wavy lines} \quad k', \nu, b \text{ crossed line}.$$

**Geist-Vertizes.** Diese Vertizes haben ihren Ursprung im Faddeev-Popov-Term der Wirkung

$$S_{FP} = a^2 \sum_n (\bar{c}^b(n + \hat{\mu}) - \bar{c}^b(n)) \left\{ E_{ba}^{-1}(\overline{A_\mu(n)}) c^a(n) - E_{ab}^{-1}(\overline{A_\mu(n)}) c^a(n + \hat{\mu}) \right\}, \quad (5.23)$$

wobei

$$\overline{A_\mu(n)}_{ab} = a g f_{abc} A_\mu^c(n), \quad E^{-1}(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-x)^n, \quad (5.24)$$

mit den Bernoulli-Zahlen<sup>5</sup>  $B_n$ . Setzt man die ersten Terme der Summe ein, so erhält man schließlich bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(g^2)$

$$S_{FP} = -\delta_{ab} \sum_x \bar{c}^a(x) \partial^2 c^b(x) \quad (5.25a)$$

$$- g f^{abc} \sum_x \bar{c}^a(x) (\partial_\mu A_\mu^c(x)) c^b(x) \quad (5.25b)$$

$$+ \frac{a^2 g^2}{12} \delta_{\mu\nu} (f^{aec} f^{bdc} + f^{adc} f^{bec}) \sum_x \bar{c}^b(x) (\partial_\mu A_\mu^d(x)) (\partial_\nu A_\nu^e(x)) c^a(x) \\ + \mathcal{O}(a^4). \quad (5.25c)$$

<sup>4</sup>Es sei daran erinnert, dass  $\sum_x = a^4 \sum_n$  gilt.

<sup>5</sup>Die Werte der benötigten Bernoulli-Zahlen lauten  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ , siehe auch [52, S. 804].

Der erste Term (5.25a) ist wieder ein kinetischer Term und trägt nicht zur Wechselwirkung bei. Der zweite Term (5.25b) beschreibt die Geist-Geist-Gluon-Wechselwirkung, der letzte Term (5.25c) die Geist-Geist-Gluon-Gluon-Wechselwirkung. Dieser ist wieder ein neuer, gitterspezifischer Vertex, er berechnet sich zu:

$$\frac{a^2 g^2}{12} \delta_{\mu\nu} (f^{aec} f^{bdc} + f^{adc} f^{bec}) \tilde{p}'_\mu \tilde{p}_\mu$$

Dies sind alle zusätzlichen Gittervertizes<sup>6</sup> bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(g^2)$ .

### Propagatoren

Die Berechnung des Gluonpropagators auf dem Gitter erfolgt in gleicher Weise wie die Bestimmung im Kontinuum. Führt man die Ersetzungen aus Gleichungen (5.20) und (5.21) durch, so findet man für den Gluonpropagator im Impulsraum in kovarianter Eichung

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{\tilde{k}^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu}{\tilde{k}^2} \right). \quad (5.26)$$

Hiermit ergibt sich für Berechnungen im Ortsraum nach Fouriertransformation und in Feynman-'t Hooft-Eichung ( $\xi = 1$ )

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x) = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x+a\frac{\hat{\mu}-\hat{\nu}}{2})}}{\tilde{k}^2}, \quad (5.27)$$

wobei die Notation

$$\tilde{k}^2 = \sum_{\kappa=1}^4 (\tilde{k}_\kappa)^2 = \frac{4}{a^2} \sum_{\kappa} \sin^2 \frac{ak_\kappa}{2} \quad (5.28)$$

eingeführt wurde. Für den Geistpropagator erhält man dann völlig analog

$$D_{\text{FP}}^{ab}(x) = \delta^{ab} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{\tilde{k}^2}. \quad (5.29)$$

---

<sup>6</sup>Betrachtet man auch Fermionen, so ergibt sich ein zusätzlicher Fermion-Fermion-Gluon-Gluon-Vertex, siehe [57, Kap. 14.4].



# 6 Der QCD-Feldstärkekorrelator auf dem Gitter

Im Folgenden wird der Feldstärkekorrelator auf dem Gitter diskutiert. Dazu wird der Korrelator im ersten Abschnitt im Gitterformalismus angegeben. Im zweiten Abschnitt folgt dann die analytische Auswertung des Korrelators, was allerdings zu einigen Schwierigkeiten führt, weshalb sich im Anschluss daran eine Diskussion numerischer Methoden findet.

## 6.1 Definition des Korrelators im Gitterformalismus

Auf dem Gitter lässt sich der Feldstärkekorrelator angeben als

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}(x) = \left\langle 0 \left| T \left\{ G_{\mu\nu}^a(x) S_{\text{adj}}^{ab}(x, 0) G_{\lambda\omega}^b(0) \right\} \right| 0 \right\rangle. \quad (6.1)$$

Es bezeichnet  $G_{\mu\nu}$  das Gitteranalogon zum Kontinuums-Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} \xrightarrow{a \rightarrow 0} F_{\mu\nu}(x). \quad (6.2)$$

Die adjungierte Swinger-Linie ist definiert durch

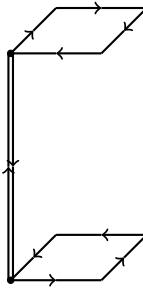
$$S_{\text{adj}}(x, 0) = P \exp \left\{ g f^{abc} \int_0^x dy^\mu A_\mu^c(y) \right\}. \quad (6.3)$$

Hierbei wurde die Wegabhängigkeit der Swinger-Linie nicht mehr explizit genannt, da wieder der einfachste Weg in Form einer Geraden verwendet wird (vgl. Kap. 3.1.1). T und P bezeichnen wieder Zeit-, bzw. Pfadordnung analog zum Kontinuum. Die Lorentzstruktur des Korrelators ergibt sich auf dem Gitter in der schon in Kapitel 3.1.2 besprochenen Weise.

Eine weitere Interpretation des Feldstärkekorrelators findet auf dem Gitter viele Anwendungen. Hierbei lässt sich der Korrelator als zwei Quellen, verbunden durch einen adjungierten String, verstehen (siehe Abb. 6.1). Für große Abstände dieser Quellen lässt sich so die Masse des sogenannten „Gluelumps“ [63] messen. Dieses System, bestehend aus einer statischen adjungierten Quelle und eines dynamischen Gluons, könnte bei Realisierung der Supersymmetrie den physikalischen Zustand des „Glueballinos“ darstellen. Ergebnisse für diese Masse finden sich z. B. in [64, 65].

## 6.2 Analytischer Zugang

Um den Feldstärkekorrelator nun störungstheoretisch auf dem Gitter behandeln zu können, müssen zunächst alle auftretenden Größen in den Eichfeldern  $A_\mu(x)$  dargestellt



**Abbildung 6.1:** Der Feldstärkekorrelator auf dem Gitter

werden. Man findet insbesondere für den Feldstärketensor den Ausdruck

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &\equiv -\frac{i}{a^2 g} (P_{\mu\nu}(x) - 1) \\ &= \frac{i}{a^2 g} \left( 1 - e^{iaA_\mu(x)} e^{iaA_\nu(x+a\hat{\mu})} e^{-iaA_\nu(x+a\hat{\nu})} e^{-iaA_\nu(x)} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Es sei daran erinnert, dass

$$A_\mu(x) \longrightarrow g A_\mu(x). \quad (6.5)$$

Obiges eingesetzt liefert dann nach Entwicklung der Exponentialfunktionen sowie Verwendung der BCH-Formel (5.11) und der Relation (5.10) für den Feldstärkekorrelator bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(a)$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega} &= \left\langle 0 \left| T \left\{ -\frac{1}{g^2} \left( i(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) - [A_\mu(x), A_\nu(x)] + \mathcal{O}(a) \right) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left( \delta^{ab} + g f^{abc} \int_0^x dy^\tau A_\tau^c(y) + \frac{g^2}{2} f^{acd} f^{cbe} \int_0^x dy^\tau \int_0^y dz^\kappa A_\tau^d(y) A_\kappa^e(z) + \dots \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left( i(\partial_\lambda A_\omega(x) - \partial_\omega A_\lambda(x)) - [A_\lambda(x), A_\omega(x)] + \mathcal{O}(a) \right) \right\} \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Setzt man nun für den Kommutator

$$[A_\mu(x), A_\nu(x)] = i f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) T^a \quad (6.7)$$

ein, so geht der Ausdruck für  $a \rightarrow 0$  direkt in das Kontinuumsergebnis über. Daher wird für die Berechnung lediglich noch der wechselwirkende Teil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_1$  benötigt, der sich jedoch aus Kapitel 5.2.2 übernehmen lässt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) &= -\frac{g}{2} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\mu A_\nu^a(x)) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\ &\quad + \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{cde} A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) A_\mu^d(x) A_\nu^e(x) \\ &\quad - \frac{g^2}{4a^2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \\ &\quad - g f^{abc} \bar{c}^a(x) (\partial_\mu A_\mu^c(x)) c^b(x) \\ &\quad + \frac{a^2 g^2}{12} (f^{aec} f^{bdc} + f^{adc} f^{bec}) \bar{c}^b(x) (\partial_\mu A_\mu^d(x)) (\partial_\mu A_\mu^e(x)) c^a(x) \\ &\quad + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Verwendet man nun die Entwicklung aus Gleichung (3.9) sowie das Wick'sche Theorem (2.16), so erhält man die gleichen Diagramme wie im Kontinuum aus den Abbildungen 3.1, 3.2 und 3.3. Außerdem treten die folgenden Diagramme als Beiträge zum Feldstärkekorrelator auf dem Gitter auf:



Abbildung 6.2: Zusätzliche Diagramme für den Feldstärkekorrelator auf dem Gitter.

### 6.2.1 Theorem von Reisz

In der Gitterstörungstheorie ist man letztlich immer am physikalischen Kontinuumsli- mes der auftretenden Diagramme interessiert. Im Allgemeinen lässt sich dieser allerdings nicht finden, indem die Integrale für endliche Gitterabstände  $a$  ausgewertet werden und anschließend der Limes  $a \rightarrow 0$  gebildet wird, da die komplizierten periodischen Struktu- ren der Integranden oftmals schwierig zu behandeln sind. Allerdings lassen sich für Inte- grale mit endlichem Kontinuumsli- mes Bedingungen angeben, für die in der Berechnung direkt der naive Kontinuumsli- mes eingesetzt werden kann, was die Auswertung dieser Integrale erheblich vereinfacht. Die Forderungen an den Integranden sind im „Power Counting“ -Theorem von Reisz [66] zusammengefasst. Im Folgenden soll dieses in der etwas abgeschwächten Version von Lüscher [67] vorgestellt werden.

Es wird ein allgemeines Feynmanintegral auf dem Gitter mit  $L$  Schleifen betrachtet, welches von der Form

$$F(q; M, a) = \int_{\text{BZ}} \prod_{i=1}^L \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \frac{N(k, q; M, a)}{D(k, q; M, a)} \quad (6.9)$$

ist, mit den externen Impulsen  $q_i$  und der Masse<sup>1</sup>  $M$ . Der Zähler  $N$  setzt sich zusammen aus den Beiträgen der Vertizes sowie den Zählern der beitragenden Propagatoren; der Nenner  $D$  entspricht dem Produkt der Nenner der Propagatoren und ist für  $I$  interne Linien von der Form

$$D(k, q; M, a) = \prod_{i=1}^I D_i(l_i, M_i, a). \quad (6.10)$$

Die Impulse der Schleifen  $l_i(k, q)$  sind Linearkombinationen der Integrationsvariablen und der externen Impulse.

Das Theorem stellt nun die folgenden Bedingungen:

**(N1)** Es existiert eine Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  und eine glatte Funktion  $f$  mit

$$N(k, q; M, a) = a^{-m} f(ak, aq; aM), \quad (6.11)$$

wobei  $f$  periodisch in  $ak_i$  und ein Polynom in  $aM$  ist.

<sup>1</sup>Falls  $F(q; M, a)$  von mehreren Massen abhängt, so werden diese mit  $M$  bezeichnet:  $\{M_i\} \equiv M$ .

**(N2)** Der Kontinuumslimes des Zählers  $\lim_{a \rightarrow 0} N(k, q; M, a)$  existiert.

**(D1)** Es existieren glatte Funktionen  $g_i$  mit

$$D_i(l_i; M, a) = a^{-2} g_i(a l_i; a M_i), \quad (6.12)$$

wobei  $g_i$  periodisch in  $a l_i$  und ein Polynom in  $a M_i$  ist.

**(D2)** Der Kontinuumslimes der Nenner  $D_i$  existiert für alle  $i$  und ist gegeben durch

$$\lim_{a \rightarrow 0} D_i(l_i; M_i, a) = l_i^2 + M_i^2. \quad (6.13)$$

**(D3)** Es existieren positive Konstanten  $a_0$  und  $C$  mit

$$|D_i(l_i; M_i, a)| \geq C(\tilde{l}_i^2 + M_i^2) \quad (6.14)$$

für alle  $a \leq a_0$  und  $l_i \in \text{BZ}$ .

**(I1)** Es gilt

$$l_i(k, q) = \sum_{j=1}^L b_{ij} k_j + \sum_{l=1}^{N_E} c_{il} q_l \quad (6.15)$$

für alle  $i$  und  $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ ,  $c_{il} \in \mathbb{R}$ .  $N_E$  ist die Anzahl der externen Impulse.

**(I2)** Für eine gegebene Linearkombination  $p_i(k) = \sum_{j=1}^L b_{ij} k_j$  und die Menge  $\mathcal{G} = \{k_1, \dots, k_L, p_1, \dots, p_I\}$  gilt für  $u_i \in \mathcal{G}$  linear unabhängig und  $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ :

$$k_i = \sum_{j=1}^L d_{ij} u_j. \quad (6.16)$$

Die letzten beiden Bedingungen sichern die Translationsinvarianz bei Verschiebungen der Integrationsvariablen um  $2\pi/a$ .

### Führende Ordnung

Die führende Ordnung auf dem Gitter

$$\mathcal{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(0)}(x) = \delta^{ab} \left\langle (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) (\partial_\lambda A_\omega^b(0) - \partial_\omega A_\lambda^b(0)) \right\rangle \quad (6.17)$$

beinhaltet ein konvergentes Integral. Somit kann das Reisz'schen Theorem angewendet werden und man stellt fest, dass die führende Ordnung diesem genügt. Da der Korrelator lediglich vom Abstand der beiden Quellen  $x$  abhängt, findet man nach Einsetzen des Propagators auf dem Gitter

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(0)}(x) = (N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \partial_\mu^x \partial_\lambda^{-x} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x+a(\frac{\hat{\nu}-\hat{\omega}}{2}))} \frac{1}{\tilde{k}^2} \quad (6.18)$$

und mit dem Limes

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{4}{a^2} \sum_{\kappa} \sin^2 \frac{ak_{\kappa}}{2} = k^2 \quad (6.19)$$

folgt nach Bildung der Ableitungen

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(0)}(x) = (N^2 - 1) \frac{\delta_{\nu\omega}}{2\pi^2} \left( \frac{\delta_{\mu\lambda}}{x^4} - 4 \frac{x_\mu x_\lambda}{x^6} \right). \quad (6.20)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(0)}(x) &= (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\lambda}) \frac{(N^2 - 1)}{\pi^2 x^4} \\ &\quad - (\delta_{\mu\lambda}x_\nu x_\omega - \delta_{\mu\omega}x_\nu x_\lambda - \delta_{\nu\lambda}x_\mu z_\omega + \delta_{\nu\omega}x_\mu x_\lambda) \frac{2(N^2 - 1)}{\pi^2 x^6}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dies entspricht exakt dem Kontinuumsergebnis (3.18).

### Ein-Schleifen-Ordnung

Analog zur führenden Ordnung lassen sich nun die konvergenten Beiträge der Diagramme 3.2 a) sowie 3.3 g) und h) finden, welche wiederum mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2.2 übereinstimmen. Für die divergenten Diagramme kann das Theorem allerdings nicht angewendet werden, so dass für diese Beiträge ein anderer Lösungsansatz verfolgt werden muss.

Eine direkte Lösung mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung wie im Kontinuum führt leider nicht zum gewünschten Ergebnis, da die endlichen Integrationsgrenzen auf nicht weiter lösbar Fehlern <sup>2</sup> erf( $x$ ) führen.

### 6.2.2 Divergente Integrale auf dem Gitter

Üblicherweise ist man bei störungstheoretischen Rechnungen auf dem Gitter an Ergebnissen im Impulsraum interessiert. In diesem Fall lassen sich divergente Integrale in Teile mit und ohne externe Impulse aufteilen. Dann werden auf dem Gitter lediglich die Integrale mit verschwindendem Impuls berechnet, was technisch sehr viel einfacher ist. Eine Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in [62, Kap. 15.2].

Betrachtet man beliebige bosonische divergente Gitterintegrale der Form

$$\mathcal{F}^{(4)}(p; n_1, n_2, n_3, n_4) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}_1^{2n_1} \tilde{k}_2^{2n_2} \tilde{k}_3^{2n_3} \tilde{k}_4^{2n_4}}{D_B(k, m)^p}, \quad (6.22)$$

mit  $D_B(k, m) = \tilde{k}^2 + m^2$ , so lassen sich diese im Impulsraum als Linearkombination der drei Konstanten

$$Z_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{k}^2} \quad (6.23)$$

$$Z_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k}_1)^2 (\tilde{k}_2)^2}{4 \tilde{k}^2} \quad (6.24)$$

$$F_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \left( 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{k}^2 + m^2)^2} + \log m^2 + \gamma_E \right) \quad (6.25)$$

<sup>2</sup>Die Fehlerfunktion ist definiert als

$$\text{erf}(x) = \int_0^x ds e^{-s^2}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

ausdrücken. Hierbei wurden die Impulse bereits in dimensionslose Größen  $k$  umgewandelt.

In dieser Arbeit wird allerdings explizit ein Ergebnis im Ortsraum benötigt, um die Renormierungsschemata auf dem Gitter und im Kontinuum vergleichen zu können. Das Problem hierbei liegt nun in dem auftretenden Fourierfaktor  $e^{ikx}$ : Er bewirkt, dass die Integrale auch für eine Reihenentwicklung der Exponentialfunktion nicht als Linear-kombinationen der bekannten Standardintegrale  $Z_0$ ,  $Z_1$  und  $F_0$  (eine Berechnung dieser findet sich in Abschnitt 6.3) geschrieben werden können.<sup>3</sup> Dies wäre nur für sehr kleine  $k$  erfüllt:

$$\sin^2 \frac{k_\mu}{2} \approx \frac{k_\mu}{2}, \quad k_\mu \ll 1, \quad (6.26)$$

was hier allerdings nicht möglich ist, da über  $k$  im Intervall  $[-\pi, \pi]$  integriert wird.

Eine Lösung könnte der Artikel von Becher und Melnikov [68] liefern. Dort wird beschrieben, wie sich die Integrale der Gitterstörungstheorie durch einfachere Kontinuumsintegrale ausdrücken und letztlich berechnen lassen. Hierbei werden die Gitterintegrale, z. B.  $\mathcal{F}^{(d)}(1; 0, 0, 0) \equiv \mathcal{F}^1$ , durch die Substitution

$$\eta_\mu = \tan \frac{k_\mu}{2} \quad \left( \Rightarrow \cos^2 \frac{k_\mu}{2} = \frac{1}{1 + \eta_\mu^2} \right) \quad (6.27)$$

auf die folgende Form gebracht

$$\mathcal{F}^1(m') = \frac{1}{4\pi^d} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\kappa=1}^d \frac{d\eta_\kappa}{(1 + \eta_\kappa^2)} (m'^2 + D_B(\eta))^{-1}. \quad (6.28)$$

Hierbei bezeichnet

$$D_B(\eta) = \sum_{\kappa=1}^d \frac{(\eta_\kappa)^2}{(1 + \eta_\kappa^2)}, \quad m' = \frac{m}{2} = \frac{a}{2} m_{\text{phys}}. \quad (6.29)$$

Der Kontinuumslimes ergibt sich also für  $m' \rightarrow 0$ . Um nun eine asymptotische Entwicklung der Schleifenintegrale angeben zu können, wird ein analytischer Regulator  $\delta$  benötigt. Dieser sichert die Vertauschbarkeit der Taylorentwicklung in kleinen Parametern und der Berechnung der Schleifenintegrale. In Gleichung (6.28) geht also der Faktor  $(m'^2 + D_B(\eta))^{-1}$  über in  $(m'^2 + D_B(\eta))^{-1-\delta}$ . Abschließend muss dann der Limes  $\delta \rightarrow 0$  betrachtet werden. Für  $\mathcal{F}^1(m')$  ergeben sich somit zwei Beträge:

$$\mathcal{F}^1(m') = \mathcal{F}_{\text{weich}}^1(m') + \mathcal{F}_{\text{hart}}^1(m'). \quad (6.30)$$

Diese erhält man wie folgt:

- Weich: Betrachte  $\eta_\kappa \sim m' \ll 1$  und führe eine Taylor-Entwicklung in  $\eta_\kappa$  durch.
- Hart: Betrachte  $\eta_\kappa \sim 1 \gg m'$  und führe eine Taylor-Entwicklung in  $m'$  durch.

---

<sup>3</sup>Dies gilt nur für den rein bosonischen Sektor, der hier betrachtet wird. Werden darüberhinaus auch Fermionen in die Berechnungen miteinbezogen, so werden insgesamt 15 Basisintegrale benötigt.

Es kann gezeigt werden, dass Regionen, in denen sowohl weiche als auch harte Komponenten existieren, nicht beitragen [68, S. 3]. Als Beispiel sollen einmal beide Anteile des zweidimensionalen Integrals

$$\mathcal{F}^{(2)}(1; 0, 0) = \mathcal{F}^1(m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\tilde{k}^2 + m^2} \quad (6.31)$$

berechnet werden.

**Weicher Anteil.** Bringt man das Integral mit (6.27) auf die Form (6.28), so erhält man nach Taylor-Entwicklung in  $\eta_\kappa$

$$\mathcal{F}_{\text{weich}}^1(m') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \eta \frac{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2}{(\eta^2 + m'^2)^{1+\delta}} + \mathcal{O}(\eta_\kappa^4). \quad (6.32)$$

Verwendet man nun

$$\int d^d \eta \frac{1}{(\eta^2 + m'^2)^\alpha} \prod_{\kappa=1}^d (\eta_\kappa^2)^{a_\kappa} = (m')^{d-2\alpha+2 \sum_\kappa a_\kappa} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2} - \sum_\kappa a_\kappa)}{\Gamma(\alpha)} \prod_\kappa \Gamma(\frac{1}{2} + a_\kappa), \quad (6.33)$$

so erhält man mit den Entwicklungen der Gammafunktion und der Potenz aus Abschnitt 2.5.1 für den weichen Anteil:

$$\mathcal{F}_{\text{weich}}^1(m') = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\delta} + \ln \frac{1}{m'^2} - m'^2 \left( \frac{1}{2\delta} + \frac{3}{4} + \ln \frac{1}{m'} \right) + \mathcal{O}(m'^4) + \mathcal{O}(\delta) \right). \quad (6.34)$$

**Harter Anteil.** Für die Taylor-Entwicklung in  $m'$  findet man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{hart}}^1(m') &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ H(\{1, 1\}; 1) - m'^2 (1 + \delta) H(\{1, 1\}; 2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m'^4}{2} (1 + \delta)(2 + \delta) H(\{1, 1\}; 3) + \mathcal{O}(\eta_\kappa^6) \right\}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

mit den Funktionen

$$H(\{a_\kappa\}; n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\kappa=1}^d \frac{d\eta_\kappa}{(1 + \eta_\kappa^2)^{a_\kappa}} (D_B(\eta))^{-n-\delta}, \quad (6.36)$$

welche analytisch ausgewertet werden können. Für die Berechnung genügen

$$H(\{1, 1\}; 1) = -\frac{\pi}{\delta} + 3\pi \ln 2 + \mathcal{O}(\delta) \quad (6.37)$$

$$H(\{1, 1\}; 2) = -\frac{\pi}{2\delta} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \ln 2 + \mathcal{O}(\delta), \quad (6.38)$$

so dass man für den harten Anteil findet:

$$\mathcal{F}_{\text{hart}}^1(m') = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{\delta} + 3 \ln 2 + m'^2 (1 + \delta) \left( \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln 2 \right) + \mathcal{O}(m'^4) + \mathcal{O}(\delta) \right). \quad (6.39)$$

Insgesamt heben sich die Pole in  $\delta$  gegenseitig auf und der Limes  $\delta \rightarrow 0$  kann gebildet werden. Es ergibt sich für das Integral

$$\mathcal{F}^1(m') = \mathcal{F}_{\text{weich}}^1(m') + \mathcal{F}_{\text{hart}}^1(m') = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{32}{a^2 m_{\text{phys}}^2} + \mathcal{O}(a), \quad (6.40)$$

was mit den Literaturwerten übereinstimmt [64, S. 6].

Für die Berechnung der Intgrale im Ortsraum muss dieses Verfahren nun angepasst werden: Die Exponentialfunktion muss durch ihre Potenzreihe ersetzt werden, wodurch Integrale der Form

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}^{n_1} \dots k_{\omega}^{n_n}}{(\tilde{k}^2 + m^2)^{\alpha}} \quad (6.41)$$

mit  $n_i \in \{0, 1\}$  gelöst werden müssen. Dies ist ein interessanter Ansatz für zukünftige Arbeiten (siehe hierzu auch Kap. 6.4).

## 6.3 Numerischer Zugang

Da die analytischen Ansätze bisher nicht zum Ziel führten, soll im Folgenden ein numerischer Zugang vorgestellt werden. Das Problem hierbei ist die Abhängigkeit der Integrale vom Abstand  $x$  der beiden Quellen. Das Integral muss also für verschiedenste Werte von  $x$  ausgewertet werden, so dass anschließend Rückschlüsse auf die analytische Abhängigkeit gezogen werden können.

### 6.3.1 Die CUBA-Bibliothek

Für mehrdimensionale numerische Integrationen eignet sich die CUBA-Bibliothek [69] sehr gut, welche die Integrationsalgorithmen Cuhre, Divonne, Vegas und Suave bereitstellt. Sie können unter C/C++, Fortran oder Mathematica verwendet werden. Die Berechnungen in dieser Arbeit wurden mit Fortran erstellt. Der Cuhre-Algorithmus approximiert die Integranden durch Polynome; für stark oszillierende Integranden ist er also nicht die beste Wahl. Hierfür lassen sich die Algorithmen Divonne, Suave und Vegas verwenden, sie greifen für die Integration auf (Quasi-)Zufallszahlen zurück.<sup>4</sup> Der Suave-Algorithmus wird im Folgenden nicht verwendet.

Als Test der Algorithmen werden zunächst die bekannten Standardintegrale  $Z_0$ ,  $Z_1$  und  $F_0$  (vgl. Abschnitt 6.2.2) berechnet. Hierfür ergeben sich mit Hilfe des Cuhre-Algorithmus die Werte aus Tabelle 6.1, welche mit den Literaturwerten übereinstimmen [62, S. 159].

$Z_0$	0,154933(4)
$Z_1$	0,107781(2)
$F_0$	4,3692(7)

**Tabelle 6.1:** Numerische Werte der Standard-Gitterintegrale.

---

<sup>4</sup>Der Divonne-Algorithmus kann wahlweise auch auf Approximation durch Polynome zurückgreifen und bildet somit eine Schnittstelle zwischen Cuhre und Vegas/Suave.

### 6.3.2 Ergebnisse der numerischen Integration

Zunächst wurde versucht, das einfachste auftretende Gitterintegral numerisch auszuwerten. Dieses lautet in dimensionslosen Größen  $k$  und  $n$

$$I_{\mu\lambda}^{(0)}(n) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\lambda e^{ikn}}{4 \sum_\kappa \sin^2 \frac{k_\kappa}{2}} \quad (6.42)$$

und stammt aus dem Beitrag der führenden Ordnung. Da der Wert hierfür aus Gleichung (6.21) bekannt ist, ergibt sich für  $n = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\mu = 1$  und  $\lambda = 2$

$$I_{12}^{(0)}(1, 1, 1, 1) = -\frac{1}{\pi^2 2^5} = -0,003166 \dots \quad (6.43)$$

Die numerische Integration mit Hilfe der CUBA-Bibliothek liefert hierfür sehr schlechte Ergebnisse: Der Cuhre-Algorithmus gibt einen Wert von  $0,178(3) - 0.0167(3)i$  an, Vegas erhält gar  $1,12(2) - 1,59(5)i$ . Der Divonne-Algorithmus führt zu keinem Ergebnis. Lediglich Mathematica liefert mit  $-0,00366(3) - 0,0000000(1)i$  zumindest die richtige Größenordnung, im Rahmen des angegebenen Fehlers stimmt dieser Wert aber ebenfalls nicht mit dem realen überein. Ein Problem bei der Verwendung von Mathematica ist allerdings, dass der Quellcode nicht bekannt ist und somit nicht klar ist, an welchen Stellen die Schwierigkeiten bei den Integrationen auftreten. Weiterhin versagt Mathematica bei den Berechnungen der achtdimensionalen Diagramme der Einschleifen-Ordnung.

Somit ist eine numerische Bestimmung der auftretenden Gitterintegrale mit Hilfe der CUBA-Bibliothek nicht ohne Weiteres möglich. Der Integrand oszilliert zu stark, so dass diese Integrationsroutinen kein stabiles Ergebnis liefern.

## 6.4 Ortsraum-Methode nach Lüscher und Weisz

Da sowohl die analytischen, als auch die numerischen Methoden bislang nicht zur Lösung der Gitterintegrale geführt haben, soll nun der Limes großer Abstände  $x$  betrachtet werden. Dann ergibt sich für den Korrelator ein Verhalten (vgl. [54])

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega} \underset{|x| \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\beta(g)}{g} \langle G_{\mu\nu}^a(0) G_{\mu\nu}^a(0) \rangle e^{-x/\lambda_G}, \quad (6.44)$$

mit dem Gluonkondensat  $\beta(g)/g \langle G_{\mu\nu}^a(0) G_{\mu\nu}^a(0) \rangle$  sowie der Korrelationslänge [55, 70]  $\lambda_G = 1/M_G$  als Inversem der Gluelumpmasse [64, 65].

Für eine analytische Lösung im Bereich großer Abstände kann nun die Ortsraum-Methode („Coordinate-Space-Method“) von Lüscher und Weisz [71] verwendet werden, welche auf unveröffentlichten Arbeiten von Vohwinkel aufbaut. Allerdings wird dieser Ansatz für numerische Berechnungen auf dem Gitter eingeführt, da die Störungstheorie im Bereich großer Abstände nicht wohldefiniert ist. Somit ergibt sich hier nicht unbedingt ein exponentiell abfallendes Verhalten.

Das Verfahren wird nun anhand des freien Propagators vorgestellt. Dazu wird die Hilfsfunktion  $I(x)$  benötigt:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} e^{ikx} e^{-k^2} Q(k) (k^2)^{-n} \quad (6.45)$$

mit dem Polynom  $Q(k)$  vom Grad  $d$  und einer ganzen Zahl  $n \geq 1$  mit  $d - 2n \geq 3$ . Dann ist  $I(x)$  absolut konvergent und wohldefiniert für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Benötigt wird das Verhalten der Hilfsfunktion für große  $x$ . Betrachten wir dazu zwei Fälle:

**$n = 1$ .** So ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2} e^{-k^2} Q(k) \\
 &= Q(-i\partial^x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \int_1^{\infty} dt e^{-tk^2} \\
 &= Q(-i\partial^x) \int_1^{\infty} dt \frac{1}{t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^n} e^{-k'^2} \\
 &= \frac{Q(-i\partial^x)}{4\pi^2 x^2} \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{4}} \right). \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Substitution  $k' = \sqrt{t}k - ix/2\sqrt{t}$  durchgeführt sowie (A.24) und die Eigenschaften der Gammafunktion (siehe Anhang A.4.1) verwendet. Für große  $x$  ergibt sich also ein Verhalten

$$I(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} Q(-i\partial^x) \frac{1}{4\pi^2 x^2} \tag{6.47}$$

bis auf exponentiell abfallende Korrekturen.

**$n \geq 2$ .** Hierzu wird der *Taylor-Operator*  $T_m$  eingeführt, der durch seine Wirkung auf eine stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  definiert wird

$$T_m f(x) \equiv \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_j} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_j} f(x) \Big|_{x=0}, \tag{6.48}$$

wobei  $m \equiv 2n - 4$  ist. Da nach Definition für den Grad des Polynoms  $Q(k)$  gilt, dass  $d > m$ , so lässt sich schreiben

$$Q(k) e^{ikx} = Q(-i\partial^x) (1 - T_m) e^{ikx}. \tag{6.49}$$

Hiermit folgt unter Verwendung der Schwinger-Parametrisierung (A.20)

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} (k^2)^{-n} Q(-i\partial^x) e^{ikx} \\
 &= \frac{Q(-i\partial^x)}{(n-1)!} \int_1^{\infty} dt (t-1)^{n-1} (1 - T_m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - tk^2} \\
 &= \frac{Q(-i\partial^x)}{2^4 \pi^2 (n-1)!} \int_1^{\infty} dt (t-1)^{n-1} t^{-2} (1 - T_m) e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
 &= \frac{Q(-i\partial^x)}{(n-1)!} \int_1^{\infty} dt (t-1)^{n-1} (4\pi t)^{-2} (1 - T_m) e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{6.50}
 \end{aligned}$$

Differentiation und Integration können hier vertauscht werden, da  $(1 - T_m) e^{ikx - k^2} (k^2)^{-n}$  absolut integrierbar ist. Nun kann  $t = s^{-1}$  substituiert werden und mit Hilfe des bino-

mischen Lehrsatzes<sup>5</sup> findet man

$$I(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-j}}{(n-j-1)!j!} Q(-i\partial^x) \int_0^1 dt t^{-j} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4}t} - \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{l!} \left( -\frac{x^2}{4}t \right)^l \right\}. \quad (6.51)$$

Wendet man nun auf alle Terme  $j \leq 1$  partielle Integration an, so erhält man einen Vorfaktor  $(j-1)!^{-1}(-x^2/4)^{j-1}$  und sie lassen sich auf die folgende Form bringen

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt t^{-1} \left( e^{-\frac{x^2}{4}t} - 1 \right) &= -\gamma_E - \Gamma(0, \frac{x^2}{4}) - \ln(\frac{x^2}{4}) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\ln(x^2) + \text{const.} + \dots \end{aligned} \quad (6.52)$$

Hierbei ist

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty dt t^{a-1} e^{-t} \quad (6.53)$$

die unvollständige Gammafunktion. Insgesamt erhält man somit die asymptotische Entwicklung für die Hilfsfunktion bis auf exponentiell abfallende Korrekturen

$$I(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} Q(-i\partial^x) \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{4}{x^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(j-1)!j!(n-1-j)!} \left( \frac{x^2}{4} \right)^{j-1} \ln(x^2) \right\}. \quad (6.54)$$

Um nun das Verhalten des Propagators für große  $x$  zu erhalten, so muss eine glatte Funktion  $h(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}^4$  mit der folgenden Eigenschaft eingeführt werden

$$h(k) = \begin{cases} 1, & \text{für } |k| < 1, \\ 0, & \text{für } |k| > 2. \end{cases} \quad (6.55)$$

Dies bewirkt ein symmetrisches Abschneiden des Integrationsintervalls, so dass dieses ausgedehnt werden kann. Der Gluonpropagator auf dem Gitter (5.27) stimmt nun überein mit

$$D_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} h(k) (\tilde{k}^2)^{-1}. \quad (6.56)$$

Um nun das Ergebnis des Hilfsintegrals  $I(x)$  anwenden zu können, muss der Gitterimpuls  $\tilde{k}^2$  (5.28) als Potenzreihe ausgedrückt werden. Dazu betrachte man die Reihendarstellung des Quadrates der Sinus-Funktion:

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= -\frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} - 1) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} (i^k + (-i)^k) - 1 \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k)^{2n}}{(2n)!} 2(-1)^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

<sup>5</sup>Der binomische Lehrsatz lautet für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bei (\*) wurde verwendet, dass die Reihe für ungerade  $k$  verschwindet. Somit lässt sich schreiben

$$\tilde{k}^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} k^{2n}. \quad (6.58)$$

Wenn man nun

$$\begin{aligned} e^{k^2} (\tilde{k}^2)^{-1} &= (k^2)^{-1} + 1 + \frac{1}{12} k^4 (k^2)^{-2} + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{12} k^4 (k^2)^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{360} k^6 (k^2)^{-2} + \frac{1}{144} (k^4)^2 (k^2)^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (6.59)$$

berechnet und anschließend mit  $e^{-k^2}$  multipliziert, so hat man den Propagator auf die Form des Hilfsintegrals (6.45) gebracht. Subtrahiert man dies nun vom Integranden in (6.56), so ist die Singularität in  $p = 0$  geglättet. Da hier der Grenzfall großer  $x$  von Interesse ist, kann die Funktion  $h(k)$  wieder weggelassen werden, denn große Abstände  $x$  sind mit kleinen Impulsen  $k$  verknüpft; das Integral wird somit abgeschnitten. Als Ergebnis erhält man dann

$$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} e^{-k^2} \left\{ \frac{1}{k^2} + \frac{1}{12} \frac{k^4}{(k^2)^2} + \dots \right\}, \quad (6.60)$$

welches dann mit den Berechnungen für das Hilfsintegral die asymptotische Entwicklung des Propagators liefert:

$$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{48} \partial^4 \ln(x^2) - \frac{x^2}{1440} \partial^6 \ln(x^2) + \frac{x^2}{4806} (\partial^4)^2 x^2 \ln(x^2) \right\} + \mathcal{O}(|x|^{-8}) \quad (6.61)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 - \frac{1}{x^2} + 2 \frac{x^4}{(x^2)^3} - 4 \frac{1}{(x^2)^2} + 16 \frac{x^4}{(x^2)^4} - 48 \frac{x^6}{(x^2)^5} + 40 \frac{(x^4)^2}{(x^2)^6} + \dots \right\}. \quad (6.62)$$

Für die Ableitungen gilt  $\partial^2 = \partial_\mu^x \partial_\mu^x$ . Der Lorentzindex wird unterdrückt, da insgesamt nur quadratische Terme vorkommen. Bei Ausführung der Ableitungen ist zu beachten, dass  $x^4 \neq (x^2)^2$  ist (vgl. Definition (5.28)), man erhält also Terme der Form  $P(x)(x^2)^{-m}$  mit einem Polynom  $P$  und  $m \in \mathbb{Z}$ .

Somit steht die Methodik zur Verfügung, das Verhalten der divergenten Gitterintegrale für große  $x$  anzugeben. Dies wäre ein interessanter Ansatz für spätere Projekte.

Als Anmerkung sei erwähnt, dass eine Entwicklung für kleine  $x$ , welche im störungstheoretisch relevanten Bereich sinnvoller als die Entwicklung für große  $x$  wäre, sich auf dem Gitter als sehr schwierig gestaltet: Möchte man den Ansatz von Becher und Melnikov (vgl. 6.2.2) verfolgen, so müssen die Integrale in dimensionslosen Größen vorliegen. Die in allen zu lösenden Integralen vorkommende Exponentialfunktion  $e^{ikx}$  kann daher dort nicht um kleine  $x = an$  entwickelt werden, da die kleinsten erlaubten Werte für die dimensionslose Größe  $n = 0$  oder  $n = 1$  sind. Letzterer führt nicht zum Ziel, da die Voraussetzungen für eine Entwicklung ( $n \ll 1$ ) nicht erfüllt sind. Für  $n = 0$  erhält man die schon bekannten Gitter-Standardintegrale (vgl. 6.3.1) und somit keinen neuen

Erkenntnisgewinn für den Korrelator. Auch für numerische Methoden ist dies kein Lösungsweg, da auch hier die Integrale nicht dimensionsbehaftet sein dürfen. Somit muss für alle noch zu lösenden Interale ein anderer Weg gefunden werden. Eine Liste dieser Integrale findet sich in Anhang A.5.



# 7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengetragen und diskutiert. Anschließend wird ein kurzer Ausblick auf weitere Lösungsansätze sowie interessante Fragestellungen für zukünftige Projekte gegeben.

## Zusammenfassung

Im Fokus dieser Arbeit steht der Feldstärkekorrelator der QCD. Nach der Einleitung in Kapitel 1 sowie einer kurzen Beschreibung der Grundlagen der QCD im Kontinuum (Kapitel 2) findet sich in Kapitel 3 schließlich die Berechnung des Feldstärkekorrelators im Kontinuum. Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen mit denen des Artikels von Eidemüller und Jamin [39] überein (vgl. Kapitel 4).

Nachdem die Betrachtung des Korrelators auf dem Gitter motiviert wird, werden in Kapitel 5 die Grundlagen für die QCD auf dem Gitter bereitgestellt. In Kapitel 6 folgt dann die Darstellung des Korrelators in Gitterstörungstheorie. Es wird gezeigt, dass die führende Ordnung mit Hilfe des Reisz'schen Theorems (Kapitel 6.2.1) berechnet werden kann und das Ergebnis mit dem im Kontinuumsfall erhaltenen übereinstimmt. Gleches gilt für die nicht-divergenten Anteile der nächsten zur führenden Ordnung.

Für die divergenten Beiträge werden verschiedene Ansätze betrachtet: Zunächst wird der analytische Ansatz von Becher und Melnikov verfolgt (Kapitel 6.2.2). Dieser führt allerdings nicht zum gewünschten Ziel, so dass in Kapitel 6.3 ein numerischer Zugang vorgestellt wird. Mit Hilfe der CUBA-Bibliothek wird versucht, die divergenten Gitterintegrale zu lösen. Die dort zur Verfügung gestellten Algorithmen eignen sich gut um die Standard-Gitterinterale  $Z_0$ ,  $Z_1$  und  $F_0$  zu berechnen. Sie scheitern jedoch schon an der Berechnung des einfachsten Gitterintegrals der führenden Ordnung, dessen Ergebnis bekannt ist.

In Kapitel 6.4 wird abschließend die Ortsraum-Methode nach Lüscher und Weisz vorgestellt. Durch das dort verwandte Verfahren ist es möglich, ein Verhalten für große Abstände  $x$  der Quellen anzugeben. Dies ermöglicht die Berechnung der Gluelumpmasse, jedoch ist diese Entwicklung für die Störungstheorie eher ungeeignet. Dafür wäre eine Entwicklung für kleine Abstände  $x$  interessant, was sich allerdings ebenfalls als sehr schwierig herausstellt.

## Ausblick

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit, die Berechnung des Feldstärkekorrelators der QCD in Gitterstörungstheorie, hat sich als zu ambitioniert erwiesen. Es ist bislang nicht gelungen, einen geschlossenen analytischen Ausdruck für den Korrelator in Gitterstörungstheorie zu finden, da sämtliche bislang bekannten Ansätze Integrale im Impulsraum behandeln. Lediglich die Methode von Lüscher und Weisz arbeitet im Ortsraum, selbst diese wurde aber ebenfalls für Berechnungen im Impulsraum geschaffen. Die vorliegende

Diplomarbeit sollte jedoch ein Ergebnis im Ortsraum liefern, wofür die auf dem Gitter auftretende diskrete Fouriertransformation ein erhebliches Problem darstellt.

Vielversprechende Lösungsansätze für dieses Problem liegen allerdings in einer intensiveren Betrachtung der Methode von Becher und Melnikov. Hier taucht das Problem der Mischung von Gitterimpulsen und „normalen“ Impulsen auf. Könnte man dieses durch geschickte Substitution lösen, so wäre eine geschlossene Darstellung des Korrelators möglich.

Des Weiteren wäre eine numerische Betrachtung mit Hilfe der sogenannten „Fast Fourier Transform“ (FFT) möglich [72]. Die dort verwendeten Algorithmen sind extra auf oszillierende Integranden angepasst und könnten demnach eher zu Ergebnissen führen als die hier verwendeten nicht weiter spezialisierten CUBA-Algorithmen. Die Ungenauigkeit der Ergebnisse könnte sich dort allerdings als eine Schwierigkeit erweisen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zwar eine geschlossene analytische Darstellung des Korrelators nicht erreicht werden konnte; jedoch wurden viele Methoden zusammengetragen sowie an Beispielen diskutiert. Aus dieser Arbeit ergeben sich mithin einige vielversprechende Ansätze für zukünftige Projekte.

# A Anhang

## A.1 Notation

### A.1.1 Einheiten

In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten mit  $\hbar = c = 1$  verwendet. Eine Umrechnung in andere Einheitensysteme erfolgt durch geeignetes Multiplizieren mit

$$\hbar c = 197,326\,968(17) \text{ MeV fm}, \quad (c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}) \quad (\text{A.1})$$

bis sich die korrekten Dimensionsabhängigkeiten ergeben. Die Werte wurden entnommen aus [5].

### A.1.2 Vierervektoren im Euklidischen

Vierervektor:

$$x^\mu = x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\vec{x}, x_4) \quad (\text{A.2})$$

Vergleich zur Minkowski'schen Raumzeit:

$$\vec{x}_E = \vec{x}_M, \quad x_4^E = \tau = it = ix_0^M \quad (\text{A.3})$$

Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\} \quad (\text{A.4})$$

Skalarprodukt:

$$a \cdot b \equiv ab \equiv a_\mu b_\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + a_4 b_4, \quad \text{mit} \quad a_\mu b_\mu \equiv \sum_\mu a_\mu b_\mu \quad (\text{A.5})$$

Ableitung:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (\text{A.6})$$

Dirac'sche Gamma-Matrizen in vier Dimensionen:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.7})$$

Gamma-Matrizen in höheren Dimensionen findet man in [32, Anhang B].

## A.2 Formelsammlung

Eine gute Näherung für  $\varepsilon \ll 1$  ist

$$x^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln x} = 1 + \varepsilon \ln x + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.8})$$

Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:

$$e^A e^B = \exp \left\{ A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \dots \right\} \quad (\text{A.9})$$

### A.3 Generatoren der speziellen unitären Gruppe $SU(N)$

Für die Generatoren  $T^A$  der  $SU(N)$  gilt die Kommutatorrelation

$$[T^C, T^B] = i f^{ABC} T^C, \quad \text{mit} \quad A, B, C = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (\text{A.10})$$

mit den total antisymmetrischen reellen Strukturkonstanten<sup>1</sup>  $f^{ABC}$ . Die Generatoren sind spurfrei und hermitesch.

#### A.3.1 Adjungierte Darstellung

In der adjungierten (regulären) Darstellung wählt man

$$T_{\text{adj}}^A = (T^a)_{bc} = -i f^{abc}. \quad (\text{A.11})$$

Für die Spur gilt

$$\text{Sp}(T^a T^b) = -f^{cad} f^{dbc} = N \delta^{ab}, \quad \delta^{aa} = N^2 - 1. \quad (\text{A.12})$$

#### A.3.2 Fundamentale Darstellung

In der Fundamentaldarstellung, auch definierende Darstellung genannt, kann man die Gell-Mann-Matrizen  $\lambda^A$  als Generatoren wählen

$$T_{\text{fund}}^A = \frac{\lambda^A}{2}. \quad (\text{A.13})$$

Für die Spur gilt

$$\text{Sp}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad \delta^{AA} = N. \quad (\text{A.14})$$

## A.4 Integraltafel für Feynmandiagramme

### A.4.1 Gammafunktion

Die Gammafunktion ist für komplexe Zahlen  $z$  definiert als

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad (\text{Re}(z) > 0) \quad (\text{A.15})$$

mit der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

---

<sup>1</sup>Die Werte der Strukturkonstanten findet man in [34, S. 98].

und den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n! \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Für kleine  $\epsilon$  lässt sie sich gemäß

$$\Gamma(-m+\epsilon) = \frac{(-1)^m}{m!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \psi(m+1) + \frac{1}{2}\epsilon \left[ \frac{\pi^2}{3} + \psi^2(m+1) - \psi'(m+1) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \tag{A.17}$$

entwickeln, wobei

$$\begin{aligned}\psi(m+1) &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \gamma_E, & \left( \psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} \right) \\ \psi'(m+1) &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{l^2}, & \psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}\tag{A.18}$$

Hierbei ist  $\psi(x)$  die Digammafunktion, außerdem bezeichnet  $\gamma_E$  die Euler-Mascheroni Konstante mit

$$\psi(1) = \zeta(2) = -\gamma_E = -0,5772\dots.$$

Die Euler-Mascheroni Konstante kann also ebenfalls über die Riemann'sche Zetafunktion  $\zeta(x)$  definiert werden.

Die unvollständige Gammafunktion ist definiert als

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty dt t^{a-1} e^{-t}. \tag{A.19}$$

### A.4.2 Schwinger-Parametrisierung

$$\frac{1}{(m^2 - k^2)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty d\beta \beta^{\alpha-1} e^{-\beta(m^2 - k^2)} \tag{A.20}$$

### A.4.3 Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(xa + (1-x)b)^{\alpha+\beta}} \tag{A.21}$$

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dy 2y \int_0^1 dx \frac{1}{[ayx + by(1-x) + c(1-y)]^3} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\omega} &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \dots + \omega)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\omega)} \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) \\ &\quad \times \frac{x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \dots x_n^{\omega-1}}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{\alpha+\beta+\dots+\omega}}\end{aligned}\tag{A.23}$$

#### A.4.4 Integrale in $d$ Dimensionen

##### Allgemeines

In  $d$ -Dimensionen findet man das Standard-Integral

$$\int d^d q e^{-q^2} = \pi^{\frac{d}{2}}. \quad (\text{A.24})$$

Außerdem ergibt sich in dimensionaler Regularisierung

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k^2)^\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.25})$$

##### Integraltafel

Insgesamt werden in dieser Arbeit die folgenden drei Integrale für die Rechnungen in dimensionaler Regularisierung benötigt:

$$I = \int d^d z' \frac{1}{(z' - z_1)^n (z' - z_2)^m} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m-d}{2}) \Gamma(\frac{d-n}{2}) \Gamma(\frac{d-m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(d - \frac{m+n}{2})} \frac{1}{(z_1 - z_2)^{n+m-d}} \quad (\text{A.26})$$

$$I_\alpha = \int d^d z' \frac{z'_\alpha}{(z' - z_1)^n (z' - z_2)^m} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m-d}{2}) \Gamma(\frac{d-n}{2}) \Gamma(\frac{d-m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(d - \frac{m+n}{2} + 1)} \frac{\frac{d-n}{2} z_{2\alpha} + \frac{d-m}{2} z_{1\alpha}}{(z_1 - z_2)^{n+m-d}} \quad (\text{A.27})$$

$$I_{\alpha\beta} = \int d^d z' \frac{z'_\alpha z'_\beta}{(z' - z_1)^n (z' - z_2)^m} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m-d}{2}) \Gamma(\frac{d-n}{2}) \Gamma(\frac{d-m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(d - \frac{m+n}{2} + 2)} \frac{1}{(z_1 - z_2)^{n+m-d}} \times \left\{ \begin{aligned} & (\frac{d-n}{2} + 1) (\frac{d-n}{2}) z_{2\alpha} z_{2\beta} \\ & + (\frac{d-m}{2}) (\frac{d-n}{2}) (z_{2\alpha} z_{1\beta} + z_{1\alpha} z_{2\beta}) \\ & + (\frac{d-m}{2} - 1) (\frac{d-m}{2}) z_{1\alpha} z_{1\beta} \\ & + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} \frac{(\frac{d-m}{2}) (\frac{d-n}{2})}{(\frac{n+m-d}{2} - 1)} (z_1 - z_2)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{A.28})$$

Das einfachste Integral (A.26) lässt sich mit Hilfe des Integrals

$$I' = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + 2kp + m^2)^A} = \frac{\Gamma(A - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(A)} \frac{1}{(m^2 - p^2)^{A - \frac{d}{2}}} \quad (\text{A.29})$$

berechnen, welches nun explizit ausgewertet wird: Mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung (A.20), der Gammafunktion (A.15), sowie (A.24) erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + 2kp + m^2)^A} &= \frac{1}{\Gamma(A)} \int_0^\infty d\beta \beta^{A-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{-\beta(k^2 + 2kp + m^2)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(A)} \int_0^\infty d\beta \beta^{A-1 - \frac{d}{2}} e^{-\beta(m^2 - p^2)} \int \frac{dl}{(2\pi)^d} e^{-l^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(A)} \int_0^\infty d\beta \beta^{A-1 - \frac{d}{2}} e^{-\beta(m^2 - p^2)} \\ &= \frac{\Gamma(A - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(A)} \frac{1}{(m^2 - p^2)^{A - \frac{d}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Hieraus ergeben sich durch Ableiten nach  $p_\alpha$ ,  $p_\alpha$  und  $p_\beta$ , sowie  $p_\alpha$ ,  $p_\beta$  und  $p_\gamma$  die folgenden weiteren Hilfsintegrale:

$$I'_\alpha = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha}{(k^2 + 2kp + m^2)^A} = -\frac{\Gamma(A - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(A)} \frac{p_\alpha}{(m^2 - p^2)^{A - \frac{d}{2}}} \quad (\text{A.31})$$

$$I'_{\alpha\beta} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2kp + m^2)^A} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(A)} \times \\ \times \left[ p_\alpha p_\beta \frac{\Gamma(A - \frac{d}{2})}{(m^2 - p^2)^{A - \frac{d}{2}}} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} \frac{\Gamma(A - 1 - \frac{d}{2})}{(m^2 - p^2)^{A - 1 - \frac{d}{2}}} \right] \quad (\text{A.32})$$

$$I'_{\alpha\beta\gamma} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{(k^2 + 2kp + m^2)^A} = \frac{-1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(A)} \left[ p_\alpha p_\beta p_\gamma \frac{\Gamma(A - \frac{d}{2})}{(m^2 - p^2)^{A - \frac{d}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} p_\beta + \delta_{\beta\gamma} p_\alpha + \delta_{\alpha\beta} p_\gamma) \frac{\Gamma(A - 1 - \frac{d}{2})}{(m^2 - p^2)^{A - 1 - \frac{d}{2}}} \right]. \quad (\text{A.33})$$

Das Integral (A.26) erhält man dann durch Verwenden der Feynman-Parametrisierung (A.21), sowie mit Hilfe von (A.29) durch

$$I = \int d^d z' \frac{1}{(z' - z_1)^n (z' - z_2)^m} \\ = \int d^d z' [(z' - z_1)^2]^{-\frac{n}{2}} [(z' - z_2)^2]^{-\frac{m}{2}} \\ = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^1 dx \int d^d z' \frac{x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{m}{2}-1}}{[x(z' - z_1)^2 + (1-x)(z' - z_2)^2]^{\frac{n+m}{2}}} \\ = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m-d}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2})} (z_1 - z_2)^{d-n-m} \int_0^1 dx x^{\frac{d-m}{2}-1} (1-x)^{\frac{d-n}{2}-1} \\ = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m-d}{2}) \Gamma(\frac{d-n}{2}) \Gamma(\frac{d-m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(d - \frac{m+n}{2})} \frac{1}{(z_1 - z_2)^{n+m-d}}, \quad (\text{A.34})$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde

$$\int_0^1 dx x^a (1-x)^b = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}. \quad (\text{A.35})$$

Die Integrale  $I_\alpha$ , bzw.  $I_{\alpha\beta}$  erhält man völlig analog zur Rechnung (A.34) unter Verwendung des jeweiligen Hilfsintegrals  $I'_\alpha$ , bzw.  $I'_{\alpha\beta}$ . Das Integral  $I'_{\alpha\beta\gamma}$  wurde zur Berechnung von Diagramm 3.3 i) benötigt und wird der Vollständigkeit halber hier noch einmal gelistet. Außerdem würde ein weiteres Integral  $I_{\alpha\beta\gamma}$  analog zu den oben schon angegebenen Integralen mittels des letzten Hilfsintegrals berechnet werden.

## A.5 Sammlung der divergenten Gitterintegrale

Im Folgenden findet sich eine Liste der divergenten Gitterintegrale in dimensionslosen Größen. Alle Integrale, die zur Berechnung des Feldstärkekorrelators auf dem Gitter benötigt werden, lassen sich auf die nachstehenden Integrale zurückführen. Die hoch-

gestellten Buchstaben beziehen sich auf die Diagramme, in denen das Integral auftritt. Die benötigten Ableitungen werden ebenfalls mit angegeben, da diese im Falle einer numerischen Behandlung vor der Integration ausgeführt werden müssen. Die Integrale lauten:

$$I_{\mu\lambda}^{\text{d}j)(n)} = \partial_\mu^n \partial_\lambda^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikn}}{(\tilde{k}^2)^2} \quad (\text{A.36a})$$

$$I_{\mu\lambda}^{\text{d}f)(n)} = \partial_\mu^n \partial_\lambda^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikn}}{k^2 \tilde{k}^2} \quad (\text{A.36b})$$

$$I_{\mu\lambda}^{\text{d}b)(n)} = \partial_\mu^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda e^{-i(k+k_1)n}}{\tilde{k}^2 \tilde{k}_1^2 (k \tilde{k}_1)^2} \quad (\text{A.36c})$$

$$I_{\mu\lambda}^{\text{d}i)(n)} = \partial_\mu^n \partial_\lambda^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikn} - e^{ik_1 n}}{(k + k_1)_\omega \tilde{k}^2 \tilde{k}_1^2 (k \tilde{k}_1)^2} \quad (\text{A.36d})$$

$$I_{\mu\lambda}^{\text{d}c)(n)} = \partial_\mu^n \partial_\lambda^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_1 \omega e^{-i(k+k_1)n}}{\tilde{k}^2 \tilde{k}_1^2 ((k \tilde{k}_1)^2)^2} \quad (\text{A.36e})$$

$$I_{\mu\lambda}^{\text{d}d)(n)} = \partial_\mu^n \partial_\lambda^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{(k + k_1)_\nu (k + k_1)_\omega e^{i(k+k_1)n}}{\tilde{k}^2 \tilde{k}_1^2 ((k \tilde{k}_1)^2)^2}. \quad (\text{A.36f})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] WILSON, K. G.: *Confinement of Quarks*. Phys. Rev. D10 2445-2459, 1974.
- [2] LE BELLAC, M.: *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [3] KAPUSTA, J. I. und GALE, C.: *Finite-Temperature Field Theory. Principles and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2. Auflage, 2006.
- [4] *LHC Homepage*, 02. Februar 2009. <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>.
- [5] YAO, W. M. et al.: *Review of Particle Physics*. Journal of Physics G33, 1, 2006. Particle Data Group: <http://pdg.lbl.gov>.
- [6] NEUBERT, M.: *Heavy quark symmetry*. Phys. Rept. 245 259-396, 1994. [[arXiv:hep-ph/9306320](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9306320)].
- [7] BODWIN, G. T., BRAATEN, E. und LEPAGE, G. P.: *Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium*. Phys. Rev. D51 1125-1171, 1995. [[arXiv:hep-ph/9407339](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9407339)].
- [8] BALI, G. S.: *QCD forces and heavy quark bound states*. Phys. Rept. 343 1-136, 2001. [[arXiv:hep-ph/0001312](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0001312)].
- [9] BRAMBILLA, N., PINEDA, A., SOTO, J. und VAIRO, A.: *Effective field theories for heavy quarkonium*. Rev. Mod. Phys. 77 1423-1496, 2005. [[arXiv:hep-ph/0410047](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0410047)].
- [10] BALI, G. S. und PINEDA, A.: *QCD phenomenology of static sources and gluonic excitations at short distances*. Phys. Rev. D69 094001, 2004. [[arXiv:hep-ph/0310130](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0310130)].
- [11] PINEDA, A.: *Determination of the bottom quark mass from the  $\Upsilon(1S)$  system*. JHEP 0106 022, 2001. [[arXiv:hep-ph/0105008](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0105008)].
- [12] GELL-MANN, M.: *A schematic model of baryons and mesons*. Phys. Lett. 8 214-215, 1964.
- [13] ZWEIG, G.: *An  $SU(3)$  model for strong interaction symmetry and its breaking*. CERN-TH-401, CERN-TH-412, 1964. Publiziert in „Developments in the Quark Theory of Hadrons“. Vol. 1. Hrsg. D. Lichtenberg und S. Rosen. Nonantum, Mass., Hadronic Press, 1980.
- [14] GELL-MANN, M.: *Symmetries of Baryons and Mesons*. Phys. Rev. 125 1067-1084, 1962.

- [15] NE'EMAN, Y.: *Deviations of strong interactions from a gauge invariance*. Nucl. Phys. 26 222-229, 1961.
- [16] AUGUSTIN, J. E. et al.: *Discovery of a Narrow Resonance in  $e^+e^-$  Annihilation*. Phys. Rev. Lett. 33 1406-1408, 1974.
- [17] AUBERT, J. J. et al.: *Nonobservation of Heavier J Particles from  $p-N$  Reactions*. Phys. Rev. Lett. 33 1624-1625, 1974.
- [18] HAN, M. Y. und NAMBU, Y.: *Three-triplet model with double  $SU(3)$  symmetry*. Phys. Rev. B139 1006-1010, 1965.
- [19] GREENBERG, O. W.: *Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons*. Phys. Rev. Lett. 13 598-602, 1964.
- [20] GELL-MANN, M.: *Quarks: Developments in The Quark Theory of Hadrons*. Acta Phys. Austriaca 9 733-761, 1972.
- [21] YANG, C.-N. und MILLS, R. L.: *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys. Rev. 96 191-195, 1954.
- [22] GLASHOW, S. L.: *Partial-symmetries of weak interactions*. Nucl. Phys. 22 579-588, 1961.
- [23] WEINBERG, S.: *A Model of Leptons*. Phys. Rev. Lett. 19 1264-1266, 1967.
- [24] SALAM, A.: *Elementary Particle Theory: Relativistic groups and analyticity*. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968. Nobel Symp. No. 8.
- [25] 'T HOOFT, G.: *Renormalization of massless Yang-Mills fields*. Nucl. Phys. B33 173-199, 1971.
- [26] 'T HOOFT, G.: *Renormalizable Lagrangians for massive Yang-Mills fields*. Nucl. Phys. B35 167-188, 1971.
- [27] PESKIN, M. E. und SCHROEDER, D. V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [28] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*, Band III: Supersymmetry. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [29] FEYNMAN, R. P. und HIBBS, A. R.: *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [30] FEYNMAN, R. P.: *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*. Rev. Mod. Phys. 20 367-387, 1948.
- [31] SMIT, J.: *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Cambridge Lecture Notes in Physics 15.
- [32] KUGO, T.: *Eichtheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [33] FADDEEV, L. D. und POPOV, V. N.: *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*. Phys. Lett. B25 29-30, 1967.

- [34] CHENG, T. P. und LI, L. F.: *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [35] ITZYKSON, C. und ZUBER, J.-B.: *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [36] RYDER, L. H.: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 1997.
- [37] COLLINS, J.: *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [38] 'T HOOFT, G und VELTMAN, M.: *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*. Nucl. Phys. B44 189-213, 1972.
- [39] EIDEMÜLLER, M. und JAMIN, M.: *QCD field strength correlator at the next-to-leading order*. Phys. Lett. B416 415-420, 1997. [[arXiv:hep-ph/9709419](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9709419)].
- [40] EIDEMÜLLER, M.: *QCD-Korrekturen zur eichinvarianten Gluon-Korrelationsfunktion*, 1997. Diplomarbeit. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Institut für Theoretische Physik.
- [41] SHIFMAN, M. A., VAINSSTEIN, A. I. und ZAKHAROV, V. I.: *QCD and Resonance Physics. Sum Rules*. Nucl. Phys. B147 385-447, 1979.
- [42] SHIFMAN, M. A., VAINSSTEIN, A. I. und ZAKHAROV, V. I.: *QCD and Resonance Physics: Applications*. Nucl. Phys. B147 448-518, 1979.
- [43] CAMPOSTRINI, M., DI GIACOMO, A. und OLEJNIK, S.: *On the Possibility of Detecting Gluon Condensation from the Spectra of Heavy Quarkonia*. Z. Phys. C31 577-582, 1986.
- [44] DOSCH, H. G.: *Gluon Condensate and Effective Linear Potential*. Phys. Lett. B190 177-181, 1987.
- [45] DOSCH, H. G. und SIMONOV, Y. A.: *The Area Law of the Wilson Loop and Vacuum Field Correlators*. Phys. Lett. B205 339-344, 1988.
- [46] SIMONOV, Y. A.: *Connection between confinement and spontaneous chiral symmetry breaking in QCD*. Sov. J. Nucl. Phys. 54 133-141, 1991.
- [47] NACHTMANN, O. und REITER, A.: *The Vacuum Structure in QCD and Hadron-Hadron-Scattering*. Z. Phys. C24 283-296, 1984.
- [48] LANDSHOFF, P. V. und NACHTMANN, O.: *Vacuum Structure and Diffraction Scattering*. Z. Phys. C35 405-416, 1987.
- [49] KRÄMER, A. und DOSCH, H. G.: *High-energy scattering and vacuum properties*. Phys. Lett. B252 669-675, 1990.
- [50] DOSCH, H. G., FERREIRA, E. und KRÄMER, A.: *Nonperturbative QCD treatment of high-energy hadron hadron scattering*. Phys. Rev. D50 1992-2015, 1994.

- [51] RAMOND, P.: *Field Theory: A Modern Primer*. Addison-Wesley, Redwood City, 2. Auflage, 1990.
- [52] ABRAMOWITZ, M. und STEGUN, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 9. Dover Auflage, 10. GPO Auflage, 1972.
- [53] DI GIACOMO, A., MEGGIOLARO, E. und PANAGOPOULOS, H.: *Gauge-invariant field strength correlations in QCD at zero and non-zero temperature*. Nucl. Phys. B483 371-382, 1997. [[arXiv:hep-lat/9603018](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9603018)].
- [54] DI GIACOMO, A., D'ELIA, M., PANAGOPOULOS, H. und MEGGIOLARO, E.: *Gauge invariant field strength correlators in QCD*. Presented at 29th International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 98), Vancouver, Vol. 2 1809-1813, 1998. [[arXiv:hep-lat/9808056](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9808056)].
- [55] D'ELIA, M., DI GIACOMO, A. und MEGGIOLARO, E.: *Gauge-invariant field-strength correlators in pure Yang-Mills and full QCD at finite temperature*. Phys. Rev. D67 114504, 2003. [[arXiv:hep-lat/0205018](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0205018)].
- [56] MONTVAY, I. und MÜNSTER, G.: *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [57] ROTHE, H. J.: *Lattice Gauge Theories: An Introduction*. World Scientific Lecture Notes in Physics – Vol. 43, Singapur, 1992.
- [58] DEGRAND, T. und DETAR, C.: *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing, Singapur, 2006.
- [59] METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, A. H. und TELLER, E.: *Equation of state calculations by fast computing machines*. J. Chem. Phys. 21 1087-1092, 1953.
- [60] CREUTZ, M., JACOBS, L. und REBBI, C.: *Monte Carlo Study of Abelian Lattice Gauge Theories*. Phys. Rev. D20 1915-1922, 1979.
- [61] WEINGARTEN, D. H. und PETCHER, D. N.: *Monte Carlo Integration for Lattice Gauge Theories with Fermions*. Phys. Lett. B99 333-338, 1981.
- [62] CAPITANI, S.: *Lattice Perturbation Theory*. Phys. Rept. 382 113-302, 2003. [[arXiv:hep-lat/0211036](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0211036)].
- [63] JORYSZ, I. H. und MICHAEL, C.: *The field configurations of a static adjoint source in  $SU(2)$  lattice gauge theory*. Nucl. Phys. B302 448-470, 1988.
- [64] LAINE, M. und PHILIPSEN, O.: *Gauge-invariant scalar and field strength correlators in 3d*. Nucl. Phys. B523 267-289, 1998. [[arXiv:hep-lat/9711022](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9711022)].
- [65] PHILIPSEN, O.: *On the non-perturbative gluon mass and heavy quark physics*. Nucl. Phys. B628 167-192, 2002. [[arXiv:hep-lat/0112047](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0112047)].
- [66] REISZ, T.: *A Power Counting Theorem For Feynman Integrals On The Lattice*. Commun. Math. Phys. 116 81, 1988.

- [67] LUSCHER, M.: *Selected Topics In Lattice Field Theory*. Lectures given at Summer School 'Fields, Strings and Critical Phenomena', Les Houches, France, Jun 28 - Aug 5, 1988.
- [68] BECHER, T. und MELNIKOV, K.: *The Asymptotic Expansion of Lattice Loop Integrals Around the Continuum Limit*. Phys. Rev. D66 074508, 2002. [[arXiv:hep-ph/0207201](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0207201)].
- [69] HAHN, T.: *CUBA: A library for multidimensional numerical integration*. Comput. Phys. Commun. 168 78-95, 2005. [[arXiv:hep-ph/0404043](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0404043)].
- [70] BALI, G. S., BRAMBILLA, N. und VAIRO, A.: *A lattice determination of QCD field strength correlators*. Phys. Lett. B421 265-272, 1998. [[arXiv:hep-lat/9709079](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9709079)].
- [71] LUSCHER, M. und WEISZ, P.: *Coordinate space methods for the evaluation of Feynman diagrams in lattice field theories*. Nucl. Phys. B445 429-450, 1995. [[arXiv:hep-lat/9502017](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9502017)].
- [72] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. und FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Auflage, 2007.



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei allen bedanken, die mich während meines Studiums und besonders bei der Entstehung dieser Arbeit unterstützt haben. Mein Dank gilt

- Professor Dr. Owe Philipsen für die interessante und herausfordernde Aufgabenstellung. Seine stets aufgebrachte Zeit und die Vorschläge zu neuen Lösungsansätzen haben wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.
- Prof. Dr. Matthias Jamin für die hilfreiche Korrespondenz und Dr. Markus Eidemüller für die Bereitstellung seiner Diplomarbeit, sowie Dr. Stefano Capitani für die Antwort auf Fragen zur Gitterstörungstheorie.
- Lars Zeidlewicz für den Schnellkurs in numerischer Integration sowie Marcus Tassler für die Fehlersuche in Diagramm 3.3 i).
- Nina Gausmann und Daniel Bieletzki für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die spannenden Diskussionen im Büro.
- der gesamten Arbeitsgruppe Philipsen für die bereitwillige Beantwortung verschiedenster Fragen, sowie für die anregenden Gesprächsrunden.
- noch einmal Lars Zeidlewicz sowie Dr. Norman Lahme-Hüting für das aufmerksame Korrekturlesen.

Ganz besonders möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mich mit großer Unterstützung durch mein gesamtes Studium hindurch begleitet hat.



**Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, obige Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Janine Hüting  
Münster, 7. Februar 2009